En este tema, se estudian en mayor profundidad las diferentes fuerzas más comunes.

Dpto. Física y Química	**FUERZAS DE ROZAMIENTO (deslizamiento)**	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

Las fuerzas de rozamiento surgen:

- Cuando a un cuerpo en reposo sobre un plano se le aplica una fuerza para intentar ponerlo en movimiento (aunque no llegue a deslizar). **Fuerza de rozamiento estática (F_s)**
- Cuando un cuerpo desliza sobre un plano**. Fuerza de rozamiento cinética (F_k).**

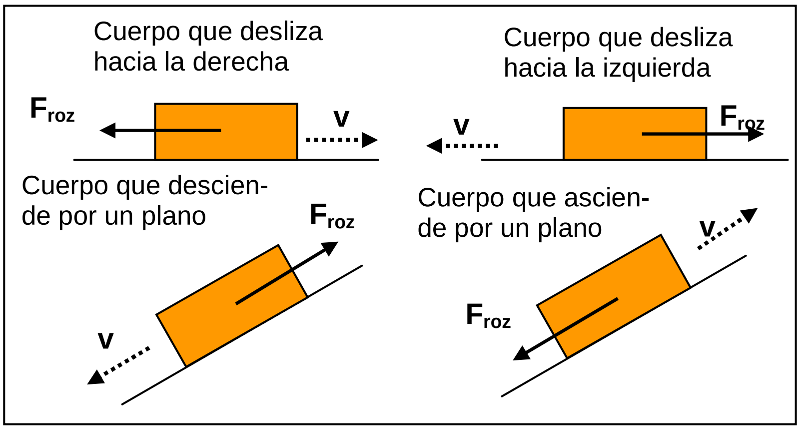
Aunque la naturaleza de la interacción responsable de las fuerzas de rozamiento no es bien conocida, parece que son debidas a interacciones entre las moléculas de ambos cuerpos en los lugares en los que las superficies están en contacto.

FUERZA DE ROZAMIENTO CINÉTICA

La fuerza de rozamiento cinética, F_k, aparece cuando un cuerpo desliza, por ejemplo, sobre un plano.

De las mediciones experimentales se deduce que:

- La fuerza de rozamiento siempre se opone al deslizamiento del objeto.
- Es paralela al plano.
- Depende da la naturaleza y estado de las superficies en contacto.
- Es proporcional a la fuerza normal.
- Es independiente de la velocidad del cuerpo, mientras ésta no sea muy elevada.
- Es independiente del área (aparente) de las superficies en contacto.



La fuerza de rozamiento siempre se opone al deslizamiento del cuerpo.

$$F_k = \mu \; N$$

Fuerza normal o acción del plano

Fuerza cinética de rozamiento.

Coeficiente de rozamiento. Número sin unidades. Depende de la naturaleza de las superficies y de su estado.

La fuerza de rozamiento cinética es ejercida por el plano sobre los cuerpos y es la responsable de que éstos disminuyan su velocidad si se dejan deslizar libremente. De aquí (primera ley de Newton) que si queremos que un cuerpo que desliza sobre un plano no disminuya su velocidad, hemos de empujarlo (aplicar una fuerza).

Como se puede observar **tiene un valor constante** y depende del valor de la normal y del coeficiente de rozamiento.

Algunos valores del coeficiente de rozamiento cinético:

Madera-madera: 0,25 – 0,50

Acero – acero : 0,57

Madera encerada – nieve: 0,1

FUERZA DE ROZAMIENTO ESTÁTICA

La fuerza de rozamiento estática aparece cuando aplicamos una fuerza a un cuerpo para intentar que deslice. Si la fuerza aplicada está por debajo de determinado valor no se iniciará el deslizamiento, debido a que la fuerza de rozamiento estática equilibra la fuerza aplicada. Si aumentamos el valor de la fuerza aplicada, aumenta el valor de la fuerza de rozamiento estática y el cuerpo permanece en reposo.

Si seguimos aumentando la fuerza llegará un momento que el cuerpo comienza a deslizar. **La fuerza de rozamiento estática no puede crecer indefinidamente. Su valor máximo viene dado por la expresión:**

$$\mathbf{F_S = \mu_S\ N}$$

Donde :

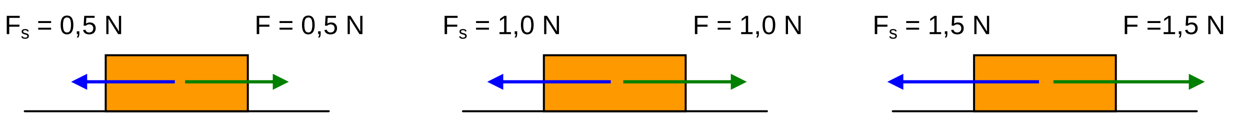
Fs es la fuerza de rozamiento estática.

μ_S es el coeficiente de rozamiento estático. Depende de la naturaleza de las superficies en contacto y de su estado. **Tiene un valor superior a μ_K.**

N es la normal al plano.

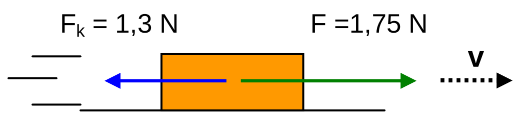
Una vez que la fuerza aplicada es superior al valor máximo que puede alcanzar la fuerza de rozamiento estática, el cuerpo comienza a deslizar y aparece la fuerza de rozamiento cinética.

Materiales	μ_s (Estático)	μ_k (Cinético)
Acero - acero	0,74	0,57
Aluminio - acero	0,61	0,47
Cobre - acero	0,53	0,36



Arriba. La fuerza aplicada aumenta y la fuerza de rozamiento estática toma el mismo valor. No hay deslizamiento.

