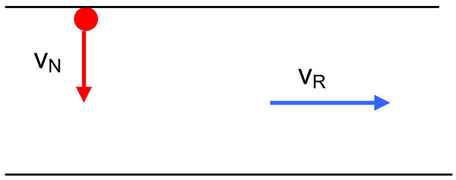
	COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

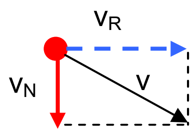
Puede ocurrir que un cuerpo esté sometido, simultáneamente, a dos movimientos. Un ejemplo típico de esto es el nadador que trata de alcanzar la orilla opuesta de un río nadando en dirección perpendicular a la corriente (ver esquema).

La velocidad resultante (suma de vectores) será $\vec{v}$

v_N = velocidad del nadador

v_R = velocidad de la corriente





Si recordamos el significado físico de la suma de vectores podemos estudiar el movimiento del cuerpo:

a. Considerado que se mueve con la velocidad resultante, v.
b. Considerando que se mueve sometido, simultáneamente, a un movimiento según el eje X con velocidad v_R y otro, según el eje Y con velocidad v_N .

Las ecuaciones para este movimiento serían (considerando el origen situado en el punto de partida del nadador y **sentido positivo hacia la derecha y hacia abajo**)

Eje X:
$v_x = v_R$
$x = v_R\, t$

Eje Y:
$v_y = v_N$
$y = v_N\, t$

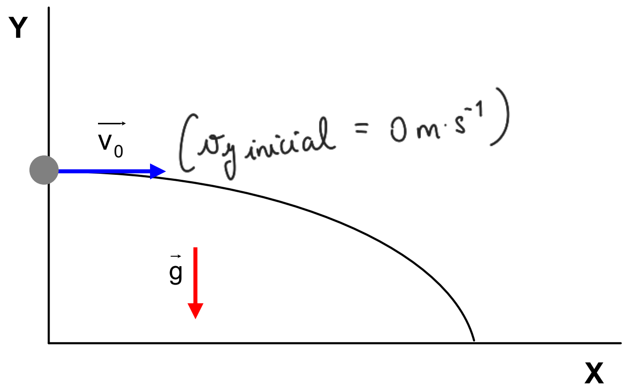
Esta manera de proceder se puede aplicar a muchos movimientos que se observan en la naturaleza.

Tiro horizontal

Tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con determinada velocidad v_0 en dirección paralela al suelo.

El movimiento es el resultante de la composición de dos movimientos:

- Uno uniforme según el eje X.
- Uno uniformemente acelerado según el eje Y.



Ecuaciones

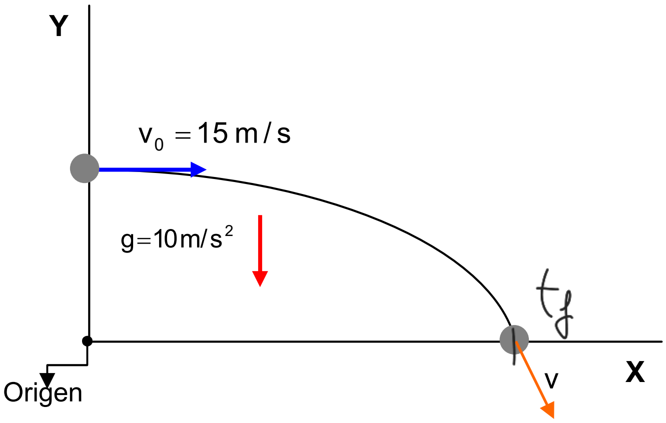
Eje X:	Eje Y
$v_x = v_0$ = cte.	$v_y = gt$
$x = x_0 + v_x\, t$	$y = y_0 + 1/2\, g\, t^2$

Ejemplo 1.

Desde la ventana situada a 20 m sobre el suelo se lanza horizontalmente un objeto con una velocidad de 15 m/s. Determinar:

a) Las ecuaciones que describen el movimiento del objeto.
b) El punto en que toca el suelo.
c) La velocidad con que llega al suelo.

Solución:



Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$x_0 = 0$
$v_0 = 15$ m/s
$y_0 = 20$ m
$g = - 10\ m/s^2$

Ecuaciones

Eje X:	Eje Y:
$v_x = v_0 = 15$	$v_y = - 10\ t$
$x = 15\ t$	$y = 20 - 5\ t^2$

1

Cuando toca el suelo y = 0.

Luego : $0 = 20 - 5\ t_f^2$.

$$t_f = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2\ s$$ Tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo(solamente se considera el resultado con signo positivo).

2

Para calcular la distancia a la que toca el suelo se calcula el valor de la componente x para t = 2 s.

$$x_{(t=2)} = 15 .\ 2 = 30\ m.$$

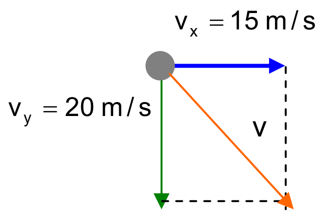
Cuando toca el suelo el vector velocidad tendrá como componentes:

$v_x = v_0 = 15$ m/s

$v_y = - 10 .\ 2 = - 20$ m/s. El signo menos indica que apunta hacia abajo.

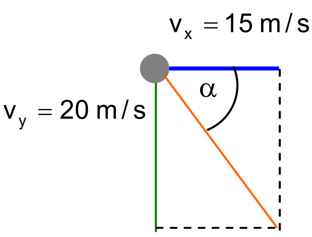
Por tanto:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\ \frac{m}{s}$$



3

También se puede calcular el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo:



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{20}{15} = 1{,}333\ ;\ \alpha = 53{,}1^0$$

Para calcular el ángulo correspondiente a la tangente usar la función inv tan ó $\tan^{-1}$ de la calculadora.

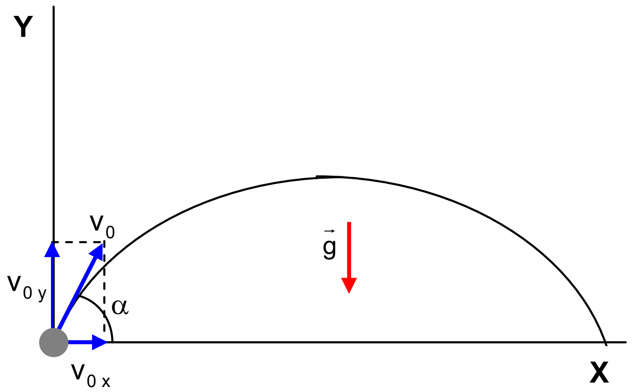
Tiro oblicuo

Tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal.

El movimiento es el resultante de la composición de dos movimientos:

- Uno uniforme según el eje X.
- Uno uniformemente acelerado según el eje Y.

Lo "aceleración tangencial"



La diferencia que existe con respecto al tiro horizontal es que ahora la velocidad inicial tiene componente tanto en el eje X (v_{0x}) como en el eje Y (v_{0y}).

Realmente el tiro horizontal se puede considerar un caso particular del oblicuo haciendo $\alpha = 0^0$

Ecuaciones

Eje X:

$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$

$x = x_0 + v_x\, t = x_0 + (v_0 \cos \alpha)\, t$

Eje Y

$v_y = v_{0y} + gt = v_0 \operatorname{sen} \alpha + g\, t$

$y = y_0 + v_{0y}\, t + 1/2\, g\, t^2 = y_0 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\, t + 1/2\, g\, t^2$

Ejemplo 2.

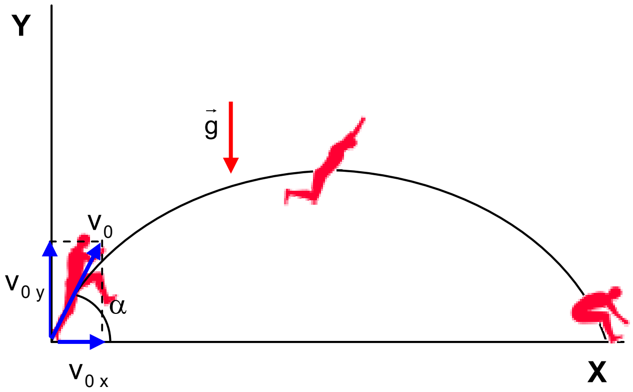
Un saltador de longitud llega a la tabla de batida con una velocidad de 8,5 m/s e inicia el vuelo con un ángulo de 40^0. Determinar:

a) Las ecuaciones del movimiento.
b) El alcance del salto.
c) La altura máxima alcanzada.
d) Altura y velocidad a los 0,75 s.

Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$x_0 = 0$
$y_0 = 0$
$v_{0x} = 8{,}5.\ \cos 40 = 6{,}5$ m/s
$v_{0y} = 8{,}5.\ \operatorname{sen} 40 = 5{,}5$ m/s
$g = -\ 10$ m/s^2

Solución:



Ecuaciones

Eje X:

$v_x = v_{0x} = 6{,}5$

$x = 6{,}5\, t$

Eje Y:

$v_y = 5{,}5 - 10\, t$

$y = 5{,}5\, t - 5\, t^2$

Para calcular el alcance del salto, imponemos la condición de que el saltador llegue en el suelo. Es decir y =0:

$$0 = 5{,}5\, t - 5\, t^2; \quad t = \frac{5{,}5}{5} = 1{,}10 \text{ s}$$. Tiempo que el saltador está en el aire.

Para calcular la distancia se calcula el valor de la componente x para t = 1,05 s

$x_{(t=1,1)} = 6{,}5\ .\ 1{,}10 = 7{,}15$ m

En el punto de altura máxima ocurre que la componente y de la velocidad (v_y) es nula (ver esquema). Por tanto:

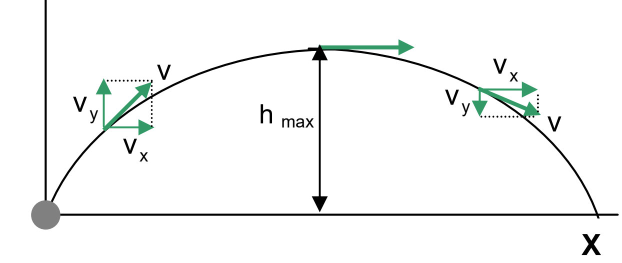
$$v_y = 0.$$

$$0 = 5,5 - 10\ t;$$

$$t = 0,55\ s.$$

El tiempo obtenido es el que tarda en alcanzar la altura máxima (notar que en este caso es justamente la mitad del tiempo de vuelo, pero no siempre ocurre esto. Ver apartado d del ejemplo 3)

En el punto de altura máxima el vector velocidad (que es siempre tangente a la trayectoria) es paralelo al suelo, luego $v_y = 0$.



Para calcular el valor de la altura máxima, calculamos el valor de la componente y para t = 0,55 s:

$$y_{(t = 0,55)} = 5,5\ .\ 0,55 - 5\ .\ 0,55^{\ 2} = 1,51\ m.$$

A los 0,75 s de iniciado el salto:

El atleta se encontrará a una distancia del origen de:

$$x_{(t=0,75)} = 6,5\ .\ 0.75 = 4,88\ m.$$

A una altura de:

$$y_{(t = 0,75)} = 5,5\ .\ 0,75 - 5\ .\ 0,75^{\ 2} = 1,31\ m.$$

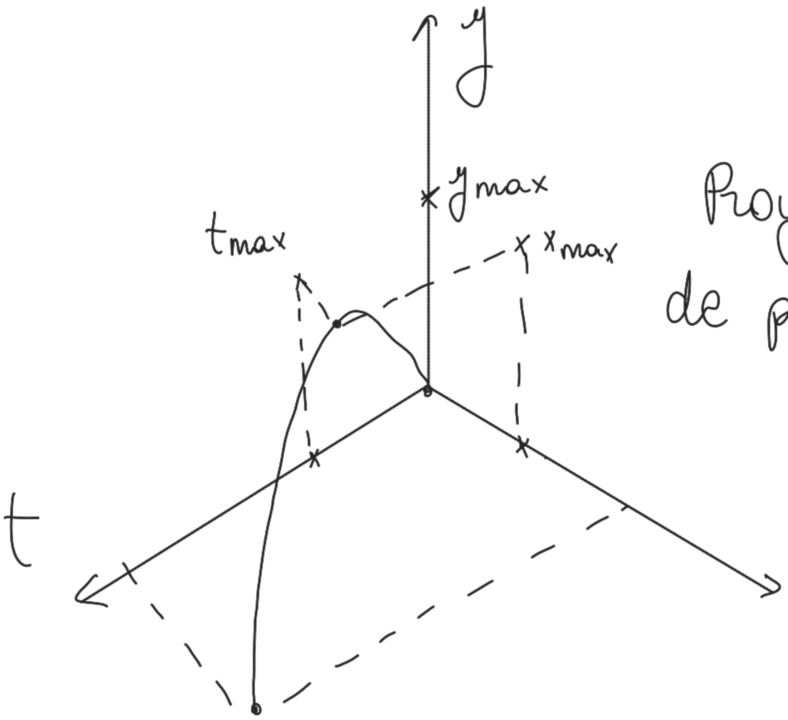
Las componentes de la velocidad valdrán:

$v_x = 6,5$ m/s.

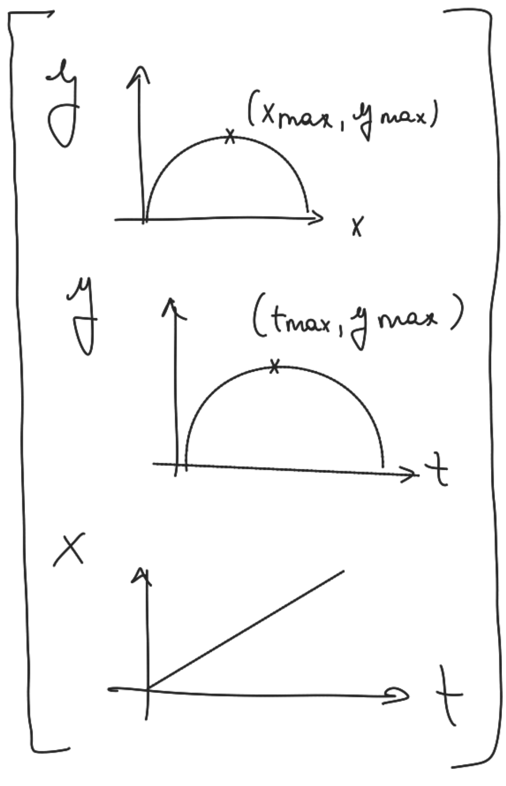
$v_y = 5,5 - 10\ 0,75 = -\ 2,0$ m/s.

Como se puede comprobar por el signo de v_y el saltador se encuentra en la parte descendente de la parábola. Su velocidad será:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{6,5^2 + 2,0^2} = 6,8\ \frac{m}{s}$$



Proyecciones de planos



Ejemplo 3

Desde una ventana de un edificio situada a 12 m del suelo se lanza una pelota con una velocidad de 15 m/s formando un ángulo de 30^0 con la horizontal. Determinar:

a) Las ecuaciones que describen el movimiento de la pelota:

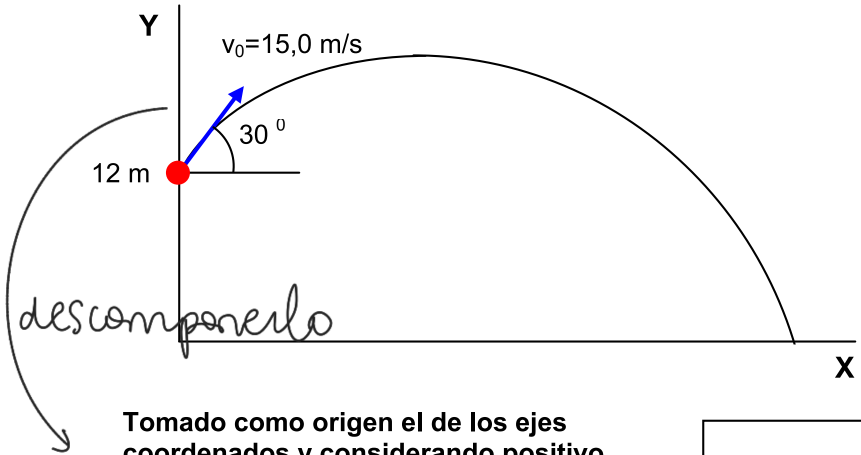
- ✓ Si se toma como origen el de coordenadas.
- ✓ Si se toma como origen el lugar de lanzamiento.

