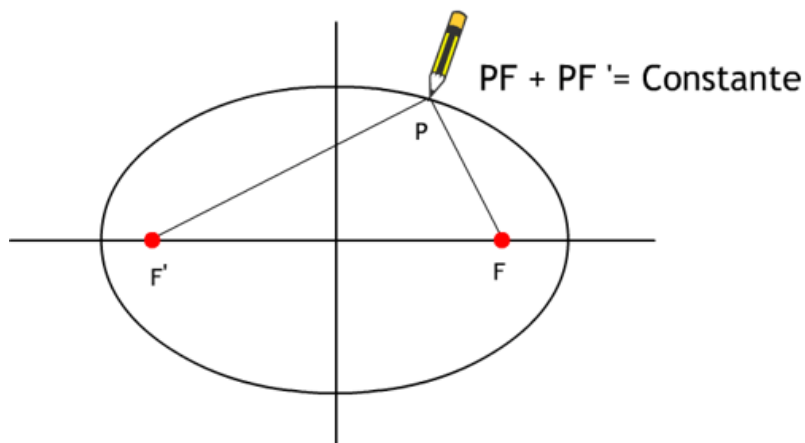


Sobre la elipse

**IES La Magdalena.
Avilés. Asturias**

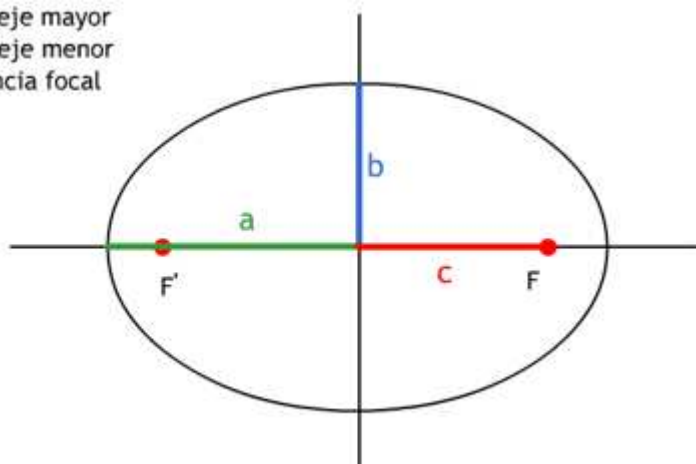
La elipse es una curva cerrada y plana en la que todos sus puntos cumplen la condición de que la suma de distancias a dos puntos (F y F') llamados focos es constante.



Uno de los métodos usados para construir una elipse se basa, precisamente, en esta definición.

Como se puede ver en la imagen si se fija un hilo a dos puntos (F' y F) y se dibuja una línea con un lápiz tal y como se indica en la figura el resultado es una elipse ya que $F'P + FP = \text{cte}$.

a = semieje mayor
 b = semieje menor
 c = distancia focal



Los parámetros más importantes de la elipse son:

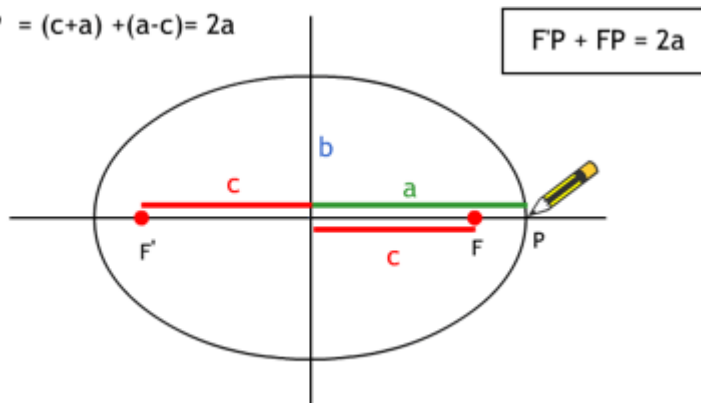
El semieje mayor, a .

El semieje menor, b .

La distancia focal, c .

El eje mayor tendrá por tanto una longitud igual a $2a$, el menor a $2b$ y la distancia entre focos será igual a $2c$

$$F'P + FP = (c+a) + (a-c) = 2a$$

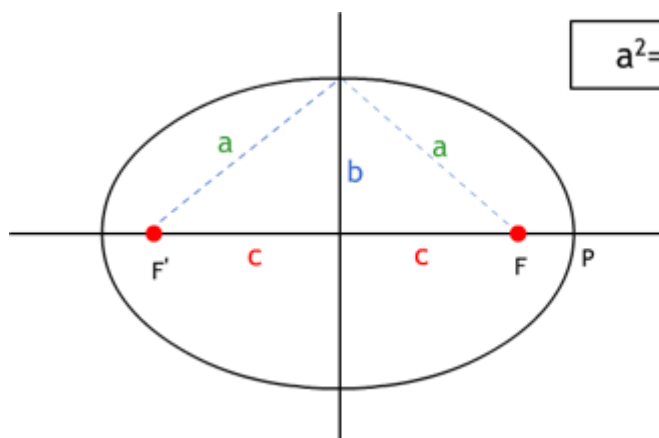


La suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos siempre vale $2a$.

Efectivamente como podemos ver en la imagen de la izquierda

$$F'P + FP = 2a$$

Esta igualdad será cierta para todos los puntos, ya que por definición la suma de distancias es invariable.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Entre el semieje mayor, a , el menor, b , y la distancia focal, c , se establece la siguiente relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Para una longitud dada del semieje mayor, a , el que una elipse sea más o menos "achatada" (lo que se mide con el parámetro llamado "**excentricidad**") depende de la distancia entre los focos.

Se denomina excentricidad de la elipse a la relación entre la distancia focal y el semieje mayor:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

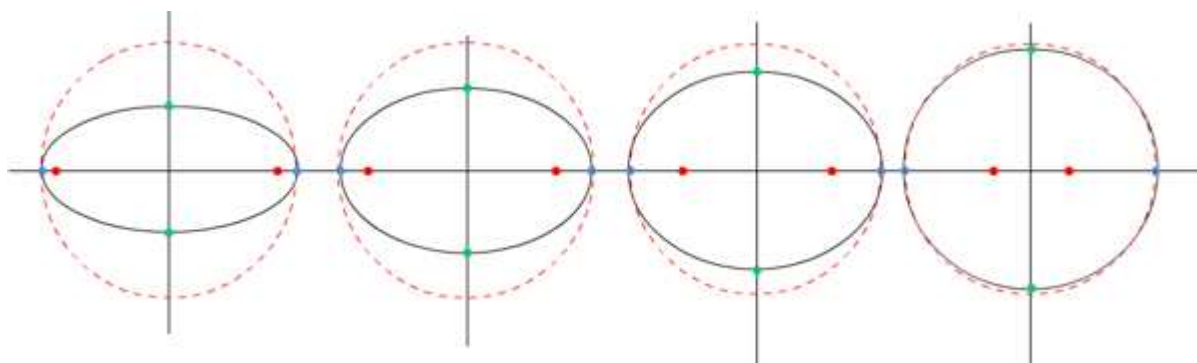
Si $c = 0$, la excentricidad es nula y tenemos una circunferencia ($a = b$)

Si $c = a$, la excentricidad es la unidad y tenemos una recta

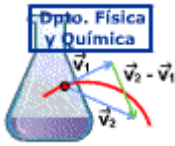
Por tanto la excentricidad de una elipse puede tomar valores comprendidos entre cero y uno.

Recordando la expresión de c en función de a y b (ver más arriba) también podemos expresar la excentricidad como:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



Elipses con distinta excentricidad. Todas tienen idéntico el semieje mayor. Observar que cuando la distancia entre los focos se acorta, la excentricidad de la elipse disminuye acercándose a la circunferencia (línea punteada).



FUERZAS ENTRE MASAS Y ENTRE CARGAS

IES La Magdalena.
Avilés. Asturias

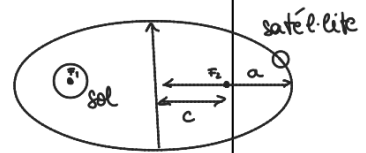
En el s. XVI **Nicolás Copérnico (1473 – 1543)** propuso una hipótesis revolucionaria para explicar el movimiento de los planetas: el Sol pasaba a ser el centro del sistema (lugar que hasta entonces había ocupado la Tierra) y los planetas se movían en órbitas circulares en torno suyo.