Supongamos que el valor máximo que puede adquirir la fuerza de rozamiento estática sea 1,5 N. Si la fuerza aplicada supera ese valor (figura de la derecha) se inicia el deslizamiento y comienza a actuar la fuerza de rozamiento cinética, más pequeña que el valor máximo de la estática. El cuerpo desliza con aceleración constante.



La fuerza de rozamiento estática no tiene un valor definido. Depende del valor de la fuerza aplicada paralelamente al plano. Para calcularla hay que aplicar las condiciones de equilibrio: $\Sigma F = 0$

Si tiene un valor definido su "cota" máxima: $F_S = \mu_S$ N que, como se puede ver, depende tanto del valor de la normal como del coeficiente de rozamiento estático.

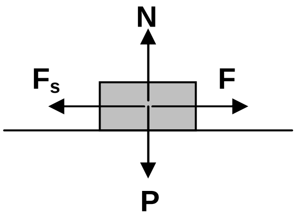
Ejemplo 1

Un bloque de madera de 250 g descansa sobre un plano.

Describir lo que ocurrirá si se comienza a tirar de él con una fuerza creciente y paralela al plano. Se sabe que el coeficiente de rozamiento estático vale 0,50 y el cinético 0,42.

Solución:

a) El diagrama de fuerzas actuantes sería:



Eje Y : N – P = 0. Luego N = P = m . g = 0,250 kg . 10 m/s^2 = 2, 50 N

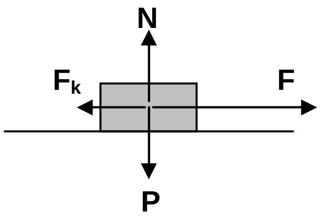
Valor máximo de la fuerza de rozamiento estática:

$$F_s = \mu_s . N = 0,50 . 2,50 \text{ N} = 1,25 \text{ N}$$

Por tanto, si vamos aumentando lentamente el valor de F, la fuerza de rozamiento estática irá creciendo correspondientemente, de tal manera que anula la fuerza aplicada. El bloque al estar sometido a una fuerza resultante nula permanecerá en reposo.

Esta situación se mantendrá para valores de F comprendidos entre 0,00 y 1,25 N. Una vez alcanzado ese valor, la fuerza de rozamiento estática no puede aumentar más. En consecuencia, si se sigue aumentando F, el bloque comenzará a deslizar y la fuerza de rozamiento estática será reemplazada por la de rozamiento cinética, siempre menor que el valor máximo de la de rozamiento estática.

El bloque comenzará a moverse con movimiento uniformemente acelerado.



Ejemplo.

Consideremos que aumentamos la fuerza aplicada hasta un valor de 2,00 N. El diagrama de fuerzas será ahora el representado a la izquierda y el cuerpo se moverá con una aceleración que se calcula de la siguiente manera:

$$F - F_k = m\,a \ ; \ a = \frac{F - F_k}{m} = \frac{F - \mu_k N}{m} = \frac{F - \mu_k\, m\, g}{m}$$

$$a = \frac{F - \mu_k\, m\, g}{m} = \frac{2,00 \text{ N} - 0,42 . 0,250 \text{ kg} . 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,250 \text{ kg}} = \frac{(2,00 - 0,42 . 0,250 . 10)\ \cancel{\text{kg}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,250\ \cancel{\text{kg}}} = 3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo serán (movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado)

v = 3,8 t
s = 1,9 t^2

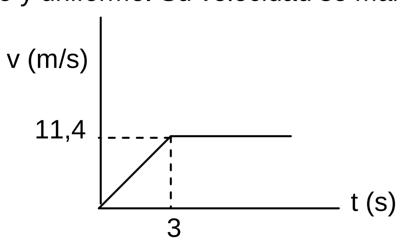
Si en determinado momento (pongamos que a los 3 s de iniciarse el deslizamiento) la fuerza F se ajusta haciéndose igual a la fuerza de rozamiento cinética ¿qué pasará?

A los 3 s de iniciarse el deslizamiento el cuerpo llevará una velocidad de:

$v_{(t = 3)}$ = 3,8 x 3 = 11,4 m/s.

Como a partir de este instante se va a cumplir que F = F_k sucederá que a = 0. Por tanto, el cuerpo continuará moviéndose con movimiento rectilíneo y uniforme. Su velocidad se mantendrá inalterada en el valor de 11,4 m/s.

La gráfica v/t sería:



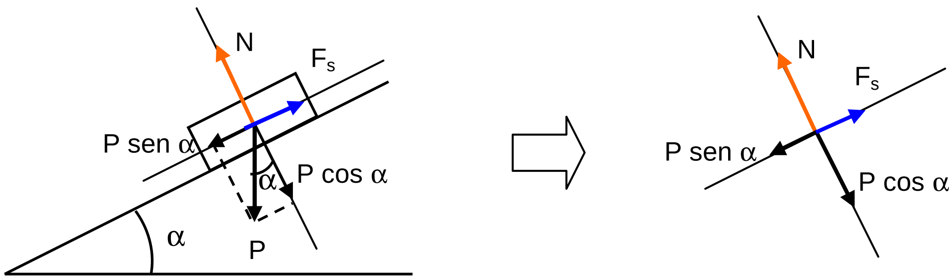
Ejemplo 2

Se sitúa un cuerpo sobre un plano inclinado 25^0. Discutir cuál ha de ser el valor del coeficiente de rozamiento estático para que no deslice.

Comentar el tipo de movimiento que llevará el cuerpo en caso de deslizamiento.

