	MAGNITUDES. **INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DIMENSIONAL**	**IES La Magdalena.** **Avilés. Asturias**

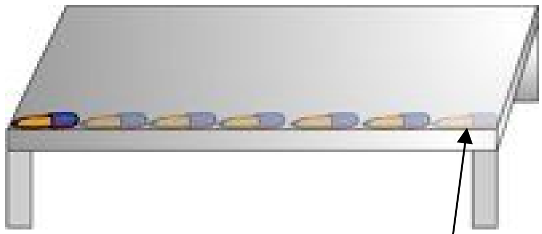
Magnitud es todo aquello que puede ser medido. Por ejemplo una longitud, la temperatura, la intensidad de corriente, la fuerza… etc.

Medir una magnitud consiste en compararla con otra de la misma especie (elegida arbitrariamente) llamada **unidad** y ver cuantas veces está contenida dicha unidad en la magnitud medida.

Ejemplo.

Si tratamos de medir la longitud de una mesa (magnitud), deberemos primero elegir una unidad de medida y ver después cuántas veces esa unidad está contenida en la magnitud a medir.

El resultado de la medida debe ser, por tanto, el resultado numérico y la unidad empleada en la medición.



Para medir la longitud de la mesa se ha elegido como unidad de medida "el boli". Miramos cuántas veces el bolígrafo está contenido en la mesa. El resultado es ***7 bolis.***

Aunque existe un número muy grande de magnitudes y se puede elegir para su medida una cantidad enorme de unidades, la medida de cualquier magnitud se reduce a la medida de un número muy pequeño de magnitudes llamadas magnitudes fundamentales.

El ***Sistema Internacional de Unidades (S.I.),*** creado en 1960, es el sistema mundialmente aceptado. Está basado en el Sistema Métrico y consta de siete magnitudes fundamentales y sus correspondientes unidades de medida (todas basadas en fenómenos físicos fundamentales, excepto la unidad de masa: el kilogramo)

Sistema Internacional de Unidades (S.I)			
Magnitud fundamental	**Símbolo**	**Unidad**	**Símbolo**
Longitud	L	Metro	m
Masa	M	Kilogramo	kg
Tiempo	T	Segundo	s
Intensidad de corriente	I	Amperio	A
Temperatura	θ	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	N	Mol	mol
Intensidad luminosa	J	Candela	cd

Obtener la ecuación de dimensiones de una magnitud derivada es expresar ésta como producto de las magnitudes fundamentales.

Para obtener la ecuación dimensional de una magnitud derivada:

- Deberemos partir de su ecuación de definición.
- Hay que manipular la ecuación de definición hasta lograr que se pueda expresar en función de las magnitudes fundamentales.

Ejemplo 1.

Obtener la ecuación dimensional de la velocidad.

La velocidad es una magnitud derivada.

Su ecuación de definición es: $v = \frac{e}{t}$

Su ecuación de dimensión, será:

$$[v] = \frac{[L]}{[T]} = \left[L\,T^{-1}\right]$$

Ejemplo 2.

Obtener la ecuación dimensional de la aceleración.

La aceleración es una magnitud derivada.

Su ecuación de definición es: $a = \frac{v}{t}$

Su ecuación de dimensión, será:

$$[a] = \frac{\left[L\,T^{-1}\right]}{[T]} = \left[L\,T^{-2}\right]$$

Ejemplo 3.

Obtener la ecuación dimensional de la fuerza

La fuerza es una magnitud derivada.

Su ecuación de definición es: $F = m \cdot a$

Su ecuación de dimensión, será:

$$[F] = [M]\left[L\,T^{-2}\right] = \left[M\,L\,T^{-2}\right]$$

Ejemplo 4.

Obtener la ecuación dimensional de la energía cinética

La energía es una magnitud derivada.

