Deberes de semana.

Junio 2024

P1) Els sistemes planetaris tendeixen a formar-se en ressonància. Això vol dir que, quan un planeta completa *n* òrbites, el planeta veí en completa *m*, en què *n* i *m* són nombres enters. El novembre de 2023 la revista *Nature* publicava el descobriment de sis planetes que orbitaven en ressonància al voltant de l'estrella HD110067.

***a*)** Suposem que aquesta estrella té la massa del Sol i que els planetes tenen òrbites circulars. El sisè planeta, el més exterior, té un període de 54,7 dies. Calculeu la distància entre el planeta i l'estrella. Representeu l'estrella i el planeta, dibuixeu el vector d'acceleració normal i calculeu-ne el mòdul.

[1,25 punts]

***b*)** El cinquè planeta completa 4 òrbites en el mateix temps que el sisè planeta en completa 3 (relació 4:3). Calculeu el radi de l'òrbita del cinquè planeta i la seva energia mecànica suposant que la seva massa és 2,5 vegades la terrestre.

[1,25 punts]

DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}$.
Massa de la Terra, $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.
Massa del Sol, $M_S = 1{,}98 \times 10^{30}$ kg.

(a) Buscamos una expresión de: $v_{orb} = f(r_{orb}, M_{merc})$

1) De la ley de grav. univ.: $F_g = G\dfrac{M_{merc} M_{orb}}{r_{orb}^2}$

2) 2ª ley de Newton: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{cn} \Rightarrow G\dfrac{Mm}{r^2} = m a_{orb}$.

3) Suponemos mov. orbital $\simeq$ MCU (elíptico): $a_N = \dfrac{v^2}{R_{curv.}} \Rightarrow G\dfrac{Mm}{r^2} = m\left(\dfrac{v_{orb}^2}{R_{curv}}\right)$

Solo queda aislar v_{orb} de la expresión:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \ldots\ m\cdot s^{-1} \Rightarrow v = \omega/r = \frac{2\pi}{Tr} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{vr} = \ldots\ s$$

(b) Queremos: $E_m = f(G, r_{orb}, M_{merc}, m_{orb})$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{Mm}{r} \underset{*}{=} \frac{GM}{r}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

* para mov. orbital cerrado: $v^2 = \frac{GM}{r}$ (apartado a)

• Queda: $E_m = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$

Para el escape imponemos $E_m \geq 0$: (justificar con CONS. DE ENERG MEC.)

• Queda: $\Delta E + E_{c\,ini} + E_{p\,ini} \geq 0 \Rightarrow \Delta E + E_{m\,ini} = \Delta E - \frac{1}{2} G\frac{Mm}{r} \geq 0$.

↳ Sacamos: $\Delta E \geq \frac{1}{2} G\frac{Mm}{r} \Leftrightarrow m_{orbo} \leq \frac{2\Delta E\, r}{GM} = \ldots$ kg.

Septiembre 2024

P1) Els sistemes planetaris tendeixen a formar-se en ressonància. Això vol dir que, quan un planeta completa *n* òrbites, el planeta veí en completa *m*, en què *n* i *m* són nombres enters. El novembre de 2023 la revista *Nature* publicava el descobriment de sis planetes que orbitaven en ressonància al voltant de l'estrella HD110067.

a) Suposem que aquesta estrella té la massa del Sol i que els planetes tenen òrbites circulars. El sisè planeta, el més exterior, té un període de 54,7 dies. Calculeu la distància entre el planeta i l'estrella. Representeu l'estrella i el planeta, dibuixeu el vector d'acceleració normal i calculeu-ne el mòdul.
[1,25 punts]

b) El cinquè planeta completa 4 òrbites en el mateix temps que el sisè planeta en completa 3 (relació 4:3). Calculeu el radi de l'òrbita del cinquè planeta i la seva energia mecànica suposant que la seva massa és 2,5 vegades la terrestre.
[1,25 punts]