Solución:

El diagrama de fuerzas para el cuerpo situado sobe el plano será:



Por lo tanto según el eje x actúan dos fuerzas en sentido contrario, la fuerza de rozamiento estática y la componente del peso según esa dirección. Para que no haya movimiento deberá de cumplirse:

$$p \text{ sen } \alpha - F_s = 0 \; ; \; F_s = m\, g \text{ sen } \alpha$$

La fuerza de rozamiento estática no tiene valor definido y ajusta su valor al de la fuerza aplicada que tiende a poner el cuerpo en movimiento. Ahora bien, puede crecer hasta un valor máximo dado por:

$$F_s = \mu_s\, N = \mu_s\, m\, g \cos\alpha$$

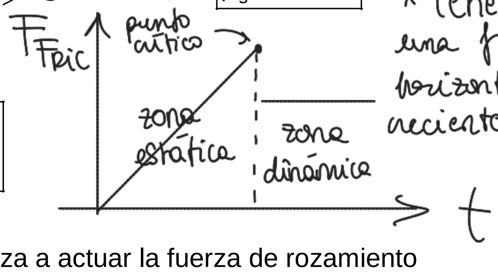
Si la fuerza aplicada (componente del peso que tiende a que el peso deslice hacia abajo) adquiere un valor superior, entonces el cuerpo deslizará. Por tanto, podremos escribir:

Si : $m\, g \text{ sen } \alpha \leq \mu_s\, m\, g \cos \alpha$ ***el cuerpo no desliza, permanecerá en reposo sobre el plano***

Operando: $m\, g \text{ sen } \alpha \leq \mu_s\, m\, g \cos \alpha \; ; \cancel{m\, g} \text{ sen } \alpha \leq \mu_s\, \cancel{m\, g} \cos \alpha \; ; \; \boxed{\mu_s \geq \tan\alpha}$

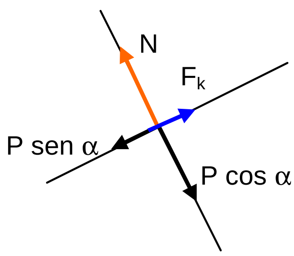
Por tanto podemos concluir :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \; \mu_s \geq \tan\alpha \; \text{ el cuerpo no desliza} \\ \text{Si } \; \mu_s < \tan\alpha \; \text{ el cuerpo desliza} \end{array}}$$



* tenemos una fuerza horizontal creciente en t.

En el momento en el que el cuerpo comienza a deslizar comienza a actuar la fuerza de rozamiento cinética**,** inferior a la estática, con lo que aparece una fuerza neta hacia abajo que hace que el cuerpo descienda con movimiento uniformemente acelerado:



$$\text{Eje Y: } N - P\cos\alpha = 0 \; ; \; N = m\, g \cos\alpha$$

$$\text{Eje X: } P \text{ sen}\alpha - F_k = m\, a$$

$$a = \frac{P \text{ sen}\alpha - F_k}{m} = \frac{m\, g \text{ sen}\,\alpha - \mu_k\, N}{m} = \frac{\cancel{m}\, g \text{ sen}\,\alpha - \mu_k\, \cancel{m}\, g \cos\alpha}{\cancel{m}}$$

$$\boxed{a = g\,(\text{sen}\,\alpha - \mu_k \cos\alpha)}$$

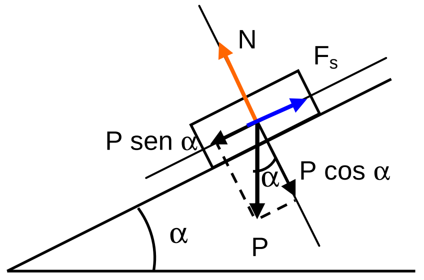
Ejemplo 3

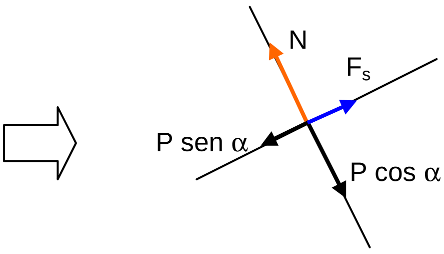
Un cuerpo de masa 300 g se encuentra apoyado en un plano inclinado 15 ^{0}. Si el coeficiente de rozamiento estático vale 0,40 y el cinético 0,30.

a) Comentar si el cuerpo deslizará por el plano o permanecerá quieto.
b) Si no desliza comentar qué se podría hacer para que bajara y calcular entonces la aceleración con la que desciende.

Solución:

a) El diagrama de fuerzas será:





La fuerza de rozamiento estática puede tomar un valor máximo dado por:

$F_s = \mu_s\ N = \mu_s\ m\ g \cos\alpha = 0{,}40\ .\ 0{,}300\ kg\ .10\ m/s^2 \cos 15\ ^0 = 1{,}16\ N$

La fuerza que tiende a hacerlo deslizar vale:

$P \text{ sen } \alpha = m\ g \text{ sen } \alpha = 0{,}300\ kg.\ 10\ m/s^2 \text{ sen } 15\ ^0 = 0{,}78\ N$

Por tanto la fuerza de rozamiento estática puede compensar a la componente del peso (la fuerza de rozamiento estática adquirirá un valor de 0,78 N) y ***el cuerpo no deslizará.***

b) Para que el cuerpo descienda la componente del peso deberá ser mayor que el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática (ver ejemplo anterior). Cuando sea igual se cumplirá:

$P \text{ sen } \alpha = F_s$

$$\cancel{m}\ \cancel{g} \text{ sen}\alpha = \mu_s\ \cancel{m}\ \cancel{g} \cos\alpha$$

$$\mu_s = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$$

Por tanto cuando tg α= 0,40 ; α = 21,8 ^{0}

Si el plano se inclina hasta este ángulo, el cuerpo (en teoría) no deslizaría, aunque bastaría tocarlo o una pequeña vibración para que se rompiera el equilibrio y comenzara a moverse. Si el ángulo supera este valor la fuerza de rozamiento estática no puede compensar a la componente del peso y el cuerpo comenzaría a deslizar.

Imaginemos que inclinamos el plano hasta 30 ^{0}.