b) ¿Cuánto tiempo tardará en chocar con el suelo?

c) ¿Cuánto tiempo tardará en pasar por delante de un balcón situado 2 m por encima del lugar de lanzamiento?

d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Solución



Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$x_0 = 0$
$y_0 = 12$
$v_{0x} = 15{,}0.\ \cos 30 = 13{,}0$ m/s
$v_{0y} = 15{,}0\ \text{sen}\ 30 = 7{,}5$ m/s
$g = -10$ m/s^2

⇨

Ecuaciones

Eje X:	Eje Y:
$v_x = v_{0x} = 13{,}0$	$v_y = 7{,}5 - 10\ t$
$x = 13{,}0\ t$	$y = 12 + 7{,}5\ t - 5\ t^2$

Tomado como origen el punto de lanzamiento y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

mejor evitarlo ya que genera confusión

$x_0 = 0$
$y_0 = 0$
$v_{0x} = 15{,}0.\ \cos 30 = 13{,}0$ m/s
$v_{0y} = 15{,}0\ \text{sen}\ 30 = 7{,}5$ m/s
$g = -10$ m/s^2

⇨

Ecuaciones

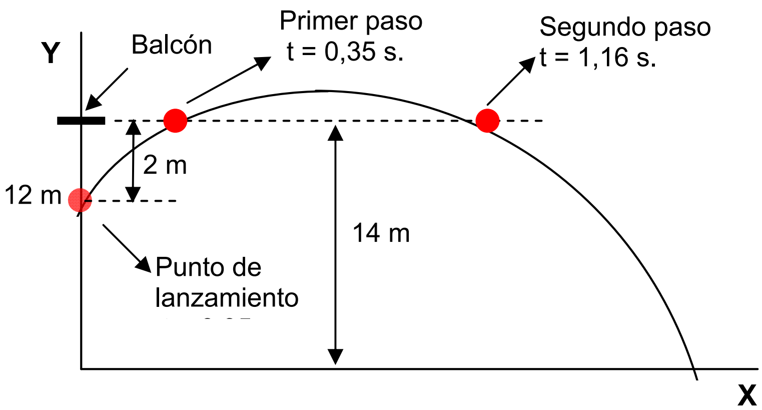
Eje X:	Eje Y:
$v_x = v_{0x} = 13{,}0$	$v_y = 7{,}5 - 10\ t$
$x = 13{,}0\ t$	$y = 7{,}5\ t - 5\ t^2$

Si consideramos el **origen situado en el suelo**, cuando la pelota choque con él, y = 0

$0 = 12 + 7{,}5\ t - 5\ t^2$; resolviendo la ecuación de segundo grado y seleccionando el resultado positivo que es el que tiene significado físico (¿qué significado tiene el resultado negativo?) se tiene como tiempo que la pelota tarda en caer: t = 2,47 s.

Si consideramos el **origen situado en el punto de lanzamiento**, cuando la pelota llegue al suelo se cumple que y = -12 m. Luego:

$-12 = 7{,}5\ t - 5t^2$; $0 = 12 + 7{,}5\ t - 5t^2$ que es una ecuación idéntica a la anterior y que, en consecuencia, tiene la misma solución.



Considerando el origen situado en el suelo, cuando pase por el balcón y =14 m.

Luego:

$14 = 12+ 7,5\, t - 5\, t^2$; $5t^2 - 7,5\, t + 2 = 0$.

Resolviendo: se obtienen dos resultados positivos $t_1 = 0,35$ s ; $t_2 = 1,16$ s.

Ambos resultados pueden considerarse válidos. El primero es el tiempo que tarda en pasar por el balcón cuando aún está ascendiendo y el segundo cuando está en la zona de descenso.

Si consideramos el origen situado en el punto de lanzamiento, cuando pase por el balcón y = 2 m. Luego:

$$2 = 7,5\, t - 5\, t^2 \;;\; 5\, t^2 - 7,5\, t + 2 = 0$$, que es la misma ecuación.

Para calcular la altura máxima alcanzada imponemos la condición (ver ejemplo 2) $v_y = 0$:

$0 = 7,5 - 10\, t$; $t = 0,75$ s. Tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. Observar que en este caso al no estar el punto de lanzamiento sobre el eje X, el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima no es la motad del tiempo de vuelo.

Para calcular la altura máxima calculamos el valor de y:

Origen suelo:

$y_{(t = 0,75)} = 12+ 7,5 .\, 0,75 - 5 .\, 0,75^2 = 14,81$ m.

Origen punto de lanzamiento:

$y_{(t= 0,75)} = 7,5 .\, 0,75 - 5 .\, 0,75^2 = 2,81$ m.

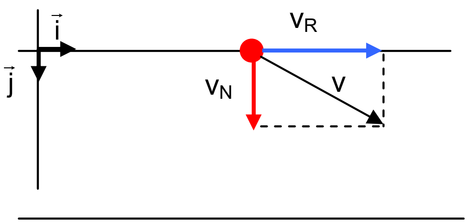
Observar que sale signo positivo. Lo que indica que la altura máxima se encuentra 2,81 m por encima del punto de lanzamiento. Esto es a 2,81 + 12 = 14,81 m del suelo.

Puede ocurrir que un cuerpo esté sometido, simultáneamente, a dos movimientos. Un ejemplo típico de esto es el nadador que trata de alcanzar la orilla opuesta de un río nadando en dirección perpendicular a la corriente (ver esquema).

La velocidad resultante (suma de vectores) será: $\vec{v} = \vec{v}_N + \vec{v}_R$

v_N = velocidad del nadador

v_R = velocidad de la corriente (río)



Las ecuaciones para este movimiento serían (considerando el origen situado en el punto de partida del nadador y ***sentido positivo hacia la derecha y hacia abajo***):

$$\boxed{\vec{v} = v_R\,\vec{i} + v_N\,\vec{j}} \qquad \boxed{\vec{r} = \vec{v}\,t = (v_R t)\,\vec{i} + (v_N t)\,\vec{j}}$$

Ejemplo 1.

V_N = 0,8 m/s. V_R = 2,0 m/s

Ecuaciones: $\boxed{\vec{v} = 2{,}0\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}}$

La velocidad es constante (MRU).

$$\boxed{\vec{r} = \vec{v}\,t = (2{,}0\,t)\,\vec{i} + (0{,}8\,t)\,\vec{j}}$$

El vector de posición tiene la misma dirección que el vector velocidad ya que se obtiene multiplicando este por el escalar t (tiempo).

Posición y velocidad al cabo de 2,5 s:

$$\vec{v} = 2{,}0\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}\ ;\ v = \sqrt{(2{,}0^2 + 0{,}8^2)\frac{m^2}{s^2}} = 2{,}15\ \frac{m}{s}$$

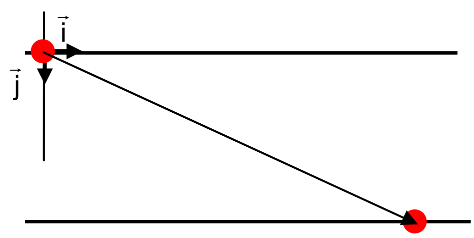
$$\vec{r} = \vec{v}\,t = (2{,}0\,t)\,\vec{i} + (0{,}8\,t)\,\vec{j} = 5{,}0\,i + 2{,}0\,\vec{j}$$

5,0 m hacia la derecha y 2,0 m hacia abajo del punto de partida.

Si el río tiene 10 m de ancho ¿En qué punto alcanzará la orilla opuesta?

Cuando alcance la orilla opuesta la componente Y del vector de posición valdrá 10 m

:



Por tanto: 0,8 t = 10; t =12,5 s.

Se encontrará a una distancia del punto de partida de: x = 2,0 t = 2,0 x 12,5 =25,0 m.