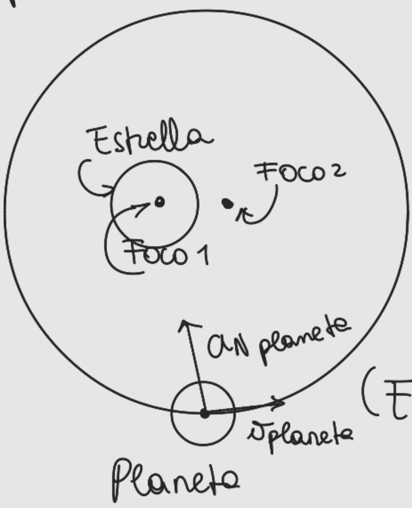
DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
Massa de la Terra, $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.
Massa del Sol, $M_S = 1{,}98 \times 10^{30}$ kg.

(a) Sea el periodo T, tiempo para completar una revolución del planeta. Como conocemos T_{Tierra} y buscamos $T_{planeta}$ usamos la 3ª ley Kepler (general):

$$T^2 \propto r^3 \Longrightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad *$$

$$\Longleftrightarrow T^2 = r^3 \frac{4\pi^2}{GM}$$ tal que: (como M_{sol} se supone igual M_{est})

$$\frac{T^2_{planeta}}{r^3_{planeta}} = \frac{T^2_{tierra}}{r^3_{tierra}} \Longleftrightarrow r_{p6} = \sqrt[3]{\frac{T_p^2\, r_T^3}{T_T^3}} = \sqrt{\frac{T_p^2 GM}{4\pi^2}} = \dots m$$



(Elipse casi circular)

$$|a_N| = \frac{v_p^2}{r_p} = \frac{G^2M^2}{r^3} = \dots m s^{-2}$$

$$* \left[v^2 = \frac{GM}{r}\right]$$

(b) Sacamos del enunciado la relación:

$$\frac{t}{4}\omega_{p5} = \frac{t}{3}\omega_{p6} \Longleftrightarrow \frac{\omega_{p5}}{\omega_{p6}} = \frac{4}{3} \text{ y } m_{p5} = 2{,}5\, m_T.$$

- Buscamos: $r_{orb\,p5}$ y $E_{m\,p5}$.
- Tenemos $\frac{\omega_{p5}}{\omega_{p6}} = \frac{2\pi/T_{p5}}{2\pi/T_{p6}} = \frac{T_{p6}}{T_{p5}} = \frac{4}{3}$;

$$T_{p5} = \frac{3}{4}T_{p6}$$

Además: $$\frac{T_{p5}^2}{r^3_{p5}} = \frac{T^2_T}{r^3_T} \Longleftrightarrow r_{p5} = \sqrt[3]{\frac{\frac{9}{16}T_{p6}^2\, r_T^3}{T_T^3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}\, r_{p6}.$$

- Para: $E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{GM_{estrella}\, m_{planetas}}{r_{planetas}} = -\frac{1}{2}\frac{GM_{est.}\, 2{,}5\, m_T}{\sqrt[3]{\frac{9}{16}}\, r_{p6}} = \dots J$

órbita cerrada (justifica la fórmula) :)

Preguntas Clase 21/04

Junio 2014:

P1) El *Meteosat* és un satèl·lit meteorològic llançat per l'Agència Espacial Europea (ESA) que proporciona informació meteorològica d'Àfrica i Europa. Com que l'objectiu del *Meteosat* és oferir imatges d'una mateixa zona del planeta, el satèl·lit segueix una òrbita geostacionària: gira en el pla equatorial a la mateixa velocitat angular que la Terra.

a) A quina distància de la superfície terrestre es troba el *Meteosat*?

b) Quina és l'energia cinètica del *Meteosat*? Quina energia mínima caldria proporcionar-li perquè s'allunyés indefinidament de la Terra?

DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
$R_{Terra} = 6\,370\ \mathrm{km}$
$M_{Terra} = 5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$
$m_{Meteosat} = 2{,}00 \times 10^{3}\ \mathrm{kg}$

(a) Al describir una trayectoria casi circular podemos describir la aceleración debida a la fuerza gravitatoria ejercida por la tierra → al satélite como:

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \underset{\substack{2^a \text{ ley} \\ \text{Newton}}}{=} m\vec{a} \underset{MCU}{=} m(\omega^2 r)\hat{r}$$

⚠ $r = R_{Tierra} + d_{sup.T. \to SAT.}$

- Con esto $\Leftrightarrow G\dfrac{M}{r^3} = \omega^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{GM}{\omega^2}}$
- Además: $\omega_{Tierra} = \dfrac{2\pi}{1[\text{año}]} = \dfrac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600\,s} = \ldots \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$
- Queda: $r = \ldots m$ y $d_{sup\ Tierra \to SAT.} = r - R_{Tierra} = \underline{\ldots m}$

① (b) $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{w^2}{r^2}\right) \Longrightarrow E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{GM}{r}\right)^2 = \dots J$

Tenemos que: $G\frac{Mm}{r^2} = m v^2/r \Longleftrightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$

(de la ley de grav. univ. y la 2ª ley Newton)

② La energía mínima para que se aleje el satélite de la órbita nos lleva a hacer un trabajo tq:

↳ Em tiende a cero en el infinito:

Con esto: $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{Mm}{r}$

$\lim_{r\to\infty} E_m = E_c = 0$.

energía mínima

Buscamos entonces:

Energía de sistema órbita cerrada − Emin proporcionada = Em fin

$\Longleftrightarrow E_{m\,sist} = E_{m\,prop}$.

$\Longleftrightarrow E_{m\,sist} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{Mm}{r}$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{GM}{r}\right) - G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2} G\frac{Mm}{r} = -E_c = \dots J$

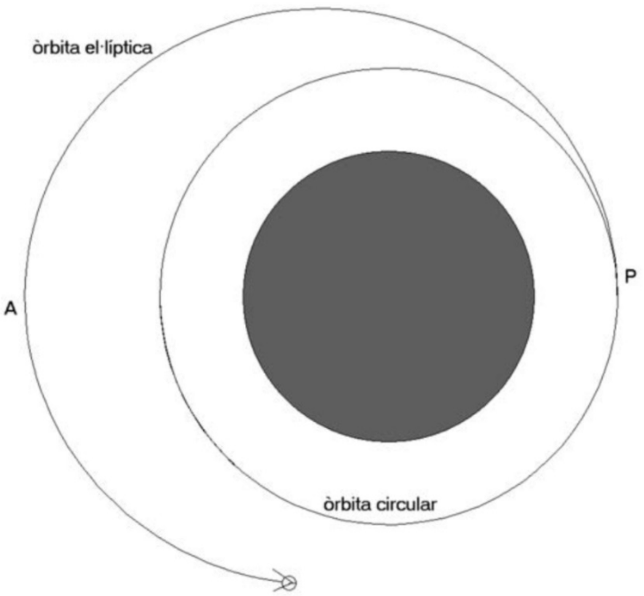
Septiembre 2014:

P1) Un satèl·lit de 2 000 kg de massa gira en una òrbita circular a una altura de 3 630 km sobre la superfície de la Terra.

a) Calculeu el període d'aquesta òrbita circular i la velocitat del satèl·lit.

En passar pel punt P, el satèl·lit augmenta la velocitat fins a $7{,}00 \times 10^3$ m s^{-1} i passa a descriure una òrbita el·líptica amb una altura màxima (apogeu) en el punt A de 9 530 km.

b) Calculeu l'energia cinètica, l'energia potencial gravitatòria i l'energia mecànica total en els punts P i A en la nova òrbita el·líptica.



DADES: $M_{\text{Terra}} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
$R_{\text{Terra}} = 6\,370$ km

(a) Tenemos de la ley gravitacional universal: (v, ω son del satélite).

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2} \quad ; \text{ De aproximar a un MCU:}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r} \iff v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \dots = m \cdot s^{-1}$$

⚠ $r = R_{\text{Terra}} + h_{\text{supT} \to \text{SAT}}$.

