



程序设计与算法(二)

算法基础

郭 炜

微信公众号



微博: <http://weibo.com/guoweiofpku>

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

配套教材：

高等教育出版社

《算法基础与在线实践》

刘家瑛 郭炜 李文新 编著

本讲义中所有例题，根据题目名称在
<http://openjudge.cn>
“百练”组进行搜索即可提交





北京大学
PEKING UNIVERSITY

广度优先搜索



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

例题: 抓住那头牛



美国黄石公园

抓住那头牛(百练习4001)

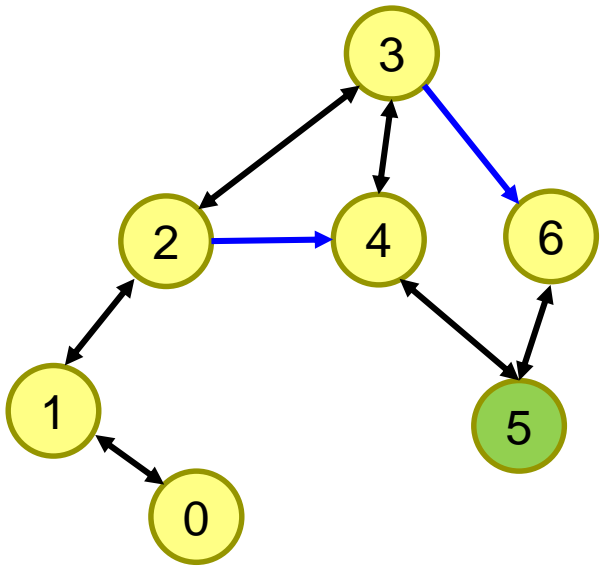
农夫知道一头牛的位置，想要抓住它。农夫和牛都位于数轴上，农夫起始位于点 N ($0 \leq N \leq 100000$)，牛位于点 K ($0 \leq K \leq 100000$)。农夫有两种移动方式：