Su ecuación de definición es: $E_c = \frac{1}{2} m\,v^2$

Su ecuación de dimensión, será:

$$[E_c] = [M]\left[L\,T^{-1}\right]^2 = \left[M\,L^2\,T^{-2}\right]$$

$\frac{1}{2}$ es un número sin dimensiones.

Utilidad del análisis dimensional

- **La ecuación de dimensiones puede servir para determinar la unidad de medida de la magnitud considerada**.

  Por ejemplo, a partir de la ecuación de dimensiones de la fuerza (ejemplo 3) se deduce que la unidad de fuerza en el S.I. es el kg . m . s^{-2} o newton (N). Es decir N = kg . m . s^{-2}

- **También puede servirnos para comprobar si una ecuación es correcta o no**, ya que cualquier ecuación debe ser dimensionalmente homogénea o, lo que es lo mismo, ***ambos miembros han de tener la misma ecuación de dimensiones.***

  Ejemplo. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes es correcta?

  $$s = a\,t\;;\; s = \frac{1}{2} v\,t^2\;;\; s = \frac{1}{2} a\,t^2$$

  Para todas ellas el primer miembro tiene como ecuación dimensional: $[s] = [L]$

  Veamos cual es la ecuación dimensional del segundo miembro:

  $$[a\,t] = \left[L\,T^{-2}\,T\right] = \left[L\,T^{-1}\right]$$

  $$\left[\frac{1}{2} v\,t^2\right] = \left[L\,T^{-1}\,T^2\right] = [L\,T]$$

  $$\left[\frac{1}{2} a\,t^2\right] = \left[L\,T^{-2}\,T^2\right] = [L]$$

  Por tanto la ecuación correcta es la última pues es la única que cumple la condición de homogeneidad (ambos miembros tienen la misma ecuación de dimensiones)

Dpto. Física y Química	**INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL**	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

Magnitudes escalares y vectoriales

La gran variedad de cosas medibles (magnitudes) se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Magnitudes que sólo requieren dar su valor. Por ejemplo 5,0 g ; 25 ^{0} C ; 54,65 s… Son las llamadas **magnitudes escalares.**
- Magnitudes que para estar correctamente especificadas se requiere conocer:

1 **Su valor o módulo**.
2 **Su dirección** (representada por una recta)
3 **Su sentido** (que se representa por una punta de flecha)

Son las llamadas **magnitudes vectoriales** que usan para su representación flechas o vectores. Son ejemplos de éstas la velocidad, la aceleración o las fuerzas.

Igualdad de dos vectores:

Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Producto de un escalar (número) por un vector

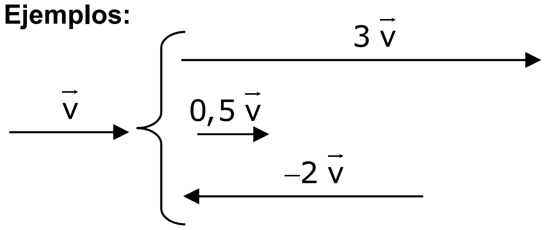
Es un vector:

- De módulo el producto del número por el módulo del vector.
- Dirección, la del vector.
- Sentido, el mismo del vector si el número es positivo y contrario si es negativo.

se conservan

Al multiplicar un número por un vector obtenemos otro vector de la misma dirección y sentido que el primero (si el número es positivo), pero mayor o más pequeño. O bien, un vector (mayor o más pequeño) que apunta en sentido contrario al dado (si el número es negativo)

Ejemplos:



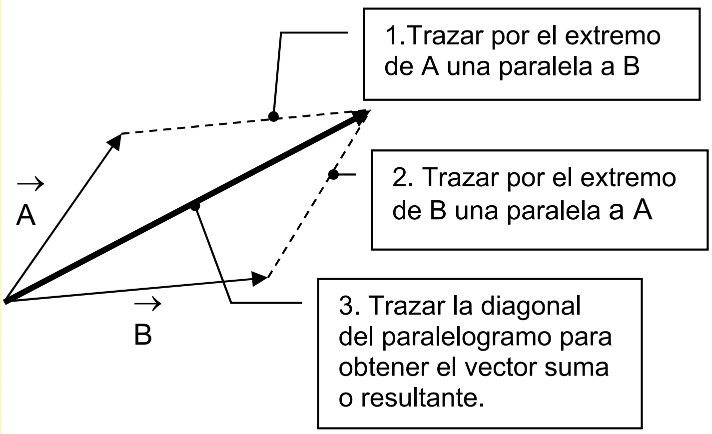
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{\times k} \vec{v}k = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a \\ k\cdot b \\ k\cdot c \end{pmatrix}$$

Suma de vectores

Al sumar dos vectores se obtiene otro vector (vector suma o resultante).

Para obtener el vector suma es necesario recurrir a lo que se conoce como "regla del paralelogramo". Esto es, se construye un paralelogramo que tenga los vectores como lados y se traza la diagonal del mismo para obtener el vector suma.

El vector suma $\vec{S}$ produce el mismo efecto actuando solo que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ actuando a la vez.



$$\vec{v} + \vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$= (a\hat{i} + b\hat{j}) + (c\hat{i} + d\hat{j}) = (a+c)\hat{i} + (b+d)\hat{j}$$

Resta de vectores

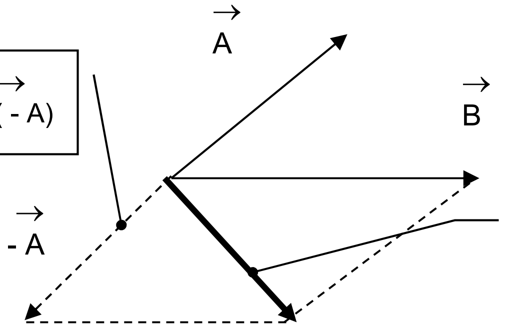
Al restar dos vectores se obtiene otro vector.

Para obtener el vector resta o diferencia se puede usar la regla del paralelogramo, teniendo en cuenta que la diferencia puede ser considerada como la suma de un vector y su opuesto:

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + \left(-\vec{A}\right)$$

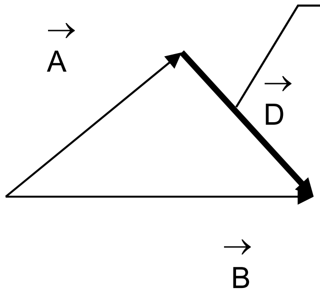
1. Obtener el vector $(-\vec{A})$

"A en sentido opuesto"



2. Sumar $\vec{B} + (-\vec{A})$

… aunque existe un procedimiento abreviado:



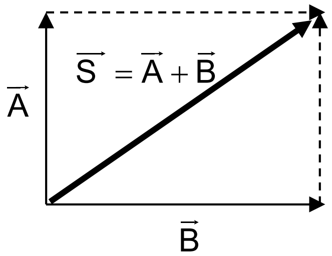
Unir los extremos de ambos vectores (dirección) y trazar la flecha (sentido) del sustraendo al minuendo.

* CASO PARTICULAR

Si los vectores son perpendiculares:

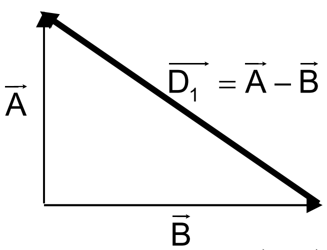
Para SUMAR

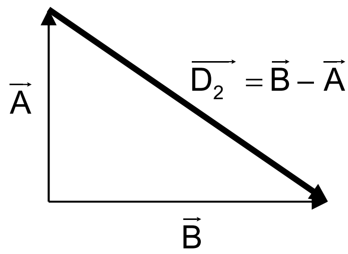
Construir el paralelogramo y trazar la diagonal



Para RESTAR

Unir los extremos de ambos vectores y asignar como sentido del vector diferencia el que va del sustraendo al minuendo.