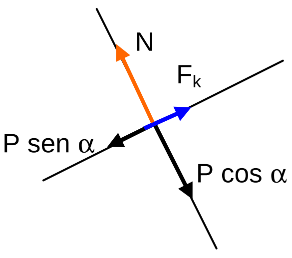
La fuerza de rozamiento estático tendrá ahora un valor máximo dado por:

$F_s = \mu_s\ N = \mu_s\ m\ g \cos\alpha = 0{,}40\ .\ 0{,}300\ kg\ .10\ m/s^2 \cos 30\ ^0 = 1{,}04\ N$

Y la componente del peso paralela al plano valdrá:

$P \text{ sen } \alpha = m\ g \text{ sen } \alpha = 0{,}300\ kg.\ 10\ m/s^2 \text{ sen } 30\ ^0 = 1{,}50\ N$

Su valor es superior al valor máximo que puede adquirir la fuerza de rozamiento estático. Por tanto la fuerza de rozamiento estática no puede compensar la componente del peso y el cuerpo deslizará:



$$\text{Eje Y}: \ N - P\cos\alpha = 0;\ N = m\,g\cos\alpha$$

$$\text{Eje X}: \ P\,\text{sen}\,\alpha - F_k = m\,a$$

$$a = \frac{P\,\text{sen}\,\alpha - F_k}{m} = \frac{m\,g\,\text{sen}\,\alpha - \mu_k\,N}{m} = \frac{\cancel{m}\,g\,\text{sen}\,\alpha - \mu_k\,\cancel{m}\,g\cos\alpha}{\cancel{m}}$$

$$a = g\,(\text{sen}\,\alpha - \mu_k\cos\alpha) = 10\,\frac{m}{s^2}\,(\text{sen}\,30^0 - 0{,}30\cos 30^0) = 2{,}40\,\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 3

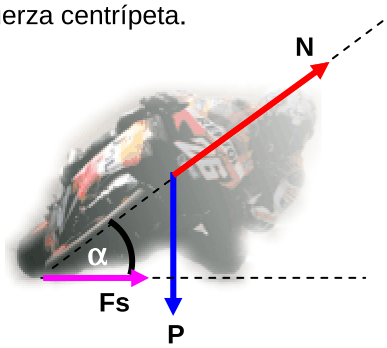
Estudiar las fuerzas actuantes sobre un motorista que toma una curva, los factores que intervienen y cómo influyen en la velocidad máxima a la que se puede tomar la curva.

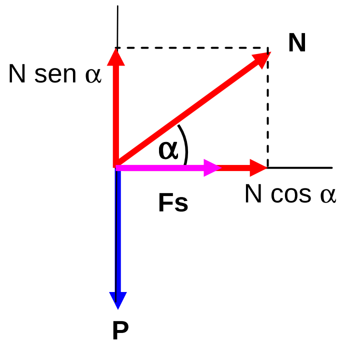
Solución:

Para que un motorista describa una curva debe existir una fuerza dirigida hacia el centro de la misma (fuerza centrípeta) que sea la responsable del cambio en la dirección de la velocidad (aceleración centrípeta). Si dicha fuerza no existe, o es insuficiente, no se podrá curvar la trayectoria y será imposible tomar la curva.

La fuerza centrípeta es suministrada por el rozamiento de los neumáticos contra el suelo (ver figura). La fuerza de rozamiento que se muestra es una fuerza de rozamiento estática, ya que fija instantáneamente el neumático al suelo impidiendo que deslice hacia el exterior de la curva. En consecuencia esta fuerza podrá tomar como máximo el valor: $F_s = \mu_s N$.

Normalmente existe una fuerza adicional que contribuye a la fuerza centrípeta y es la componente de la normal que aparece como consecuencia de la inclinación del motorista (ver diagrama de fuerzas) Con este gesto (inclinarse hacia el interior de la curva) se logra aumentar considerablemente la fuerza centrípeta.





Eje Y:

$$N\,\mathrm{sen}\,\alpha - m\,g = 0;\ N = \frac{m\,g}{\mathrm{sen}\,\alpha}$$

Eje X : Para describir la curva debe cumplirse $F_N = m \cdot a_N$

$$N\cos\alpha + F_s = m\,a_n;\ N\cos\alpha + F_s = m\frac{v^2}{R}$$

$$N\cos\alpha + \mu_s N = m\frac{v^2}{R};\ N(\cos\alpha + \mu_s) = m\frac{v^2}{R}$$

Sustituyendo el valor de N llegamos a la siguiente expresión para el cálculo de la velocidad:

$$N(\cos\alpha + \mu_s) = m\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{\cancel{m}\,g}{\mathrm{sen}\alpha}(\cos\alpha + \mu_s) = \cancel{m}\frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{g\,R\left(\frac{\cos\alpha + \mu_s}{\mathrm{sen}\alpha}\right)}$$

Como se puede ver la máxima velocidad depende del radio de la curva, del ángulo de inclinación y del coeficiente de rozamiento estático. Si suponemos una curva cerrada (R = 30 m), que el máximo ángulo de inclinación es de 40 ^{0} y un coeficiente estático de rozamiento de 0,80:

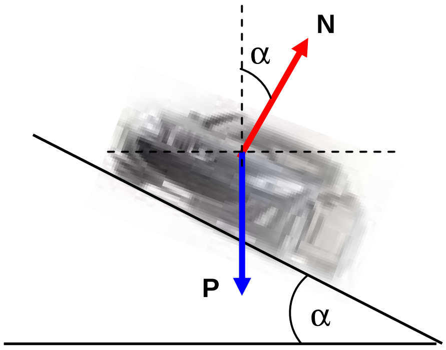
$$v = \sqrt{g\,R\left(\frac{\cos\alpha + \mu_s}{\mathrm{sen}\alpha}\right)} = \sqrt{10\,\frac{m}{s^2}\,30\,m\left(\frac{\cos 40^0 + 0{,}80}{\mathrm{sen}40^0}\right)} = 27{,}0\,\frac{m}{s} = 97{,}3\,\frac{km}{h}$$

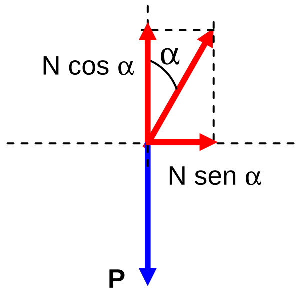
Es conocido que con el paso de la carrera los neumáticos se degradan (desgaste, derrapes, funcionamiento a temperatura inadecuada…) razón por la cual el coeficiente de rozamiento se verá afectado. Para la misma curva si suponemos que el coeficiente de rozamiento disminuye hasta un valor de 0,50 la máxima velocidad con la que hay garantías de poder describir la curva desciende hasta los 24,3 m/s. Esto es 87,5 km/h.

