Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de ingeniería

Materia: Robótica

Primer Pacial

Profesor: Erick Peña Medina

Alumno:Rocio Fabiola Romero Bernal

No. de cuenta

316214690

Índice

1. Introducción **2**

2. Objetivo **3**

3. Modelado cinemático de la posición **3**
3.1. Cinemática directa de la posición 3
3.2. Cinemática inversa de la posición 4

4. Modelado cinemático de las velocidades **6**
4.1. Cinemática directa de velocidades. 7
4.2. Cinemática inversa de velocidades. 7
4.3. Cálculo de las velocidades lineales 8
4.4. Cálculo de las velocidades angulares 9

5. Modelado cinemático de las aceleraciones **10**
5.1. Cinemática directa de las aceleraciones 10
5.2. Cinemática inversa de las aceleraciones 11
5.3. Cálculo de las aceleraciones lineales 12
5.4. Cálculo de las aceleraciones angulares 13

6. Construcción del modelo dinámico **13**
6.1. Dinámica directa 15
6.2. Modelo dinámico por ecuaciones de Eüler-Lagrange 16
6.3. Cálculo de la posición de los centros de masa 16
6.4. Definición de los elementos de inercia 18
6.5. Cálculo de Lagrangiano 18
6.6. Cálculo de los pares 19
6.7. Cálculo del vector par 22
6.8. Dinámica inversa 22

7. CODIGO MATLAB **23**

8. Conclusión **30**

9. Referencias **30**

1. Introducción

En el presente proyecto se desarrollan los modelos cinematicos y dinámicos del modelo SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm), una de las arquitecturas robóticas más comunes en la automatización industrial, especialmente en procesos de ensamblaje y manipulación de materiales. El robot SCARA, es ideal para tareas que requieren alta precisión y velocidad, como en líneas de producción en fábricas de ensamblaje electrónico, y en industrias que demandan manipulación de componentes en el plano horizontal con mínima flexibilidad en el eje vertical.

Este tipo de robot está diseñado para realizar movimientos en un plano, con una estructura que le permite simular el comportamiento de un brazo humano, pero con la ventaja de ser mucho más preciso y eficiente. El impacto de los robots SCARA en la sociedad y la economía es significativo. La automatización de procesos industriales, referentes a la industria 4.0 no solo mejora la productividad, sino que también reduce los riesgos laborales al realizar tareas peligrosas y repetitivas que antes eran ejecutadas por los humanos. Esto libera a los trabajadores de las labores más monótonas, permitiéndoles concentrarse en tareas de mayor valor añadido, como el análisis de datos o la supervisión de sistemas automatizados.

En términos económicos, la implementación de robots SCARA en las fábricas mejora la eficiencia de la producción, reduciendo los costos y aumentando la competitividad de las empresas. Este tipo de robots son esenciales para mantener las líneas de producción ágiles y adaptables a las demandas del mercado. Por otro lado, el despliegue de tecnologías como estas también promueve un cambio en la mentalidad empresarial, llevándolas hacia una mayor inversión en innovación y en el uso de tecnologías emergentes para mejorar la calidad de los productos y servicios.

Por ende, calcular el modelo dinámico y cinemático de un robot SCARA es esencial para entender y predecir su comportamiento durante las operaciones automatizadas. Por ejemplo, el modelo cinemático permite definir la relación entre las articulaciones del robot y su efector final, lo que facilita la planificación y ejecución precisa de movimientos dentro de un espacio tridimensional. Mientras que, el modelo cinemático inverso permite calcular los ángulos de las articulaciones necesarios para alcanzar una posición específica, optimizando la trayectoria y la eficiencia operativa en tareas industriales complejas.

Por su parte, el modelo dinámico describe cómo las fuerzas y los momentos afectan al robot, considerando aspectos como la inercia, gravedad y fuerzas externas que interactúan con el sistema. Esto es fundamental para el control de movimiento, ya que permite calcular los torques requeridos para que el robot se mueva según lo planeado. La dinámica es crucial no solo para garantizar la estabilidad y el rendimiento del robot, sino también para integrar el robot de manera efectiva en entornos de Industria 4.0, donde la automatización avanzada y la inteligencia artificial son clave para la optimización de procesos y la mejora de la productividad.