Casi un siglo después **Johannes Kepler (1571 – 1630)** tras un concienzudo análisis de miles de datos astronómicos recopilados por el astrónomo Tycho Brahe enunció las leyes del movimiento planetario (hoy conocidas como **Leyes de Kepler**)

Leyes de Kepler

• Primera Ley de Kepler (1609)

"Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos."



• Segunda Ley de Kepler (1609)

"El vector de posición de cualquier planeta con respecto del Sol (vector que tiene el origen en el Sol y su extremo en el planeta considerado) barre áreas iguales en tiempos iguales."

En la figura (si se supone que t es el mismo): $A_1 = A_2$

De forma general: $\frac{A_1}{t} = \frac{A_2}{t}$. El cociente $v_A = \frac{A}{t}$ mide la rapidez con que el radio vector barre

el área A y se conoce como **velocidad areolar**, luego podemos enunciar la segunda ley de una forma alternativa diciendo que "los planetas describen sus órbitas alrededor del Sol con velocidad areolar constante".

conservación del momento angular ($\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$)

• Tercera Ley de Kepler (1619)

"Los cuadrados de los periodos de revolución (T) son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol (r)."

$$T^2 = k r^3$$

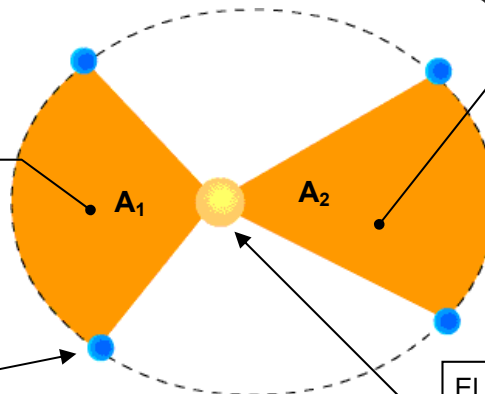
Donde k es una constante de proporcionalidad (constante de Kepler) que depende de la masa del astro central. Para el Sistema Solar: $k = 3 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$

r coincide con el valor del **semieje mayor** para órbitas elípticas. Tenemos $T^2 \propto r^3$

Newton $\Rightarrow F_{grav} = G \frac{M m}{r^2} = m a$

DI $\Leftrightarrow G \frac{M}{r^2} = \omega^2 r$
 $\Rightarrow r^3 = \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^2 G M T^2$
 $\Rightarrow r^3 = T^2 \frac{G M}{4\pi^2}$ k (no depende del satélite)

Área barrida (en un tiempo t) por el radio vector cuando el planeta está en la zona más próxima al Sol.



El planeta describe una órbita elíptica.

Área barrida (en un tiempo t) por el radio vector cuando el planeta está en la zona más alejada.

El Sol está situado en uno de los focos de la elipse

¿Cuánto de elíptica?

Aunque estrictamente la órbita descrita por la Tierra en su movimiento alrededor del Sol es una elipse, realmente se aproxima mucho a un círculo.

$$e = c/a \text{ con } c \ll a$$

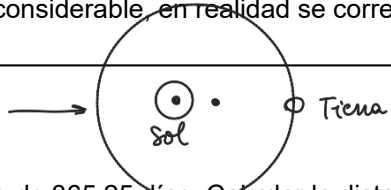
La excentricidad de la elipse para la órbita terrestre tiene un valor $e = 0,017$. Una excentricidad cero corresponde a un círculo. Cuanto más se aleje de cero más aplanada será la elipse. El valor máximo, 1, se correspondería con una recta.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más próximo (perihelio) es de 147 100 000 km.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más alejado (afelio) es de 152 100 000 km.

Aunque la diferencia (5 000 000 km) puede parecer considerable, en realidad se corresponde con un escaso 3 % de diferencia entre ambos valores.

'Foto real'



Ejemplo 1

La Tierra orbita alrededor del Sol con un periodo de 365,25 días. Calcular la distancia media entre la Tierra y el Sol.

DATOS: La constante de Kepler para el Sistema Solar vale: $k = 3 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$

Solución:

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k r^3$ y despejamos la incógnita (r):

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(3,16 \cdot 10^7)^2 \cancel{\text{s}^2}}{3 \cdot 10^{-19} \frac{\cancel{\text{s}^2}}{\text{m}^3}}} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,49 \cdot 10^8 \text{ km} = 149 \cdot 10^6 \text{ km}$$

NOTA: La distancia media entre el Sol y la Tierra es de unos 150 millones de km (149 597 870 km) y es usada en astronomía como unidad para medir distancias. Se le da el nombre de **unidad astronómica (ua)**.

Ejemplo 2

Marte se encuentra situado a una distancia media del Sol de 1,52 ua. ¿Cuál es el periodo orbital de Marte alrededor del Sol?

DATOS: $1 \text{ ua} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$; $k = 3 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$

Solución:

$$1,52 \cancel{\text{ ua}} \frac{1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}}{1 \cancel{\text{ ua}}} = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k r^3$ y despejamos la incógnita (T):

$$T = \sqrt{k r^3} = \sqrt{3 \cdot 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3} (2,28 \cdot 10^{11})^3 \cancel{\text{m}^3}} = 5,96 \cdot 10^7 \text{ s} = 690,2 \text{ días}$$

NOTA: El periodo orbital para Marte ("año marciano") es de 686,98 días.

Las leyes de Kepler son fenomenológicas. Es decir, se limitan a describir de manera cinemática cómo se mueven los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, **pero nada dicen acerca de las causas que provocan ese movimiento.**

Aunque las leyes fueron enunciadas inicialmente para el Sistema Solar son aplicables a cualquier objeto celeste que orbite alrededor de otro astro central.

Fue **Isaac Newton (1642 – 1727)** quien dio el siguiente gran paso en la explicación del movimiento planetario al enunciar su **Ley de Gravitación Universal** (formulada en 1666 y publicada en 1687)

Ley de Gravitación Universal

“Los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.”

$$F = G \frac{m \cdot M}{d^2}$$

Masas de los cuerpos en kg

$d_{\text{tot}} = R_{\text{planeta}} + d_{\text{sup planeta} \rightarrow \text{satélite}}$

Fuerza de atracción gravitatoria. Si se consideran cuerpos grandes, la fuerza apunta hacia el centro de los mismos.

Distancia entre los cuerpos en metros. Si son cuerpos grandes, la distancia se toma entre los centros.

Constante de Gravitación Universal. Tiene el mismo valor para todo el Universo.
 Para el S.I.: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$

dato ①
 (dato ②: $T_{\text{Tierra}} = 365 \text{ días}$)

Debido a la pequeñez de la constante de gravitación la fuerza de gravedad sólo es apreciable entre cuerpos cuya masa sea muy grande (planetas, estrellas...)

$F_g = m a \approx m \frac{v_{\text{sat}}^2}{d_{\text{tot}}} = m a_{\text{sat}}^2 d_{\text{tot}}$
 $\mu_{\text{cu}} \quad D2$
 $2^{\text{a}} \text{ ley newton}$
 (sistema aislado, ideal)

De acuerdo con la expresión anterior dos masas de 100 y 1000 kg, situadas a 20 m de distancia se atraerán con una fuerza de:

$$F = G \frac{m M}{d^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{100 \text{ kg} \cdot 1000 \text{ kg}}{20^2 \text{ m}^2} = 1,67 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Fuerza prácticamente inmedible debido a su pequeñez.

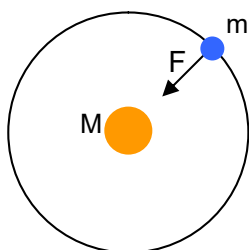
Sin embargo, la fuerza con que la Tierra ($6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) atrae a un cuerpo de 50 kg situado en su superficie (distancia al centro de la Tierra $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$) valdrá:

$$F = G \frac{m M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{50 \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,4 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2} = 488,5 \text{ N}$$

Que es una fuerza apreciable ya que la masa de la Tierra es muy grande.

Si suponemos una órbita circular (lo cual no está muy alejado de la realidad) podemos combinar la Ley de Gravitación Universal con la dinámica del movimiento circular para obtener datos de la órbita. Por ejemplo, la aceleración centrípeta de la Tierra debida a su movimiento de traslación alrededor del Sol.

