Dpto. Física y Química	**MAGNITUDES.** **INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DIMENSIONAL**	**IES La Magdalena.** **Avilés. Asturias**

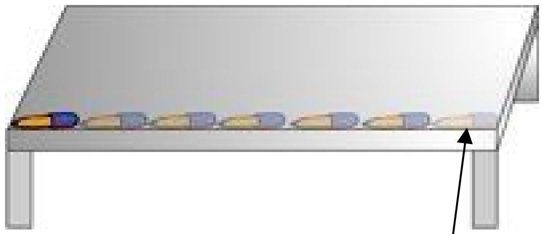
Magnitud es todo aquello que puede ser medido. Por ejemplo una longitud, la temperatura, la intensidad de corriente, la fuerza… etc.

Medir una magnitud consiste en compararla con otra de la misma especie (elegida arbitrariamente) llamada **unidad** y ver cuantas veces está contenida dicha unidad en la magnitud medida.

Ejemplo.

Si tratamos de medir la longitud de una mesa (magnitud), deberemos primero elegir una unidad de medida y ver después cuántas veces esa unidad está contenida en la magnitud a medir.

El resultado de la medida debe ser, por tanto, el resultado numérico y la unidad empleada en la medición.



Para medir la longitud de la mesa se ha elegido como unidad de medida "el boli". Miramos cuántas veces el bolígrafo está contenido en la mesa. El resultado es ***7 bolis.***

Aunque existe un número muy grande de magnitudes y se puede elegir para su medida una cantidad enorme de unidades, la medida de cualquier magnitud se reduce a la medida de un número muy pequeño de magnitudes llamadas magnitudes fundamentales.

El ***Sistema Internacional de Unidades (S.I.),*** creado en 1960, es el sistema mundialmente aceptado. Está basado en el Sistema Métrico y consta de siete magnitudes fundamentales y sus correspondientes unidades de medida (todas basadas en fenómenos físicos fundamentales, excepto la unidad de masa: el kilogramo)

Sistema Internacional de Unidades (S.I)			
Magnitud fundamental	**Símbolo**	**Unidad**	**Símbolo**
Longitud	L	Metro	m
Masa	M	Kilogramo	kg
Tiempo	T	Segundo	s
Intensidad de corriente	I	Amperio	A
Temperatura	θ	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	N	Mol	mol
Intensidad luminosa	J	Candela	cd

Obtener la ecuación de dimensiones de una magnitud derivada es expresar ésta como producto de las magnitudes fundamentales.

Para obtener la ecuación dimensional de una magnitud derivada:

- Deberemos partir de su ecuación de definición.
- Hay que manipular la ecuación de definición hasta lograr que se pueda expresar en función de las magnitudes fundamentales.

Ejemplo 1.

Obtener la ecuación dimensional de la velocidad.

La velocidad es una magnitud derivada.

Su ecuación de definición es: $v = \frac{e}{t}$

Su ecuación de dimensión, será:

$$[v] = \frac{[L]}{[T]} = [L\,T^{-1}]$$

Ejemplo 2.

Obtener la ecuación dimensional de la aceleración.

La aceleración es una magnitud derivada.

Su ecuación de definición es: $a = \frac{v}{t}$

Su ecuación de dimensión, será:

$$[a] = \frac{[L\,T^{-1}]}{[T]} = [L\,T^{-2}]$$

Ejemplo 3.

Obtener la ecuación dimensional de la fuerza

La fuerza es una magnitud derivada.

Su ecuación de definición es: $F = m \cdot a$

Su ecuación de dimensión, será:

$$[F] = [M][L\,T^{-2}] = [M\,L\,T^{-2}]$$

Ejemplo 4.

Obtener la ecuación dimensional de la energía cinética

La energía es una magnitud derivada.

Su ecuación de definición es: $E_c = \frac{1}{2} m\,v^2$

Su ecuación de dimensión, será:

$$[E_c] = [M][L\,T^{-1}]^2 = [M\,L^2\,T^{-2}]$$

$\frac{1}{2}$ es un número sin dimensiones.

Utilidad del análisis dimensional

- **La ecuación de dimensiones puede servir para determinar la unidad de medida de la magnitud considerada**.