- 1、从 X 移动到 $X-1$ 或 $X+1$ ，每次移动花费一分钟
- 2、从 X 移动到 $2*X$ ，每次移动花费一分钟

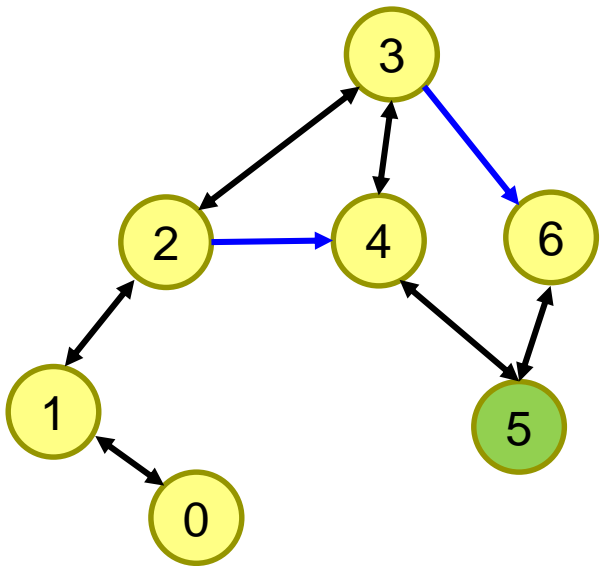


假设牛没有意识到农夫的行动，站在原地不动。农夫最少要花多少时间才能抓住牛？

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？

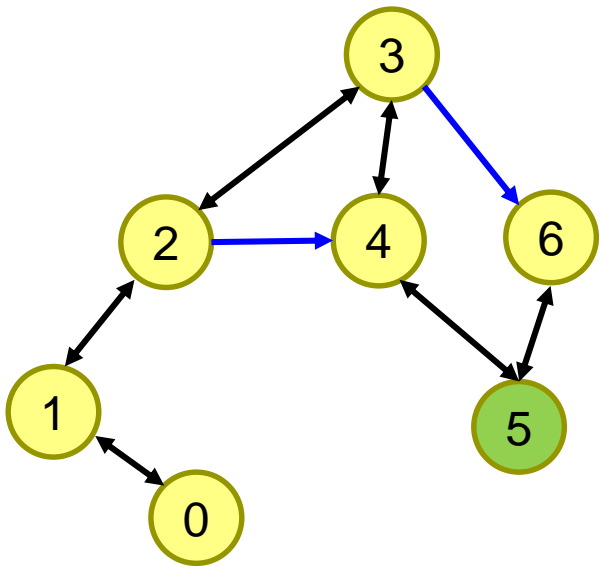


策略1) 深度优先搜索：从起点出发，随机挑一个方向，能往前走就往前走(扩展)，走不动了则回溯。不能走已经走过的点(要判重)。

假设农夫起始位于点3，牛位于5

$N=3, K=5$ ，最右边是6。

如何搜索到一条走到5的路径？



运气好的话：

3->4->5

或

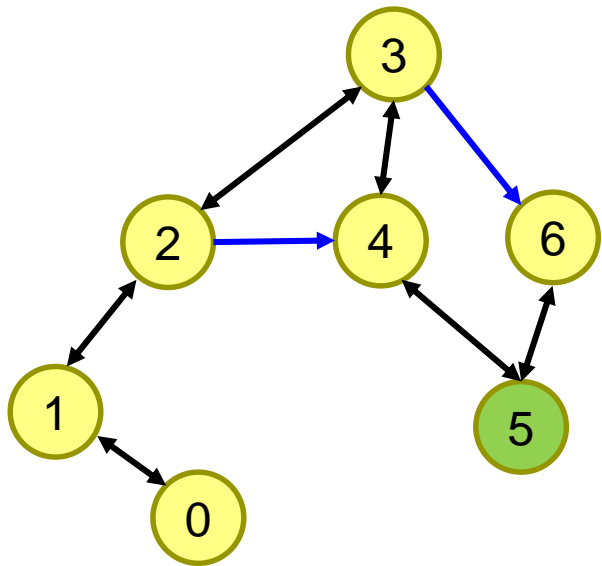
3->6->5

问题解决！

假设农夫起始位于点3，牛位于5

$N=3, K=5$ ，最右边是6。

如何搜索到一条走到5的路径？



运气不太好的话：

3->2->4->5

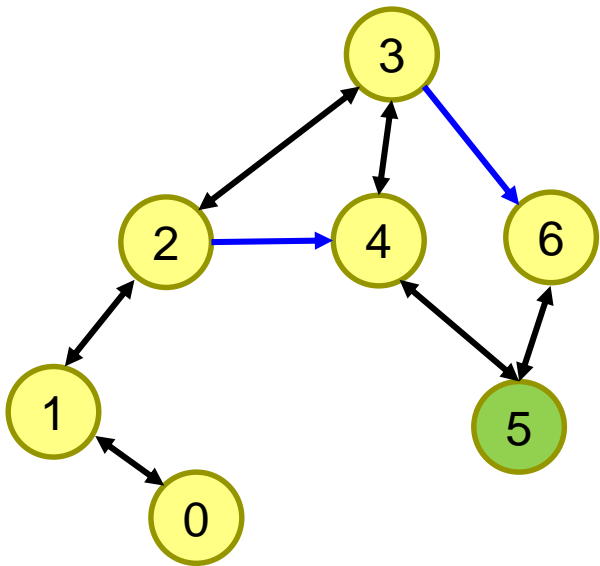
运气最坏的话：

3->2->1->0->4->5

要想求最优(短)解，则要遍历所有走法。可以用各种手段优化，比如，若已经找到路径长度为 n 的解，则所有长度大于 n 的走法就不必尝试。

运算过程中需要存储路径上的节点，数量较少。
用栈存节点。

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



策略2) 广度优先搜索:

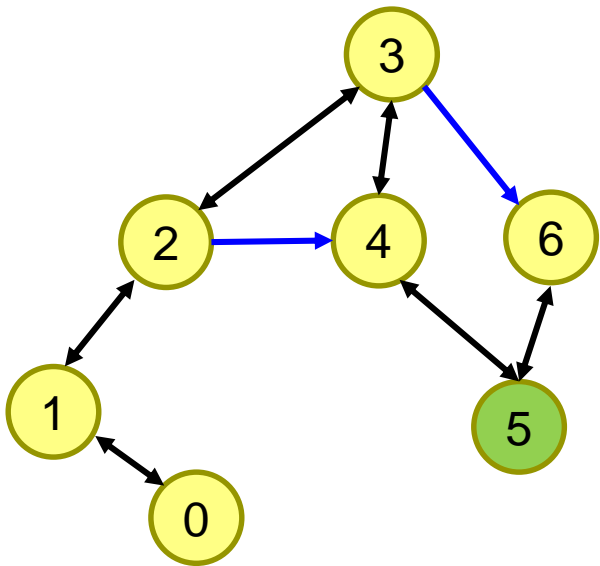
给节点分层。起点是第0层。从起点最少需 n 步就能到达的点属于第 n 层。

第1层: 2,4,6

第2层: 1,5

第3层: 0

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？

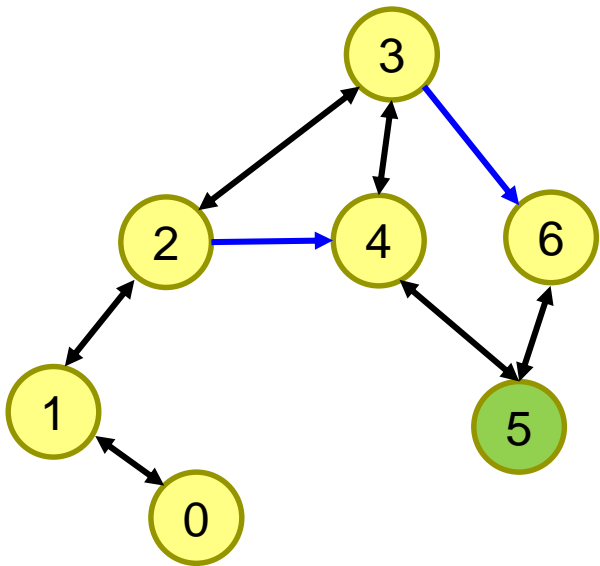


策略2) 广度优先搜索:

给节点分层。起点是第0层。从起点最少需 n 步就能到达的点属于第 n 层。

依层次顺序，从小到大扩展节点。把层次低的点全部扩展出来后，才会扩展层次高的点。

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



策略2) 广度优先搜索:

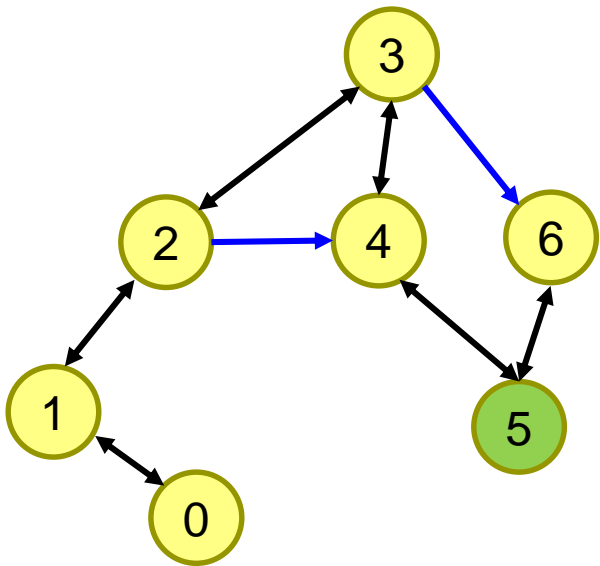
搜索过程 (节点扩展过程) :

