(P1) Demuestra detalladamente (justifica las suposiciones y aproximaciones) la fórmula de masa máxima de escape para el planeta a velocidad constante, $v_{esc}$.

Al tratar fuerzas conservativas se conservará la energía mecánica. Con esto:

$E_{m\,sist\,orb} = E_{m\,sist\,final}$ donde por estudio del límite (o definición): $E_{mf} = E_{cf} + E_{pf}$

$$\lim_{r\to\infty} E_{pf} = \lim_{r\to\infty} -\frac{GMm}{r} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m v_{final} \geq 0 \text{ (nula solo si } v_{final} = 0\text{)}.$$

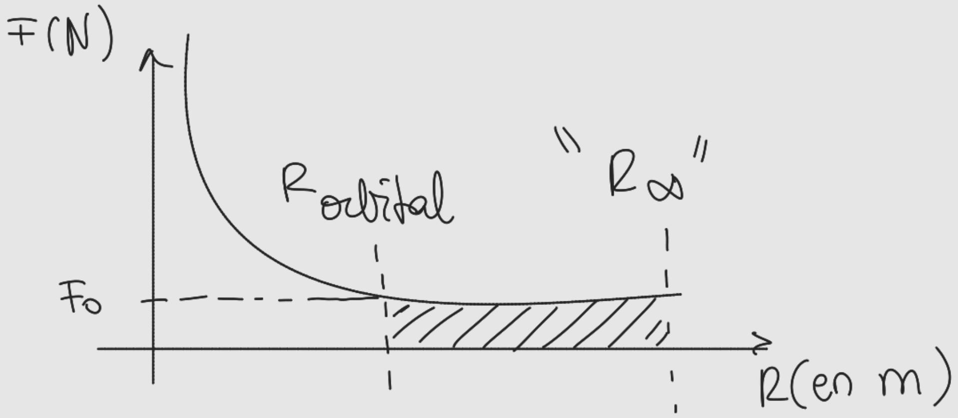
$\hookrightarrow E_{m\,final} \geq 0$. Ahora que conocemos la velocidad del sistema, definimos

$$E_{m\,inicial} = \frac{1}{2} m v_{esc} - G\frac{M_{planeta}\, m}{r}$$

Con esto: $\frac{1}{2} m v_{esc} - G\frac{M_{planeta}\cdot m}{r} \geq 0 \left(= \frac{1}{2} m v_{final}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_{esc} \geq G\frac{M_{planeta}}{r} \iff M_{planeta} \leq \frac{1}{2}\frac{v_{esc}\cdot r}{G} \left(= \frac{(v_{esc} - v_{fin})\, r}{2G}\right)$$

(P2) Queremos que un satélite situado muy lejos ("$R_\infty$") de nuestro sistema, inicialmente en reposo, acabe orbitando en el planeta de nuestro sistema. La fuerza necesaria para desplazar el satélite desde el inicio al punto P, ($P \in$ órbita planetaria) se puede representar gráficamente:




A partir de los datos, queremos calcular energía final del sistema.

Datos: conocemos G, M, "$R_\infty$", $R_{orbital}$

(a) Indica a que magnitud física corresponde el área debajo de la curva y haz una estimación de su valor aproximado

El área bajo la curva de la

fuerza en función del desplazamiento:

$$\int_{R_{orb}}^{R_\infty} F(R)\, dR = W_{de\ R_{orb} \to "R_\infty"} \overset{*}{=} E_m("R_\infty") - E_m(R_{orb}).$$

Con esto, podemos aproximar el área a un

rectángulo tal que $W = F_0("R_\infty" - R_{orB})$

$\boxed{\text{(b) Calcula la velocidad del satélite en órbita}}$

De la ley universal de gravitación:

$F_g = G\frac{Mm}{r^2} \longrightarrow$ de la 2ª ley Newton: $ma = G\frac{Mm}{r^2}$

Suponiendo MCU: $m\frac{v_{orb}^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Leftrightarrow v_{ORB} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$\boxed{\text{(c) Calcula la masa del satélite y justifica las condiciones impuestas}}$

Tenemos un sistema en el que solo interviene

$$E_m\ inicial(r \to \infty) = \underset{\text{"en reposo"}}{E_c(\infty)} + E_p(r) = \cancel{\tfrac{1}{2}mv_{fin}^2}^{\,0} - \lim_{r\to\infty} G\frac{Mm}{r} = 0$$

$\hookrightarrow E_m\ ini = 0 \overset{\text{conservación}}{\Longrightarrow} E_{m\ sist} = 0$

$*$

Si hacemos un trabajo tal que "añadimos energía" al sistema:

$$\Delta E_m = W \Longrightarrow E_m\,\text{final} - \cancel{E_m\,\text{inic}}^{\,0} = W.$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} m v_{orb}^2 - G\frac{Mm}{r_{orb}} = F_0\left(\text{"}R_\infty\text{"} - R_{orb}\right)$$

$$m\left(-\frac{1}{2}G\frac{M}{r_{orb}}\right) = F_0\left(\text{"}R_\infty\text{"} - R_{orb}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad m = -\frac{2F_0\, r_{orb}\left(\text{"}R_\infty\text{"} - r_{orb}\right)}{GM}$$

no le prestamos demasiada atención al signo aunque $m \geq 0$.

(P3) Detectamos una estrella con una masa muy parecida a la del sol. Para estudiar la habitabilidad de uno de sus planetas, O2, queremos determinar cuanto dura un día en el planeta.

Datos: $Ec_T$ en órbita, $G$, $M_{sol}$, $R_{O2}$, $m_T$

(a) Determina el radio terrestre, $R_T$, en función de los datos proporcionados

Tenemos $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{Mm}{R_T} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{R_T}$.

MCU, ley grav.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = +\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r}$$

$$\Leftrightarrow \quad r_{orb} = \frac{GM}{v^2} = \frac{GM}{2Ec/m} = \frac{GMm}{2Ec}.$$

* (se tiene que usar igualmente)

(b) Deduce el periodo del planeta estudiado ¿Cuánto dura cada año?

(c) Si mágicamente podemos cambiar $Ec_T$ en orbita a $Ec_T' = 2Ec_T$ en orbita como se verían modificados los resultados