PRELUCRAREA SEMNALELOR - CURS 04

CONTINUARE TRANFORMATA FOURIER, ALIERE

Cristian Rusu

CUPRINS

- recapitulare
- procesul de eșantionare
- aliere
- referințe bibliografice

RECAPITULARE

- **DFT** pentru un vector $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

  - $\mathbf{F}$ se numește matricea Fourier
  - $\mathbf{X}$ se numește transformata Fourier a lui $\mathbf{x}$
  - în anumite situații vedeți $\mathbf{X} = \mathscr{F}(\mathbf{x})$
  - complexitatea $O(n^2)$

- **FFT**

$$\mathbf{X} = \text{FFT}(\mathbf{x})$$

  - se numește transformarea Fourier rapidă
  - FFT e echivalent cu DFT, dar FFT e mai rapid
  - complexitatea $O(n \log_2 n)$

RECAPITULARE

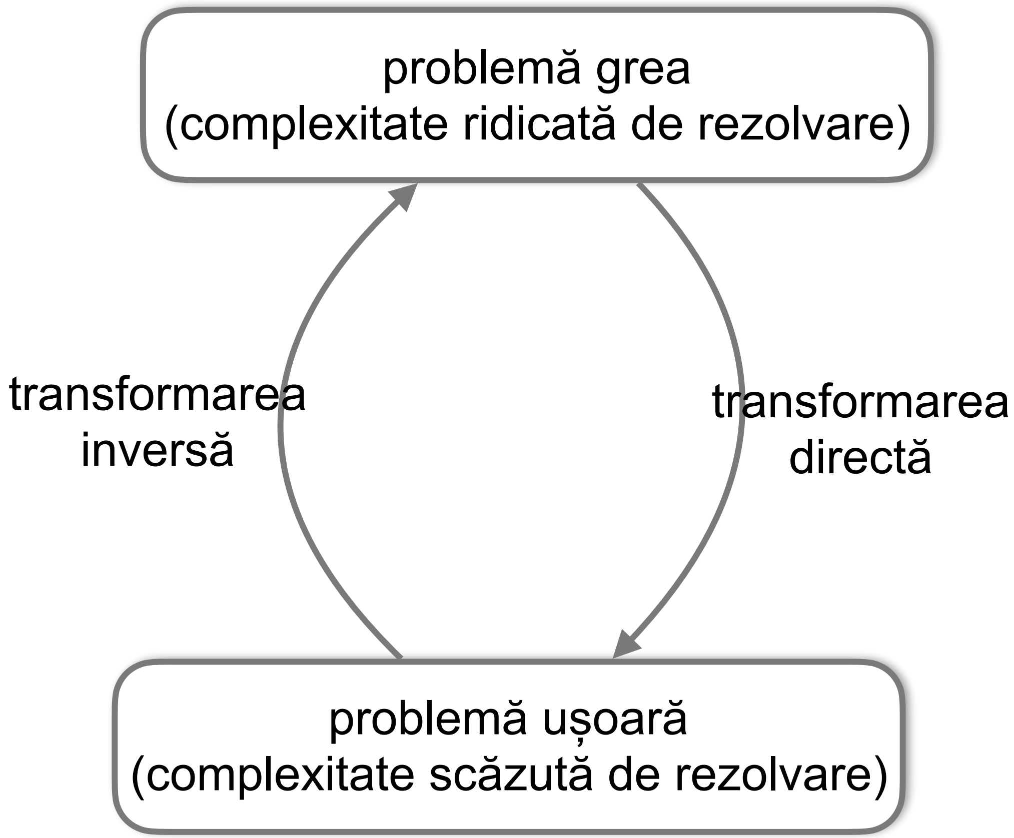
- matricea Fourier $\mathbf{F}$
  - este liniară, este pătratată, este complexă, este unitară
    - inversa este $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$ (transpus și complex conjugat)
  - $\mathbf{Fx}$ este FFT($\mathbf{x}$), $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{F}^H\mathbf{x}$ este IFFT($\mathbf{x}$)
  - ambele operații sunt $O(n \log_2 n)$
      - $\mathbf{Fx}$ ar fi trebuit să fie ???
      - $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}$ ar fi trebuit să fie ???