3
2 4 6
1 5

问题解决。

扩展时，不能扩展出已经走过的节点(要判重) 。

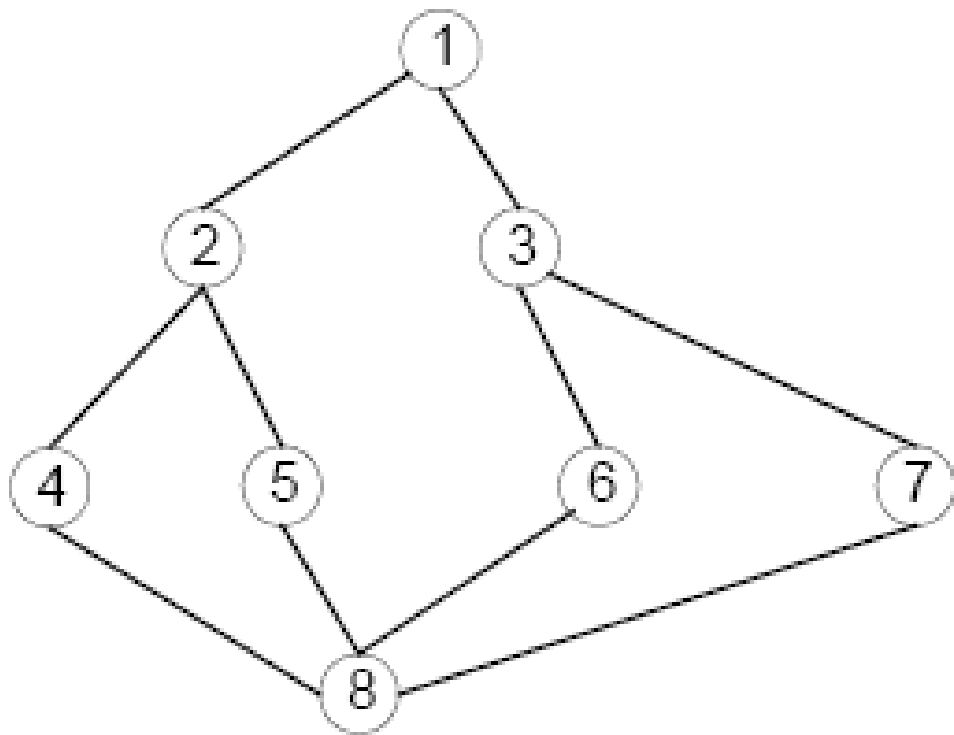
假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



策略2) 广度优先搜索:

可确保找到最优解，但是因扩展出来的节点较多，且多数节点都需要保存，因此需要的存储空间较大。
用队列存节点。

深搜 vs. 广搜



若要遍历所有节点:

□ 深搜

1-2-4-8-5-6-3-7

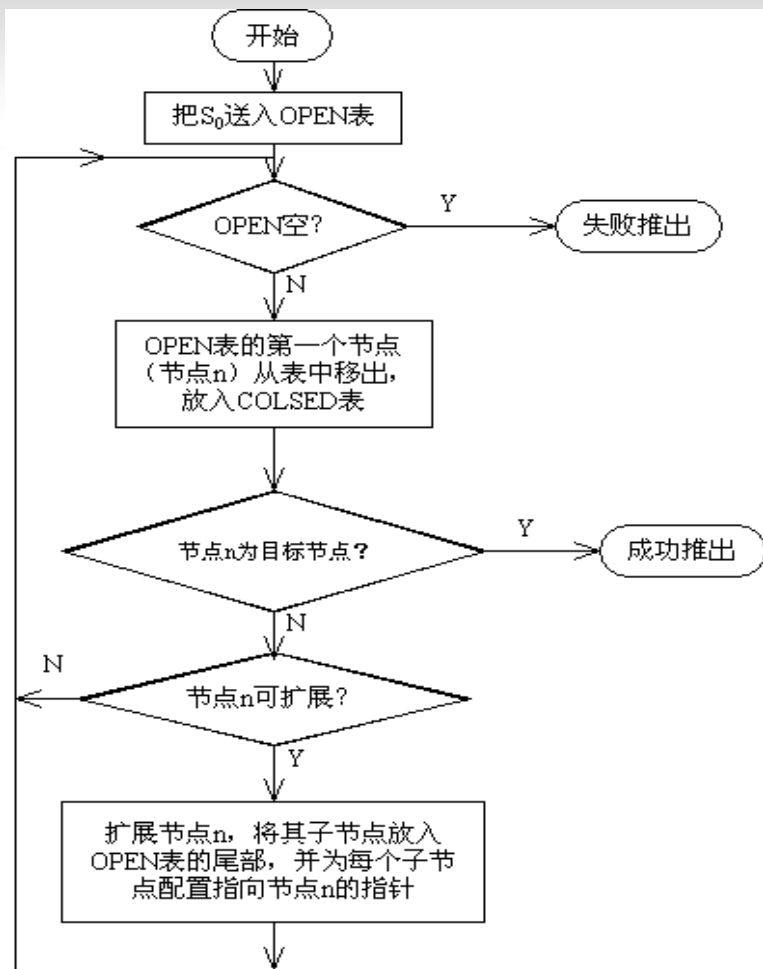
□ 广搜

1-2-3-4-5-6-7-8

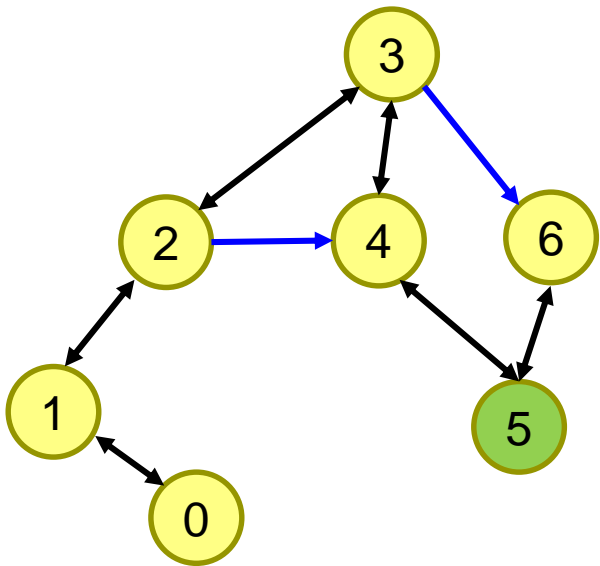
广搜算法

□ 广度优先搜索算法如下：（用QUEUE）

- (1) 把初始节点 S_0 放入Open表中；
- (2) 如果Open表为空，则问题无解，失败退出；
- (3) 把Open表的第一个节点取出放入Closed表，并记该节点为 n ；
- (4) 考察节点 n 是否为目标节点。若是，则得到问题的解，成功退出；
- (5) 若节点 n 不可扩展，则转第(2)步；
- (6) 扩展节点 n ，将其不在Closed表和Open表中的子节点(判重)放入Open表的尾部，并为每一个子节点设置指向父节点的指针(或记录节点的层次)，然后转第(2)步。