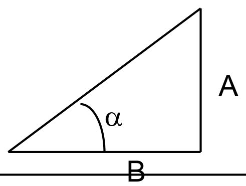
Observa que $\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$ ya que son vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentidos contrarios.

Tanto para la suma como para la resta. Si queremos obtener el valor del vector resultante, tendremos que hacer:

$$S^2 = A^2 + B^2 \,;\, S = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$D^2 = A^2 + B^2 \,;\, D = \sqrt{A^2 + B^2}$$

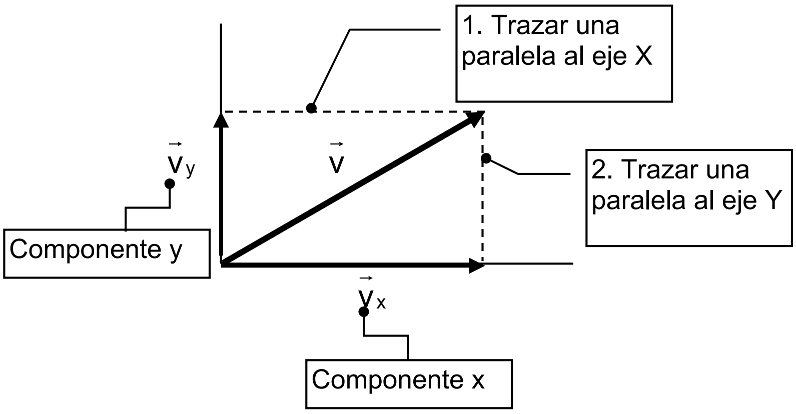
Si queremos saber el ángulo que forma con el eje x podemos utilizar la función tangente:



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{A}{B} \,;\, \alpha = \mathrm{invtg}\left(\frac{A}{B}\right)$$

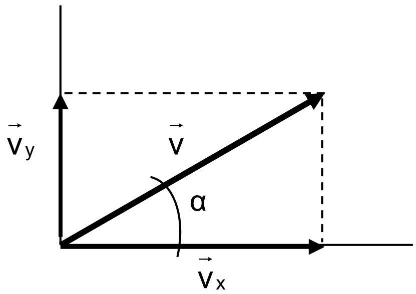
Componentes de un vector

Siempre podemos descomponer un vector en sus dos componentes. Es decir, **obtener otros dos vectores perpendiculares que, actuando a la vez, produzcan el mismo efecto que el vector considerado actuando solo.**



NOTA
*útil para descomponer el movimiento y las fuerzas (horizontal y vertical)

Para obtener el valor (módulo) de las componentes:



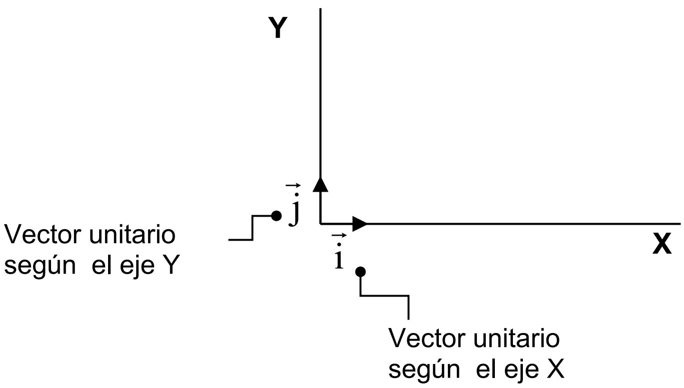
$v_x = v . \cos \alpha$
$v_y = v . \operatorname{sen} \alpha$

NOTA
* usamos ángulos con tiros parabólicos o inclinaciones

Expresión de un vector en función de los vectores unitarios

Aprovechando el concepto de producto de un escalar por un vector se pueden obtener una notación muy útil para representar los vectores.