RECAPITULARE

- matricea Fourier $\mathbf{F}$
  - este liniară, este pătrată, este complexă, este unitară
    - inversa este $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$ (transpus și complex conjugat)
  - $\mathbf{Fx}$ este FFT($\mathbf{x}$), $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{F}^H\mathbf{x}$ este IFFT($\mathbf{x}$)
  - ambele operații sunt $O(n \log_2 n)$
    - $\mathbf{Fx}$ ar fi trebuit să fie $O(n^2)$
    - $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}$ ar fi trebuit să fie $O(n^3)$
- pentru noi, $\mathbf{x}$ este un vector real
  - $\mathscr{F}(\mathbf{x})$ este în general complex (asta nu ne convine mereu)
  - atunci $\mathscr{F}(\mathbf{x})$ are o simetrie
  - prima componentă Fourier este media
  - unele limbaje de programare au RFFT (FFT pentru $\mathbf{x}$ real)
  - cel mai mult ne interesează abs$(\mathscr{F}(\mathbf{x}))$

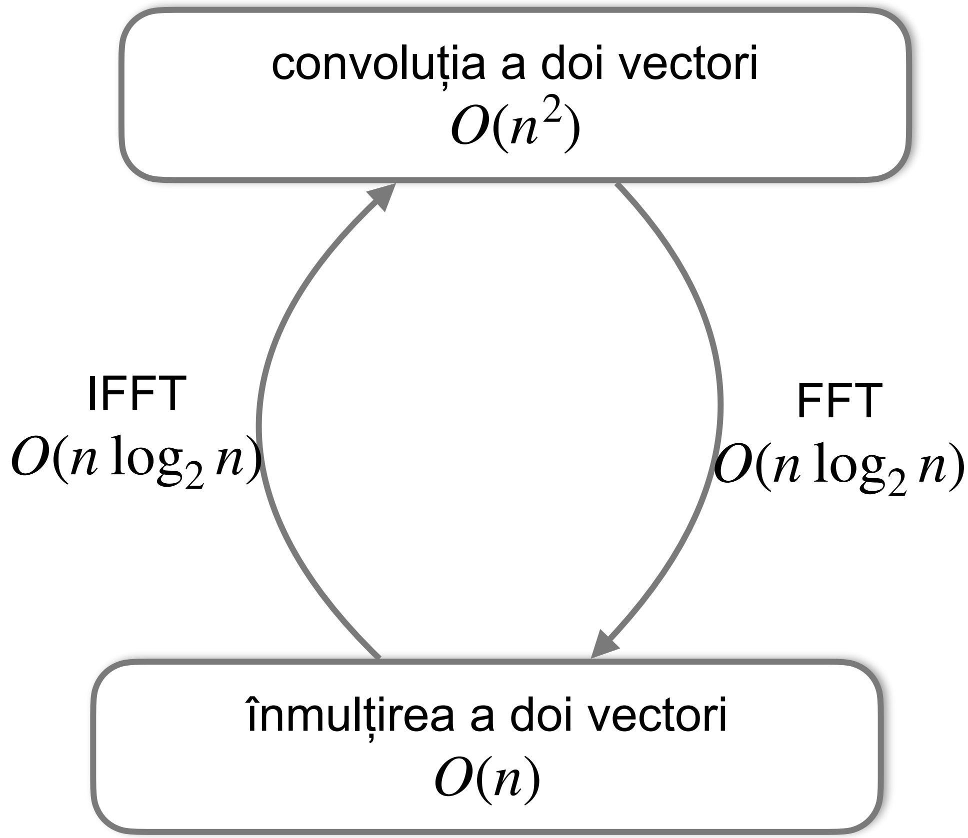
RECAPITULARE

ideea de transformare



RECAPITULARE

ideea de transformare: cazul Fourier



ideea: este mai ușor să rezolvi problema într-un alt domeniu

atenție: inclusiv operația de transformare trebuie să fie ușoară (aici domină)

RECAPITULARE

ideea de transformare: cazul Laplace (foarte folositor în inginerie)

rezolvarea de ecuații diferențiale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \to \infty} \int_{\gamma - jT}^{\gamma + jT} F(s) e^{st} ds$$

Transformata Laplace Inversă

Transformata Laplace Directă

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

rezolvarea de ecuații, raționale

legătura în Fourier și Laplace?

https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform

RECAPITULARE

ideea de transformare: cazul Laplace (foarte folositor în inginerie)

rezolvarea de ecuații diferențiale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma - jT}^{\gamma + jT} F(s) e^{st} ds$$