假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



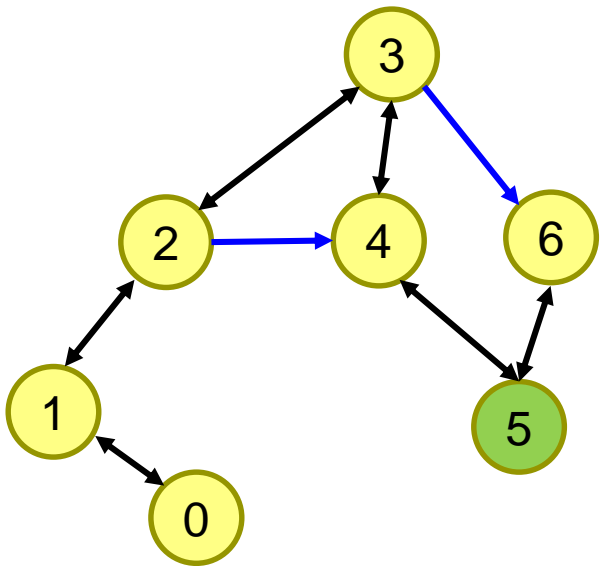
广度优先搜索队列变化过程：

3

Closed

Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



广度优先搜索队列变化过程：

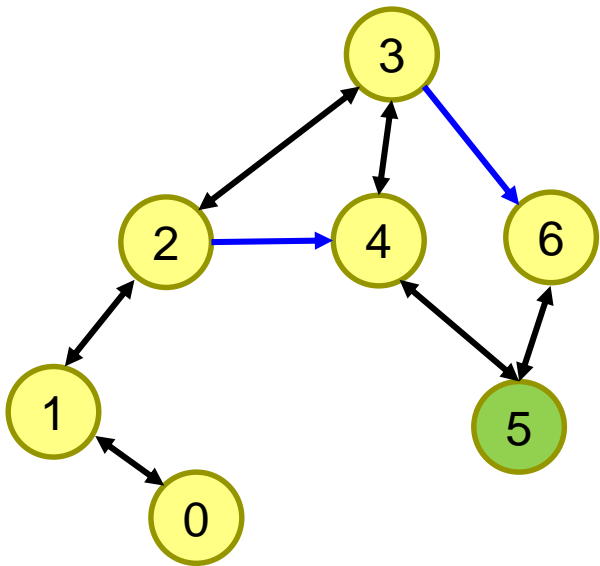
3

2 4 6

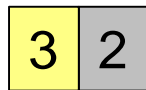
Closed

Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



广度优先搜索队列变化过程：

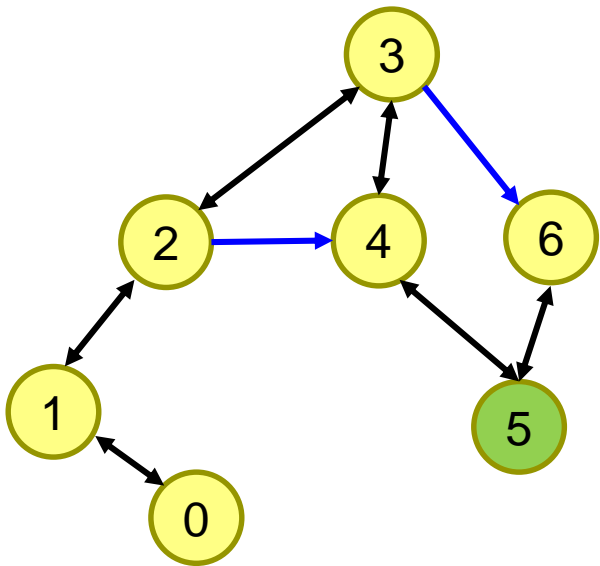


Closed



Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
 如何搜索到一条走到5的路径？



广度优先搜索队列变化过程:

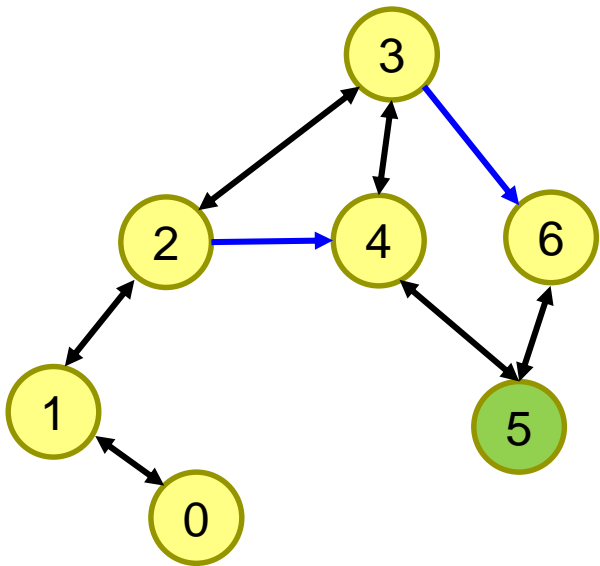


Closed

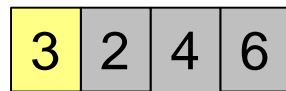


Open

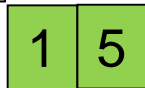
假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
 如何搜索到一条走到5的路径？



广度优先搜索队列变化过程:

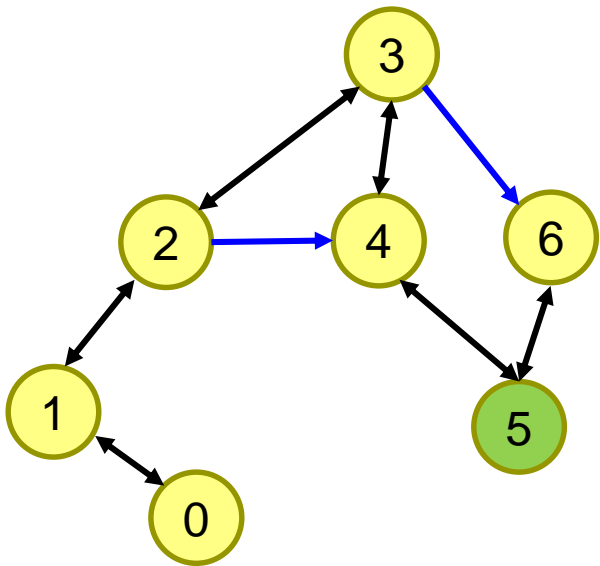


Closed



Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



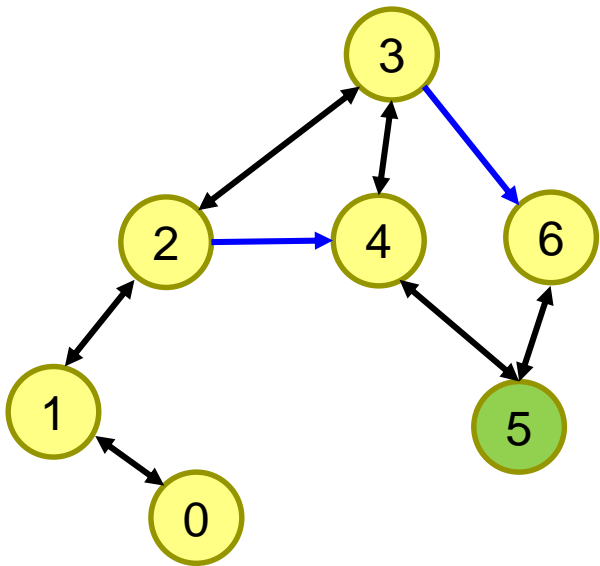
广度优先搜索队列变化过程：



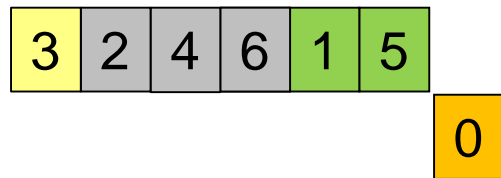
Closed

Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
 $N=3, K=5$ ，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