  Por ejemplo, a partir de la ecuación de dimensiones de la fuerza (ejemplo 3) se deduce que la unidad de fuerza en el S.I. es el kg . m . s^{-2} o newton (N). Es decir N = kg . m . s^{-2}

- **También puede servirnos para comprobar si una ecuación es correcta o no**, ya que cualquier ecuación debe ser dimensionalmente homogénea o, lo que es lo mismo, ***ambos miembros han de tener la misma ecuación de dimensiones.***

  Ejemplo. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes es correcta?

  $$s = a\,t\,;\ s = \frac{1}{2} v\,t^2\,;\ s = \frac{1}{2} a\,t^2$$

  Para todas ellas el primer miembro tiene como ecuación dimensional: $[s] = [L]$

  Veamos cual es la ecuación dimensional del segundo miembro:

  $$[a\,t] = [L\,T^{-2}\,T] = [L\,T^{-1}]$$

  $$\left[\frac{1}{2} v\,t^2\right] = [L\,T^{-1}\,T^2] = [L\,T]$$

  $$\left[\frac{1}{2} a\,t^2\right] = [L\,T^{-2}\,T^2] = [L]$$

  Por tanto la ecuación correcta es la última pues es la única que cumple la condición de homogeneidad (ambos miembros tienen la misma ecuación de dimensiones)

Dpto. Física y Química	**INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL**	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

Magnitudes escalares y vectoriales

La gran variedad de cosas medibles (magnitudes) se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Magnitudes que sólo requieren dar su valor. Por ejemplo 5,0 g ; 25 ^{0} C ; 54,65 s… Son las llamadas **magnitudes escalares.**
- Magnitudes que para estar correctamente especificadas se requiere conocer:

1. **Su valor o módulo**.
2. **Su dirección** (representada por una recta)
3. **Su sentido** (que se representa por una punta de flecha)

Son las llamadas **magnitudes vectoriales** que usan para su representación flechas o vectores. Son ejemplos de éstas la velocidad, la aceleración o las fuerzas.

Igualdad de dos vectores:

Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Producto de un escalar (número) por un vector

Es un vector:

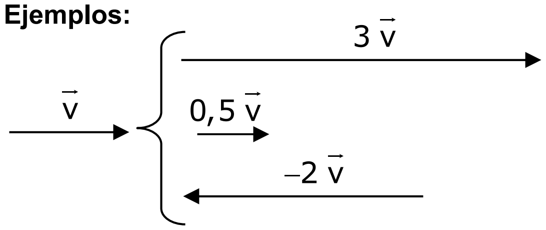
- De módulo el producto del número por el módulo del vector.

se conservan

- Dirección, la del vector.
- Sentido, el mismo del vector si el número es positivo y contrario si es negativo.

Al multiplicar un número por un vector obtenemos otro vector de la misma dirección y sentido que el primero (si el número es positivo), pero mayor o más pequeño. O bien, un vector (mayor o más pequeño) que apunta en sentido contrario al dado (si el número es negativo)

Ejemplos:



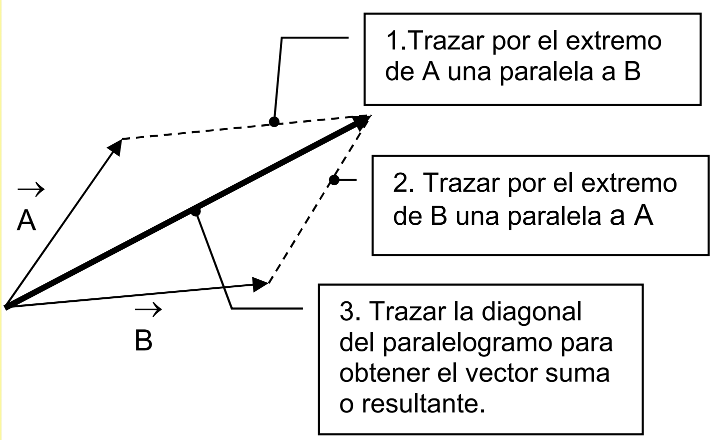
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{\times k} \vec{v}k = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a \\ k\cdot b \\ k\cdot c \end{pmatrix}$$

Suma de vectores

Al sumar dos vectores se obtiene otro vector (vector suma o resultante).

Para obtener el vector suma es necesario recurrir a lo que se conoce como "regla del paralelogramo". Esto es, se construye un paralelogramo que tenga los vectores como lados y se traza la diagonal del mismo para obtener el vector suma.

El vector suma $\vec{S}$ produce el mismo efecto actuando solo que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ actuando a la vez.