Transformata Laplace Inversă

Transformata Laplace Directă

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

rezolvarea de ecuații, raționale

Fourier este un caz special de Laplace când $s = i\omega$

https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform

PROCESUL DE EȘANTIONARE

funcția/fenomenul din realitate
$f(t)$, cu o frecvență naturală f_0 Hz

la t = 0, *f(t)*?
la t = 0.005, *f(t)*?
la t = 0.01, *f(t)*?

f(0)
f(0.005)
f(0.01)

algoritmul/aparatul care eșantionează
cu viteza f_s Hz

f[0] la momentul t = 0
f[1] la momentul t = 0.005
f[2] la momentul t = 0.01

întrebare fundamentală:
ce relație trebuie să fie între f_0 și f_s că să nu pierdem nimic din $f(t)$?

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE GENERALE

- A. V. Oppenheim și R. W. Schafer, **Discrete-time signal processing**, Pearson, 2014

- R. G. Lyons, **Understanding digital signal processing**, Prentice Hall, 2004

- S. Mallat, **A wavelet tour of signal processing: the sparse way**, Academic Press, 2008

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) \tag{2}$$

unde

- f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \ldots$
- t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- nt_s – orizontul de timp (s)
- $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- $2\pi f_0 nt$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)

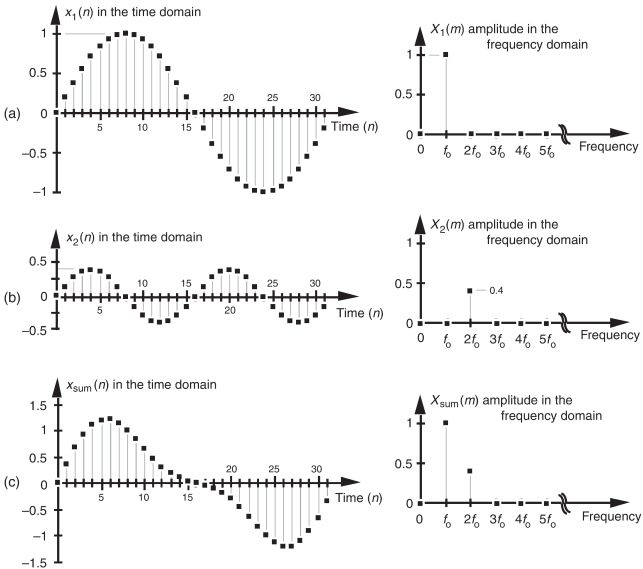
Frecvență

În analiza semnalelor suntem interesați adesea de frecvență.

Motivație:

- sinusoida are o singură componentă f_0 în frecvență, numită și **componentă spectrală**
- suma a două sinusoide de frecvență f_1, respectiv, f_2 are două componente spectrale f_1, f_2 în domeniul frecvenței
- suma a n sinusoide de frecvență $f_1, \ldots, f_n$ va avea n componente spectrale în domeniul frecvenței
- invers, putem analiza un semnal uitându-ne în frecvență și analizând din ce sinusoide este compus și la ce frecvențe acționează aceste componente

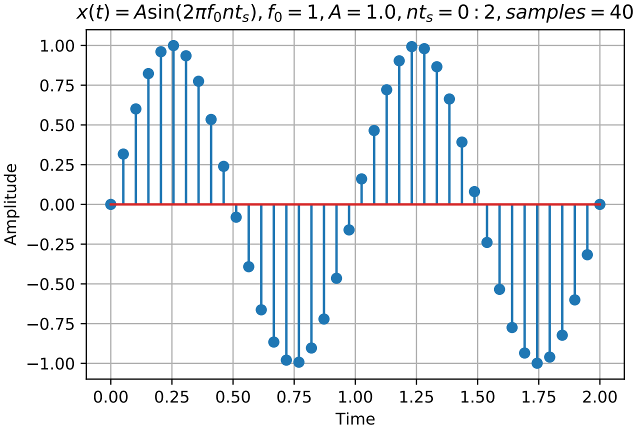
Frecvență



Source: (Lyons 2004)

Recuperarea frecvenței

Cum determin frecvența semnalului real f_0 în funcție de măsurători?



$$T = \frac{\text{eșantioane}}{\text{perioadă}} \times \underbrace{\frac{\text{timp}}{\text{eșantion}}}_{t_s} = 20 \times 0.05 = 1s \implies f_0 = 1Hz \quad (3)$$