广度优先搜索队列变化过程：



Closed

Open

目标节点5出队列，问题解决！

//poj3278 Catch That Cow

```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <queue>
using namespace std;

int N,K;

const int MAXN = 100000;

int visited[MAXN+10]; //判重标记,visited[i] = true表示i已经扩展过

struct Step{
    int x; //位置
    int steps; //到达x所需的步数
    Step(int xx,int s):x(xx),steps(s) { }
};

queue<Step> q; //队列,即Open表

int main() {
    cin >> N >> K;
    memset(visited,0,sizeof(visited));
    q.push(Step(N,0));
    visited[N] = 1;
```

```
while(!q.empty()) {  
    Step s = q.front();  
    if( s.x == K ) { //找到目标  
        cout << s.steps << endl;  
        return 0;  
    }  
    else {  
        if( s.x - 1 >= 0 && !visited[s.x-1] ) {  
            q.push(Step(s.x-1,s.steps+1));  
            visited[s.x-1] = 1;  
        }  
        if( s.x + 1 <= MAXN && !visited[s.x+1] ) {  
            q.push(Step(s.x+1,s.steps+1));  
            visited[s.x+1] = 1;  
        }  
    }  
}
```



```
        if( s.x * 2 <= MAXN &&!visited[s.x*2] ) {  
            q.push(Step(s.x*2,s.steps+1));  
            visited[s.x*2] = 1;  
        }  
        q.pop();  
    }  
}  
return 0;  
}
```



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

例题: 迷宫问题



美国黄石公园

迷宫问题 (百练4127)

定义一个矩阵：

```
0 1 0 0 0
0 1 0 1 0
0 0 0 0 0
0 1 1 1 0
0 0 0 1 0
```

它表示一个迷宫，其中的1表示墙壁，0表示可以走的路，只能横着走或竖着走，不能斜着走，要求编程序找出从左上角到右下角的最短路线。

迷宫问题

基础广搜。先将起始位置入队列

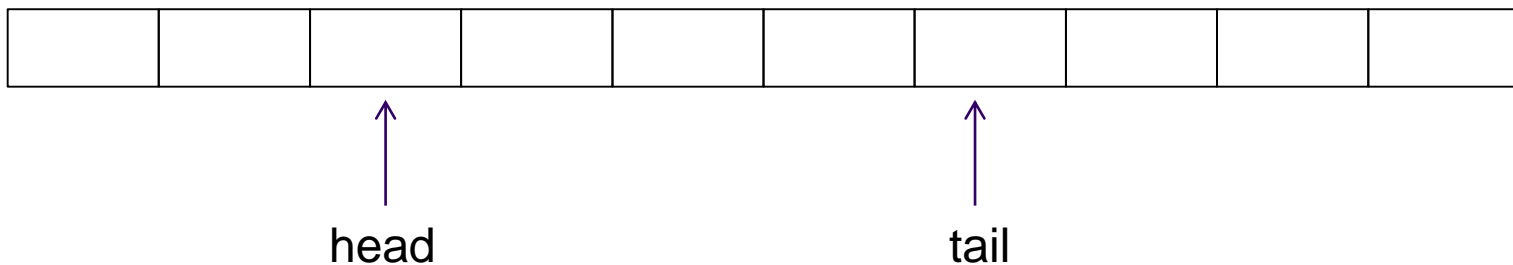
每次从队列拿出一个元素，扩展其相邻的4个元素入队列(要判重)，直到队头元素为终点为止。队列里的元素记录了指向父节点（上一步）的指针

队列元素：

```
struct {  
    int r,c;  
    int f; //父节点在队列中的下标  
};
```

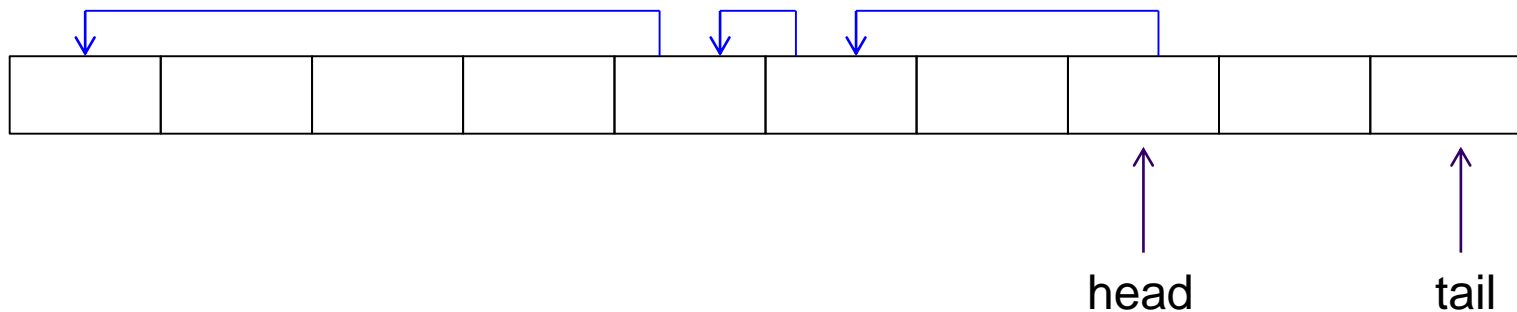
迷宫问题

队列不能用STL的queue或deque，要自己写。用一维数组实现，维护一个队头指针和队尾指针



迷宫问题

队列不能用STL的queue或deque，要自己写。用一维数组实现，维护一个队头指针和队尾指针





北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

例题: 鸣人和佐助



美国黄石公园

鸣人和佐助(百练6044)