$$\vec{v} + \vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

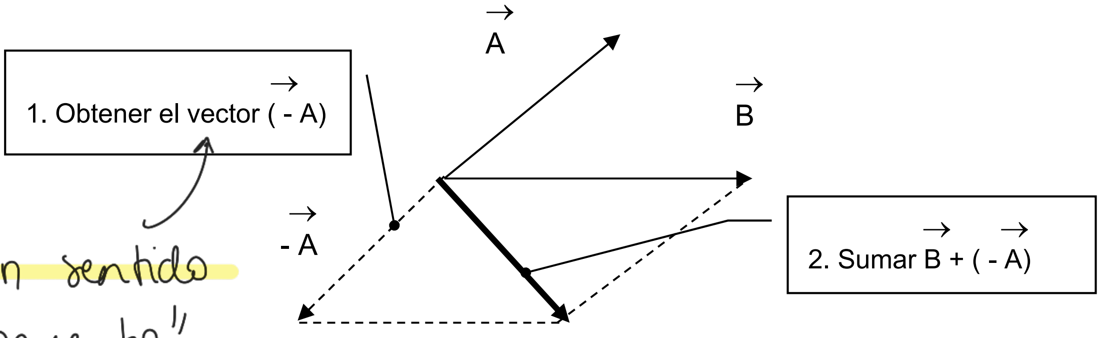
$$= (a\hat{i} + b\hat{j}) + (c\hat{i} + d\hat{j}) = (a+c)\hat{i} + (b+d)\hat{j}$$

Resta de vectores

Al restar dos vectores se obtiene otro vector.

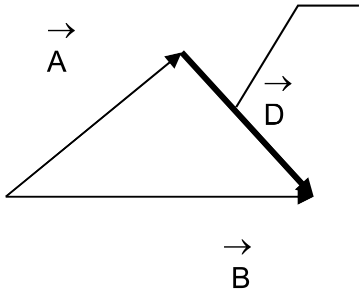
Para obtener el vector resta o diferencia se puede usar la regla del paralelogramo, teniendo en cuenta que la diferencia puede ser considerada como la suma de un vector y su opuesto:

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + \left(-\vec{A}\right)$$



"A en sentido opuesto"

… aunque existe un procedimiento abreviado:



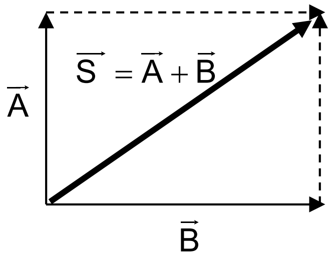
Unir los extremos de ambos vectores (dirección) y trazar la flecha (sentido) del sustraendo al minuendo.

* CASO PARTICULAR

Si los vectores son perpendiculares:

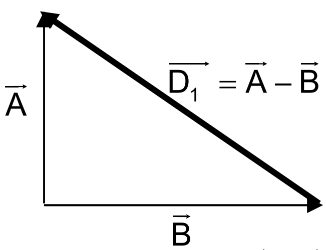
Para SUMAR

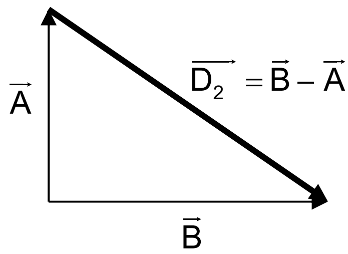
Construir el paralelogramo y trazar la diagonal



Para RESTAR

Unir los extremos de ambos vectores y asignar como sentido del vector diferencia el que va del sustraendo al minuendo.





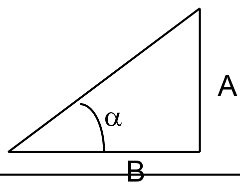
Observa que $\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$ ya que son vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentidos contrarios.

Tanto para la suma como para la resta. Si queremos obtener el valor del vector resultante, tendremos que hacer:

$$S^2 = A^2 + B^2 \,;\, S = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$D^2 = A^2 + B^2 \,;\, D = \sqrt{A^2 + B^2}$$

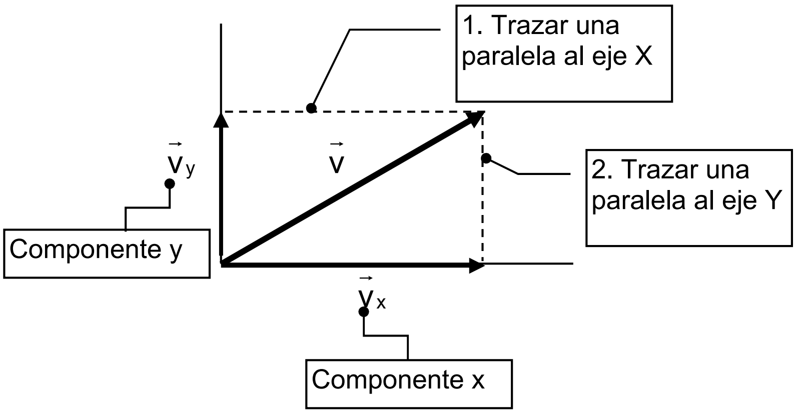
Si queremos saber el ángulo que forma con el eje x podemos utilizar la función tangente:



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{A}{B} \,;\, \alpha = \mathrm{invtg}\left(\frac{A}{B}\right)$$

