Chapitre 1 : Exercices supplémentaires

la quantité d'information :

$q = \log_2 \frac{1}{p}$ et $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$

$\log x.y = \log x + \log y$

Si on a 2 éléments indépendants ⇒ multiplicat°
$p(A \cap B) = p(A).p(B)$

Ex 1 :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Proba totale : 1.

(a) $\forall$ les chiffres ont la m̄ probabilité d'être transmis
↳ $p_{chiffre} = \frac{1}{10}$.

la qtité d'info : $q = \log_2 \frac{1}{p} = \log_2 10 = 3{,}32$ bits.

façon "graphique" de voir le problème.

⇒ 3 bits $= 2^3 = 8$ valeurs : $0 \to 7$
⇒ 4 bits $= 2^4 = 16$ valeurs : $0 \to 15$
ici on est à 10 valeurs : $0 \to 9$, donc on est à 1 peu + de 3 bits.

(b) $S_1 \; S_2 \; S_3 \; S_4$ ⇒ 4 chiffres

ici $S_1 \neq 0$ donc la proba en $S_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } S_1 = 0 \\ \frac{1}{9} & \text{si } S_1 = 1, \dots, 9 \end{cases}$

$p(S_2) = p(S_3) = p(S_4) = \frac{1}{10}.$

(1) donc $q_1 = \log_2 \frac{1}{p(S_1)} = \log_2 9$

(2) et $q_2 = q_3 = q_4 = \log_2 \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = \log_2 10.$

Ici, les signaux sont indépendants, les chiffres du n° ne dépendent pas les 1 des autres ⇒ somme

$Q_{tot} = \log_2 9 + 3 \log_2 10 = 13,13$ bits.

(c) le numéro est transmis en 1 seul signal càd : en 1x on a les 4 chiffres.

num : $\underbrace{\cdot}_{9}\ \underbrace{\cdot}_{10}\ \underbrace{\cdot}_{10}\ \underbrace{\cdot}_{10}$ ⇒ 9000 valeurs.

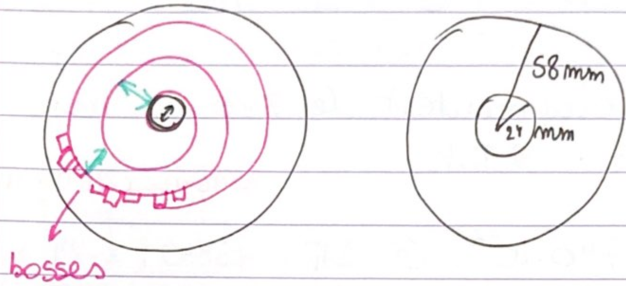
chacune a 1 probabilité uniforme : $p(N) = \frac{1}{9000}$
$\forall$ num $\in [1000, 9999]$

$q = \log_2 \frac{1}{p} = \log_2 9000 = 13,13$ bits.

pq (c) = (b) ?

cor : si on a une proba uniforme ⇒ évènements indépdts.

Ex 2 TP1



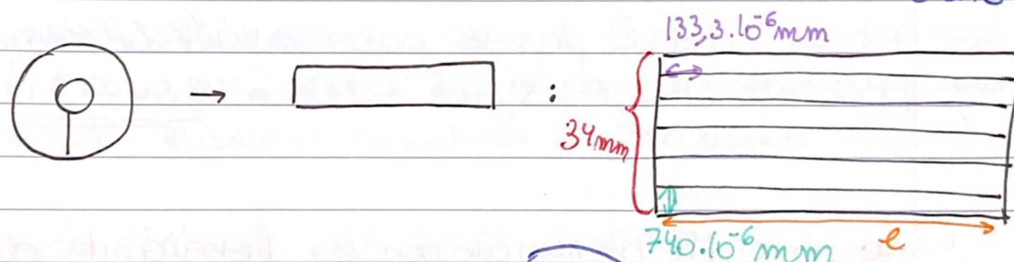
largeur des bosses : 133,3 mm (133,3.10^{-6} mm).

⇔ : la séparat° latérale entre les spires = 740.10^{-6} mm

Surface du Cd = $\Delta D \cdot Rm$

≠ce de diamètre   rayon moyen

$1\ TB \approx \frac{1 \cdot 10^{12}}{2^{40}} = 0,9\ TB$ avec 1 Byte = 1 octet = 8 bits.



la surface du CD = $2 \cdot 34 \cdot \underbrace{\frac{58+24}{2}}_{=41} = 2788\ mm^2$

l = 82 mm (2·41)

(1) 740.10^{-6} mm dans 34 mm ⇒ 45945,94 ≈ 45946 espaces
⇒ ± 45945 lignes.