Datos: Masa del Sol: $1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
 Distancia (media) Tierra – Sol : $1,5 \cdot 10^{12} \text{ m}$



$$\left. \begin{aligned} F_c &= m a_N \\ F &= G \frac{m M}{d^2} \end{aligned} \right\} \quad m a_N = G \frac{m M}{d^2}; \quad a_N = G \frac{M}{d^2}$$

$$a_N = G \frac{M}{d^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(1,5 \cdot 10^{12})^2 \text{ m}^2} = 5,87 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La Ley de Gravitación Universal representa un mayor nivel de profundización en la comprensión del universo que las leyes de Kepler. Estas son puramente descriptivas, dicen **cómo se mueven los astros**, sin embargo la fuerza gravitatoria propuesta por Newton aparece como **la causa** que determina el movimiento de los objetos celestes.

- El propio Newton demostró (utilizando un procedimiento matemático inventado por él mismo, similar al cálculo diferencial y que denominó *método de fluxiones*) que si un cuerpo se mueve alrededor de otro por el que es atraído con una fuerza proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia describiría una elipse, tal y como se postula en la primera ley de Kepler.
- La constancia de la velocidad areolar (segunda ley de Kepler) también es deducible (no se hace aquí, debido a los conceptos matemáticos implicados) a partir de la fuerza de atracción gravitatoria.
- La tercera ley de Kepler puede obtenerse teniendo en cuenta la expresión de la Ley de Gravitación Universal y considerando que los planetas describen su órbita con movimiento circular uniforme, sometidos a la fuerza de gravedad que apunta constantemente hacia el centro de la trayectoria (fuerza centrípeta)

$$\left. \begin{array}{l} F_c = m a_N = m \omega^2 d \\ F = G \frac{m M}{d^2} \end{array} \right\} G \frac{m M}{d^2} = m \omega^2 d ; G M = \frac{(2\pi)^2}{T^2} d^3 ; T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G M} ; T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G M} \right) d^3 ; \boxed{T^2 = k d^3}$$

Donde:

$$\boxed{k = \frac{4\pi^2}{G M}}$$

Por tanto la constante de Kepler sólo depende del valor de la masa del astro central.

Para el Sistema Solar tendrá un valor (S.I.): $k = \frac{4\pi^2}{G M} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}} = 2,99 \cdot 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$

Ejemplo 3

Ío es una de las sesenta y tres lunas de Júpiter (la más próxima al planeta) y tiene un periodo orbital de 1 día 18 h y 28 min. ¿Cuál es la distancia media entre Ío y Júpiter?

DATOS: Masa de Júpiter: $1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Solución:

Expresamos el periodo orbital en segundos:

$$1 \text{ día } 18 \text{ h y } 28 \text{ min} = 152 \ 880 \text{ s}$$

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k r^3$ y despejamos la incógnita (r): $r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}$

Hay que tener en cuenta que el astro central alrededor del cual orbita Ío es Júpiter, no el Sol. Por **tanto deberemos determinar el valor de k para este caso sustituyendo la masa de Júpiter** en la expresión que nos da la constante de Kepler (ver apuntes)

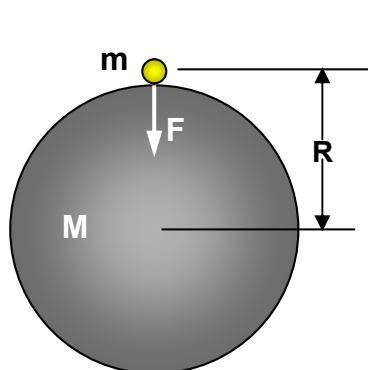
$$k = \frac{4\pi^2}{G M} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}} = 3,12 \cdot 10^{-16} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(152 \cdot 10^3)^2 \cancel{\text{s}^2}}{3,12 \cdot 10^{-16} \frac{\cancel{\text{s}^2}}{\text{m}^3}}} = 4,22 \cdot 10^8 \text{ m} = 4,22 \cdot 10^5 \text{ km} = 422 \ 000 \text{ km}$$

NOTA: El radio orbital medio de Ío alrededor de Júpiter se estima en 421 600 km

La Ley de Gravitación Universal nos permite explicar muchas cosas más, entre ellas el hecho de que todos los cuerpos caigan sometidos a la misma aceleración ($9,81 \text{ m/s}^2$) con independencia de su masa.

Según la segunda ley de Newton los cuerpos aceleran en su caída porque son atraídos por la Tierra y llamamos peso a la fuerza con que el cuerpo es atraído. Si llamamos "g" al valor de la aceleración podemos calcular el peso de un cuerpo de masa m (fuerza con que es atraído por la Tierra): $P = m g$.



Si nos imaginamos ahora el mismo cuerpo situado sobre la superficie de la Tierra (ver figura), según lo visto más arriba será atraído hacia su centro con una fuerza (peso) dada por:

$$F = G \frac{m M}{R^2}$$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} F = G \frac{m M}{R^2} \\ P = m g \end{array} \right\} P = F ; \cancel{m} g = G \frac{\cancel{m} M}{R^2} ; \boxed{g = G \frac{M}{R^2}}$$

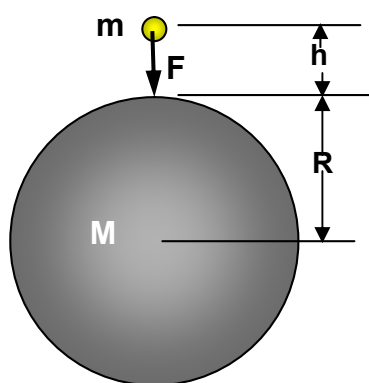
Debido a que la fuerza de atracción gravitatoria es proporcional a la masa del objeto, el valor de la aceleración de la gravedad es independiente de la misma. Sólo depende de valores propios del planeta como son su masa y su radio

Para la Tierra ($M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ y $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$):

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\cancel{\text{m}^3}}{\cancel{\text{kg}} \text{ s}^2} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cancel{\text{kg}}}{(6,37 \cdot 10^6)^2 \cancel{\text{m}^2}} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Rigurosamente el valor de g no es constante en todo el planeta, ya que prescindiendo de otros efectos (la rotación, por ejemplo, influye), el radio de la Tierra en el Ecuador es mayor que en los Polos, por tanto el valor de "g" aumenta del Ecuador a los Polos donde adquiere su valor más alto.

Si nos alejamos de la superficie terrestre el valor de la gravedad también variará, ya que entonces:



$$\boxed{g = G \frac{M}{(R+h)^2}}$$

Así para $h = 30 \text{ km}$, tenemos:

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\cancel{\text{m}^3}}{\cancel{\text{kg}} \text{ s}^2} \frac{6,0 \cdot 10^{24} \cancel{\text{kg}}}{(6,4 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4)^2 \cancel{\text{m}^2}} = 9,68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como se puede observar en el cálculo, la variación de la gravedad con la altura no es grande si se consideran alturas pequeñas comparadas con el valor del radio terrestre ($6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$). En estos casos no se comete un error apreciable al considerar "g" como constante. Efectivamente, llamando g_0 al valor de la gravedad en la superficie de la Tierra, tenemos:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{(R+h)^2} = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \approx g_0 \quad \text{Si } h \ll R$$

Ejemplo 5

Calcular el valor de la aceleración de la gravedad en Mercurio sabiendo que tiene una masa de $3,30 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ y un radio de 2440 km

Solución:

El valor de la aceleración de la gravedad en un planeta depende de la masa y radio del planeta, y se puede calcular a partir de la expresión (ver más arriba):

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$g = G \frac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \frac{3,30 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(2,44 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 3,70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 6

El valor de la gravedad varía si nos alejamos de la superficie terrestre. Calcular a qué altura deberemos situarnos de la superficie de la Tierra para que $g = 5 \text{ m/s}^2$

DATOS: Considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$ como valor en la superficie.

Masa de la Tierra: $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Radio de la Tierra: 6400 km.

