Explicación examen

Problema 1: (MAS)

El movimiento vertical (unidimensional) de un muelle se puede expresar como una función de x y t:

$y(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t + kx + \delta_0)$

Si nos centramos únicamente en el movimiento de un solo punto en x, del muelle:

$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \delta_1)$

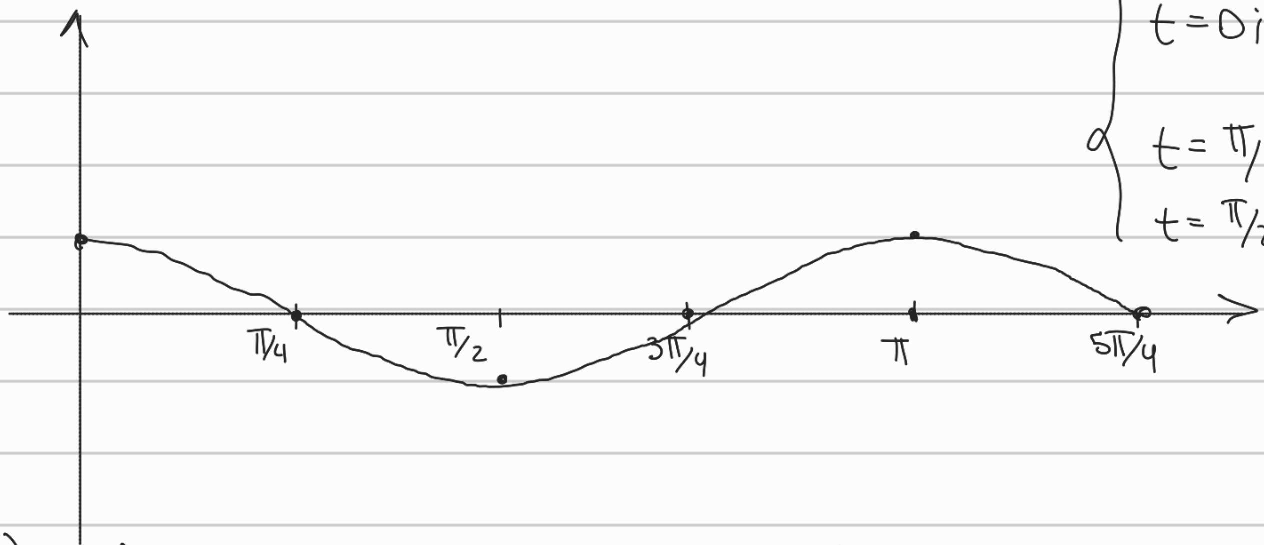
Vamos a deducir la fuerza del punto.

(a) Haz una gráfica del movimiento si $A = 1$ $\delta_1 = \pi/2$; $\omega = 2$

$t = 0$; $y = \sin(\pi/2) = 1$.

$t = \pi/4$; $y = \sin(\pi)$

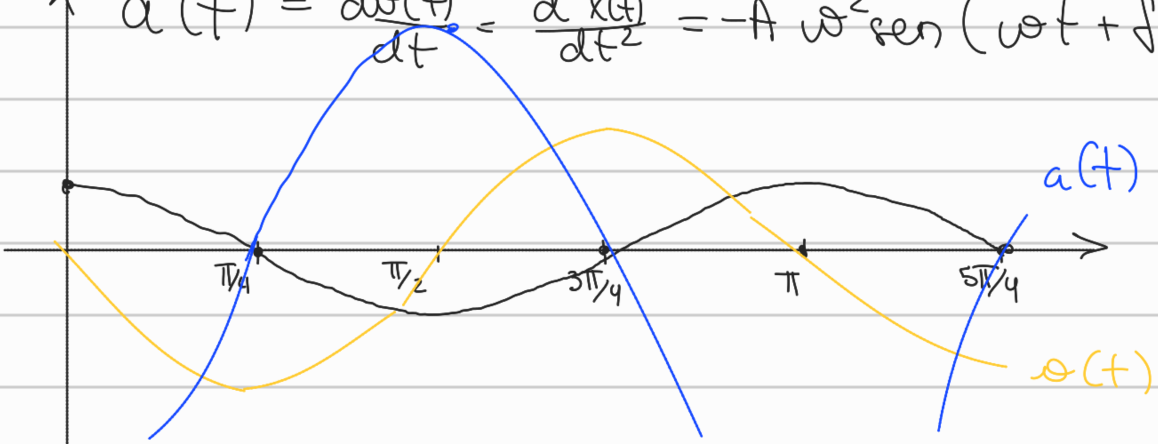
$t = \pi/2$; $y = \sin(3\pi/2)$



(b) Calcula la velocidad del punto del muelle; su aceleración y añadelas a la gráfica.