(2) Si on considère que toutes les lignes = m̂ longueur
l = 82 mm avec des bosses de 133,3.10^{-6} mm
de longueur : 615153,788 bosses par ligne.

nombre total des {bosses / trous : (1).(2) = 2,8.10^{10}.

⇒ on divise par 16 pour le nbr d'octets : 1,766 GB.

En réalité, les lignes n'ont pas toutes la mê longueur car on a 1 disque.

⇒ les rayons des lignes augmentent de 740.10^{-6} mm

circonférence : $2\pi.r$

somme arithmétique

$$2\pi \sum_{K=0}^{45945} 24 + K740.10^{-6} \Leftrightarrow \cancel{2}\pi . \frac{45945(2.24 + 45944.740.10^{-6})}{\cancel{2}}$$

$= 1,1836.10^{7}$ mm de ligne

et on a $133,3.10^{-6}$ = longueur de bosse

⇔ $8,879.10^{10}$ bosses

et on divise par 16 pour avoir le nombre d'octets : $5,549.10^{9}$ octets = 5,549 GB.

la capacité annoncée par les fabricants de DVD = 4,7 GB.

Cela parait étrange que des fabricants annoncent 4,7 GB et que l'on ait plus.

$\frac{5,549.10^{9}}{230} = 5,167$ GB

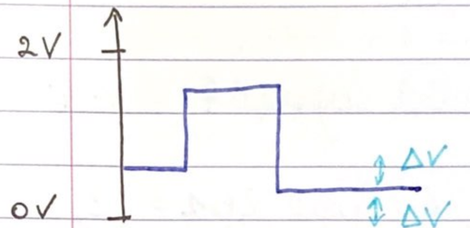
↳ en comptant comme 1 fabricant

un vendeur de CD indique qu'il peut stocker une qtité de 4,7 GB d'information

En réalité, une partie des bits est utilisée pour de l'encodage qui consiste à répéter certains bits plusieurs fois pour pouvoir continuer à lire la musique même si le cd est griffé.

Exercice 3 TP1

1 Volt = unité de tension électrique



(*) valeurs possibles dans 2V ?

on a 8 canaux qui peuvent ê affecté par des parasites
=> si on sait que le canal est affecté par un bruit d'1 amplitude de 0,5V, alors le récepteur doit s'attendre à ce qu'1 0V envoyé par l'emetteur arrive cô 1 valeur sur l'I = [0-0,5 ; 0+0,5]V
=> [0, 0,5V] (dans la plupart des cas on ne considère pas les tensions negatives => on s'arrête à 0V).

règle générale : il faut distancer 2 valeurs successives sur 1 canal d'au moins 2 x l'amplitude max du bruit affectant le signal sur le canal.

(*) => $\frac{2V}{2.\Delta V}$ → = erreur affectant le canal.

on regarde donc les différents canaux et le nb de val possible

1) $\frac{2-0}{\cancel{2}.3{,}01.10^{-3}} = 332{,}22$

2) $\frac{2-0}{\cancel{2}.5{,}56.10^{-3}} = 179{,}86$

3) $\frac{2-0}{\cancel{2}.4{,}81.10^{-3}} = 207{,}9$

4) $\frac{2-0}{\cancel{2}.4{,}75.10^{-3}} = 210{,}53$

5) $\frac{2-0}{\cancel{2}.5{,}16.10^{-3}} = 193{,}798$

6) $\frac{2-0}{\cancel{2}.3{,}84.10^{-3}} = 260{,}42$

7) $\frac{2-0}{\cancel{2}.3{,}91.10^{-3}} = 255{,}75$

8) $\frac{2-0}{\cancel{2}.3{,}82.10^{-3}} = 261{,}78.$

On suppose la distrib. uniforme en sachant que
$q = \log_2 \frac{1}{p}$ avec $p = \frac{1}{\text{nb de valeurs}}$.

la qtité d'info par canal :

1) $\log_2 332 = 8,375$
2) $\log_2 180 = 7,49$
3) $\log_2 208 = 7,7$
4) $\log_2 211 = 7,72$
5) $\log_2 194 = 7,6$
6) $\log_2 261 = 8,03$
7) $\log_2 256 = 8$.
8) $\log_2 262 = 8,03$

pour calculer la quantité d'information totale de la ligne de communication comportant les 8 canaux, on peut considérer qu'on calcule la quantité d'information d'1 nouveau signal fait des 8 canaux séparés (1)
(2) (on additionne les qtités d'info des canaux individuels)

(1) $Q_{tot} = \log_2 (332 \cdot 180 \cdot 208 \cdot 211 \cdot \ldots \cdot 262)$

$\approx 62,95$ bits $= 7,87$ bytes.