Solución:

El valor de la gravedad para un punto situado a una altura h sobre la superficie terrestre viene dado por:

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

Despejamos $(R+h)^2$ y, posteriormente restamos el valor de R (en km) según se puede ver a continuación:

$$(R+h)^2 = G \frac{M}{g} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \frac{6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 8,0 \cdot 10^{13} \text{ m}^2$$

$$(R+h)^2 = 8,0 \cdot 10^{13} \text{ m}^2 ; R+h = \sqrt{8,0 \cdot 10^{13} \text{ m}^2} = 8,94 \cdot 10^6 \text{ m} = 8,94 \cdot 10^3 \text{ km} = 8940 \text{ km}$$

$$R+h = 8940 \text{ km} ; h = 8940 - R ; h = 8940 \text{ km} - 6400 \text{ km} = 2540 \text{ km}$$

Energías gravitatorias

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{\omega^2}{r^2}$$

$$E_p = \int F_{\text{grav.}} dr = \int G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r}$$

→ solo con
fuerzas conservativas
al tener un campo
asociado

* en la tierra esto se
puede simplificar ya
que $g \approx \text{cte}$
 $E_p = \int mg dr = mgr = mgh$

Entonces $E_{\text{mec}} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r}$

D3

Propiedades:

1) En un sistema orbital, se conserva la E_{mec} para todo punto de dicho sistema (solo intervienen las fuerzas conservativas)

⚠ NO HAY CONSERVACIÓN DE TRABAJO: $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p(2)} - E_{p(1)}$

2) Para órbitas cerradas elípticas, $E_m < 0$ ($|E_p| > |E_c|$)

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} m v_{\text{orb}}^2 - G \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r} - G \frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} = -E_c < 0$$

$$\left[\frac{GMm}{r^2} = \frac{m v_{\text{orb}}^2}{r} \Leftrightarrow v_{\text{orb}}^2 = \frac{GM}{r} \right]$$

3) Si $E_m \geq 0 \Rightarrow$ trayectoria abierta

$$(|E_c| \geq |E_p|)$$

\rightarrow 1ª manera de verlo: no cumple prop(2)
por lo que se contradeciría.

\rightarrow 2ª manera: Caso límite, objeto apenas escapa (con $\dot{r} \approx 0$).

$$\text{Tenemos } E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = 0$$

\uparrow (trayect. parabólica)

D4

$$E_p(r \rightarrow \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} G \frac{Mm}{r} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

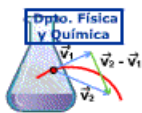
$$E_m = 0$$

Si el objeto "en el infinito" mantiene su velocidad:

$$E_c > 0 \Rightarrow E_m > 0.$$

(trayectoria hiperbólica)

CC: $E_m \geq 0 \rightarrow$ trayectoria abierta



INTERACCIÓN GRAVITATORIA LA FUERZA DE GRAVEDAD COMO FUERZA CONSERVATIVA

IES La Magdalena.
Avilés. Asturias

Cuando elevamos un cuerpo una altura h , **tal que podamos suponer invariable el valor de g** , la fuerza F realiza trabajo positivo (comunica energía cinética al cuerpo). No podríamos aplicar la definición de trabajo que conocemos para calcular la energía transferida, ya que la fuerza no es constante (deberá de ser mayor que el peso al principio para poner el cuerpo en movimiento y después, al final del trayecto, deberá hacerse menor para frenar).

Supongamos que realiza un trabajo W_F (desconocido).

El peso P realiza trabajo negativo (quita energía cinética al cuerpo), pero como el peso sí es una fuerza constante podemos calcular el trabajo realizado:

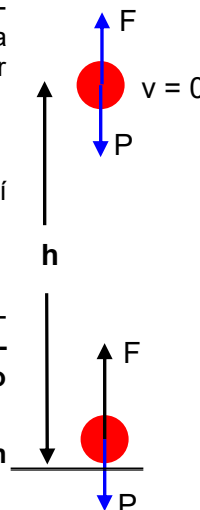
$$W_p = -P \cdot h = -m g h$$

La situación es similar a la encontrada en el caso de la fuerza de rozamiento. Sin embargo, en este caso, existe una diferencia fundamental: **la energía cinética quitada al cuerpo no se transforma en calor (como en el caso de la fuerza de rozamiento), sino que se acumula como un nuevo tipo de energía llamada *energía potencial*.**

La fuerza de gravedad, al realizar trabajo negativo, transforma la energía cinética en energía potencial.

Arriba el cuerpo tiene energía "en potencia" (energía potencial), ya que si se le suelta adquiere energía cinética. **La energía potencial acumulada durante el ascenso se transforma ahora en energía cinética.**

La fuerza de gravedad, al realizar trabajo positivo, transforma energía potencial en cinética.



Las fuerzas (como la gravedad o las fuerzas elásticas) que cuando quitan energía cinética al cuerpo no la transforman en calor (irrecuperable), sino que **la transforman en energía potencial**, que puede transformarse nuevamente en cinética si se deja a la fuerza actuar libremente sobre el cuerpo, reciben el nombre de **fuerzas conservativas**.

Siempre que una fuerza conservativa realice trabajo negativo, restará energía cinética al cuerpo, que aparecerá como energía potencial: la energía cinética disminuirá y aumentará la potencial

Si realiza trabajo positivo la energía potencial se transforma en energía cinética: la energía potencial disminuye y aumenta la cinética.

Por tanto, en el caso de fuerzas conservativas, se puede calcular el trabajo realizado calculando la variación de energía potencial:

$$W_{\text{cons}} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

Al final, cuando el cuerpo se encuentra a una altura h , su energía cinética es nula. Por tanto, toda la energía cinética dada por la fuerza F (igual a W_F) ha sido transformada por la fuerza de gravedad en energía potencial (Ley de Conservación de la Energía).

Por tanto: $W_F = E_p$

Para que la energía cinética al final sea nula ($v = 0$) deberá de cumplirse que toda la energía cinética dada por la fuerza F haya sido restada por la acción de la fuerza de gravedad. O lo que es lo mismo, la fuerza de gravedad realiza un trabajo (W_p) exactamente igual, pero de signo contrario, al de la fuerza F :

$$W_p = -W_F$$

$$\text{Como } W_p = -m g h, \text{ entonces } W_F = E_p = m g h.$$

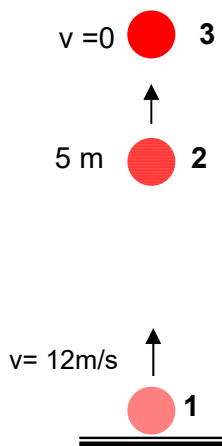
Por tanto la energía potencial gravitatoria puede calcularse (si suponemos g constante):

$$E_p = m g h$$

Ejemplo 1

Un cuerpo de 500 g es lanzado hacia arriba con una velocidad de 12 m/s. Realiza un estudio energético de su recorrido.

Solución:



- Cuando se inicia el lanzamiento (punto 1) el cuerpo posee energía cinética (transferida por la fuerza aplicada durante el lanzamiento):

$$E_{p(1)} = m g h_1 = 0 \text{ (ya que } h=0\text{)}$$

$$E_{c(1)} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 0,5 \text{ kg } 12^2 \text{ (m/s)}^2 = 36 \text{ J}$$

- **A medida que el cuerpo asciende disminuye su energía cinética** (debido a la acción de la fuerza de gravedad que realiza trabajo negativo). **La energía cinética se transforma en energía potencial gravitatoria.** La fuerza de gravedad quita energía cinética al cuerpo que se transforma en energía potencial gravitatoria.

- Supongamos que estamos a una altura de 5 m (punto 2):

$$E_{p(2)} = m g h_2 = 0,5 \text{ kg } 10 \text{ m/s}^2 5 \text{ m} = 25 \text{ J}$$

Como la energía no se destruye la energía cinética en ese punto sería:

$$E_{c(2)} = 36 \text{ J} - 25 \text{ J} = 11 \text{ J}$$

- **Llegará un momento en el que la energía cinética sea nula ($v=0$). Esto ocurrirá en el punto de altura máxima (punto 3). Ahí toda la energía cinética se habrá convertido en potencial:**

$$E_{p(3)} = 36 \text{ J} ; E_{c(3)} = 0$$

A partir del dato de energía potencial en el punto de altura máxima podemos calcular esta altura:

$$E_{p(3)} = m g h_{\text{MAX}} ; h_{\text{MAX}} = \frac{E_{p(3)}}{m g} = \frac{36 \cancel{\text{ kg}} \cancel{\text{ m}^2} \cancel{\text{ s}^{-2}}}{0,5 \cancel{\text{ kg}} 10 \cancel{\text{ m}} \cancel{\text{ s}^{-2}}} = 7,2 \text{ m}$$

- **Cuando el cuerpo comienza a descender la fuerza de gravedad (conservativa) realiza trabajo positivo, realizándose ahora la conversión de energía potencial en cinética** (la fuerza de gravedad transfiere ahora energía cinética al cuerpo).
- **Cuando llega al suelo toda la energía potencial se habrá transformado en cinética. Luego el cuerpo llega al suelo con la misma velocidad con la que fue lanzado inicialmente.**

En toda esta descripción se ha supuesto una situación ideal: el aire no ejerce ningún tipo de acción (fuerza) sobre el cuerpo. La realidad no es esa. Por eso cuando se lanza un objeto hacia arriba, regresa al suelo con menos velocidad que con la que fue lanzado.