已知一张地图（以二维矩阵的形式表示）以及佐助和鸣人的位置。地图上的每个位置都可以走到，只不过有些位置上有大蛇丸的手下(#)，需要先打败大蛇丸的手下才能到这些位置。

鸣人有一定数量的查克拉，每一个单位的查克拉可以打败一个大蛇丸的手下。假设鸣人可以往上下左右四个方向移动，每移动一个距离需要花费1个单位时间，打败大蛇丸的手下不需要时间。如果鸣人查克拉消耗完了，则只可以走到没有大蛇丸手下的位置，不可以再移动到有大蛇丸手下的位置。

佐助在此期间不移动，大蛇丸的手下也不移动。请问，鸣人要追上佐助最少需要花费多少时间？

```
4 4 1
#@##
**##
###+
****
```


鸣人和佐助

状态定义为:

(r, c, k) , 鸣人所在的行, 列和查克拉数量

如果队头节点扩展出来的节点是有大蛇手下的节点, 则其 k 值比队头的 k 要减掉 1。如果队头节点的查克拉数量为 0, 则不能扩展出有大蛇手下的节点。

```
4 4 1
#@##
**##
###+
****
```

求钥匙的鸣人

不再有大蛇丸的手下。

但是佐助被关在一个格子里，需要集齐 k 种钥匙才能打开格子里的门救出他。

K 种钥匙散落在迷宫里。有的格子里放有一把钥匙。一个格子最多放一把钥匙。走到放钥匙的格子，即得到钥匙。

鸣人最少要走多少步才能救出佐助。

求钥匙的鸣人

状态:

(r, c, keys) : 鸣人的行, 列, 已经拥有的钥匙种数

目标状态 (x, y, K) (x, y) 是佐助呆的地方

如果队头节点扩展出来的节点上面有不曾拥有的某种钥匙, 则该节点的 keys 比队头节点的 keys 要加1



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

例题 八数码问题(Eight)



美国黄石公园

Eight(百练1077)

□ 八数码问题是人工智能中的经典问题

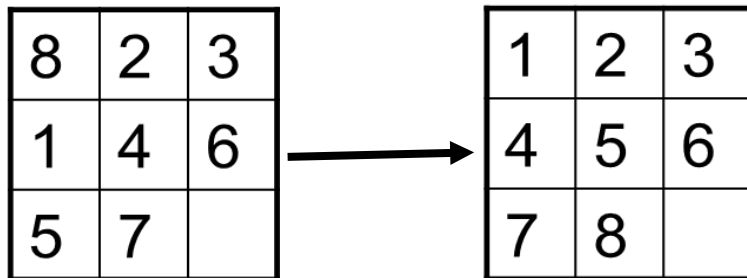
有一个3*3的棋盘，其中有0-8共9个数字，0表示空格，其他的数字可以和0交换位置。求由初始状态到达目标状态