Frecvența de eșantionare

Remarcă

Frecvența de eșantionare este inversul perioadei de eșantionare t_s

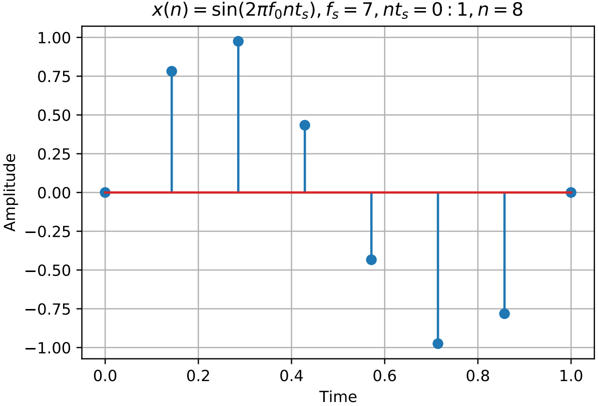
$$f_s = \frac{1}{t_s}, \tag{4}$$

iar ea afectează direct determinarea frecvenței absolute f_0*, frecvența semnalului real (original)*

Ce se întâmplă cu calculul frecvenței absolute f_0 dacă modific frecvența de eșationare f_s în (3)?

Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

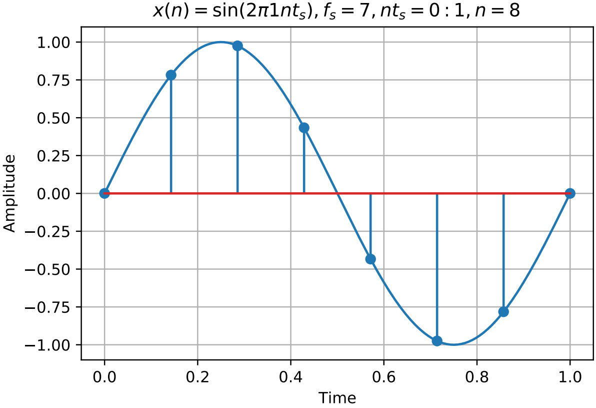
$x(0) = 0.00$
$x(1) = 0.78$
$x(2) = 0.97$
$x(3) = 0.43$
$x(4) = -0.43$
$x(5) = -0.97$
$x(6) = -0.78$
$x(7) = -0.00$



Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

Ghici, ciupercă, ce-i?

$x(0) = 0.00$
$x(1) = 0.78$
$x(2) = 0.97$
$x(3) = 0.43$
$x(4) = -0.43$
$x(5) = -0.97$
$x(6) = -0.78$
$x(7) = -0.00$



Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

Poate cineva cu mai multă imaginație ghicește:

$x(0) = 0.00$

$x(1) = 0.78$

$x(2) = 0.97$

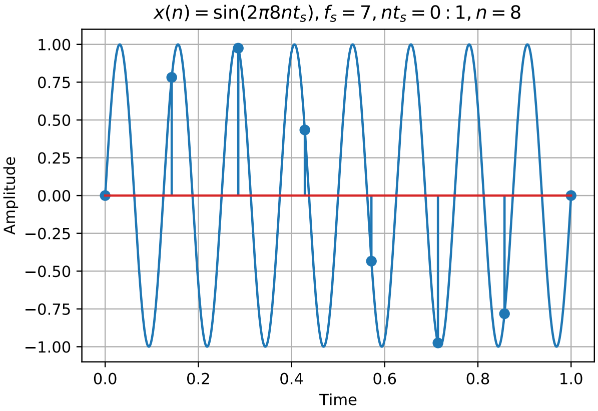
$x(3) = 0.43$

$x(4) = -0.43$

$x(5) = -0.97$

$x(6) = -0.78$

$x(7) = -0.00$

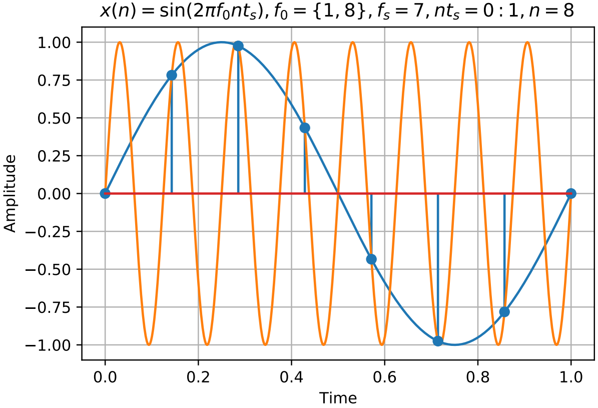


Este adevărat?

Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

Ambele soluții sunt adevărate: fenomenul de aliere (aliasing).

$x(0) = 0.00$
$x(1) = 0.78$
$x(2) = 0.97$
$x(3) = 0.43$
$x(4) = -0.43$
$x(5) = -0.97$
$x(6) = -0.78$
$x(7) = -0.00$



Există o infinitate de sinusoide care trec prin cele 8 puncte!

Aliasing

Fenomenul de aliere (aliasing) apare când:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s) \tag{5}$$

Teoremă

Fie frecvența de eșantionare f_s (eșantioane / secundă) și k un număr întreg nenul. Atunci nu putem distinge eșantioanele unei sinusoide de frecvență $f_0 Hz$ de eșantioanele unei siunsoide de $f_0 + kf_s Hz$.

Cum putem fi siguri că ce am măsurat reprezintă realitatea?

Demonstrație aliasing

Fie semnalul $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ cu frecvența f_0 pe care îl eșantionăm cu o rată de f_s eșantioane pe secundă la perioade de timp constante $t_s = \frac{1}{f_s}$ $(0t_s, 1t_s, 2t_s, 3t_s, \dots)$:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \sin(2\pi 0 t_s) \\
x(1) &= \sin(2\pi 1 t_s) \\
x(2) &= \sin(2\pi 2 t_s) \\
x(3) &= \sin(2\pi 3 t_s) \\
&\vdots \\
x(n) &= \sin(2\pi n t_s)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Astfel încât eșantionul $x(n)$ are valoarea sinusoide originale la momentul nt_s.

Demonstrație aliasing

Știm că $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi m)$ deci (6) devine:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi f_0 n t_s + 2\pi m) = \tag{7}$$

$$= \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{m}{n t_s}\right) n t_s\right) \tag{8}$$

Fie $m = kn$ a.î. putem înlocui fracția cu k

$$x(n) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{k}{t_s}\right) n t_s\right), \tag{9}$$

apoi folosind $f_s = \frac{1}{t_s}$ relația devine

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + k f_s\right) n t_s\right). \tag{10}$$

Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

Aliasing: $f_0 = 1, f_s = 7, k = 1 \overset{(10)}{\Longrightarrow} f = f_0 + kf_s = 8$