Las fuerzas conservativas, por tanto, realizan una transferencia de energía cinética a potencial o viceversa. Como la energía no puede desaparecer debe cumplirse que aparece tanta energía potencial como energía cinética es restada al cuerpo. **Por tanto si la única fuerza que realiza trabajo es conservativa se cumple:**

$$E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \text{cte.} ; E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$

La suma de la energía cinética y potencial permanece constante (se conserva). A la suma de la energía cinética y potencial se le da el nombre de energía mecánica.

Por tanto podremos decir que cuando la única fuerza que realiza trabajo es conservativa se conserva la energía mecánica.

Una característica muy importante de las fuerzas conservativas radica en que el trabajo realizado por ellas *no depende del camino recorrido entre los puntos inicial y final.*

Efectivamente:

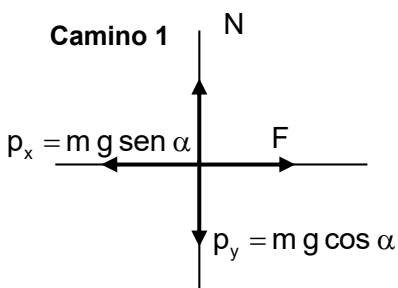
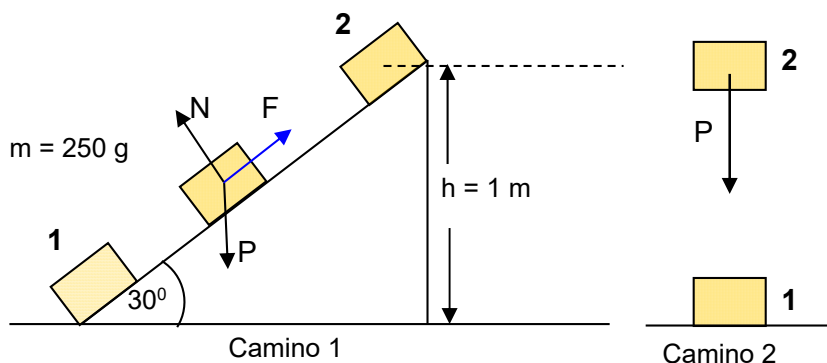
Para subir un cuerpo a una altura de 1 m podemos seguir dos caminos distintos:

Camino 1.

Utilizar un plano inclinado

Camino 2.

Subirlo en vertical



Las dos únicas fuerzas que realizan trabajo son F y la componente del peso paralela al plano (p_x). La normal y la componente del peso perpendicular no realizan trabajo, ya que forman un ángulo de 90° con la dirección del desplazamiento.

Si suponemos que en el punto 1 el cuerpo está en reposo y en el punto 2, también: $E_{C(1)} = E_{C(2)} = 0$

Como la fuerza realiza un trabajo positivo (transfiere energía al cuerpo), mientras que la componente del peso realiza un trabajo negativo (quita energía cinética al cuerpo), deberá de cumplirse:

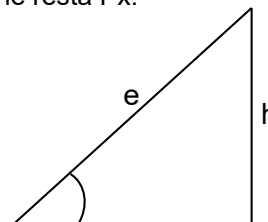
$$W_F + W_{P_x} = 0; \quad W_F = -W_{P_x}$$

Es decir, la energía aportada por F debe ser exactamente igual a la que le resta P_x .

El trabajo realizado por P_x vale: $W_{P_x} = -p_x \cdot e = -(m g \sen \alpha) \cdot e$

La altura h y el espacio recorrido e están relacionados según:

$$\sen \alpha = \frac{h}{e}; \quad e = \frac{h}{\sen \alpha}$$



Sustituyendo este valor en la expresión anterior, obtenemos:

$$W_{P_x} = -p_x \cdot e = -(m g \sen \alpha) \cdot e = -(m g \cancel{\sen \alpha}) \cdot \frac{h}{\cancel{\sen \alpha}} = -m g h$$

El peso es una fuerza conservativa y, como tal, transforma la energía cinética en potencial. Luego en el punto situado a una altura h en el plano el cuerpo tendrá una energía potencial:

$$E_{p(2)} = m g h$$

• **Camino 2**

Si el cuerpo se eleva directamente, y en vertical, hasta la altura h (ver figura más arriba) podremos escribir siguiendo un razonamiento idéntico al caso anterior:

$$E_{C(1)} = E_{C(2)} = 0; \quad W_F + W_P = 0; \quad W_F = -W_P$$

En este caso el trabajo del peso será: $W_P = -m g h$

Y la energía potencial: $E_{p(2)} = m g h$

La energía potencial debida a la acción de una fuerza conservativa sólo depende del punto inicial y del final y no del camino seguido entre ambos puntos.

Se dice que la energía potencial es una función de punto.

Expresión general de la energía potencial gravitatoria

La expresión para la energía potencial gravitatoria $E_p = m g h$, es válida siempre que consideremos que el valor de g es constante. Esto es cierto siempre que no nos alejemos mucho de la superficie del planeta considerado (h no muy grande). En caso contrario (según se ha visto en el tema anterior) el valor de g disminuye ya que:

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

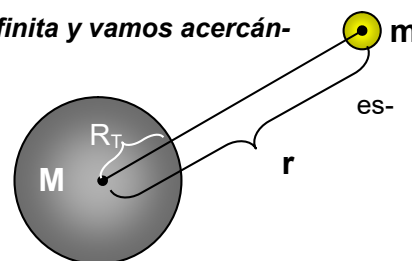
Para obtener una expresión general para la energía potencial **el primer problema que hay que resolver es dónde tomar el valor cero**.

Es lógico pensar que ese punto estaría allí donde la fuerza de gravedad sea nula. Como el valor de la fuerza de gravedad tiende asintóticamente a cero a medida que crece la distancia, tendrá un valor nulo a una distancia infinita. **La energía potencial gravitatoria será nula, por tanto, a distancia infinita (del centro de la masa)**

Si consideramos el valor cero de energía potencial a una distancia infinita y vamos acercándonos a la masa la energía potencial tomará valores negativos.

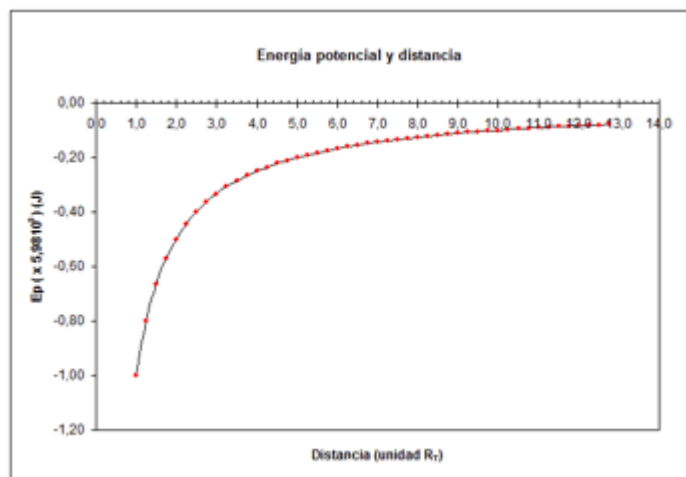
Aunque la deducción del valor de la energía potencial para estos casos está fuera del nivel exigido para este curso se puede demostrar que vale:

$$E_p = -G \frac{m M}{r}$$



Según lo dicho (ver gráfica) la energía potencial, por tanto:

- **Será nula a una distancia infinita.**
- A medida que nos acercamos a la Tierra (u otro planeta) toma valores cada vez más negativos. Esto es, disminuye a medida que nos aproximamos a la masa.
- Si nos situamos en la superficie de la Tierra ($r=R_T$) y comenzamos a alejarnos de la misma, la energía potencial toma valores cada vez menos negativos. Esto es, crece.