Se definen en primer lugar los llamados **vectores unitarios**. Esto es, unos vectores que tienen módulo uno (1), cuya dirección es la de los ejes coordenados y su sentido el sentido positivo de éstos.



Usando estos vectores es muy fácil escribir vectores cuya dirección sea la de los ejes coordenados:

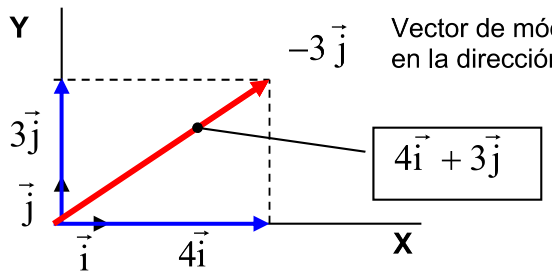
$3\,\vec{i}$ Vector de módulo 3 que apunta en la dirección positiva del eje X.

$-2\,\vec{i}$ Vector de módulo 2 que apunta en la dirección negativa del eje X.

$4\,\vec{j}$ Vector de módulo 4 que apunta en la dirección positiva del eje Y.

$-3\,\vec{j}$ Vector de módulo 3 que apunta en la dirección negativa del eje Y.

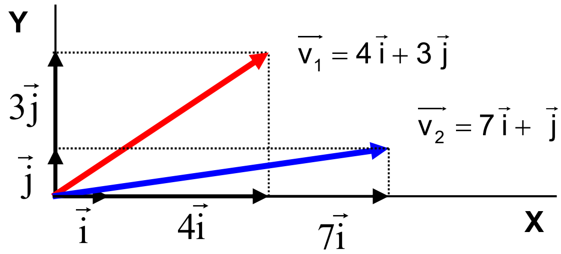
… y también resulta muy sencillo expresar cualquier otro vector:



La notación en función de los vectores unitarios da una gran información y facilita muchísimo el cálculo con vectores.

El vector $\overrightarrow{v} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, es un vector cuyo módulo vale: $v = \sqrt{4^2 + 3^2} = 25$ y que forma un ángulo con el eje x de: $tg\,\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75\,;\, \alpha = inv\,tg\,(0{,}75) = 36{,}87\,^0$

Imaginemos dos vectores concurrentes en el origen expresados en función de los vectores unitarios…



Su suma, se obtendrá trazando el paralelogramo correspondiente. Al hacerlo observamos que el vector resultante tiene por componente x el vector:

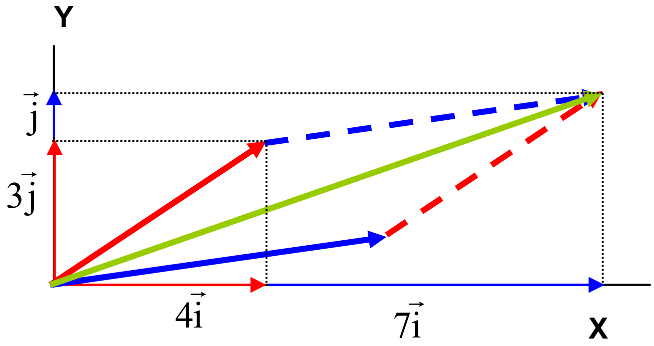
$$\vec{v}_x = 4\,\vec{i} + 7\,\vec{i} = 11\vec{i}$$

y por componente y el vector:

$$\vec{v}_y = 3\,\vec{j} + \vec{j} = 4\,\vec{j}$$

Por tanto el vector suma tendrá por componentes:

$$\vec{S} = 11\vec{i} + 4\,\vec{j}$$



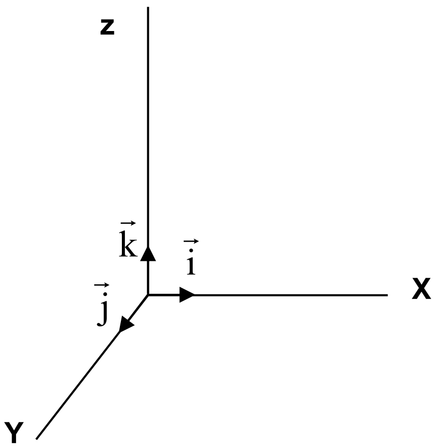
Para sumar vectores, se suman sus componentes:

$$\vec{S} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \left(4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\right) + \left(7\,\vec{i} + \vec{j}\right) = 11\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