Ejemplo 4.

Peralte de curvas.

Las curvas se peraltan para aumentar la seguridad, de tal manera, que se pueda dar la curva aún en ausencia total de rozamiento (carretera helada). Como se observa en el dibujo al peraltar la curva la reacción del plano N, posee una componente que apunta en la dirección del centro de la trayectoria con lo que se suministra una fuerza centrípeta (N sen α) capaz de curvar la trayectoria del automóvil.





EjeY :

$$N\cos\alpha - m\,g = 0\,;\ N = \frac{m\,g}{\cos\alpha}$$

Eje X:

$$N\,\mathrm{sen}\,\alpha = m\,a_N = m\,\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{\cancel{m}\,g}{\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha = \cancel{m}\,\frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{g\,R\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

Como se puede ver la velocidad depende ahora del ángulo de peralte y del radio de la curva. Por ejemplo para una curva de 30 m de radio y un ángulo de peralte de 10^{0} podríamos dar la curva, con una fuerza de rozamiento nula, si vamos a una velocidad máxima de:

$$v = \sqrt{g\,R\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \sqrt{10\,\frac{m}{s^2}\,30\,m\,\mathrm{tg}\,10^0} = 7{,}3\,\frac{m}{s} = 26{,}3\,\frac{km}{h}$$

Si existe rozamiento al aumentar la fuerza centrípeta aumentará también la velocidad con la que se puede describir la curva.

	Determinación del valor de "g" **con un péndulo simple**	**IES La Magdalena.** **Avilés. Asturias**

El movimiento de un péndulo simple que oscila queda caracterizado por su periodo, o tiempo que tarda en dar una oscilación completa. Dicho periodo es independiente de la amplitud si esta no es muy grande y, en este caso, puede calcularse usando la siguiente ecuación:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si tenemos valores experimentales de la longitud y el periodo correspondiente, podremos determinar el valor de "g". Un resumen de los resultados obtenidos experimentalmente se muestra en la tabla siguiente:

Longitud (m)	0,600	0,550	0,500	0,450	0,400	0,350	0,300	0,250	0,200	0,150
T (s)	1,549	1,490	1,417	1,346	1,263	1,190	1,091	1,011	0,888	0,780

1. MÉTODO GRÁFICO

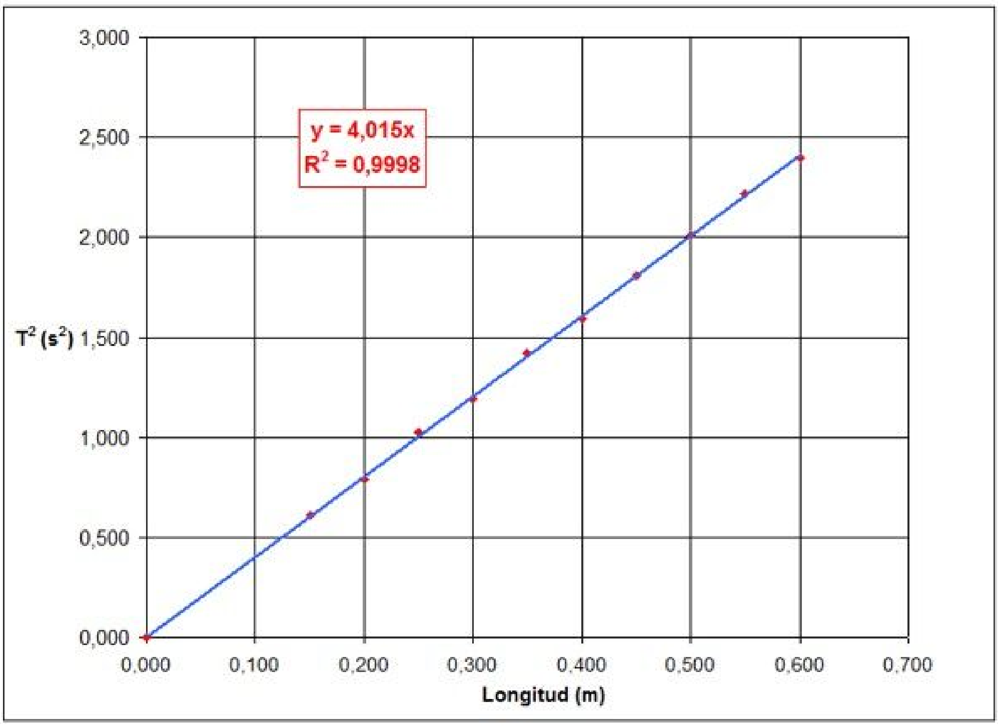
Operando con la ecuación que relaciona periodo y longitud del péndulo (válida para oscilaciones cuya amplitud no sea mayor de unos 20^0) llegamos a la siguiente expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\,\frac{L}{g} = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L$$

Si representamos T^2 frente a L obtendremos una recta de pendiente $\dfrac{4\pi^2}{g}$

La representación gráfica de los resultados experimentales se muestra en la imagen:



La ecuación de la recta obtenida se muestra en el recuadro rojo (R es un coeficiente que indica cómo la recta trazada se adapta a los puntos. Un valor igual a uno indica que la adaptación es total).