Gráfica E_p -distancia (medida en radios terrestres)

Si nos imaginamos que trasladamos una masa m desde un punto a distancia r_1 hasta otro a distancia r_2 , (más alejado: $r_2 > r_1$), tendremos:

$$W_{\text{cons}} = -\Delta E_p = -(E_{p2} - E_{p1}) = E_{p1} - E_{p2}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{p1} = -G \frac{M m}{r_1} \\ E_{p2} = -G \frac{M m}{r_2} \end{array} \right\} E_{p1} - E_{p2} = -G \frac{M m}{r_1} + G \frac{M m}{r_2}$$

$$W_{\text{cons}} = G M m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$W_{\text{cons}} < 0$$

La fuerza de gravedad realiza trabajo negativo y su energía potencial aumenta. Por tanto, para separar un objeto (de masa m) de la masa central, M , habrá que suministrarle esa energía mediante la aplicación de una fuerza externa.

Si imaginamos que llevamos el cuerpo hasta el infinito:

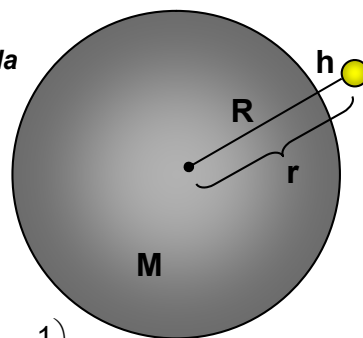
$$W_{\text{cons}} = G M m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad \text{Si } r_2 = \infty ; W_{\text{cons}} = - G \frac{M m}{r_1}$$

El valor del trabajo realizado por la fuerza de gravedad coincide con el valor de la energía potencial en ese punto.

Se puede definir la energía potencial de una masa en un punto como el trabajo que realiza la fuerza de gravedad cuando se lleva la masa hasta el infinito, y es numéricamente igual a la energía que una fuerza externa ha de comunicar al cuerpo para llevarlo hasta una distancia infinita (fuera de la influencia de la masa que la atrae).

Como es lógico **la expresión que se ha dado para calcular el valor de la energía potencial se reduce a la conocida $E_p = m g h$, si nos situamos en la superficie de la Tierra y la altura considerada no es grande (en comparación con el radio terrestre).**

Consideremos el punto 1 situado sobre la superficie terrestre y el punto 2 a una altura h :



$$\left. \begin{array}{l} E_{p_1} = - G \frac{M m}{R} \\ E_{p_2} = - G \frac{M m}{r} \end{array} \right\} \Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = - G \frac{M m}{r} + G \frac{M m}{R} = G m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\Delta E_p = G m M \left(\frac{r - R}{R r} \right) = G m M \left(\frac{h}{R r} \right)$$

Si suponemos ahora que $r = R + h$ se puede aproximar por $r = R_T$, lo que sucederá cuando $h \ll R_T$, podremos escribir:

$$\Delta E_p = G m M \left(\frac{h}{R r} \right) \approx G m M \frac{h}{R^2}; \quad \Delta E_p = m \left(\frac{G M}{R^2} \right) h = m g h$$

$$\Delta E_p = m g h$$

Ejemplo 2

Calcular la diferencia de energía potencial para un satélite de 1000 kg de masa situado a una altura de 400 km sobre la superficie de la Tierra y cuando se sitúa en una órbita a 1000 km

DATOS: $M_{\text{Tierra}}: 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Tierra}} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} E_{p_1} = - G \frac{M m}{r_1} \\ E_{p_2} = - G \frac{M m}{r_2} \end{array} \right\} \Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = - G \frac{M m}{r_2} + G \frac{M m}{r_1}$$

$$\Delta E_p = G M m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg} 10^3 \text{ kg} \left(\frac{1}{6,4 \cdot 10^6} - \frac{1}{7,4 \cdot 10^6} \right) \text{m}^{-1} = 8,4 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Ejemplo 3 (Oviedo, 2008-09)

Se dispara hacia arriba un proyectil con una velocidad inicial de 8,0 km/s. Sabiendo que el radio de la Tierra es de 6370 km y que la aceleración de la gravedad en su superficie es 9,80 m/s² determinar la altura máxima alcanzada respecto de la superficie.

Solución:

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra (g_0) viene dado por la expresión:

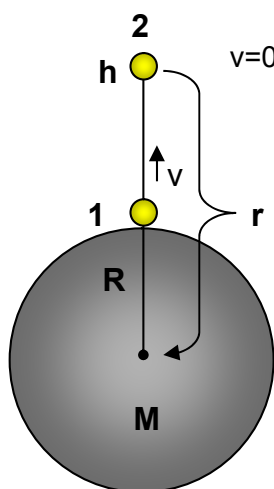
$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} ; \quad G M = g_0 R_T^2$$

El proyectil disparado desde la superficie de la Tierra tendrá una energía total suma de la energía cinética y potencial gravitatoria:

$$E_{\text{Tot}} = E_{c1} + E_{p1} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m M}{R_T}$$

Cuando alcance el punto de máxima altura $v=0$ y su energía potencial valdrá:

$$E_{p2} = -G \frac{m M}{r}$$



Si suponemos que la suma de potencial y cinética se conserva (rozamiento con el aire, nulo):

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m M}{R_T} = -G \frac{m M}{r} ; \quad r = - \frac{G M}{\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m M}{R_T}} = \frac{G M}{G \frac{M}{R_T} - \frac{v^2}{2}}$$

$$r = - \frac{g_0 R_T^2}{\frac{g_0 R_T^2}{R_T} - \frac{v^2}{2}} = \frac{g_0 R_T^2}{g_0 R_T - \frac{v^2}{2}} = \frac{9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6,37 \cdot 10^6)^2 \text{m}^2}{9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 6,37 \cdot 10^6 \text{m} - \frac{(8 \cdot 10^3)^2 \text{m}^2}{\text{s}^2}} = 13\,069\,533 \text{ m}$$

$$h = r - R_T = 13\,070 - 6370 = 6700 \text{ km}$$

Velocidad de escape

Nos planteamos ahora cuál es la velocidad mínima con la que hay que disparar un objeto de masa m , situado en la superficie de un astro de masa M y radio R , para que escape del campo gravitatorio y no vuelva a caer sobre el astro.

La velocidad mínima será la justa para salir del campo gravitatorio. Esto sucederá, cuando llegue a una distancia $r = \infty$ (límite del campo gravitatorio) con una velocidad $v = 0$.

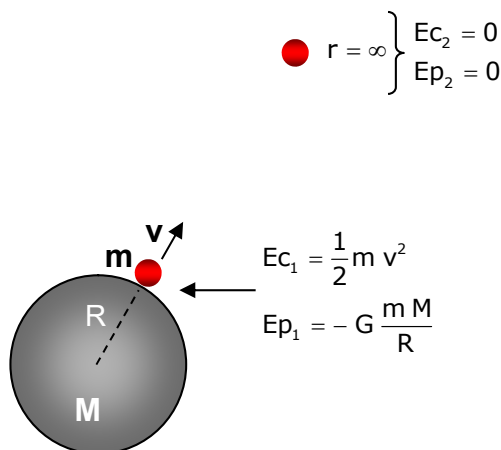
Si consideramos la energía que el objeto tendrá en la superficie del astro, concluiremos que será la suma de la energía potencial gravitatoria (que se evalúa desde el centro del astro) y la energía cinética correspondiente a la velocidad con la que es lanzado. En el infinito la energía potencial gravitatoria será (por definición) cero, y si consideramos que llega con velocidad cero, también será nula su energía cinética. Haciendo por tanto un balance de energía:

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{m M}{R} = 0$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

Se denomina velocidad de escape (v_e) a la velocidad mínima con la que hay que lanzar un objeto desde un astro para que escape de su atracción gravitatoria.



La velocidad de escape depende solo de parámetros propios del astro desde el cual se lanza, tales como su masa o su radio y es independiente de la masa del objeto lanzado.

Ejemplo 4

Calcular la velocidad de escape para Mercurio, la Tierra y Marte. Comparar y sacar conclusiones.