$x(0) = 0.00$

$x(1) = 0.78$

$x(2) = 0.97$

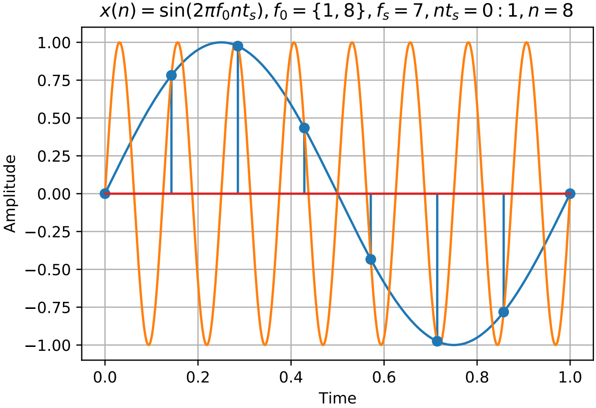
$x(3) = 0.43$

$x(4) = -0.43$

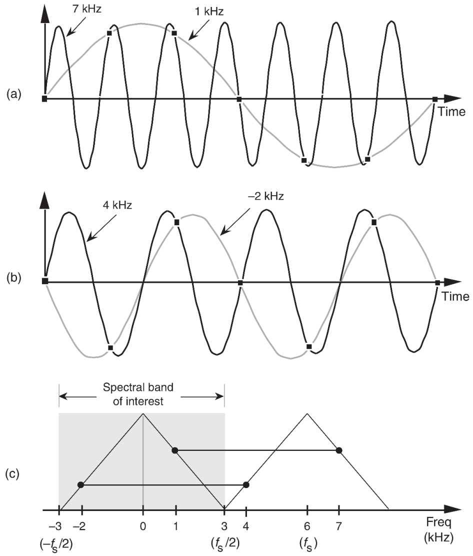
$x(5) = -0.97$

$x(6) = -0.78$

$x(7) = -0.00$

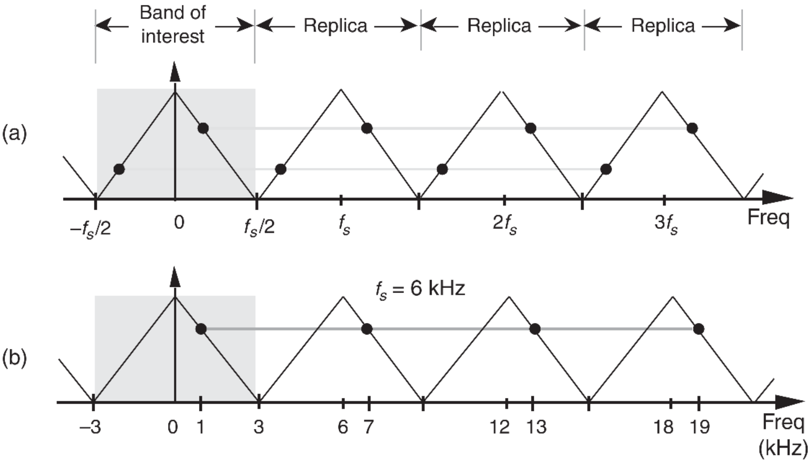


Ambiguitate în domeniul frecvenței



Source: (Lyons 2004)

Duplicare (replici) în domeniul frecvenței



Source: (Lyons 2004)

Semnalul $f_0 = 7kHz$ eșantionat cu $f_s = 6kHz$ produce o secvență a cărui spectru reprezintă simultan semnalele (tonurile): $1kHz, 7kHz, 13kHz, 19kHz, \ldots$.

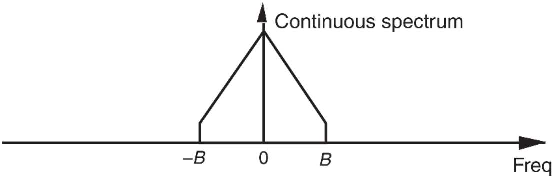
Semnale trece-jos (lowpass)

Definiție

Semnalele limitate în bandă sunt semnalele a căror amplitudine spectrală este nulă în afara intervalului $[-B Hz, +B Hz]$. *Altfel spus, semnalul are o frecvență maximă.*

Definiție

Un semnal trece-jos este un semal limitat în bandă și centrat în jurul frecvenței zero.

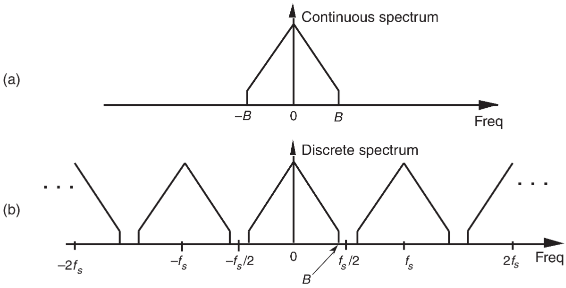


Source: (Lyons 2004)

Semnale trece-jos: de la analog la digital

Semnalul continuu este discretizat apărând duplicatele în spectrul fercvenței.

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + kf_s\right) n t_s\right).$$



Source: (Lyons 2004)

Se observă că $f_s \geq 2B$ a.î. duplicatele sunt separate la $\pm\frac{f_s}{2}$.

Semnale trece-jos (lowpass): frecvența Nyquist

Definiție

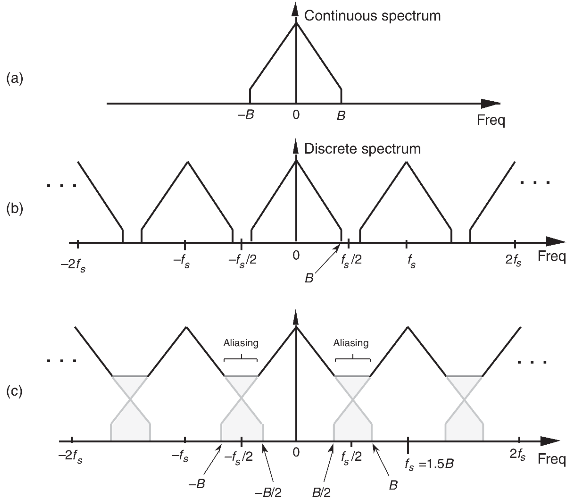
Frecvența de eșantionare $f_s \geq 2B$ *este criteriul Nyquist de eșantionare, rezultat din teorema Nyquist-Shannon, ce asigură separarea duplicatelor în domeniul frecvenței.*

Definiție

Frecvențele $\pm\frac{f_s}{2}$ *se numesc frecvențe de pliere (folding frequencies) sau frecvențe Nyquist.*

Ce se întâmplă când eșantionăm sub frecvența Nyquist?