Tenemos también: $\omega = r \cdot v \iff \frac{2\pi}{T} = r \cdot v$

$$\iff T = \frac{2\pi}{r \cdot v} = \dots \text{ s.}$$

(b) Punto P:

- $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \dots$
- $E_p = -G\frac{Mm}{r_P} = \dots$

$\Big\{\ E_m = E_c + E_p = \dots\ J$

Punto A:

- $E_p = -G\frac{Mm}{r_A} = \dots$

Al tratar únicamente fuerzas conservativas en un sistema orbital ideal cerrado: $\Delta E_m = 0$.

$$E_{m_A} = E_{m_P} \Rightarrow E_{c_A} = E_{m_P} - E_{p_A} = \dots\ J$$

Junio 2013:

P1) Ceres és el planeta nan més petit del Sistema Solar i durant molts anys va ser considerat un asteroide, ja que està situat en el cinturó que hi ha entre Mart i Júpiter. Ceres té un període orbital al voltant del Sol de 4,60 anys, amb una massa de $9{,}43 \times 10^{20}$ kg i un radi de 477 km. Calculeu:

***a*)** Quin és el valor de la intensitat de camp gravitatori que Ceres crea a la seva superfície? Quina és la velocitat i l'energia mecànica mínima d'una nau espacial que, sortint de la superfície, escapés totalment de l'atracció gravitatòria del planeta?

***b*)** La distància mitjana entre Ceres i el Sol, tenint en compte que la distància mitjana entre la Terra i el Sol mesura $1{,}50 \times 10^{11}$ m i que el període orbital de la Terra al voltant del Sol és d'un any.

DADA: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}$

(a) Directamente, $g = \frac{F_g}{m} = G\frac{M}{r^2} = \dots\ m \cdot s^{-2}$.

Tenemos como energía mínima: Em final = 0 ($v_{fin} \simeq 0$)
(escapa totalmente).

entonces $E_{p\,ini} + E_{c\,ini} = \cancel{E_{p\,fin} + E_{c\,fin}}^{\,0}$

$$\Longleftrightarrow -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} m v_{esc}^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \dots \; m \cdot s^{-1}$$

$$Em = Ec\,(v = v_{esc}) + Ep\,(r = R_{sup}) = 0$$

(CONS. ENERGÍA MEC.)

(b) Tenemos de la ley grav. univ.:

$$F_{S \to T} = G\frac{M m_T}{R_{S \to T}^2} \quad y \quad F_{S \to C} = G\frac{M m_C}{R_{S \to C}^2}$$

De la expresión: $F = ma \underset{\uparrow}{=} m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R.$

apox MCU

Sacamos la relación: $F = \frac{4\pi^2}{T^2} mR$

$$\Longleftrightarrow \frac{4\pi^2}{T_T^2} m_T R_{S \to T} = G\frac{M m_T}{R_{S \to T}^2} \quad y \quad \frac{4\pi^2}{T_C^2} m_C R_{S \to C} = G\frac{M m_C}{R_{S \to C}^2}$$

Queda que: $R_{S \to T}^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T_T^2$ y $R_{S \to C}^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T_C^2$

$$\Longleftrightarrow \frac{R_{S \to T}^3}{T_T^2} = \frac{R_{S \to C}^3}{T_C^2} \Longleftrightarrow R_{S \to C} = \dots \; m.$$

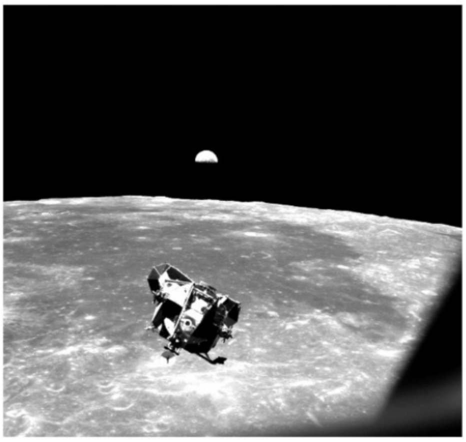
Preguntas Clase 22/04

Septiembre 2013:

P1) L'any 1969, el mòdul de comandament *Columbia*, de la missió Apollo 11, tripulada per l'astronauta Michael Collins, orbitava a 100 km d'altura sobre la superfície de la Lluna amb un període de 118 minuts. Mentrestant, Neil Armstrong i Edwin Aldrin, els altres dos tripulants, caminaven sobre la Lluna. Calculeu:

***a*)** La massa de la Lluna i la intensitat del camp gravitatori a la superfície lunar.

***b*)** La velocitat d'escapament des de la superfície lunar.



DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
$R_{\text{Lluna}} = 1{,}74 \times 10^3\ \mathrm{km}$

(a) De la ley de gravitación universal:

$$F_g = G\frac{M_{luna}\, m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\,\omega^2 r \iff M_{luna} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \ldots kg$$

suponemos MCU (2ª ley Newton)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

⚠ $r = R_{luna} + \text{altura}$

$$g_{lunar} = G\frac{M_{luna}}{R_{luna}^2} = \ldots kg$$

(b) Para encontrar la velocidad de escape planteamos:

$E_{mec\ final} = E_p(r \to \infty) + E_c(v \simeq 0) = 0.$

Debido a la CONS. ENERGIA MEC:

$E_{mec\ esc} = E_{mec\ final} \iff E_{c\ esc} = -E_{p\ esc}.$

$$\iff \frac{1}{2} m_{sat}\, v_{esc}^2 = -\left(-\frac{G M_L\, m_{sat}}{r}\right)$$

$$\iff v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_L}{r}} = \ldots$$

Juno 2012:

P1) El satèl·lit *Terra* de la NASA està dissenyat per a recollir dades sobre la superfície de la Terra, els oceans i l'atmosfera, amb l'objectiu d'estudiar la interrelació entre aquests medis i els sistemes biològics existents. El satèl·lit segueix una òrbita circumpolar (circular en el pla que passa pels dos pols) a 760 km de la superfície de la Terra i té una massa de $4{,}86 \times 10^3$ kg.

a) Quin és el període del moviment del satèl·lit en la seva òrbita?

b) Calculeu l'energia necessària que hem de subministrar al satèl·lit per a enviar-lo a la seva òrbita, si és llançat des de la superfície de la Terra.

DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};
$M_{\text{Terra}} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg;
$R_{\text{Terra}} = 6{,}38 \times 10^{6}$ m.

(a) De la ley de gravitación universal

$$\underset{\uparrow}{F_g} = G\frac{M_{Tierra}\, m_{sat}}{r^2} \underset{\uparrow}{=} m_{sat}\, \omega^2_{sat}\, r$$

$r = R_{Tierra} +$ altura

MCU (2ª ley Newton)

$$\iff \omega^2 = \frac{GM_T}{r^3} \iff \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{r^3}}$$

$$\iff T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} = \dots \text{ s.}$$

(b) Como estamos tratando. f. cons: $\Delta E_s = \Delta E_{mec}$

$\Delta E_{suministrada} = E_m$ final $- E_m$ ini.

↳ (tmb se puede pensar como W)

$$E_m \text{ final} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{R+alt}$$

$$E_m \text{ ini} \underset{\uparrow}{=} E_p = -G\frac{Mm}{R}$$

suponemos que el satélite parte del reposo ($v_{ini} = 0$)

$$E_{sumini} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R+alt} + G\frac{Mm}{R}. \iff E_s = GMm\left(\frac{2(R+alt) - R}{R\,2(R+alt)}\right)$$

$$E_s = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+alt)}\right) \iff E_s = GMm\left(\frac{R + 2alt}{2R(R+alt)}\right) = \dots$$

* Calculamos el trabajo necesario para ir de RT a r (RT + altura):

- Por definición: $W = \int_{R_T}^{R_T+alt} F_{grav} \cdot dr = G M_T m_{SAT} \left(\frac{1}{R_T+alt} - \frac{1}{R_T} \right)$
- Observación: equivale a E_p final − E_p ini.

⚠ esto solo tiene en cuenta los CAMBIOS DE POSICIÓN del satélite pero no el AUMENTO DE VELOCIDAD que conlleva entrar en órbita.