1 2 3

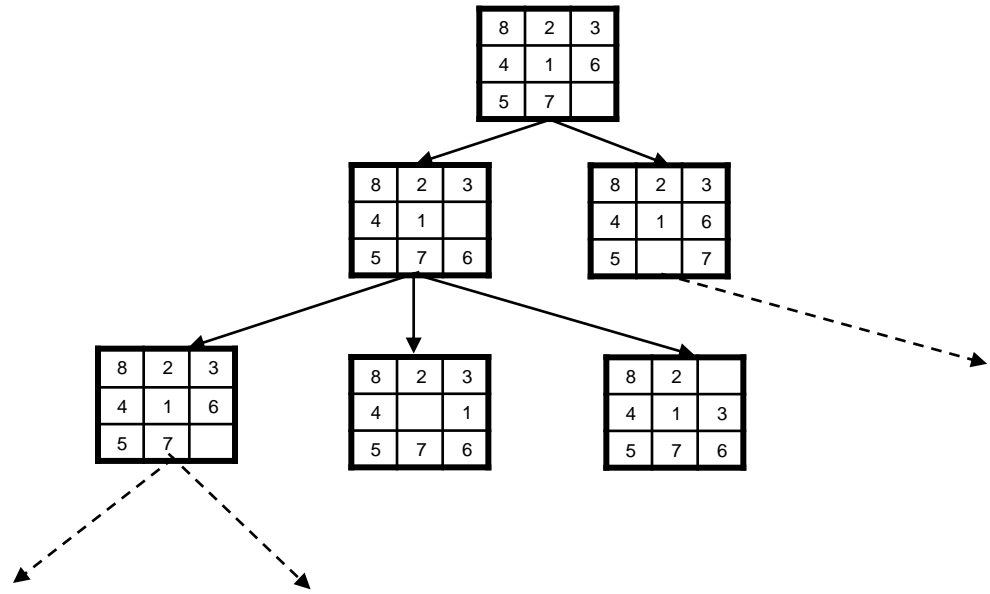
4 5 6

7 8 0

的步数最少的解。

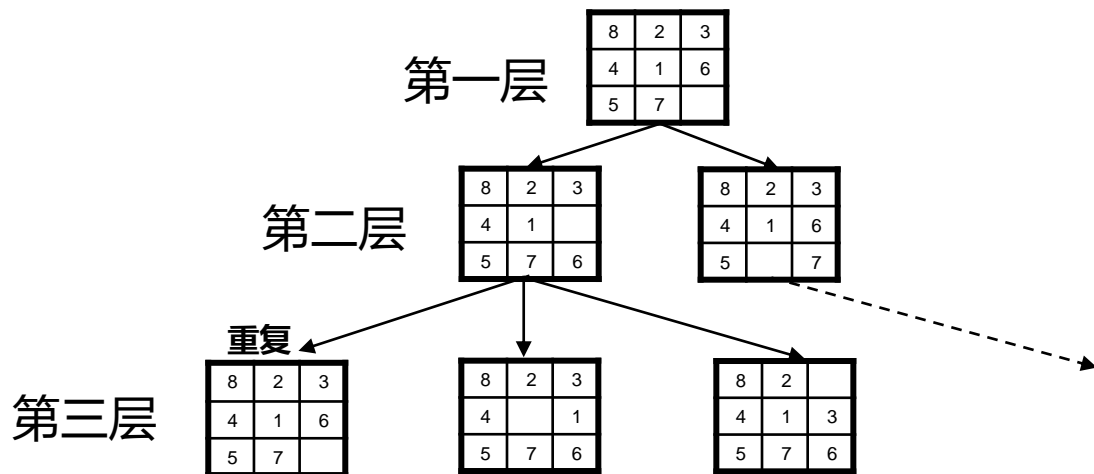


● 状态空间



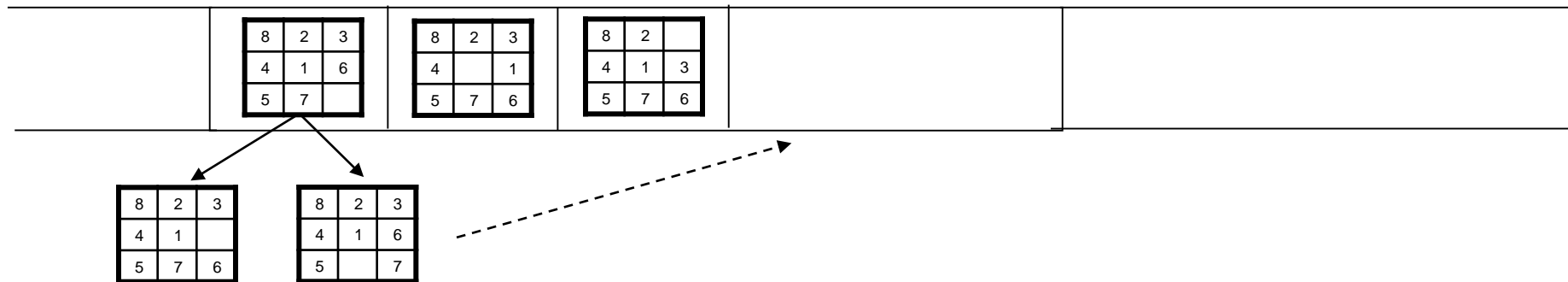
- 广度优先搜索 (bfs)

- 优先扩展浅层节点(状态) , 逐渐深入



● 广度优先搜索

- 用**队列**保存待扩展的节点
- 从队首取出节点，扩展出的新节点放入队尾，直到队首出现目标节点（问题的解）



● 广度优先搜索的代码框架

```
BFS()
```

```
{
```

```
    初始化队列
```

```
    while(队列不为空且未找到目标节点)
```

```
    {
```

```
        取队首节点扩展，并将扩展出的非重复节点放入队尾；
```

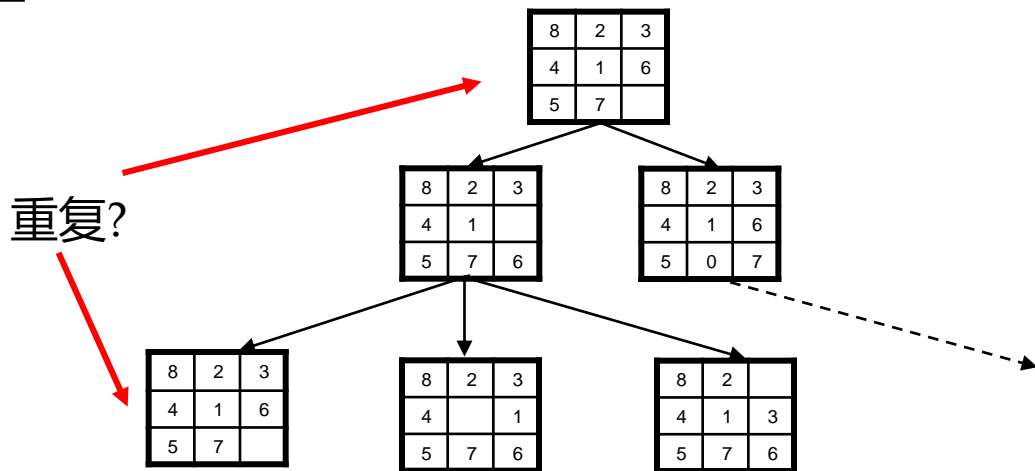
```
        必要时要记住每个节点的父节点；
```

```
    }
```

```
}
```

关键问题：判重

- 新扩展出的节点如果和以前扩展出的节点相同，则这个新节点就不必再考虑
- 如何判重？



关键问题：判重

- 状态(节点) 数目巨大，如何存储？
- 怎样才能较快判断一个状态是否重复？



用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案一：

8	2	3
4	1	6
5	7	

每个状态用一个字符串存储,
要9个字节, 太浪费了!!!

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

● 方案二：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 每个状态对应于一个9位数，则该9位数最大为876,543,210，小于 2^{31} ，则int 就能表示一个状态。
- 判重需要一个标志位序列，每个状态对应于标志位序列中的1位，标志位为0表示该状态尚未扩展，为1则说明已经扩展过了
- 标志位序列可以用字符数组a存放。a的每个元素存放8个状态的标志位。最多需要876,543,210位，因此a数组需要 $876,543,210 / 8 + 1$ 个元素，即 109,567,902 字节
- 如果某个状态对应于数x，则其标志位就是a[x/8]的第x%8位
- 空间要求还是太大!!!!

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案三：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 将每个状态的字符串形式看作一个9位九进制数，则该9位数最大为 $876543210_{(9)}$ ，即 $381367044_{(10)}$ 需要的标志位数目也降为 $381367044_{(10)}$ 比特，即47,670,881字节。
- 如果某个状态对应于数 x ，则其标志位就是 $a[x/8]$ 的第 $x\%8$ 位
- 空间要求还是有点大！！！！

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案三：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 状态数目一共只有 $9!$ 个，即 $362880_{(10)}$ 个，怎么会需要 $876543210_{(9)}$ 即 $381367044_{(10)}$ 个标志位呢？

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案三：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 状态数目一共只有 $9!$ 个，即 $362880_{(10)}$ 个，怎么会需要 $876543210_{(9)}$ 即 $381367044_{(10)}$ 个标志位呢？
- 如果某个状态对应于数 x ，则其标志位就是 $a[x/8]$ 的第 $x\%8$ 位
- 因为有浪费！例如， $666666666_{(9)}$ 根本不对应于任何状态，也为其准备了标志位！

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案四：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 把每个状态都看做'0'-'8'的一个排列，以此排列在全部排列中的位置作为其序号。状态用其排列序号来表示
- 012345678是第0个排列，876543210是第 $9!-1$ 个
- 状态总数即排列总数： $9!=362880$
- 判重用的标志数组a只需要362,880比特即可。
- 如果某个状态的序号是x,则其标志位就是 $a[x/8]$ 的第 $x\%8$ 位

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案四：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 在进行状态间转移，即一个状态通过某个移动变化到另一个状态时，需要先把int形式的状态（排列序号），转变成字符串形式的状态，然后在字符串形式的状态上进行移动，得到字符串形式的新状态，再把新状态转换成int形式（排列序号）。