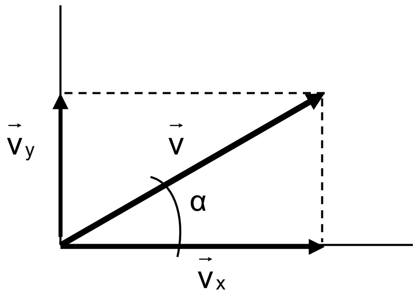
Componentes de un vector

Siempre podemos descomponer un vector en sus dos componentes. Es decir, **obtener otros dos vectores perpendiculares que, actuando a la vez, produzcan el mismo efecto que el vector considerado actuando solo.**



NOTA
*útil para descomponer el movimiento y las fuerzas (horizontal y vertical)

Para obtener el valor (módulo) de las componentes:



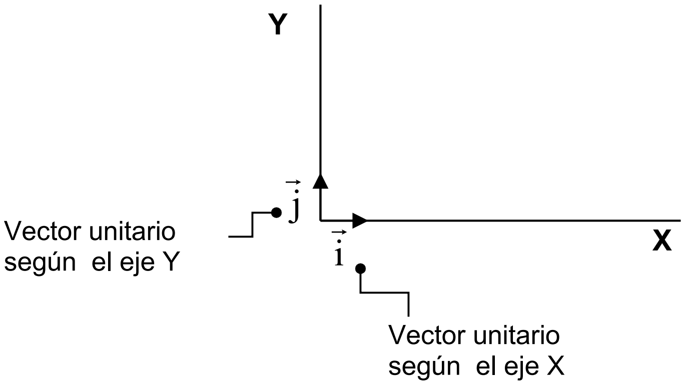
$v_x = v.\cos\alpha$
$v_y = v\,.\,\text{sen}\,\alpha$

NOTA
* usamos ángulos con tiros parabólicos o inclinaciones

Expresión de un vector en función de los vectores unitarios

Aprovechando el concepto de producto de un escalar por un vector se pueden obtener una notación muy útil para representar los vectores.

Se definen en primer lugar los llamados **vectores unitarios**. Esto es, unos vectores que tienen módulo uno (1), cuya dirección es la de los ejes coordenados y su sentido el sentido positivo de éstos.



Usando estos vectores es muy fácil escribir vectores cuya dirección sea la de los ejes coordenados:

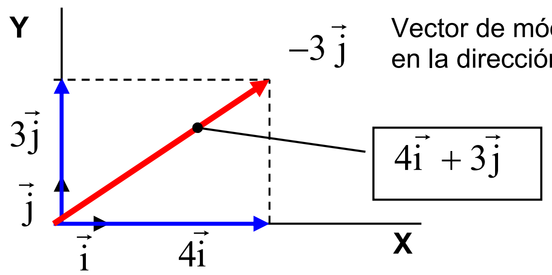
$3\,\vec{i}$ Vector de módulo 3 que apunta en la dirección positiva del eje X.

$-2\,\vec{i}$ Vector de módulo 2 que apunta en la dirección negativa del eje X.

$4\,\vec{j}$ Vector de módulo 4 que apunta en la dirección positiva del eje Y.

$-3\,\vec{j}$ Vector de módulo 3 que apunta en la dirección negativa del eje Y.

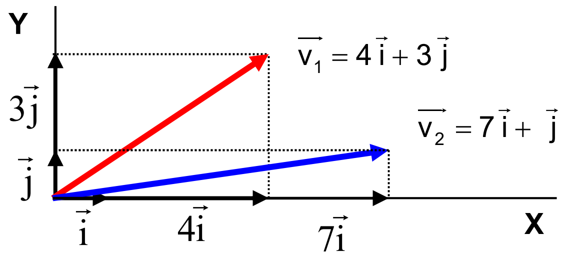
… y también resulta muy sencillo expresar cualquier otro vector:



La notación en función de los vectores unitarios da una gran información y facilita muchísimo el cálculo con vectores.

El vector $\overrightarrow{v} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, es un vector cuyo módulo vale: $v = \sqrt{4^2 + 3^2} = 25$ y que forma un ángulo con el eje x de: $tg\,\alpha = \dfrac{3}{4} = 0,75\,;\,\alpha = inv\,tg\,(0,75) = 36,87\,^0$

Imaginemos dos vectores concurrentes en el origen expresados en función de los vectores unitarios…



Su suma, se obtendrá trazando el paralelogramo correspondiente. Al hacerlo observamos que el vector resultante tiene por componente x el vector:

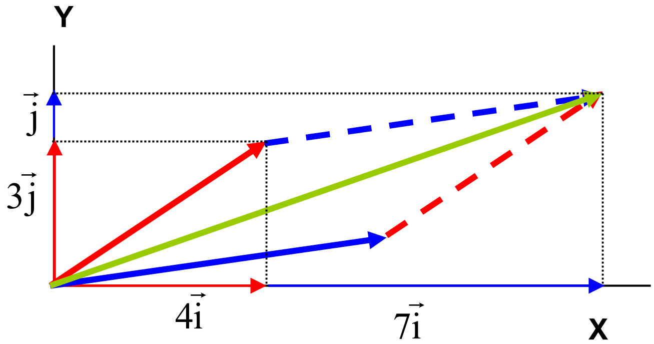
$$\vec{v}_x = 4\,\vec{i} + 7\,\vec{i} = 11\vec{i}$$

y por componente y el vector:

$$\vec{v}_y = 3\,\vec{j} + \vec{j} = 4\,\vec{j}$$

Por tanto el vector suma tendrá por componentes:

$$\vec{S} = 11\vec{i} + 4\,\vec{j}$$



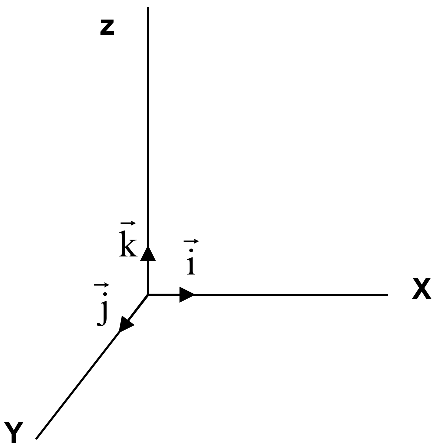
Para sumar vectores, se suman sus componentes:

$$\vec{S} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \left(4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\right) + \left(7\,\vec{i} + \vec{j}\right) = 11\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

De forma análoga podríamos concluir que para restar vectores, se restan sus componentes:

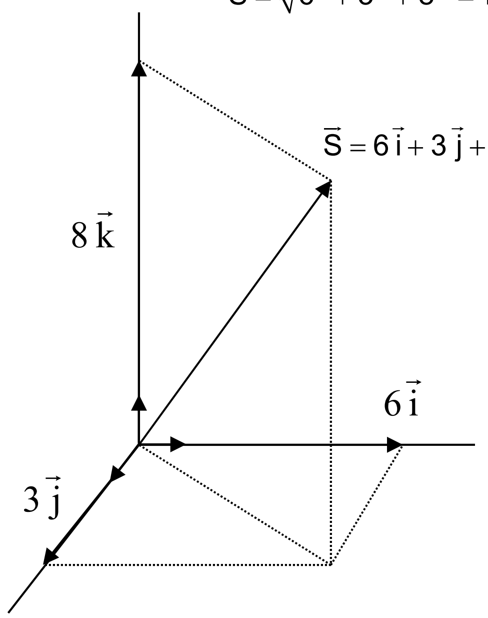
$$\vec{D} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \left(4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\right) - \left(7\,\vec{i} + \vec{j}\right) = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

Para trabajar en tres dimensiones solamente hay que definir un tercer vector unitario (k) orientado según el eje Z.



Cualquier vector puede entonces ser expresado como suma de sus tres componentes. La suma y resta se realizan de forma análoga a lo visto en dos dimensiones. Para calcular el módulo:

$$S = \sqrt{6^2 + 3^2 + 8^2} = 10,44$$



CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Podíamos definir las cifras significativas como ***aquellas que tienen significado*** (nos aportan información) sobre el resultado de una medición. Son significativas la cifra afectada por la incertidumbre (último dígito) y las situadas a su izquierda, que no sean ceros.

9,43 g → 3 cifras significativas (c.s.)

La última cifra, aunque es significativa (apreciamos décimas de gramo), ya no es segura. Está afectada por la incertidumbre de la medida.

0,030 s → 2 (c.s.). El cero a la derecha sí es significativo (apreciamos milésimas de segundo).

Los ceros a la izquierda no son significativos, solo sirven para situar la coma.

Las cifras significativas nos aportan una idea de la precisión de la medida. En los ejemplos anteriores vemos que hemos medido la masa con una balanza que aprecia centésimas de gramo y, el tiempo, con un cronómetro que aprecia milésimas de segundo.

> ***No tiene sentido incluir en el resultado de una medición más cifras significativas que las afectadas por el error (incertidumbre en la medida).***

Al escribir números del tipo 25 000 puede haber duda sobre el número de cifras significativas. Normalmente los ceros, en estos casos, no son significativos (el ejemplo tendría, pues, 2 c.s.), aunque si está escrito en notación científica la duda deja de existir:

$2,5\ 10^4$	$2,50\ 10^4$	$2,500\ 10^4$	$2,5000\ 10^4$
2 c. s.	3 c. s.	4 c. s.	5 c. s.