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta_1)$

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \delta_1)$

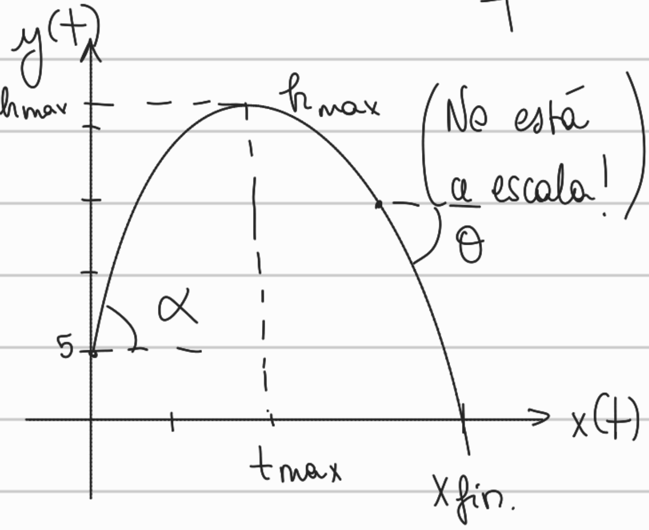


(c) Intenta extraer alguna relación entre $a(t)$ y $x(t)$
Nota: expresa f aceleración $(x(t))$
Con esto, si según newton, $\sum_i F = m\vec{a}$, describe la evolución de las fuerzas del punto.

Vemos que $a(t) = -\omega^2 x(t)$ (Propiedad del mov. harmónico)

Con esto $F_{muelle} = m(-\omega^2 x(t))$
$$F(x) = -m\omega^2 x(t). \quad (\simeq -k\Delta x)$$

Problema 2: Queremos completar la gráfica.



Tenemos un lanzamiento parabólico que cae en el segundo $t_{fin} = 4s$. El ángulo inicial es de $\alpha = 70°$. $(a(t)_y = -9{,}8\, m \cdot s^{-1})$

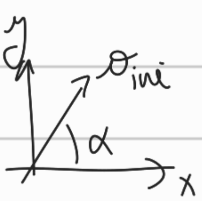
(a) Encuentra la expresión completa de $y(t)$ y la velocidad inicial.

Tenemos $y(t) = \frac{1}{2}\underbrace{a_y}_{-9{,}81}t^2 + v_y t + \underbrace{y_0}_{5}$, $x(t) = v_x t + \cancel{x_0}^{\,0}$.

$v_y = v_{ini} \operatorname{sen} \alpha$; $v_x = v_{ini} \cos \alpha$.

$y(t = t_f) = 0 \implies$ Sacamos $v_y \rightarrow v_{ini} \rightarrow x(t)$.

$-4{,}905\, t_f^2 + v_y t_f + 5 = 0 \iff v_y = 4{,}905\, t_f + \frac{5}{t_f}$
$= 20{,}87\, m/s^{-1}$



$v_y = v_{ini} \operatorname{sen} \alpha \iff v_{ini} = \frac{v_y}{\operatorname{sen} \alpha} = 28{,}01\, m/s^{-1}$.

(b) Encuentra la altura máxima y la posición final si el objeto no rebota.

• altura máxima: $y_{max}(t) \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial t}\left(= at + v_y\right) \overset{\text{máximo (o min)}}{=} 0 \Longleftrightarrow t_{max} = -\frac{v_y}{a}$.

$$y(t = t_{max}) = \frac{1}{2}\frac{v_y^2}{a} - \frac{v_y^2}{a} + s_0 = -\frac{1}{2}\frac{v_y^2}{a} + s_0 = 27{,}20 \text{ m}.$$

• $x(t) = v_{ini} \cdot \cos\alpha \cdot t \Longrightarrow x_{fin}(x = t_f) = 70{,}96$ m.

(c) En el segundo, $t_{(c)} = 3$. ¿Cuál será el ángulo formado por la velocidad?

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \partial x(t)/\partial t \\ \partial y(t)/\partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + v_y \\ v_x \end{pmatrix} \overset{t=3}{=} \begin{pmatrix} -8{,}56 \\ 17{,}74 \end{pmatrix} \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

θ ángulo entre v y eje (x):

$$\vec{v} \cdot \vec{i} = |\vec{v}||\vec{i}| \cos\theta \Longleftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{v_x}{|\vec{v}|}\right)$$

(d) Hacemos el mismo lanzamiento en la Luna. No sabemos el valor exacto de la gravedad lunar pero ($g_{Luna} < g_{Tierra}$)

Deduce con las mismas condiciones la velocidad inicial y la altura máxima en función de $a_{lunar}(t)$. Interpreta los resultados

(Del apartado (a)) $v_y = \frac{a_l}{2} t_f + \frac{s_0}{t_f}$ (si $a \downarrow \rightarrow v_y \downarrow$)

$\hookrightarrow \frac{\partial v_y}{\partial a_l} = \frac{t_f}{2} > 0$.