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案四：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 需要编写给定排列（字符串形式）求序号的函数
- 需要编写给定序号，求该序号的排列（字符串形式）的函数

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案五：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 还是把一个状态看作一个数的10进制表示形式
- 用set<int>进行判重。每入队一个状态，就将其加到set里面，判重时，查找该set，看能否找到状态

八数码问题有解性的判定

- 八数码问题的一个状态实际上是0~8的一个排列，对于任意给定的初始状态和目标，不一定有解，即从初始状态不一定能到达目标状态。
 - 因为排列有奇排列和偶排列两类，从奇排列不能转化成偶排列或相反。
- 如果一个数字0~8的随机排列，用 $F(X)$ ($X \neq 0$)表示数字X前面比它小的数(不包括'0')的个数，全部数字的 $F(X)$ 之和为 $Y = \sum(F(X))$ ，如果Y为奇数则称该排列是奇排列，如果Y为偶数则称该排列是偶排列。
 - 871526340排列的 $Y = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 3 + 2 + 3 = 10$ ，， 所以是偶排列。
 - 871625340排列的 $Y = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$ ， 所以是奇排列。
 - 因此，可以在运行程序前检查初始状态和目标状态的奇偶性是否相同，相同则问题可解，应当能搜索到路径。否则无解。

八数码问题有解性的判定

证明：移动0的位置，不改变排列的奇偶性

$a_1 a_2 a_3 a_4 0 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$

0向上移动：

$a_1 0 a_3 a_4 a_2 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$

八数码问题，单向广搜，用set判重，

```
#include <iostream>
#include <bitset>
#include <cstring>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <set>
```

```
using namespace std;
```

```
int goalStatus = 123456780; //目标状态
```

```
const int MAXS = 400000;
```

```
char result[MAXS]; //要输出的移动方案
```

```
struct Node {
```

```
    int status; //状态
```

```
    int father; //父节点指针，即myQueue的下标
```

```
    char move; //父节点到本节点的移动方式 u/d/r/l
```

```
    Node(int s,int f,char m):status(s), father(f),move(m) { }
```

```
    Node() { }
```

```
};
```

```
Node myQueue[MAXS]; //状态队列，状态总数362880
```

```
int qHead = 0; //队头指针
```

```
int qTail = 1; //队尾指针
```

```
char moves[] = "udr1"; //四种移动
```

```
int NewStatus( int status, char move) {  
    //求从status经过 move 移动后得到的新状态。若移动不可行则返回-1  
    char tmp[20];  
    int zeroPos; //字符'0'的位置  
    sprintf(tmp,"%09d",status); //需要保留前导0  
    for( int i = 0;i < 9; ++ i )  
        if( tmp[i] == '0' ) {  
            zeroPos = i;  
            break;  
        } //返回空格的位置  
    switch( move) {  
        case 'u':  
            if( zeroPos - 3 < 0 )  
                return -1; //空格在第一行  
            else {  
                tmp[zeroPos] = tmp[zeroPos - 3];  
                tmp[zeroPos - 3] = '0';  
            }  
            break;  
    }  
}
```



```
case 'd':
    if( zeroPos + 3 > 8 )
        return -1; //空格在第三行
    else {
        tmp[zeroPos] = tmp[zeroPos + 3];
        tmp[zeroPos + 3] = '0';
    }
    break;
case 'l':
    if( zeroPos % 3 == 0)
        return -1; //空格在第一列
    else {
        tmp[zeroPos] = tmp[zeroPos -1];
        tmp[zeroPos -1 ] = '0';
    }
    break;
```

```
case 'r':
    if( zeroPos % 3 == 2)
        return -1; //空格在第三列
    else {
        tmp[zeroPos] = tmp[zeroPos + 1];
        tmp[zeroPos + 1 ] = '0';
    }
    break;
}
return atoi(tmp);
}
```

```
bool Bfs(int status) {  
    //寻找从初始状态status到目标的路径, 找不到则返回false  
    int newStatus;  
    set<int> expanded;  
    myQueue[qHead] = Node(status, -1, 0);  
    expanded.insert(status);  
    while ( qHead != qTail) { //队列不为空  
        status = myQueue[qHead].status;  
        if( status == goalStatus ) //找到目标状态  
            return true;  
        for( int i = 0; i < 4; i ++ ) { //尝试4种移动  
            newStatus = NewStatus(status, moves[i]);  
            if( newStatus == -1 )  
                continue; //不可移, 试下一种  
            if(expanded.find(newStatus) != expanded.end())  
                continue; //已扩展过, 试下一种  
            expanded.insert(newStatus);  
        }  
    }  
}
```

```
        myQueue[qTail++] =  
            Node(newStatus, qHead, moves[i]);  
            //新节点入队列  
    }  
    qHead ++;  
}  
return false;  
}
```

```
int main() {
    char line1[50]; char line2[20];
    while( cin.getline(line1,48)) {
        int i,j;
        //将输入的原始字符串变为数字字符串
        for( i = 0, j = 0; line1[i]; i ++ ) {
            if( line1[i] != ' ' ) {
                if( line1[i] == 'x' )
                    line2[j++] = '0';
                else
                    line2[j++] = line1[i];
            }
        }
        line2[j] = 0; //字符串形式的初始状态
    }
}
```

```

if( Bfs(atoi(line2))) {
    int moves = 0;
    int pos = qHead;
    do { //通过father找到成功的状态序列，输出相应步骤
        result[moves++] = myQueue[pos].move;
        pos = myQueue[pos].father;
    } while( pos); //pos = 0 说明已经回退到初始状态了
    for( int i = moves -1; i >= 0; i -- )
        cout << result[i];
}
else
    cout << "unsolvable" << endl;
}
}

```

广搜与深搜的比较

- 广搜一般用于状态表示比较简单、求最优策略的问题
 - 优点：是一种完备策略，即只要问题有解，它就一定可以找到解。并且，广度优先搜索找到的解，还一定是路径最短的解。
 - 缺点：盲目性较大，尤其是当目标节点距初始节点较远时，将产生许多无用的节点，因此其搜索效率较低。需要保存所有扩展出的状态，占用的空间大
- 深搜几乎可以用于任何问题
 - 只需要保存从起始状态到当前状态路径上的节点
- 根据题目要求凭借自己的经验和对两个搜索的熟练程度做出选择

八数码问题：如何加快速度

百练 1077为单组数据

HDU 1043 为多组数据

裸的广搜在POJ 能过，在HDU会超时