Operaciones aritméticas con cifras significativas

- **Suma y resta**

Al sumar o restar, el resultado ha de tener un <u>número de decimales</u> igual al del dato que tenga <u>menor número de decimales.</u>

Ejemplo:

Resultado de la suma con dos decimales

(5,423 + 6,340+ 7,45+ 6,540) g = 25,75 g

Número con menor número de decimales (2)

- **Multiplicaciones y divisiones**

Al multiplicar o dividir ***el resultado ha de tener un número de <u>cifras significativas</u> igual al del dato que tenga <u>menor número de cifras significativas.</u>***

Ejemplo:

Resultado con tres cifras significativas

(5,423 x 6,340x 7,45) m = 256 m

Número con menor número de cifras significativas (3)

Al multiplicar o dividir por un número entero el resultado tiene el mismo número de cifras significativas que el dato multiplicado o dividido.

Ejemplo: 1,4 cm x 2 = 2,8 cm ; $\frac{1,4\ \text{cm}}{2} = 0,70\ \text{cm}$

CÁLCULO DE ERRORES

Error absoluto

Una manera muy sencilla de estimar el error cometido es calculando ***el error absoluto que es la diferencia entre el valor medido o calculado y el valor verdadero:***

$$\boxed{E_a = V_{\text{medido o calculado}} - V_{\text{verdadero}}}$$

Si el error absoluto calculado según la expresión anterior es positivo indica que el valor obtenido tiene un error por exceso (el valor de la medida es superior al valor verdadero).

Si el error absoluto calculado según la expresión anterior es negativo indica que el valor obtenido tiene un error por defecto (el valor de la medida es inferior al valor verdadero).

El error se expresa con una sola cifra significativa, salvo que sea un 1, entonces está permitido la expresión con dos cifra significativas.

Ejemplos: Error: 0,067 . Se aproxima a 0,07

Error: 1,68. Se aproxima a 1,7

El resultado de la medida se expresa de la siguiente forma:

$$\boxed{x \pm \Delta x}$$

Error absoluto. Incertidumbre de la medida.
Se expresa con una sola cifra significativa

La precisión de la medida no puede ser mayor que la del error (sería absurdo conservar cifras significativas situadas más allá de la incertidumbre). A la hora de expresar el resultado de la medida es necesario, por tanto, ajustar el número de cifras significativas de la medida a las de la incertidumbre.

Ejemplos:

Medida	Incertidumbre (error)	Expresión
2,34 g	0,2 g	2,3 ± 0,2 g
4,542 s	0,003 s	4,542 ± 0,003 s
5436 m	20 m	5440 ± 20 m
15,3 mL	2 mL	15 ± 2

$$\left.\begin{array}{l} 5{,}436\,.10^3 \\ 0{,}020\,.10^3 \approx 0{,}02\,.10^3 \end{array}\right\} (5{,}44 \pm 0{,}02)\,10^3 = 5440 \pm 20\ \text{m}$$

Expresar medida y error en notación científica

Ajustar la medida al número de cifras significativas del error (expresado con una c.s)

Si se ha realizado una solo medida o, debido a la imprecisión del aparato de medida, todas las medidas dan el mismo resultado ***se toma como error la imprecisión del aparato de medida.***

Ejemplo:

Al medir la longitud de una mesa, con una cinta métrica que aprecia milímetros, se ha obtenido 1,250 m. Expresar la medida y su incertidumbre (error).

$$\boxed{L = 1{,}250 \pm 0{,}001\,\text{m}}$$

Precisión de la cinta métrica (1 mm)

La incertidumbre nunca puede ser inferior a la del aparato de medida. En caso de que esto suceda se pone como error la imprecisión del aparato de medida.

Error relativo

El error absoluto no nos da idea de la calidad de la medida realizada, ya que no es lo mismo cometer un error de 1 cm al medir la longitud de una mesa que el largo de una cancha de balonmano, por ejemplo.

Para determinar la calidad de la medida realizada se utiliza el error relativo (que normalmente se da en tanto por ciento) y que se define como:

Valor absoluto del error absoluto (siempre positivo)

$$\boxed{E_r = \frac{|E_a|}{V_{verdadero}} \text{ x } 100}$$

Valor verdadero

Ejemplo:

Se considera que la capacidad de un recipiente cilíndrico es de 52 mL (valor verdadero). Calcular el error absoluto y relativo cometido si, mediante cálculo, se ha obtenido como valor para su capacidad 48,5 mL

$$E_a = V_{medido\ o\ calculado} - V_{verdadero} = (48,5 - 50)\ mL = -1,5\ mL$$

$$E_r = \frac{|E_a|}{V_{verdadero}} \text{ x } 100 = \frac{1,5\ \cancel{mL}}{50\ \cancel{mL}} \text{x} 100 = 3\ \%$$

$$\boxed{V = 49 \pm 2\ mL}$$

Incertidumbre con una sola c.s.