Distancia recorrida: $r = \sqrt{(25{,}0^2 + 10{,}0^2)\,m^2} = 26{,}9\ m$

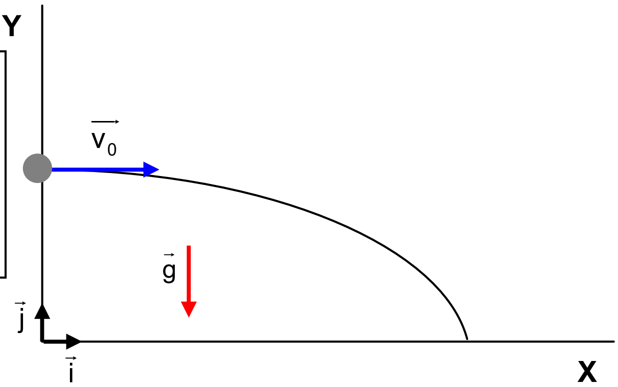
Se puede generalizar tal que

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \frac{\partial S_1}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial S_2}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial S_3}{\partial t}\vec{k} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} dt.$$

Tiro horizontal

Tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con determinada velocidad v_0 en dirección paralela al suelo.

El movimiento es uniformemente acelerado (MUA), ya que la aceleración es constante.



Ecuaciones (generales) del MUA:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t} \qquad \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2}$$

Constantes del movimiento (origen: el de coordenadas): $\vec{r}_0 = h\,\vec{j}\,,\, \vec{v}_0 = v_0\,\vec{i}\,,\, \vec{g} = -g\,\vec{j}$

Ejemplo 1.

Desde una ventana situada a 20 m sobre el suelo se lanza horizontalmente un objeto con una velocidad de 15 m/s. Determinar:

a) Las ecuaciones que describen el movimiento del objeto.
b) El punto en que toca el suelo.
c) La velocidad con que llega al suelo.

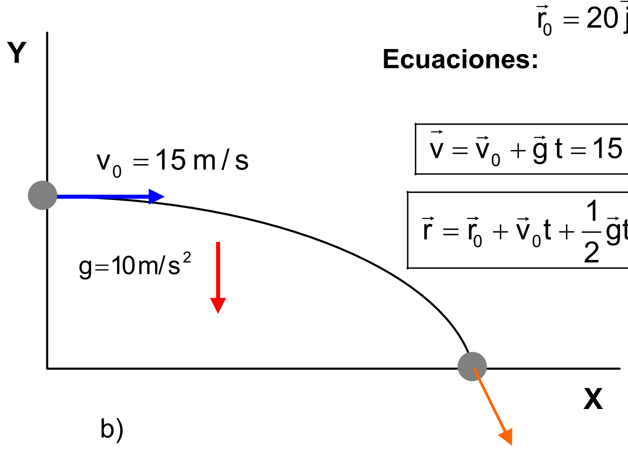
Solución:

a)

Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\vec{r}_0 = 20\,\vec{j}\,,\, \vec{v}_0 = 15\,\vec{i}\,,\, \vec{g} = -10\,\vec{j}$$

Ecuaciones:



$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = 15\,\vec{i} - (10t)\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = 20\,\vec{j} + (15\,t)\,\vec{i} - \frac{1}{2}(10t^2)\,\vec{j} = (15t)\,\vec{i} + \left(20 - 5t^2\right)\vec{j}}$$

b)

Cuando toca el suelo y = 0.

Luego : $0 = 20 - 5\,t^2$.

$$t = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2\ s$$

Tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo solamente se considera el resultado con signo positivo).

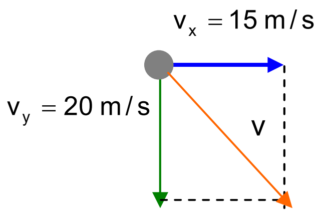
Para calcular la distancia a la que toca el suelo se calcula el valor de la componente x para t = 2 s.

$$x_{(t=2)} = 15 \cdot 2 = 30\ m.$$

c)

Cuando toca el suelo el vector velocidad valdrá:

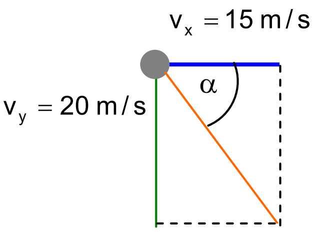
$$\vec{v} = 15\,\vec{i} - (10t)\,\vec{j}\ ;\ \vec{v}_{(t=2,0)} = 15\,\vec{i} - 20\,\vec{j}$$



Módulo:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\ \frac{m}{s}$$

También se puede calcular el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo:



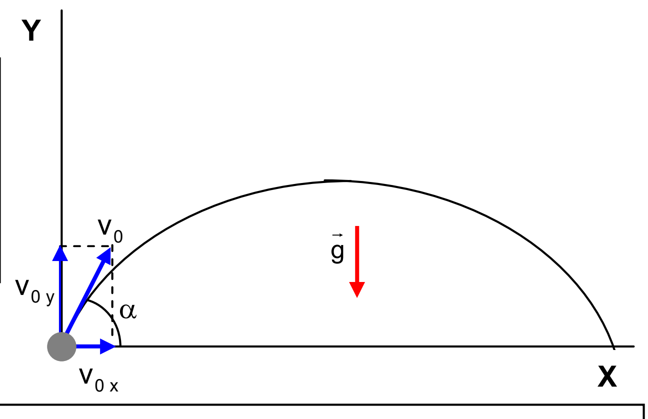
$$tg\,\alpha = \frac{20}{15} = 1{,}333\ ;\ \alpha = 53{,}1^0$$

Para calcular el ángulo correspondiente a la tangente usar la función inv tan ó $\tan^{-1}$ de la calculadora.

Tiro oblicuo

Tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal.

El movimiento es uniformemente acelerado (MUA), ya que la aceleración es constante.



La diferencia que existe con respecto al tiro horizontal es que ahora la velocidad inicial tiene componente tanto en el eje X (v_{0x}) como en el eje Y (v_{0y}).

Realmente el tiro horizontal se puede considerar un caso particular del oblicuo haciendo $\alpha = 0^0$

Ecuaciones (generales) del MUA:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t} \qquad \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2}$$

Constantes del movimiento (origen: el de coordenadas): $\vec{r}_0 = 0\ ,\ \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -g\,\vec{j}$

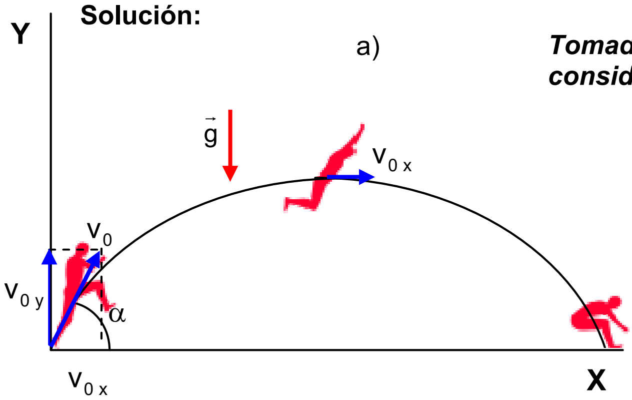
Ejemplo 2.

Un saltador de longitud llega a la tabla de batida con una velocidad de 8,5 m/s e inicia el vuelo con un ángulo de 40 ^{0}. Determinar:

a) Las ecuaciones del movimiento.
b) El alcance del salto.
c) La altura máxima alcanzada.
d) Altura y velocidad a los 0,75 s.

Solución:

a)



Tomado como origen el de los ejes coordenados, y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\vec{r}_0 = 0 \,,\, \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j} \,,\, \vec{g} = -g\,\vec{j}$$

v_{0x} = 8,5. cos 40= 6,5 m/s
v_{0y} = 8,5. sen 40= 5,5 m/s
g = 10 m/s^2

$$\vec{r}_0 = 0 \,,\, \vec{v}_0 = 6{,}5\,\vec{i} + 5{,}5\,\vec{j} \,,\, \vec{g} = -10\,\vec{j}$$

Ecuaciones:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = 6{,}5\,\vec{i} + 5{,}5\,\vec{j} - (10t)\,\vec{j} = 6{,}5\,\vec{i} + (5{,}5 - 10t)\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = (6{,}5\,t)\,\vec{i} + (5{,}5\,t)\,\vec{j} - \frac{1}{2}(10t^2)\,\vec{j} = (6{,}5t)\,\vec{i} + (5{,}5\,t - 5t^2)\,\vec{j}}$$

b)

Para calcular el alcance imponemos la condición de que el saltador llegue en el suelo. Es decir y =0:

$$0 = 5{,}5\,t - 5\,t^2 \,;\quad t = \frac{5{,}5}{5} = 1{,}10\,s$$ Tiempo que el saltador está en el aire.