Adaptando la ecuación obtenida a la representación realizada, donde y = T^2 y x = L, tenemos : ***T^2 = 4,015 L***, por tanto:

$$\frac{4\pi^2}{g} = 4{,}015$$

$$g = \frac{4\pi^2}{4{,}015} = 9{,}83\ \frac{m}{s^2}$$

Avilés (Asturias), lugar donde se ha realizado la experiencia, se encuentra situado a una latitud de $43{,}5^0$ N. El valor de g para esta latitud (ver: *http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/forma/forma.htm)* es ***9,804 m/s^2 . Tomando 9,80 como valor verdadero*** podemos estimar el error cometido:

$$E_a = V_{med} - V_{verd} = (9{,}83 - 9{,}80)\ \frac{m}{s^2} = 0{,}03\ \frac{m}{s^2}$$

$$E_r = \frac{|E_a|}{V_{verd}}.100 = \frac{0{,}03\ \cancel{\frac{m}{s^2}}}{9{,}80\ \cancel{\frac{m}{s^2}}}.100 = 0{,}3\ \%$$

Podríamos, por tanto, expresar el valor de g como:

$$\boxed{g = 9{,}83 \pm 0{,}03\ \frac{m}{s^2}}$$

2. MÉTODO ANALÍTICO

Operando con la ecuación que relaciona periodo y longitud del péndulo (válida para oscilaciones cuya amplitud no sea mayor de unos 20^0), llegamos a la siguiente expresión:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\boxed{g = 4\,\pi^2\,\frac{L}{T^2}}$$

Calculando "g" para cada uno de los pares de valores de L y T, obtenemos:

Longitud (m)	0,600	0,550	0,500	0,450	0,400	0,350	0,300	0,250	0,200	0,150
T (s)	1,549	1,490	1,417	1,346	1,263	1,190	1,091	1,011	0,888	0,780
g (m/s^2)	9,87	9,78	9,83	9,81	9,90	9,76	9,95	9,66	10,01	9,73

La media de los valores obtenidos es: **g = 9,83 m/s^2**

Para calcular el error cometido podemos operar de dos maneras:

1. ***Calculamos el error (absoluto y relativo) máximo cometido***. Para las medidas realizadas la que más se aleja de la media es 10,01 m/s^2. Luego:

$$E_a = V_{med} - V_{verd} = (10{,}01 - 9{,}83)\frac{m}{s^2} = 0{,}18\,\frac{m}{s^2}$$

$$E_r = \frac{|E_a|}{V_{verd}}.100 = \frac{0{,}18\,\cancel{\frac{m}{s^2}}}{9{,}83\,\cancel{\frac{m}{s^2}}}.100 = 1{,}8\%$$

Por tanto podemos expresar la medida en la forma (ver http://bit.ly/1Ch4fsU) :

$$\boxed{g = 9{,}8 \pm 0{,}2\,\frac{m}{s^2}}$$

2. ***Calculamos la incertidumbre de la media según:***

$$\boxed{\sigma_m = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - \overline{x})^2}{n\,(n-1)}}}\; x_i = \text{medida i}\,;\, \overline{x} = \text{media}\,;\, n = \text{número de datos}$$

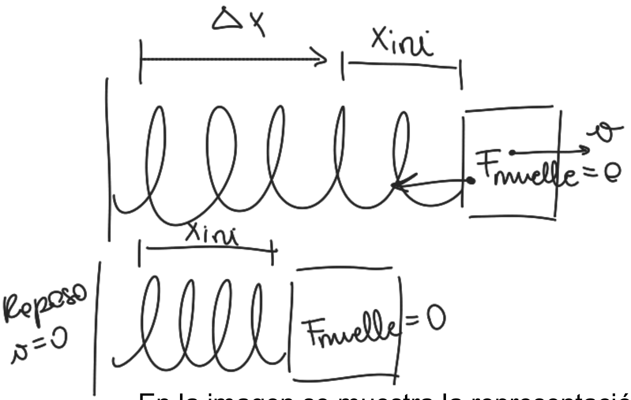
Para este caso:

$$\sigma = 0{,}033\,\frac{m}{s^2} \quad \text{Luego:} \; \boxed{g = 9{,}83 \pm 0{,}03\,\frac{m}{s^2}}$$

Dpto. Física y Química	**Estudio de un muelle real**	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

El objetivo principal de esta experiencia es la determinación de la constante elástica de un muelle a partir del estudio de las oscilaciones de una masa colgada del mismo.

Cuando se cuelga una masa de un muelle, esta oscilará con movimiento armónico simple debido a la presencia de una fuerza recuperadora (F = k x) que actúa siempre en sentido contrario al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio. Donde $k = m\,\omega^2$:



$$k = m\,\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{k}m} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