DATOS: $M_{\text{Mercurio}} = 0,0553 M_T$; $R_{\text{Mercurio}} = 2\,439 \text{ km}$

$M_{\text{Tierra}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Tierra}} = 6\,378 \text{ km}$

$M_{\text{Marte}} = 0,108 M_T$; $R_{\text{Marte}} = 3\,397 \text{ km}$

Solución:

$$v_e(\text{Merc}) = \sqrt{\frac{2 G M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{kg s}^2} \cdot 0,0553 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2,439 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 4249 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 15\,296 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_e(\text{Tierra}) = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{kg s}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,378 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 11\,181 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 40\,252 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_e(\text{Marte}) = \sqrt{\frac{2 G M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{kg s}^2} \cdot 0,108 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{3,397 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 5032 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18\,115 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Luego la velocidad de escape de la Tierra es considerablemente mayor que la de Mercurio y la de Marte:

$$v_e(\text{Tierra}) = 2,6 v_e(\text{Mercurio}) = 2,2 v_e(\text{Marte})$$

El valor de la velocidad de escape está muy relacionado con el tipo de gases existentes en la atmósfera de los planetas.

La velocidad media de las moléculas de un gas depende de su temperatura y de su masa:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

A igual temperatura las moléculas de los gases más ligeros tienen una mayor velocidad y pueden escapar más fácilmente. En consecuencia, los gases más ligeros (H y He) serán retenidos más difícilmente (por eso son escasos en la atmósfera terrestre).

Para planetas como Mercurio o Marte, con una velocidad de escape muy inferior, lo esperado es que reten-gan muy poca cantidad de gases a su alrededor. Prácticamente han perdido casi toda su atmósfera.

Los planetas más exteriores, mucho más másicos, poseen velocidades de escape considerablemente más altas. Además, debido a su lejanía del Sol, la temperatura de sus atmósferas es considerablemente más baja. Ambos efectos combinados pueden explicar la abundancia de H y He en sus atmósferas.

Ejemplo 5 (Oviedo. Junio 2009-2010)

Se lanza un objeto verticalmente desde la superficie de la Luna con una velocidad de 1,2 km/s. ¿Se escapará de la gravedad lunar o no? Si lo hace ¿con qué velocidad final lo hará? Si no lo hace ¿a qué altura llegará?

DATOS: $M_{\text{Luna}} = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $R_{\text{Luna}} = 1738 \text{ km}$

Solución:

La velocidad mínima para que un objeto escape de la gravedad lunar será:

$$E_{\text{Tot}} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_L}{R_L} = 0$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{1,738 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 2375 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Como la velocidad comunicada al objeto es inferior, **no escapará de la gravedad lunar**.

Si consideramos el punto 1 situado en la superficie de la Luna y el 2 a la máxima altura alcanzada (donde se verificará que $v=0$), tendremos (suponiendo rozamiento nulo):

$$\begin{array}{ll} \text{Punto 1} & E_{c1} = \frac{1}{2}mv^2 \\ & E_{p1} = -G \frac{mM_L}{R_L} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Punto 2} & E_{c2} = 0 \\ & E_{p2} = -G \frac{mM_L}{r} \end{array}$$

Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_L}{R_L} = -G \frac{mM_L}{r}; r = \frac{GM_L}{G \frac{M_L}{R_L} - \frac{v^2}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_L} - \frac{v^2}{2GM_L}}$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{1,738 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{(1,2 \cdot 10^3)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}} = 2331002 \text{ m} = 2331 \text{ km}$$

$$h = r - R_L = (2331 - 1738) \text{ km} = 593 \text{ km}$$

Energía y órbitas

Cuando un cuerpo orbita alrededor de otro posee una energía que es suma de la energía cinética y de la potencial:

$$E_{\text{Tot}} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{r}$$

Si suponemos que la órbita es circular:

Sustituyendo en la ecuación que da la energía total:

$$F_N = m a_N$$

$$G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}; G \frac{mM}{r} = mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G \frac{mM}{r}; \boxed{E_c = \frac{1}{2}|E_p|}$$

$$E_{\text{Tot}} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{r} = \frac{1}{2}G \frac{mM}{r} - G \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}G \frac{mM}{r}$$

$$\boxed{E_{\text{Tot}} = \frac{1}{2}E_p}$$

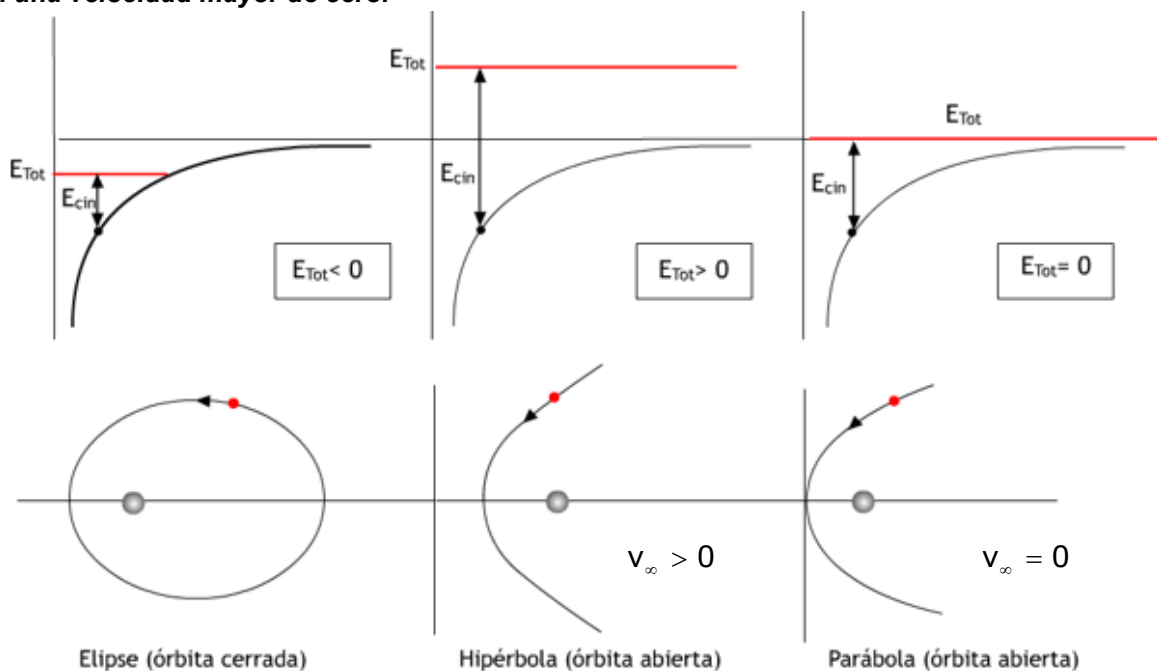
La energía total para una órbita circular es negativa y su valor es justamente la mitad de la energía potencial.

Este resultado se puede extender a las **órbitas cerradas**, como las elípticas. En ellas **la energía total es siempre negativa**. El significado físico es el siguiente: **en una órbita cerrada el valor de la energía cinética no es suficiente para hacer que el objeto escape de la atracción gravitatoria de la masa central y permanece orbitando en torno a ella.**

En el caso de que la energía total sea cero el cuerpo ya no queda ligado gravitatoriamente. Se aleja siguiendo una **órbita parabólica (abierta)**. En este caso la energía cinética sería la justa para que **llegara al infinito con una velocidad nula. Imponiendo esta condición podemos calcular la velocidad mínima (velocidad de escape de la órbita) para que el objeto deje de estar ligado gravitatoriamente al astro:**

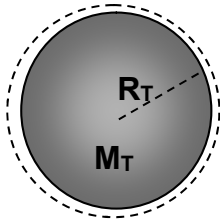
$$E_{\text{Tot}} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_e^2 - G \frac{mM_T}{r} = 0 \quad \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}}$$

Si la energía total es positiva la energía cinética es suficiente para vencer la interacción gravitatoria y el cuerpo considerado se aleja del primero **siguiendo una órbita hiperbólica (abierta). Llegará al infinito con una velocidad mayor de cero.**



Izquierda: la energía total es negativa. La órbita es cerrada.
 Centro: energía total positiva. Órbita abierta e hiperbólica.
 Derecha: energía total nula. Órbita abierta y parabólica.