(2) $Q_{tot} = 8,375 + \ldots + 8,03 = 62,945$ bits.

ici la ligne de communication travaille à 1 fréquence de 10^7 signaux par canal / s, le débit de transmission est de :

$62,95 \cdot 10^7$ bits / seconde $= 7,87 \cdot 10^7$ bytes / s

$\Rightarrow \frac{62,95 \cdot 10^7}{2^{10}} = 61,4 \cdot 10^4$ Kbit $\overset{: 2^{10}}{\Rightarrow}$ 600 Mbits / sec.

résultat : bonne connex° internet $\Rightarrow$ réaliste.

L'intercommunale au service de votre eau
Compagnie Intercommunale Liégeoise des Eaux s.c.r.l.
rue du Canal de l'Ourthe, 8 - 4031 Angleur
tél. : 04.367.84.11 - fax : 04.367.29.33
e-mail : info@cile.be - www.cile.be

Exercice 4

En français, sur 26 lettres (alphabet), la probabilité qu'1 lettre prise au hasard dans 1 texte soit :

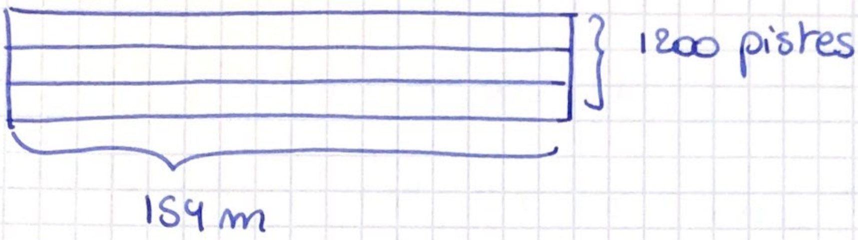
1. "O" ⇒ 5,02% ⇒ $q_1 = \log_2 \frac{100}{5{,}02} = 4{,}32$
2. "C" ⇒ 3,18% ⇒ $q_2 = \log_2 \frac{100}{3{,}18} = 4{,}975$
3. "T" ⇒ 5,92% ⇒ $q_3 = \log_2 \frac{100}{5{,}92} = 4{,}08 \cdot 2$.
4. "E" ⇒ 12,20% ⇒ $q_4 = \log_2 \frac{100}{12{,}20} = 3{,}035$.

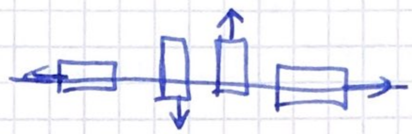
$+$ $+$ $+$

But : calculer la qtité d'information dans "OCTET".

$q_{tot} = q_1 + q_2 + q_3 \times 2 + q_4 \Rightarrow \underline{\underline{20{,}49 \text{ bits}}}$

Exercices



1 domaine : 4 orientat° 

probabilité pour 1 orientat° : $\frac{1}{4}$

longueur totale des pistes : $154 \cdot 1200 = 184800$ m

1 domaine a 1 longueur de $6,8 \cdot 10^{-6}$ m

⇒ on a $\frac{184800}{6,8 \cdot 10^{-6}} = 2,718 \cdot 10^{10}$ domaines.

chaque domaine a une qtité d'informat° : $q = \log_2 \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)}$

$q = 2$ bits.

⇔ Qtité totale d'informat° $= 2,718 \cdot 10^{10} \cdot 2 = 5,436 \cdot 10^{10}$ bits

~~54,36 G~~

⇒ $6,795 \cdot 10^{9}$ bytes

⇒ 6,795 GB.

Exercice 6

En Belgique : 1 n° de tel :

- 1 préfixe : 04 C_1 C_2 avec C_1 = chiffre de 5 à 9, C_2 = chiffre quelconque
- 1 suffixe de 6 chiffres dont le 1er est non nul.

(a) ∀ les numéros sont équiprobable ; qtité d'info dans 1 n°

$$0\,4\ \underbrace{C_1}_{5}\ \underbrace{C_2}_{10}\ \underbrace{\overset{a}{\cdot}}_{9}\ \underbrace{\overset{b}{\cdot}\ \overset{c}{\cdot}\ \overset{d}{\cdot}\ \overset{e}{\cdot}\ \overset{f}{\cdot}}_{10}$$

$p(C_1) = \frac{1}{5}$ $p(C_2) = \frac{1}{10}$ $p(a) = \frac{1}{9}$ $p(b) = p(c) = \cdots p(f) = \frac{1}{10}$

donc : $q(C_1) = \log_2 5 = 2{,}32$ bits

$q(C_2) = \log_2 10 = 3{,}32$ bits $= q(b) \cdots q(f)$

$q(a) = \log_2 9 = 3{,}17$ bits.

$q_{tot} = q(C_1) + 6 \cdot q(C_2) + q(a) = 25{,}42$ bits.