Para calcular la distancia se calcula el valor de la componente x para t = 1,10 s

$x_{(t=1,10)}$ = 6,5 . 1,10 = 7,15 m

c) y d)

En el punto de altura máxima ocurre que la componente y de la velocidad (v_y) es nula (ver esquema). Por tanto:

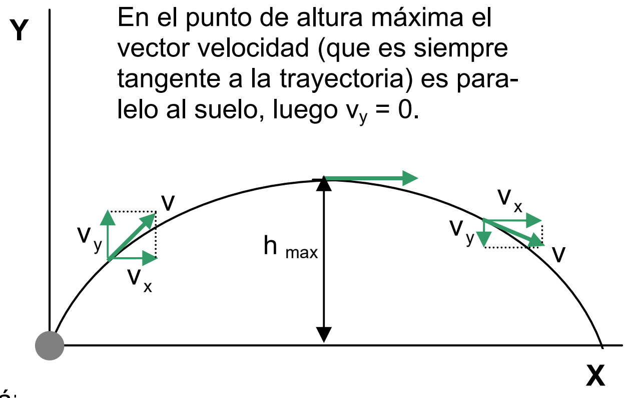
v_y = 0.

0 = 5,5 – 10 t;

t = 0,55 s.

El tiempo obtenido es el que tarda en alcanzar la altura máxima (en este caso es justamente la mitad del tiempo de vuelo, pero no siempre ocurre esto. Ver ejemplo 3).

En el punto de altura máxima el vector velocidad (que es siempre tangente a la trayectoria) es paralelo al suelo, luego v_y = 0.



El vector de posición para la altura máxima será:

$$\vec{r}_{máx} = (6{,}5.0{,}55)\,\vec{i} + (5{,}5.0{,}55 - 5(0{,}55)^2)\,\vec{j} = 3{,}58\,\vec{i} + 1{,}51\,\vec{j}$$

Luego la altura máxima $y_{máx}$ = 1,51 m se alcanza justamente a la mitad de la trayectoria x = 3,58 m.

A los 0,75 s de iniciado el salto: $\vec{v}_{(t=0,75)} = 6{,}5\,\vec{i} + (5{,}5 - 10.0{,}75)\,\vec{j} = 6{,}5\,\vec{i} - 2{,}0\,\vec{j}$

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{6{,}5^2 + 2{,}0^2} = 6{,}8\,\frac{m}{s}$$

$$\vec{r}_{(t=0,75)} = (6{,}5.0{,}75)\,\vec{i} + (5{,}5\,.0{,}75 - 5.0{,}75^2)\,\vec{j} = 4{,}88\,\vec{i} + 1{,}31\,\vec{j}$$

Como se puede comprobar por el signo de v_y, el saltador se encuentra en la parte descendente de la parábola.

Ejemplo 3

Desde una ventana de un edificio situada a 12 m del suelo se lanza una pelota con una velocidad de 15 m/s formando un ángulo de 30^0 con la horizontal. Determinar:

a) Las ecuaciones que describen el movimiento de la pelota:

- ✓ Si se toma como origen el de coordenadas.
- ✓ Si se toma como origen el lugar de lanzamiento.

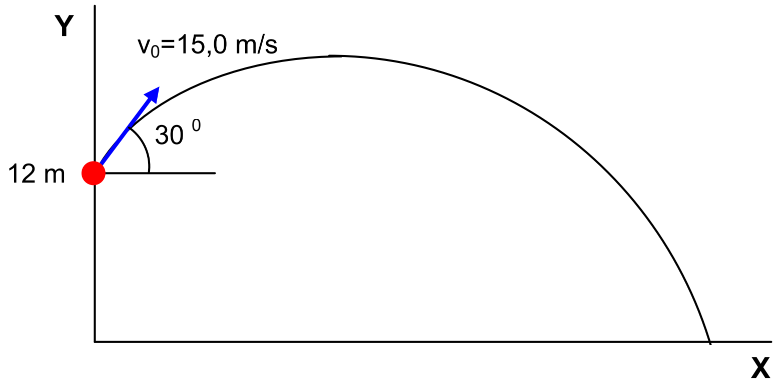
b) ¿Cuánto tiempo tardará en chocar con el suelo?

c) ¿Cuánto tiempo tardará en pasar por delante de un balcón situado 2 m por encima del lugar de lanzamiento?

d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Solución

a)



h = 12,0 m

v_{0x} =15,0. cos 30= 13,0 m/s

v_{0y} =15,0 sen 30= 7,5 m/s

g = 10 m/s^2

Tomado como origen el de los ejes coordenados, y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\vec{r}_0 = h\vec{j}\ ,\ \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -g\vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = 12{,}0\,\vec{j}\ ,\ \vec{v}_0 = 13{,}0\,\vec{i} + 7{,}5\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -10\,\vec{j}$$

Ecuaciones:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = 13{,}0\,\vec{i} + 7{,}5\,\vec{j} - (10t)\,\vec{j} = 13{,}0\,\vec{i} + (7{,}5 - 10t)\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = 12{,}0\,\vec{j} + (13{,}0\,t)\,\vec{i} + (7{,}5\,t)\,\vec{j} - \frac{1}{2}(10t^2)\,\vec{j} = (13{,}0t)\,\vec{i} + (12{,}0 + 7{,}5\,t - 5t^2)\,\vec{j}}$$

Tomado como origen el punto de lanzamiento, y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\vec{r}_0 = 0\ ,\ \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -g\vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = 0\ ,\ \vec{v}_0 = 13{,}0\,\vec{i} + 7{,}5\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -10\,\vec{j}$$

Ecuaciones:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = 13{,}0\,\vec{i} + 7{,}5\,\vec{j} - (10t)\,\vec{j} = 13{,}0\,\vec{i} + (7{,}5 - 10t)\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = (13{,}0\,t)\,\vec{i} + (7{,}5\,t)\,\vec{j} - \frac{1}{2}(10t^2)\,\vec{j} = (13{,}0t)\,\vec{i} + (17{,}5\,t - 5t^2)\,\vec{j}}$$

b)

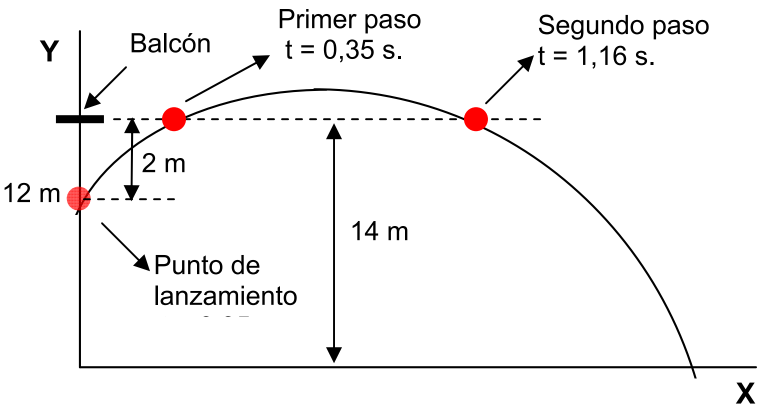
Si consideramos el **origen situado en el suelo**, cuando la pelota choque con él, y = 0

$0 = 12,0 + 7,5\ t - 5\ t^2$; resolviendo la ecuación de segundo grado y seleccionando el resultado positivo que es el que tiene significado físico (¿qué significado tiene el resultado negativo?) se tiene como tiempo que la pelota tarda en caer: t = 2,47 s.