$h_{max} = -\frac{1}{2}\frac{v_y^2}{a_l} + s_0$ (si $a \downarrow \rightarrow h_{max} \downarrow$) $\Longrightarrow \frac{\partial h_{max}}{\partial a_l} = \frac{1}{2}\frac{v_y^2}{a_l^2} > 0$.

Problema 3: Tenemos una partícula que describe una aceleración: $\vec{a}(t) = (3t^2 - 6t + 2)\vec{i} + \vec{j}$. Queremos encontrar el momento, t (en s), en el que la distancia total recorrida sea d.

[Nota: distancia $\neq$ desplazamiento]

Partimos del reposo en $s_0 = (0, 0)$

(a) Encontrar las expresiones de $v(t)$ y $x(t)$.
(Nota: Puedes usar integrales indefinidas)

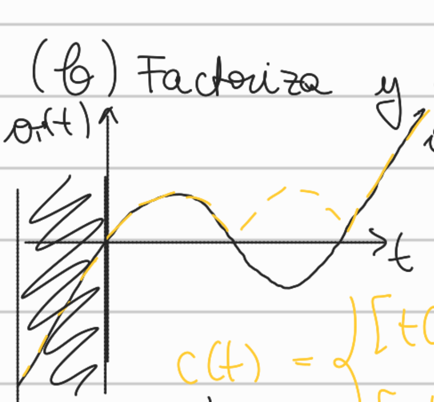
$$v(t) = \int a(t)\,dt = (t^3 - 3t^2 + 2t + C_1,\ t + C_2)$$

Tenemos que $v_0(t=0) = \underset{\text{"reposo"}}{(0,0)} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

$$s(t) = \int\left(\int a(t)\cdot dt\right)dt = \int v(t)\,dt = \left(\frac{t^4}{4} - t^3 + t^2;\ \frac{t^2}{2}\right)$$

↳ (habría que calcular C_1 y C_2, por similitud, sabemos que serán cero)

(b) Factoriza y grafica $v_T(t)$. Representa también, su celeridad.



$$v_T(t) = t(t-1)(t-2)$$

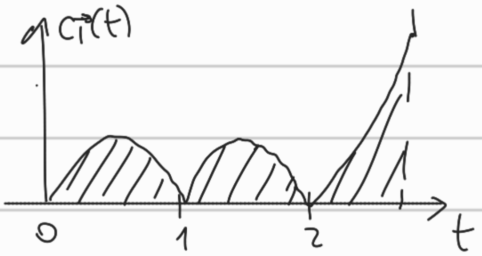
no interesa

$$c(t) = \begin{cases} [t(t-1)(t-2),\ t],\ t \in]-\infty; +1] \cup [+2; +\infty[\\ [-t(t-1)(t-2),\ t],\ t \in]+1; +2[\end{cases}$$

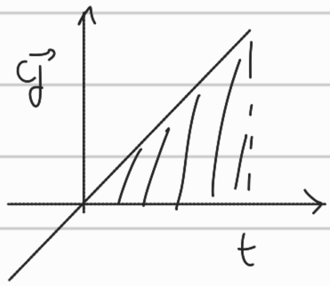
⚠

↳ Se trata de una función a trozos.

(c) Encontrar el vector distancia y la distancia total.



Calculamos el area de la función celeridad para obtener la distancia.