(b) un opérateur téléphonique a : 2 millions de n°

à 1 num → 1 code postal (2825 codes ≠ts et équiprob)

donc $p(\text{code}) = \frac{1}{2825}$ $q(\text{code}) = \log_2 2825 = 11{,}46$ bits

le code postal et le num sont indépendants :

la qtité d'info d'1 num avec 1 code ⇒ $q = 25{,}42 + 11{,}46$

et cô il y en a 2.10^6 : $q_{tot} = 2.10^6 . (25{,}42 + 11{,}46) = 7{,}376 . 10^7$ bits

Exercice 7

Quelle qtité d'info, un disque dur, vendu cô possédant une capacité de 1 TB permet-il de mémoriser ?

1 TB : 1 T ⇒ 2^{40} (en réalité)
1 T ⇒ 10^{12} (fabricant)

donc $\frac{10^{12}}{2^{40}} = 0,9095$ TB.

Explicat°s

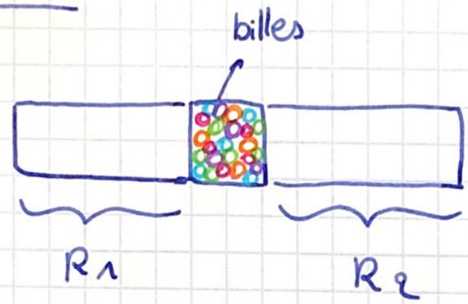
les préfixes scientifiques du SI sont définis en puissances de 10 :
$K = 10^3$, $M = 10^6$, $m = 10^{-3}$, $\mu = 10^{-6}$ ...

En informatique, on interprète ces préfixes comme des puissances de 2 pour parler de qtité d'informat°.

une qtité informatique de 1TB = 2^{40} = $1,0995 \cdot 10^{12}$ Bytes

les vendeurs utilisent cependant la base dix pour avoir 1 avantage, alors qu'ils disent que le disque vendu possède 1TB, ce disque ne pourra, en réalité, contenir que 0,91 TB.

Exercice 8



la balance : affiche le nb de billes que R_1 contient.

Chaque bille à 1 probabilité égale de se retrouver dans R_1 ou dans R_2, indépendamment des autres billes.

proba qu'1 bille tombe dans R_1 : $\frac{1}{2}$. $q = \log_2 2 = 1$ bits
on a 1000 billes ⇒ 1000 bits.

si la balance affiche 0, quelle qtité d'informat° la balance fournit-elle sur l'état de la machine ?
⇒ toutes les billes sont dans R_2.
↳ proba qu'1 bille tombe dans R_2 = $\frac{1}{2}$
qtité d'info apportée par la bille ⇒ $\log_2 2 = 1$ bits.
↳ 2 billes tombent dans R_2 ⇒ $2 \log_2 2 = 2$ bits.
et proba = 1/4. $\overset{R_1}{o}\ \overset{R_2}{o}$, $\overset{R_1}{o}\ \overset{R_1}{o}$, $\overset{R_2}{o}\ \overset{R_1}{o}$, $\overset{R_2}{o}\ \overset{R_2}{o}$.
↳ proba que 1000 billes tombent dans R_2 :

$\frac{1}{2^{1000}}$ et qtité d'info $= \log_2 2^{1000} = 1000$ bits.
$= 125$ Bytes.

Exercice 9 :

thermomètre : [-20°, 40°] (1)

↳ -20° ; -19,5° ; … ; 39,5° ; 40°
distribution uniforme

indépendant

pluviomètre : [0, 100 mm] (2)

↳ 0 ; 0,1 ; 0,2 ; … ; 99,8 ; 99,9 ; 100.
distribution uniforme.

(1) suite arithmétique dont $t_1 = -20$, $t_n = 40$ et la raison = 0,5.

$U_n = U_1 + r(n-1) \Leftrightarrow 40 = -20 + 0,5(n-1)$

$\Leftrightarrow \frac{60}{0,5} + 1 = n = $ 121 valeurs.

la proba de tomber sur 1 valeur :

$p(\text{valT}) = \frac{1}{121}$

(2) suite arithmétique dont $t_1 = 0$, $t_n = 100$ et r (la raison) = 0,1.

$U_n = U_1 + r(n-1) \Rightarrow 100 = 0,1(n-1)$

$\Leftrightarrow \frac{100}{0,1} + 1 = n = $ 1001 valeurs

la proba de tomber sur 1 valeur :

$p(\text{valP}) = \frac{1}{1001}$

(1) qtité d'info $= \log_2 121$

(2) qtité d'info $= \log_2 1001$

Qtot $= \log_2 121 + \log_2 1001$
$= 16,886$ bits.