Si consideramos el **origen situado en el punto de lanzamiento**, cuando la pelota llegue al suelo se cumple que y = -12 m. Luego:

$-12 = 7,5\ t - 5t^2$; $0 = 12 + 7,5\ t - 5t^2$ que es una ecuación idéntica a la anterior y que, en consecuencia, tiene la misma solución.

c)



Considerando el origen situado en el suelo, cuando pase por el balcón y =14 m.

Luego:

$14 = 12 + 7,5\ t - 5\ t^2$; $5t^2 - 7,5\ t + 2 = 0$.

Resolviendo: se obtienen dos resultados positivos $t_1 = 0,35$ s ; $t_2 = 1,16$ s.

Ambos resultados pueden considerarse válidos. El primero es el tiempo que tarda en pasar por el balcón cuando aún está ascendiendo y el segundo cuando está en la zona de descenso.

Si **consideramos el origen situado en el punto de lanzamiento**, cuando pase por el balcón y = 2 m. Luego:

$$2 = 7,5\ t - 5\ t^2\ ;\ 5\ t^2 - 7,5\ t + 2 = 0$$, que es la misma ecuación.

d)

Para calcular la altura máxima alcanzada imponemos la condición (ver ejemplo 2) $v_y = 0$:

$0 = 7,5 - 10\ t$; $t = 0,75$ s. Tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. Observar que en este caso al no estar el punto de lanzamiento sobre el eje X, el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima no es la mitad del tiempo de vuelo.

Para calcular la altura máxima calculamos el valor de y:

Origen suelo:

$y_{(t = 0,75)} = 12 + 7,5 .\ 0,75 - 5 .\ 0,75^2 = 14,81$ m.

Origen punto de lanzamiento:

$y_{(t = 0,75)} = 7,5 .\ 0,75 - 5 .\ 0,75^2 = 2,81$ m.

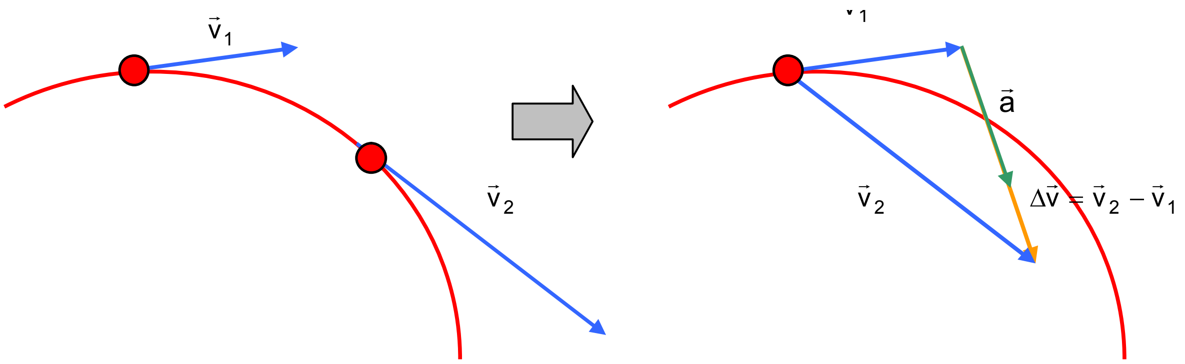
Observar que sale signo positivo. Lo que indica que la altura máxima se encuentra 2,81 m por encima del punto de lanzamiento. Esto es a 2,81 + 12 = 14,81 m del suelo.

	MOVIMIENTO CIRCULAR	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

Consideremos una trayectoria curva y un móvil que la recorre variando su velocidad (en módulo) de manera uniforme. Si queremos calcular el vector aceleración, deberemos calcular:

$$\overline{a} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{v}$$

Por tanto el vector $\vec{a}$ (en verde en la figura) será un vector que apunta en el sentido y dirección del vector $\Delta\vec{v}$ (en naranja en la figura)

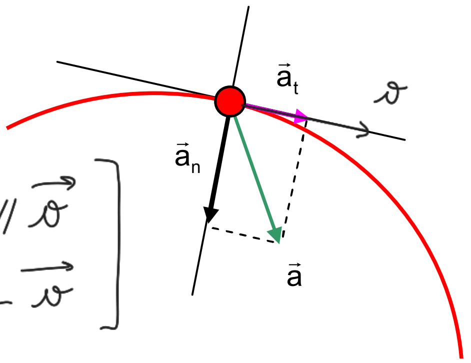


Como se puede ver el vector aceleración , $\vec{a}$, apuntará hacía "el interior" de la curva.

Si consideramos ahora un sistema de ejes coordenados y situamos uno de los ejes en la dirección de la tangente en ese punto y el otro perpendicular y descomponemos el vector $\vec{a}$ según esos ejes, obtenemos dos componentes de la aceleración que apuntan en la dirección de la tangente y perpendicularmente a ésta.

La primera componente se llama **aceleración tangencial** $\vec{a}_t$ y la segunda **aceleración normal** $\vec{a}_n$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$$



$\left[\begin{array}{l}\vec{a}_t \parallel \vec{v} \\ \vec{a}_n \perp \vec{v}\end{array}\right]$

La aceleración tangencial mide la rapidez con que varía el módulo del vector velocidad.

La aceleración normal mide la rapidez con que varía la dirección del vector velocidad.

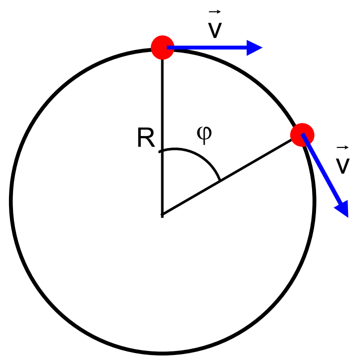
$$\boxed{a_t = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

En el movimiento circular uniforme la trayectoria es una circunferencia que es recorrida con velocidad constante.

Hay que tener en cuenta que aunque el módulo del vector velocidad no varía ($a_t = 0$), **su dirección varía constantemente (por tanto tiene aceleración normal)**

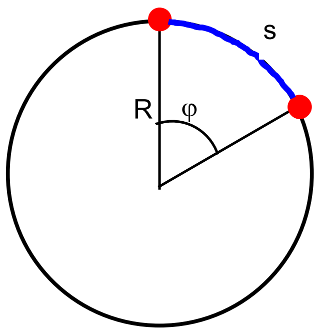
El movimiento circular uniforme tiene aceleración que apunta constantemente en la dirección del centro de la trayectoria. Es la aceleración normal o centrípeta

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$



Si se considera un punto girando en una circunferencia es fácil concluir que es mucho más sencillo medir el ángulo girado en un intervalo de tiempo que el arco recorrido (señalado en azul en el dibujo). Por esto se define la **velocidad angular ω** como la rapidez con que se describe el ángulo (φ):

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad \omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$



El ángulo (φ), debe medirse en **radianes:**

$$\varphi\ (\text{rad}) = \frac{\text{longitud arco (m)}}{\text{radio circunferencia (m)}} = \frac{s}{R}$$

Según esta definición:

1 vuelta = 360 ^{0} = 2 π radianes
½ vuelta = 180 ^{0} = π radianes
¼ de vuelta = 90 ^{0} = π /2 radianes

Para convertir vueltas o grados a radianes:

$$30^{\,0} \cdot \frac{\pi\ \text{rad}}{180^{\,0}} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

$$0{,}9\ \cancel{\text{vueltas}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{vuelta}}} = 1{,}8\ \pi\ \text{rad}$$

En el Sistema Internacional (S.I.) la velocidad angular se mide en $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ o en $\frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1}$ (el radian no tiene dimensiones)

Otras unidades (no S.I.) son:

$$\frac{\text{vueltas}}{\text{s}} \quad ; \quad \frac{\text{revoluciones}}{\text{min}} = \text{r.p.m}$$

Entre la velocidad lineal y la angular existe la siguiente relación:

$$\boxed{v = \omega \,.\, R}$$

De la definición de velocidad angular (ver más arriba) se deduce la relación entre la velocidad angular ω y el ángulo girado φ**:**

$$\boxed{\varphi = \omega \,.\, t}$$

Si cuando empieza a contarse el tiempo (t = 0) el punto ya ha descrito un ángulo φ_0, entonces el ángulo girado en un tiempo t será:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega \,.\, t}$$

El movimiento circular uniforme **es un movimiento periódico**, ya que se repite a intervalos regulares.