Medidas repetidas

Muchas veces la dificultad está en que no se conoce el verdadero valor. Una solución es efectuar varias medidas y tomar como verdadero valor la media aritmética de las mismas.

Ejemplo:

Al medir el periodo de un péndulo (con un cronómetro que aprecia milésimas de segundo) se han obtenido los siguientes valores (ver tabla).

Medidas	T (s)
1	1,880
2	2,005
3	1,987
4	2,150
5	1,876
Media	**1,980**

La incertidumbre de la media viene dada por la desviación típica de la media:

$$\boxed{\sigma_m = \sqrt{\frac{\Sigma\,(xi - \bar{x})^2}{n\,(n-1)}}}$$

x_i = medida i

$\bar{x}$ = media

n = número de datos

Para el ejemplo: $\sigma_m = 0,05\ s$ $\boxed{T = 1,98 \pm 0,05\ (s)}$

En este caso, y con el fin de minimizar el error, es muy corriente tomar el tiempo que el péndulo tarda en dar cinco oscilaciones en vez de una:

Medidas	t (s)
1	7,216
2	7,218
3	7,207
4	7,170
5	7,191
Media	**7,200**
T(s)	**1,440**

Si calculamos la incertidumbre de la media (tiempo que tarda en dar cinco oscilaciones), para calcular el periodo deberemos dividir por cinco. El error, también quedará dividido por cinco (ver apartado *Propagación de errores*, caso de una sola variable).

Hay que tener en cuenta que si, como resultado del cálculo, obtenemos un error inferior a la precisión del aparato de medida pondremos como incertidumbre de la medida la precisión del aparato.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_m &= 0{,}00897\ \text{s}\\ \frac{\sigma_m}{5} &= 0{,}00179\ \text{s}\end{aligned}\right\}\ \boxed{T = 1{,}440 \pm 0{,}002\ \ (\text{s})}$$

Otra opción puede ser tomar como incertidumbre de la medida el error absoluto máximo. Esto es, considerar el error absoluto de la medida que más se aleje de la media.

En este caso 7,170 s (T= 1,434 s)

$$E_a = V_{\text{medido o calculado}} - V_{\text{verdadero}} = (1{,}434 - 1{,}440)\ \text{s} = -\,0{,}006\ \text{s}$$

$$E_r = \frac{|E_a|}{V_{\text{verdadero}}}\ \text{x}\ 100 = \frac{0{,}006\ \cancel{\text{s}}}{1{,}440\ \cancel{\text{s}}}\ \text{x}100 = 0{,}004\ \%$$

$$\boxed{T = 1{,}440 \pm 0{,}006\ \ (\text{s})}$$

Como puede observarse este método ***da errores bastante mayores*** que si usamos como medida de la incertidumbre la incertidumbre de la media.

Otra posibilidad (aunque requiere más cálculos) consiste en considerar como error la media de los errores cometidos:

Medidas	t (s)	E_a (s)
1	7,216	0,016
2	7,218	0,018
3	7,207	0,007
4	7,170	-0,030
5	7,191	-0,009
Media	**7,200**	**0,002**
T(s)	**1,440**	

Como para obtener el periodo tenemos que dividir por cinco (se ha contado el tiempo que tarda en dar cinco oscilaciones), el error también quedará dividido por cinco:

Ea = 0,0004 s.

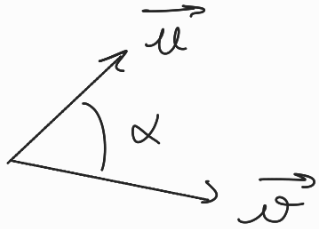
Como el error es inferior a la precisión del aparato de medida, tomamos como incertidumbre de la medida la precisión del aparato (0,001 s)

$$\boxed{T = 1{,}440 \pm 0{,}001\ \ (\text{s})}$$

PRODUCTO ESCALAR

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\overset{\frown}{\vec{u},\vec{v}})^{\,\alpha}$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$



→ Propiedades:

- vectores ortogonales ($\perp$): $\vec{u} \perp \vec{v} \overset{\alpha = 90^\circ}{\Rightarrow} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- vectores paralelos ($//$): $\vec{u} \,//\, \vec{v} \underset{\alpha = 0^\circ}{\Rightarrow} \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$

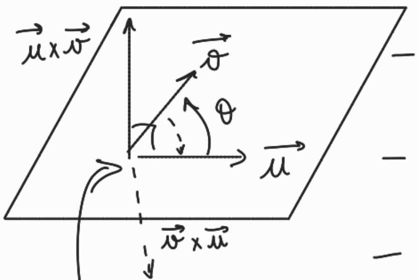
↳ se suelen usar para encontrar proyecciones de vectores (*componentes de un vector)

PRODUCTO VECTORIAL

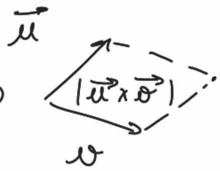
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}(\overset{\frown}{\vec{u},\vec{v}})$$

$$= \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ -(u_1 v_3 - v_1 u_3) \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$$

*Para cada fila "tapar" los valores correspondientes y hacer det (2x2) restante.