De forma análoga podríamos concluir que para restar vectores, se restan sus componentes:

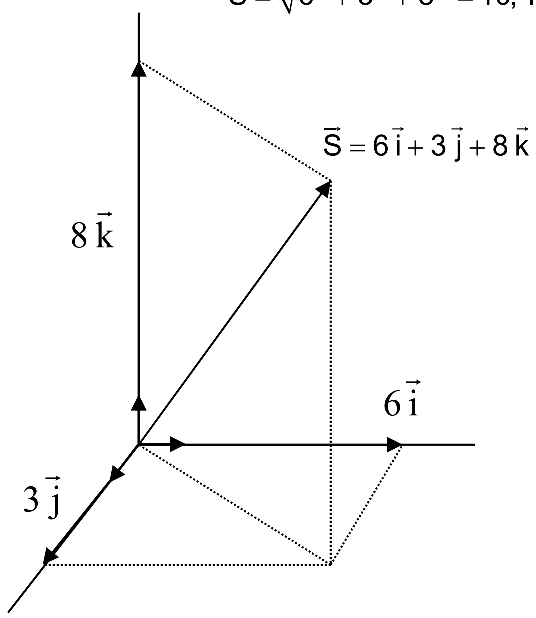
$$\vec{D} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \left(4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\right) - \left(7\,\vec{i} + \vec{j}\right) = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

Para trabajar en tres dimensiones solamente hay que definir un tercer vector unitario (k) orientado según el eje Z.



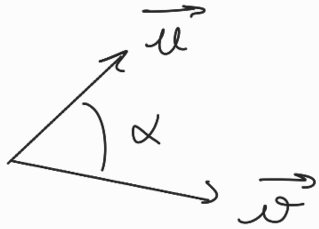
Cualquier vector puede entonces ser expresado como suma de sus tres componentes. La suma y resta se realizan de forma análoga a lo visto en dos dimensiones. Para calcular el módulo:

$$S = \sqrt{6^2 + 3^2 + 8^2} = 10{,}44$$



PRODUCTO ESCALAR

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\overbrace{\vec{u},\vec{v}}^{\alpha})$$



$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

→ Propiedades:

- vectores ortogonales ($\perp$): $\vec{u} \perp \vec{v} \overset{\alpha=90^\circ}{\Rightarrow} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- vectores paralelos ($//$): $\vec{u} \,//\, \vec{v} \underset{\alpha=0^\circ}{\Rightarrow} \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$

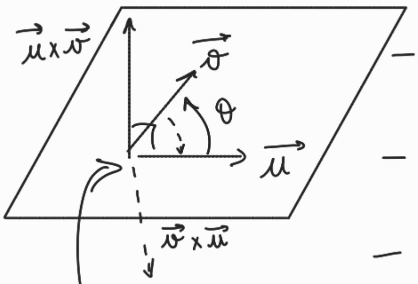
↳ se suelen usar para encontrar proyecciones de vectores (*componentes de un vector)

PRODUCTO VECTORIAL

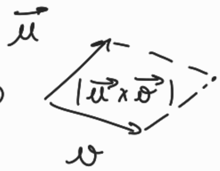
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

$$= \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ -(u_1 v_3 - v_1 u_3) \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$$

*Para cada fila "tapar" los valores correspondientes y hacer det (2x2) restante.



- $\vec{u} \times \vec{v} \perp$ a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}|$ = área paralelogramo



- $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$.

*regla mano derecha