Ce se întâmplă când eșantionăm sub frecvența Nyquist?



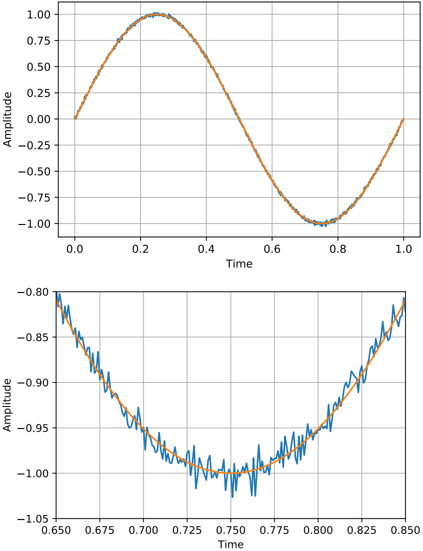
Source: (Lyons 2004)

Semnale trece-jos (lowpass): observații

- informația în interavul $[-B, -\frac{B}{2}] \cup [\frac{B}{2}, B]$ este coruptă
- valorile amplitudinilor în cazul suprapunerii sunt nedefinite
- informația spectrală a semnalului original continuu este conținută complet în banda $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$
- ultima observație este foarte importantă în practică

Zgomot

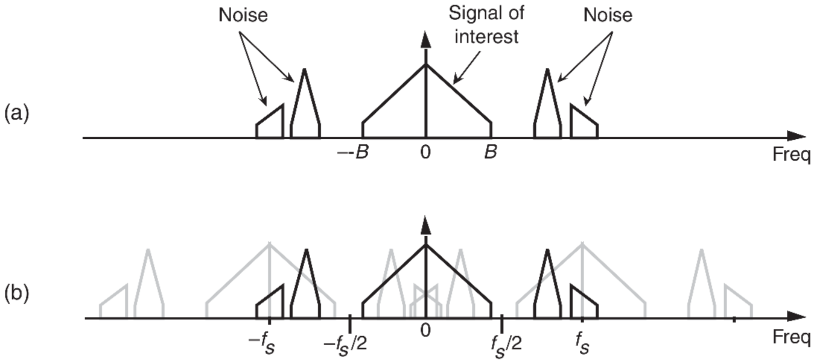
Ce se întâmplă dacă semnalul continuu este însoțit de zgomot?



Semnale trece-jos (lowpass): zgomot

Pentru un semnal trece-jos eșantionat corect:

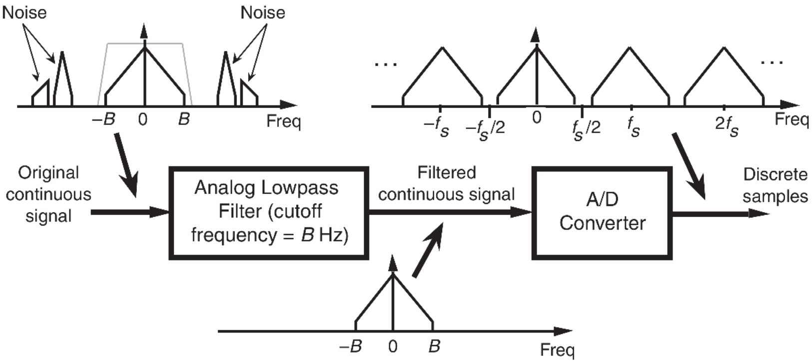
- nu avem suprapuneri are duplicatelor în banda B
- dar duplicate ale zgomotului sfârșesc și ele în banda de interes!



Source: (Lyons 2004)

Semnale trece-jos (lowpass): eliminarea zgomotului

Profităm de faptul că avem de a face cu semnal trece-jos și eliminăm cu un filtru trece-jos orice este în afara benzii BHz după care discretizăm.



Source: (Lyons 2004)