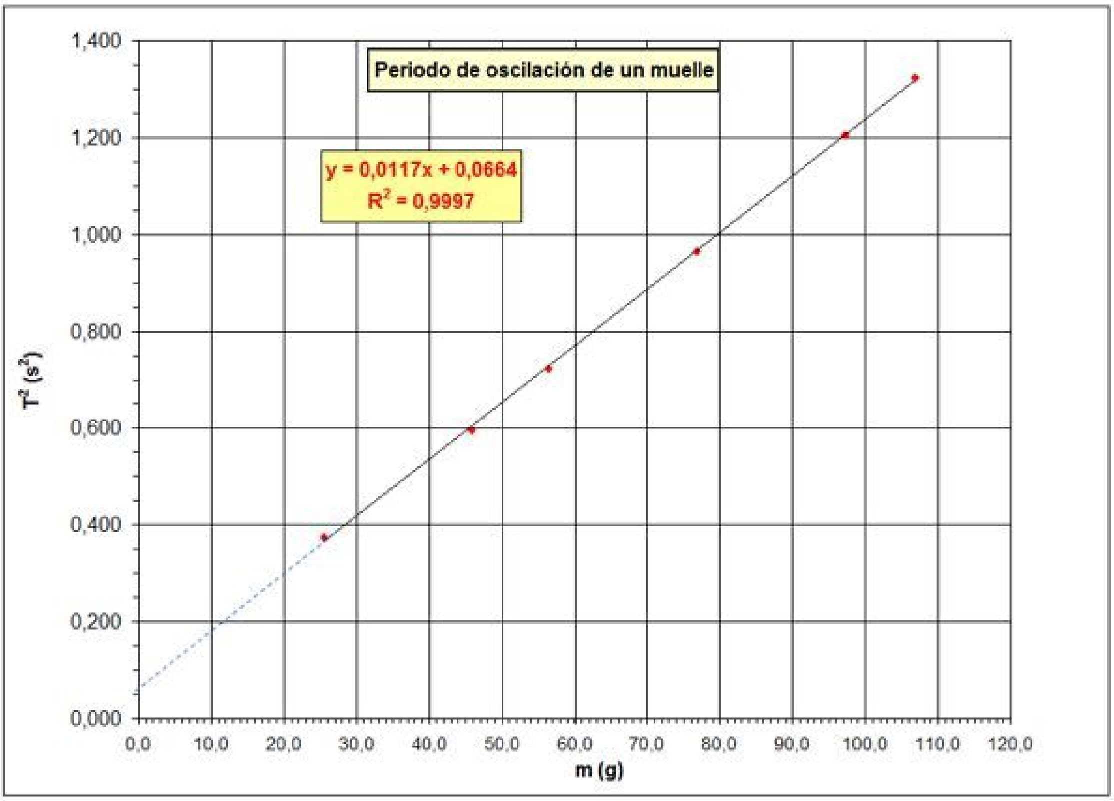
$$\boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)m}$$

se opone siempre al mov.

$F = -k\Delta x.$

1. MÉTODO GRÁFICO

En la imagen se muestra la representación gráfica del cuadrado del periodo (T^2) frente a la masa en gramos (datos obtenidos experimentalmente).Tal y como predice la ecuación anterior, la gráfica es una recta con pendiente 0,0117 s^2/g. De aquí podemos extraer el valor de la constante elástica del muelle:



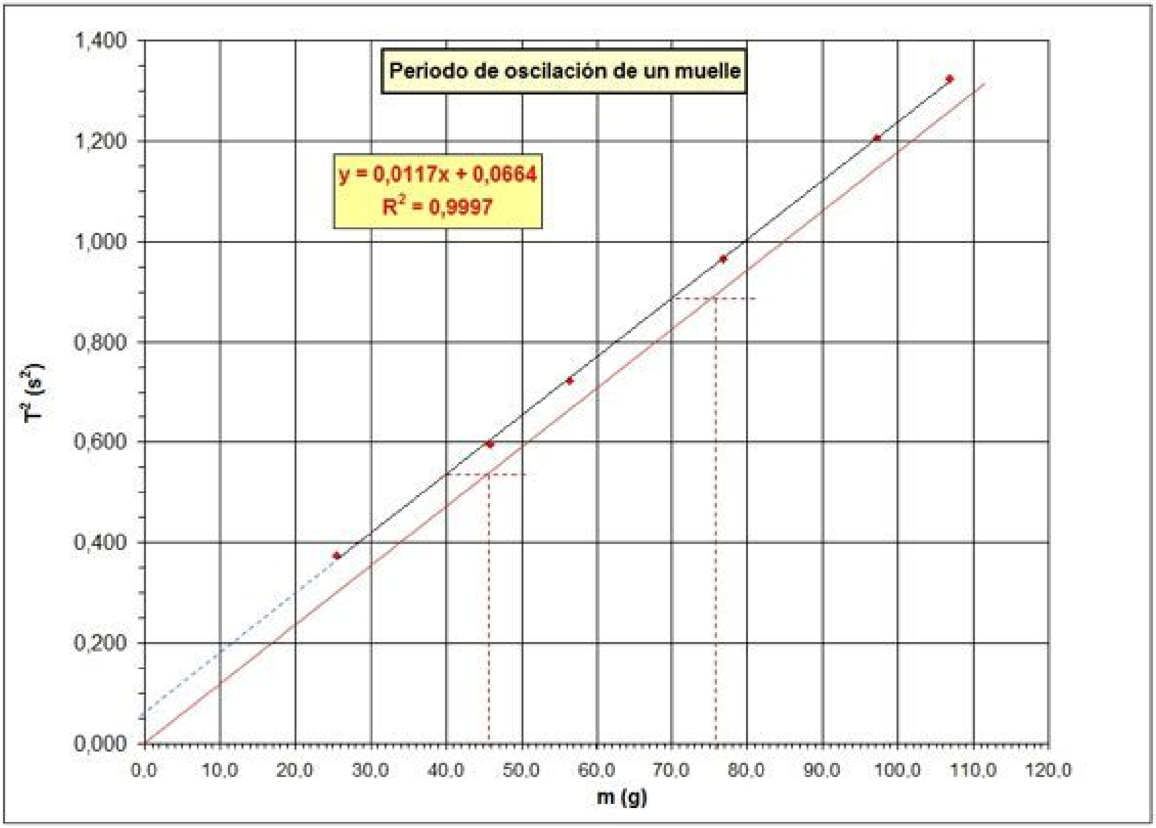
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)\;m$$