Se denomina **periodo (T)** al tiempo que el punto tarda en dar una vuelta (el movimiento se repite).

Se denomina **frecuencia (f)** al número de vueltas que el punto da en un segundo.

Periodo y frecuencia son magnitudes inversamente proporcionales:

$$T = \frac{1}{f} \;;\quad f = \frac{1}{T};\; T \,.\, f = 1$$

El periodo se mide en segundos (s) .La frecuencia se mide en s^{-1} o **Hz** (hertzios)

Teniendo en cuenta las definiciones de periodo, frecuencia y velocidad angular, se puede poner:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,\frac{1}{T} = 2\,\pi\, f$$

La aceleración normal o centrípeta, para un movimiento circular y uniforme vale:

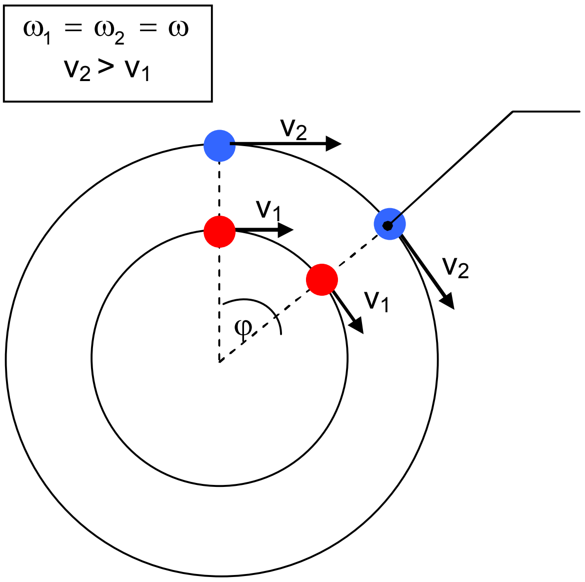
$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{v^2}{R} \\ v = \omega\, R \end{array}\right\} a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega\, R)^2}{R} = \frac{\omega^2\, R^2}{R} = \omega^2\, R$$

Teniendo en cuenta esta expresión podemos comparar las aceleraciones normales o centrípetas para puntos que se mueven con movimiento circular uniforme siguiendo trayectorias distintas;

- Consideremos dos puntos que se mueven con ***idéntica velocidad angular***, uno de ellos situado en la periferia de un disco y el otro más al interior. Según la ecuación que relaciona aceleración normal, velocidad angular y radio:

$$a_n = \omega^2 R$$

La aceleración normal del punto más exterior será mayor, ya que lo es su radio de giro, mientras que ***el punto más interior tendrá una aceleración normal más baja.*** Esto puede parecer desconcertante a primera vista, pero hemos de tener en cuenta que el punto más externo tiene una velocidad lineal (v) mayor (recorre su trayectoria más rápido), lo que trae como consecuencia una mayor rapidez en la variación de la dirección del vector velocidad.



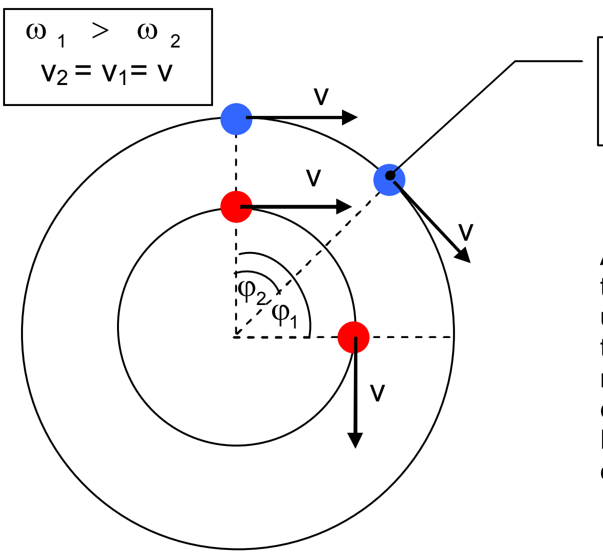
El punto más exterior va más rápido. La dirección del vector velocidad varía más rápidamente que la del punto interior.

Como su velocidad angular es la misma ambos puntos giran el mismo ángulo en un tiempo t, pero el más exterior recorre un mayor espacio sobre su trayectoria (mayor velocidad lineal).

- Considerando ahora dos puntos que recorran trayectorias de distinto radio y ***con la misma velocidad lineal***, tendremos:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

La aceleración normal será mayor cuanto menor sea el radio. ***El punto que recorre una trayectoria más cerrada tiene una aceleración normal superior***



El punto más exterior gira un ángulo menor. La dirección del vector velocidad varía más lentamente.

Ambos puntos recorren la misma distancia medida sobre la trayectoria en un tiempo t (igual velocidad lineal), por tanto el más interior recorre un ángulo mayor que el más exterior (mayor velocidad angular).
El punto más interior cambia la dirección del vector velocidad más rápido.

Ejemplo 1

Un punto describe una trayectoria circular de 30 cm de radio tardando 3,52 s en dar cinco vueltas. Calcular:

a) La velocidad angular en r.p.m y en rad/s

b) El periodo y la frecuencia del movimiento

c) El ángulo girado al cabo de 0,85 s de iniciado el movimiento.

d) Su aceleración centrípeta

Solución:

a) $\omega = \dfrac{5\ \text{vueltas}}{3{,}52\ \cancel{s}} \bullet \dfrac{60\ \cancel{s}}{1\ \text{min}} = 85{,}23\ \dfrac{\text{vueltas}}{\text{min}} = 85{,}23\ \text{r.p.m.}$

$$\omega = \frac{5\ \cancel{\text{vueltas}}}{3{,}52\ \text{s}} \bullet \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{vuelta}}} = 2{,}84\ \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2{,}84\ \pi\ \text{s}^{-1}$$

b) $T = \dfrac{3{,}52\ \text{s}}{5} = 0{,}704\ \text{s}$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}704\ \text{s}} = 1{,}420\ \text{s}^{-1} = 1{,}420\ \text{Hz}$$

c) $\varphi = \omega\ .\ t = 2{,}84\ \pi\ \text{s}^{-1}\ .\ 0{,}85\ \text{s} = 2{,}41\ \pi\ \text{rad} \approx 7{,}58\ \text{rad}$

d) $a_n = \omega^2\ R = (2{,}84\ \pi)^2\ (\text{s}^{-1})^2\ 0{,}30\ \text{m} = 23{,}88\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ejemplo 2

En el laboratorio se estudia el movimiento de un disco, de radio 10 cm, que gira con velocidad constante, midiéndose el tiempo que tarda en dar cinco vueltas. Los valores obtenidos se dan en la tabla adjunta.

Medida	t (s) . Cinco vueltas
1	4,252
2	4,305
3	4,221
4	4,214
5	4,296

a) Calcular la velocidad angular del disco.

b) Determinar la velocidad lineal de un punto de su periferia y de otro situado a 3 cm del centro.

c) ¿Cuánto tardará en girar 120 ^{0}?

Solución:

a) Calculamos el periodo del movimiento (tiempo que tarda en dar una vuelta), hallando la media de los valores obtenidos y dividiendo por cinco:

t_{med} = 4,258 s ; T = 0,852 s.