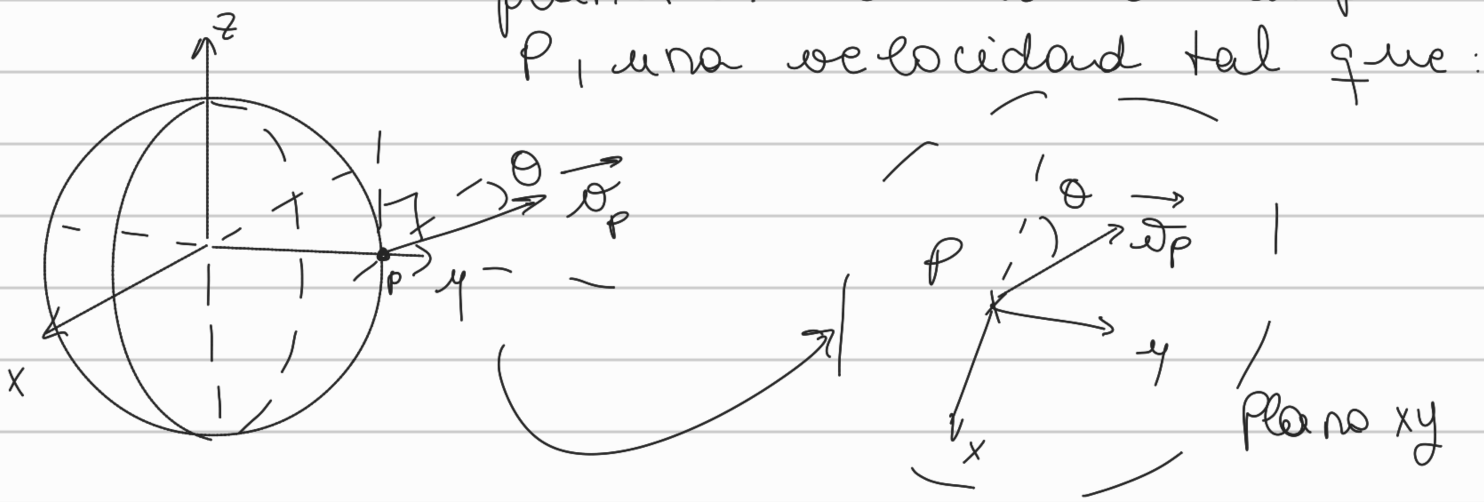
Como el calculo integral se hará por partes se estudiarán los 3 posibles casos:

CASO 1: $t \in [0; 1]$ $\text{dist}_{\vec{1}}(t) = s(t) = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2$

CASO 2: $t \in [1; 2]$ $\text{dist}_{\vec{1}}(t) = [s(t)]_0^1 + \int_1^t -v(t)\,dt.$

CASO 3: $t > 2$. $\text{dist}_{\vec{1}}(t) = [s(t)]_0^1 + [-s(t)]_1^2 + \int_2^t v(t)\,dt.$

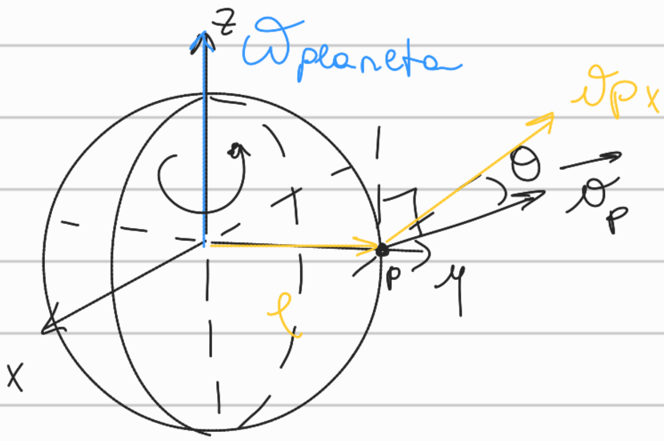
Problema 4: Estudiamos la rotación de un planeta. Medimos en un punto P, una velocidad tal que:



(a) Determinar las componentes de $\vec{v}_p$ si $|\vec{v}_p| = 100$ km/h. y $\theta = 30°$.

$$\begin{cases} v_{p_x} = -|\vec{v}_p| \cos\theta = -86{,}60 \text{ km/h} \\ v_{p_y} = |\vec{v}_p| \operatorname{sen}\theta = 50 \text{ km/h.} \end{cases}$$

(b) Si suponemos que v_{py} es debido a la velocidad asociada a la órbita del planeta, determinar la velocidad de rotación propia del planeta, con $R_{planeta} = 2000$ km. Indicar el vector asociado.



$$\omega_{planeta} = \vec{\ell} \times \vec{v}_p$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ 0 \end{pmatrix} = -(v_{px} \cdot R)\vec{k}$$

(Por regla de la mano derecha o producto vectorial)

$$= (|\vec{v}_p| \cdot \cos\theta \cdot R)\vec{k}$$

$$= 1{,}73 \times 10^{5} \text{ rad/h.}$$

(c) Indica la aceleración normal y cuanto tiempo tarda un día para el planeta.

$$a_n = \frac{v_{px}^2}{R} = 3{,}75 \text{ km} \cdot \text{h}^{-2}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}59 \cdot 10^{-5} \text{ h/rev.}$$

$$= 0{,}1294 \text{ s/rev}$$