La velocidad mínima para que un objeto orbite alrededor de la Tierra ($r = R_T$) será:



$$F_N = m a_N$$

$$\frac{G m M_T}{R_T^2} = m \frac{v_0^2}{R_T}; \quad v_0 = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T}}$$

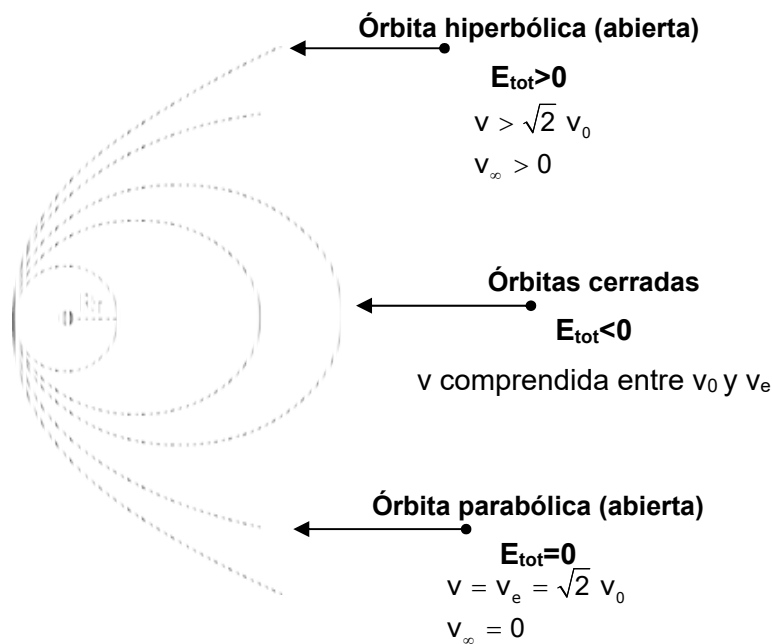
Ampliación

y la velocidad de escape de la Tierra (ver más arriba): $v_e = \sqrt{\frac{2 G M}{R_T}}$

Como puede observarse: $v_e = \sqrt{2} v_0$

Por tanto:

- Si $v = v_0$ el cuerpo orbita siguiendo una **órbita circular** con la Tierra en su centro.
- Si v es mayor que v_0 y menor que v_e ($v_0 < v < v_e$) el cuerpo orbitará siguiendo **órbitas elípticas** con excentricidad creciente estando la Tierra en uno de los focos.
- Si $v = v_e = \sqrt{2} v_0$ el cuerpo **escapará de la atracción gravitatoria** de la masa central siguiendo una **trayectoria parabólica. Velocidad nula en el infinito.**
- Si $v > \sqrt{2} v_0$ el cuerpo también **escapa de la atracción gravitatoria** de la masa central, pero siguiendo ahora una **trayectoria hiperbólica. Su velocidad en el infinito no sería nula.**



Ejemplo 6 (Oviedo. 2015-2016)

Un satélite de $m = 250 \text{ kg}$ describe una órbita circular sobre el ecuador de la Tierra, a una distancia tal que su periodo orbital coincide con el de rotación de la Tierra (satélite geoestacionario). Calcula:

- La altura a la que se encuentra el satélite respecto de la superficie terrestre.
- La energía mínima necesaria para situarlo en dicha órbita.

DATOS: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$; $M_{\text{Tierra}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Tierra}} = 6,40 \cdot 10^6 \text{ m}$

Solución:

- A partir de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k r^3$ podemos determinar la distancia orbital (medida desde el centro de la Tierra) para que el satélite se sitúe en órbita geoestacionaria. Para ello determinamos el valor de la constante de Kepler considerando la Tierra como astro central:

$$k = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}} = 10^{-13} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{86400^2 \text{ s}^2}{10^{-13} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}}} = 4,21 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$r = R + h; h = r - R = (4,21 \cdot 10^7 - 6,40 \cdot 10^6) \text{ m} = 3,57 \cdot 10^7 \text{ m} = 357\,000 \text{ km}$$

b)

$E_{p_2} = -\frac{GmM}{r}$; $E_{c_2} = \frac{1}{2}mv^2$; $E_{\text{tot}(2)} = E_{c_2} + E_{p_2} = \frac{1}{2}E_{p_2}$
 $\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1}$
 $E_{p_1} = -\frac{GmM}{R}$

Luego la energía necesaria para situar el satélite en órbita podemos suponer que se compone de dos términos:

- La energía necesaria para subirlo hasta la altura a la que se situaría la órbita y que será igual a la diferencia de energías potenciales entre la superficie de la Tierra y la de la órbita.
- La energía necesaria para darle la velocidad orbital (energía cinética).

$$E = \Delta E_p + E_{c_2} = (E_{p_2} - E_{p_1}) + E_{c_2} = (E_{p_2} + E_{c_2}) - E_{p_1} = E_{\text{tot}(2)} - E_{p_1}$$

$$E_{\text{tot}(2)} = \frac{1}{2}E_{p_2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{GmM}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 250 \text{ kg} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4,21 \cdot 10^7 \text{ m}} \right) = -1,18 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_{p_1} = -\frac{GmM}{R} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 250 \text{ kg} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,40 \cdot 10^6 \text{ m}} = -1,55 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$E = E_{\text{tot}(2)} - E_{p_1} = -1,18 \cdot 10^9 \text{ J} + 1,55 \cdot 10^{10} \text{ J} = 1,43 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Ejemplo 7 (Oviedo. 2016-2017)

Un minisatélite artificial de 310 kg utilizado para aplicaciones de observación de la Tierra con alta resolución, gira en una órbita circular a 600 km de altura sobre la superficie terrestre. Calcule:

- Velocidad en órbita y periodo orbital.
- Energía potencial y energía mecánica del mismo.
- Energía necesaria para que, partiendo de esa órbita, se coloque en otra órbita circular a una altura de 1000 km.

DATOS: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$; $M_{\text{Tierra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Tierra}} = 6370 \text{ km}$

Solución:

- a) Calculamos la velocidad orbital considerando que la fuerza centrípeta es la fuerza de atracción gravitatoria y que la órbita es circular:

$$F_N = m a_N$$

$$\frac{G m M_T}{r^2} = m \frac{v_o^2}{r}; \quad v_{orb} = \sqrt{\frac{G M_T}{r}}; \quad r = R + h$$

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,937 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7582 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para calcular el periodo orbital, y considerando órbita circular:

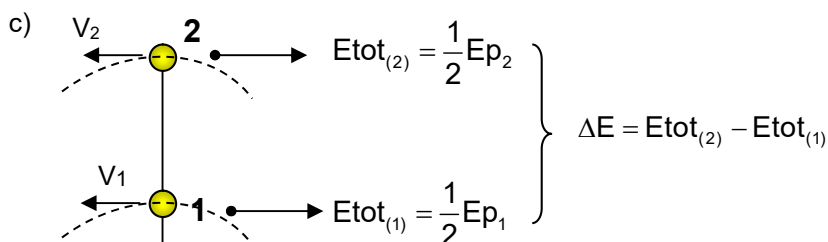
$$v_{orb} = \omega r = \frac{2\pi}{T} r; \quad T = \frac{2\pi r}{v_{orb}} = \frac{2\pi \cdot 6,97 \cdot 10^6 \text{ m}}{7,58 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 5780 \text{ s} = 1 \text{ h } 36 \text{ min}$$

- b) Energía potencial de la primera órbita:

$$E_{p_1} = -\frac{GmM}{r_1} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 310 \text{ kg} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,97 \cdot 10^6 \text{ m}} = -1,77 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Considerando órbita circular:

$$E_{tot(1)} = \frac{1}{2} E_{p_1} = \frac{1}{2} (-1,77 \cdot 10^{10} \text{ J}) = -8,85 \cdot 10^9 \text{ J}$$



$$E_{tot(2)} = \frac{1}{2} E_{p_2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{GmM}{r_2} \right)$$

$$E_{tot(2)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 310 \text{ kg} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7,37 \cdot 10^6 \text{ m}} \right) = -8,39 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$\Delta E = E_{tot(2)} - E_{tot(1)} = (-8,39 \cdot 10^9 + 8,85 \cdot 10^9) \text{ J} = 4,60 \cdot 10^8 \text{ J}$$