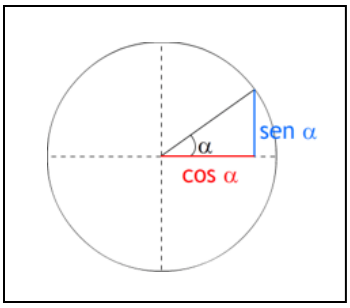


- $\vec{u} \times \vec{v} \perp$ a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}|$ = área paralelogramo

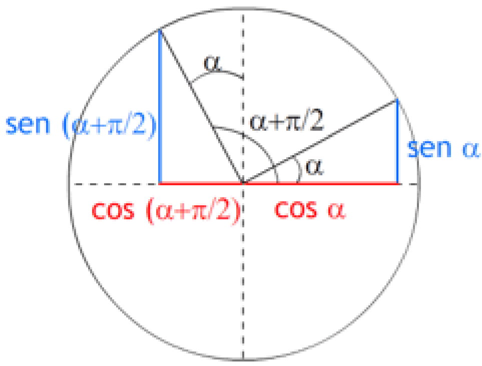


- $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$.

*regla mano derecha



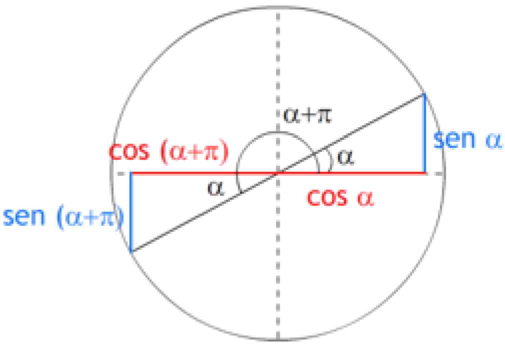
Ángulos que se diferencian en π/2



$\text{sen } \alpha = - \cos (\alpha + \pi/2)$

$\cos \alpha = \text{sen } (\alpha + \pi/2)$

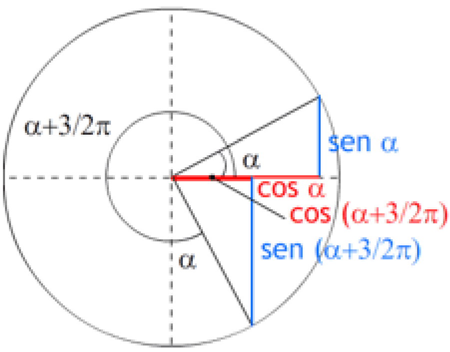
Ángulos que se diferencian en π



$\text{sen } \alpha = - \text{sen } (\alpha + \pi)$

$\cos \alpha = - \cos (\alpha + \pi)$

Ángulos que se diferencian en 3/2π



$\text{sen } \alpha = \cos (\alpha + 3/2\pi)$

$\cos \alpha = - \text{sen } (\alpha + 3/2\pi)$

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\text{sen } (\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\text{sen } (2\alpha) = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$$

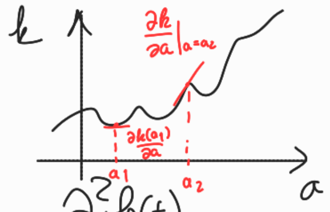
$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\cos (2\alpha) = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

DERIVADAS:

↳ Herramienta para calcular como una variable evoluciona en función de uno de sus parámetros:



Notaciones: $\lim\limits_{a\to 0} \frac{\Delta k(a)}{\Delta a} = \frac{d\,k(a)}{da} = \frac{\partial k(a)}{\partial a}$

* si tratamos el tiempo: $k' = \frac{\partial k(t)}{\partial t}$; $k''(t) = \frac{\partial^2 k(t)}{\partial t^2}$

INTEGRALES:

↳ Herramienta inversa a la derivada. También sirve para calcular el área (⚠ signo) debajo de una curva.

Notaciones: $I(k) = \int k(t)\,dt = K(t) + C$

integral indefinida

necesitamos condiciones iniciales para completar I(k).

* Observación: habitualmente la integral es definida tal que $t \in [0; t_{fin}]$, tal que:

$$I(k) = \int_0^{t_{fin}} k(t)\,dt = \left[K(t)\right]_0^{t_{fin}} = \left[K(t_{fin})\right]$$