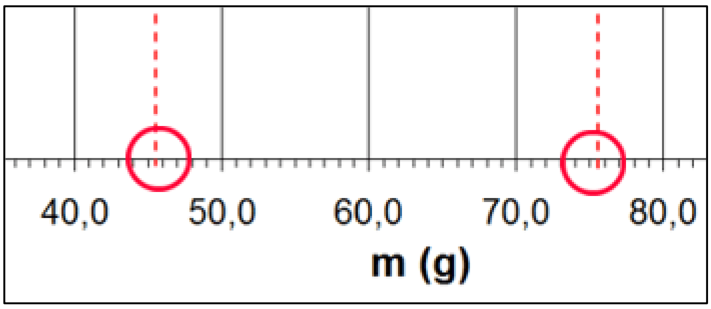
$$k = \frac{4\pi^2}{0{,}0117\,\dfrac{s^2}{g}} = 3374\,\frac{\cancel{g}}{s^2}\,\frac{1\,kg}{10^3\,\cancel{g}} = 3{,}37\,\frac{kg}{s^2} = 3{,}37\,\frac{N}{m}$$

No obstante, ***la recta no pasa por el origen,*** tal y como predice la ecuación obtenida. La ordenada en el origen tiene un valor de 0,0664 s^2, valor nada despreciable, que no puede atribuirse a errores experimentales a la hora de obtener los datos.

¿Cuál es la razón de esta falta de concordancia entre los datos experimentales y la ecuación teórica?

En la figura que se muestra (debajo) se ha desplazado la línea obtenida hasta que coincida justamente con el origen de ordenadas (línea roja). Sería ésta la situación ideal predicha por la ecuación vista más arriba.
La línea tiene idéntica pendiente que la anterior (por lo tanto igual k), pero se puede observar (líneas punteadas verticales y horizontales) que ***la gráfica se corresponde con la de un cuerpo cuya masa es unos 5,5 g superior a la realmente colgada***.





En el detalle que se puede ver a la derecha se muestra este exceso de masa en dos puntos distintos (5,5 g).

En la descripción teórica planteada inicialmente ***se consideraba nula la masa del muelle,*** aunque un estudio más realista de la situación debería de considerar que esta masa no es nula.

El tratamiento matemático del problema no es sencillo, pero se concluye que ***ha de asociarse al muelle una "masa efectiva", o masa equivalente, igual a un tercio de su masa (m_e =1/3 m_0)***. Esta masa debe de añadirse a la del cuerpo para que el periodo de oscilación coincida con el medido realmente. Dado que en nuestro caso la masa del muelle era de 15,4 g, su masa efectiva sería de 5,1 g lo que se corresponde con el exceso de masa indicado con un error de un 7,8%.

La masa efectiva del muelle puede también calcularse si se reescribe la ecuación que relaciona T^2 y ***m*** añadiendo a la masa del cuerpo la masa efectiva del muelle, m_e:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}(m+m_e); \quad \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2}{k}m_e}$$

Según esta ecuación al representar T^2 frente a m se obtendrá una recta de pendiente $\frac{4\pi^2}{k}$ y ordenada en el origen $\frac{4\pi^2}{k} m_e$

Como la ordenada en el origen de la gráfica obtenida vale 0,0664 s^2, podemos calcular el valor de la masa efectiva del muelle (llamando b a la ordenada en el origen) de la forma siguiente:

$$b = \frac{4\pi^2}{k} m_e \;;\; m_e = \frac{b\,k}{4\pi^2} = \frac{0,0664\ \cancel{s^2}\ 3374\ \frac{g}{\cancel{s^2}}}{4\pi^2} = 5,7\ g$$

Resultado que coincide, aproximadamente, con el obtenido gráficamente.

2. MÉTODO ANALÍTICO

Podemos obtener la constante elástica del muelle a partir de los datos de la experiencia (para conocer los detalles experimentales visitar **FisQuiWeb**: *http://bit.ly/1qJSUe4*) y que se recogen en la tabla adjunta

Masa (g)	25,5	45,9	56,4	76,8	97,2	106,8
T (s)	0,612	0,772	0,850	0,983	1,097	1,150
T^2 (s^2)	0,374	0,596	0,723	0,0966	1,204	1,323
K (N/m)	2,69	3,04	3,08	3,14	3,19	3,19

Para el cálculo de k (última fila) se ha procedido en la forma en que se detalla a continuación, y a modo de ejemplo, para los datos de primera columna:

$$k = 4\pi^2\left(\frac{m}{T^2}\right) = 4\pi^2\left(\frac{0,0255\ kg}{0,374\ s^2}\right) = 2,69\frac{kg}{s^2} = 2,69\frac{N}{m}$$

A partir de los datos obtenidos para la constante obtenemos el valor medio que será considerado el valor verdadero:

$$\boxed{k_{med} = 3,06\frac{N}{m}}$$

Calculamos el error absoluto de la medida que más se desvía del valor verdadero (2,69 N/m)

$$E_a = V_{med} - V_{verd} = (2,69 - 3,06)\frac{N}{m} = -0,37\ \frac{N}{m} \approx -0,4\ \frac{N}{m}$$

El error relativo (que nos da la calidad de la medida) será: $E_r = \frac{E_a}{V_{verd}}.100 = \frac{0,37\ \cancel{\frac{N}{m}}}{3,06\ \cancel{\frac{N}{m}}}.100 = 12,1\%$

La medida la expresaremos con la incertidumbre en la forma (ver cálculo de errores en FisQuiWeb):

$$\boxed{k = (3,1 \pm 0,4)\ \frac{N}{m}}$$

Otra posibilidad consiste en calcular la incertidumbre de la media según:

$$\boxed{\sigma_m = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - \overline{x})^2}{n\,(n-1)}}}\quad x_i = \text{medida i}\,;\,\overline{x} = \text{media}\,;\,n = \text{número de datos}$$

Para este caso: $\sigma_m = 0,08\ \frac{N}{m}$ Luego: $\boxed{k = (3,06 \pm 0,08)\ \frac{N}{m}}$

El error relativo para esta incertidumbre sería: $E_r = \frac{E_a}{V_{verd}}.100 = \frac{0,08\ \cancel{\frac{N}{m}}}{3,06\ \cancel{\frac{N}{m}}}.100 = 2,6\ \%$