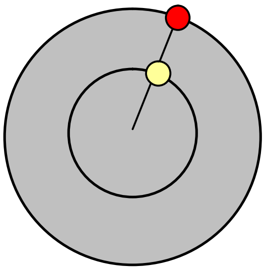
Cálculo de la velocidad angular : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0{,}852\ \text{s}} = 2{,}35\pi\ \text{s}^{-1} \approx 7{,}38\ \text{s}^{-1} = 7{,}38\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

b) Un punto situado en la periferia del disco describirá una circunferencia de radio 10 cm = 0,10 m

$v = \omega\ .\ R = 2{,}35\ \pi\ \text{s}^{-1}.\ 0{,}10\ \text{m} = 0{,}235\ \pi\ \text{s}^{-1} \approx 0{,}74\ \text{m}\ .\text{s}^{-1} = 0{,}74\ \text{m/s}$

Par el punto situado a 3 cm del centro : R = 3 cm = 0,03 m:

$v = \omega\ .\ R = 2{,}35\ \pi\ \text{s}^{-1}.\ 0{,}03\text{m} = 0{,}0705\ \pi\ \text{s}^{-1} \approx 0{,}22\ \text{m}\ .\text{s}^{-1} = 0{,}22\ \text{m/s}$



Como se deduce del cálculo ambos puntos giran con idéntica velocidad angular (ω), ya que recorren el mismo ángulo, pero la velocidad lineal aumenta a medida que nos desplazamos hacia la periferia.

c) Pasamos los grados a radianes: $120^0\ \dfrac{\pi\ \text{rad}}{180^0} = 0{,}67\pi\ \text{rad}$

$$\omega = \frac{\varphi}{t}\quad ;\quad t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{0{,}67\pi}{2{,}35\pi\ \text{s}^{-1}} = 0{,}283\ \text{s}$$

Ejemplo 3

Un punto recorre una trayectoria circular de radio 36 cm con una frecuencia de 0,25 s^{-1}.

a) Calcular el periodo del movimiento.

b) Calcular la velocidad angular y la lineal.

c) Determinar el ángulo girado en 1,54 s.

d) La aceleración normal o centrípeta.

Solución:

a) $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,25\ s^{-1}} = 4\ s$

b) $\omega = 2\ \pi\ f = 2\ \pi\ 0,25\ s^{-1} = 0,5\ \pi\ s^{-1} \approx 1,57\ s^{-1}$

$v = \omega\ R = 0,5\ \pi\ s^{-1}\ 0,36\ m = 0,18\ \pi\ m\ s^{-1} = 0,18\ \pi\ m/s \approx 0,57\ m/s$

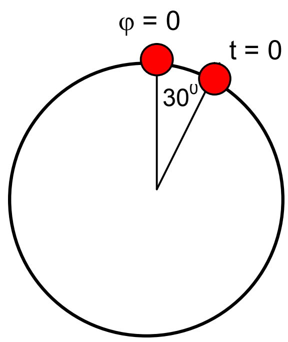
c) $\varphi = \omega\ t = 0,5\ \pi\ m\ s^{-1}\ 1,54\ s = 0,77\ \pi\ rad$

$$0,77\ \pi\ \cancel{rad}\ \frac{180^0}{\pi\ \cancel{rad}} = 138,6^0$$

d) $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,18\ \pi)^2\ \frac{m^{\cancel{2}}}{s^2}}{0,36\ \cancel{m}} = 0,89\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 4

Un punto gira describiendo círculos con velocidad constante de forma tal que describe un ángulo de 180 ^{0} en 1,543 s.



a) Calcular su velocidad angular

b) Determinar el periodo y la frecuencia del movimiento

c) Suponiendo que los ángulos empiezan a contarse a partir del punto más alto de la trayectoria y que el cronómetro se pone en marcha cuando el punto está formando un ángulo de 30^0 con la vertical (ver esquema) ¿en qué posición se encuentra el punto cuando transcurran 2,500 s?

Solución:

a) $\omega = \frac{\pi\ rad}{1,543\ s} = 0,65\ \pi\ \frac{rad}{s} = 0,65\ \pi\ s^{-1}$

b) Tarda 1,543 s en dar media vuelta (180 ^{0}), luego tardará : 2 . 1,543 = 3,086 s en dar una vuelta completa. Por tanto:

T = 3,086 s.

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,086\ s} = 0,32\ s^{-1}$

c) $30^0\ \frac{\pi\ rad}{180} = \frac{\pi}{6}\ rad$

$\varphi = \varphi_0 + \omega t = \frac{\pi}{6} + 0,65\ \pi\ s^{-1}\ 2,50\ s = \frac{\pi}{6} + 1,625\ \pi = \pi\ (\frac{1}{6} + 1,625) = 1,79\ \pi\ rad$

$$1,79\ \pi\ rad\ \frac{180^0}{\pi\ rad} = 322,2^0$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

En el movimiento circular uniformemente acelerado la trayectoria es una circunferencia, pero ahora la velocidad angular no se mantiene invariable, sino que varía uniformemente con el tiempo.

Se define la aceleración angular, α, como la rapidez con la que varía la velocidad angular con el tiempo:

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

Las unidades S.I. para la aceleración angulas son rad/s^2 o s^{-2}.

Las ecuaciones para un movimiento uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado cambiando aceleración lineal por angular, velocidad lineal por angular y distancias por ángulos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha\, t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \end{array}}$$

Recordando la definición de aceleración tangencial y normal vemos que en un movimiento uniformemente acelerado existe, tanto aceleración tangencial (ya que el módulo de la velocidad varía), como normal.

La aceleración tangencial será constante y está relacionada con la aceleración angular:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \omega_1 R \\ v_2 = \omega_2 R \end{array}\right\} \Delta v = \Delta\omega\, R;\ \ \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} R\,;\ \ \boxed{a_t = \alpha\, R}$$

La aceleración normal también existe (ya que varía la dirección del vector velocidad), pero ahora variará constantemente al hacerlo el módulo de la velocidad lineal. Por tanto el vector aceleración vendrá dado por la suma (vectorial) de ambas componentes:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$$

Ejemplo 5

Un punto se mueve describiendo una circunferencia de radio 0,5 m con una velocidad de 1,2 rad/s cuando comienza a aumentar su velocidad de forma uniforme a razón de 2 m/s cada segundo.

a) Obtener las ecuaciones que describen el movimiento del punto.

b) Calcular el valor de la aceleración tangencial y normal al cabo de 3,6 s

Solución:

a) Como la velocidad aumenta de forma uniforme con el tiempo el movimiento es circular y uniforme y su aceleración tangencial vale:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\,\frac{m}{s}}{1\,s} = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Luego: $\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{2\,\frac{m}{s^2}}{0{,}5\,m} = 4\,s^{-2} = 4\,\frac{rad}{s^2}$

Las ecuaciones serán entonces: $\omega = \omega_0 + \alpha\, t = 1{,}2 + 4\, t$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 = 1{,}2\, t + 2\, t^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = 1{,}2 + 4\, t \\ \varphi = 1{,}2\, t + 2\, t^2 \end{array}}$$

b) La aceleración tangencial será constante. Por tanto: $a_t = 2\,\frac{m}{s^2}$

La aceleración normal varía con el tiempo. Al cabo de 3,6 s la velocidad angular valdrá:

$$\omega_{(t=3,6)} = 1{,}2 + 4\, t =,2 + 4\,(3{,}6) = 15{,}6\,\frac{rad}{s} = 15{,}6\ s^{-1}$$

y la aceleración normal o centrípeta:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2\, R = 15{,}6\ s^{-2}.\ 0{,}50\ m = 121{,}7\ \frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 6

Un punto se mueve describiendo una circunferencia de radio 80 cm con una velocidad de 12 rad/s cuando comienza a frenar y su velocidad disminuye a razón de 2,6 rad/s cada segundo.

a) Obtener las ecuaciones que describen el movimiento del punto.
b) Calcular el tiempo que tarda en frenar y las vueltas que da hasta que frena.

Solución:

a) $\alpha = 2{,}6\,\frac{rad}{s^2} = 2{,}6\ s^{-2}$

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t = 12 - 2{,}6\, t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 = 12\, t - 1{,}3\, t^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = 12 - 2{,}6\, t \\ \varphi = 12\, t - 1{,}3\, t^2 \end{array}}$$

b) Tiempo que tarda en frenar: $\omega = 12 - 2{,}6\, t$

$$0 = 12 - 2{,}6\, t\ ;\ t = \frac{12\ s^{-1}}{2{,}6\ s^{-2}} = 4{,}6\ s$$

Vueltas que da hasta que se para:

$$\varphi = 12\, t - 1{,}3\, t^2 = 12\,(4{,}6) - 1{,}3\,(4{,}6)^2 = 27{,}7\ rad$$

$$27{,}7\ \cancel{rad}\ \frac{1\ vuelta}{2\pi\ \cancel{rad}} = 4{,}4\ vueltas$$

Si $\exists\, a_t$:

(el radio cada vez será mayor)