El desarrollo de un proyecto que implique el uso de robots SCARA requiere la integración de varias ramas de la ingeniería, principalmente la ingeniería mecatrónica, la electrónica, la informática y la física aplicada. Los estudiantes que participen en el desarrollo y programación de estos robots deben tener conocimientos en:

- Control Automático: Para implementar algoritmos que permitan el control preciso de los movimientos del robot.
- Robótica: Para diseñar y modelar la estructura mecánica del robot, garantizando su capacidad para realizar tareas de forma eficiente.
- Electrónica: Para la construcción y programación de los circuitos electrónicos que permiten que el robot reciba instrucciones y realice movimientos de acuerdo a las señales de control.
- Matemáticas Aplicadas: Para calcular la cinemática y dinámica del robot, utilizando las herramientas matemáticas necesarias para modelar y simular el comportamiento del robot en un entorno real.

A continuación se presenta el perfil de contratación para un profesional que desarrolle este tipo de proyectos:

Perfil de Contratación: Ingeniero/a de Robótica y Automatización

*O*bjetivo del Puesto

Este perfil está orientado a la búsqueda de un Ingeniero/a de Robótica y Automatización para desarrollar y optimizar un robot SCARA en entornos industriales. El candidato ideal debe tener una formación en Ingeniería Mecatrónica, Electrónica o afines.

*R*esponsabilidades

El Ingeniero/a será responsable de:

1. Diseñar, simular, programar e implementar sistemas de control para el robot SCARA.

2. Realizar pruebas para validar el funcionamiento del robot en tareas de ensamblaje y manipulación.
3. Integrar el robot en líneas de producción automatizadas, trabajando con otros equipos para garantizar la eficiencia y seguridad en las operaciones.
4. Generar documentación técnica que respalde el proceso de desarrollo y validación del robot.

*R*equisitos

- Formación: Ingeniería Mecatrónica, Electrónica o afines.
- Conocimientos: Experiencia en algoritmos de cinemática inversa y directa, control de sistemas automáticos, automatización industrial y herramientas como MATLAB y Simulink.
- Habilidades: Trabajo en equipo, enfoque innovador, y capacidad para enfrentar desafíos técnicos.

2. Objetivo

El propósito es la aplicación de las técnicas de cálculo de cinemática y dinámica directa e inversa, aprendidas en clase, en el análisis de un robot SCARA.

3. Modelado cinemático de la posición

3.1. Cinemática directa de la posición

Primero se identifica que el robot es planar **RRR** (tres juntas rotacionales en el plano) y se definen las variables cinemáticas: longitudes de eslabones l_1, l_2, l_3 y ángulos articulares θ_1, θ_2, θ_3, además de un sistema de referencia inercial en la base. Luego se asigna un marco de referencia a cada eslabón y se escriben las matrices homogéneas de cada par junta–eslabón; en un robot planar estas matrices contienen una rotación alrededor de z y una traslación sobre el eje x del eslabón correspondiente. Con esas matrices se construyen T_{01}, T_{12} y T_{23} y se encadenan para obtener $T_{03} = T_{01}\,T_{12}\,T_{23}$, de donde más adelante se obtendrán el vector de posición del efector final y la orientación total asociada a la suma de rotaciones. El enfoque enfatiza que la cinemática directa es una función que transforma coordenadas de las articulaciones del robot en posición y orientación del efector final.

Para un RRR planar típico, las componentes de la posición del efector quedan como la suma de proyecciones de cada eslabón con los ángulos acumulados: $\mathrm{x} = \mathrm{l}_1 \cos\theta_1 \;+\; l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \;+\; l_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$,
$y = l_1 \sin\theta_1 \;+\; l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \;+\; l_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$.

La orientación del efector en el plano se expresa como:

$$\phi \;=\; \theta_1+\theta_2+\theta_3, \tag{1}$$

coherente con el encadenamiento de rotaciones coplanares.

```
Tij(x_i_j, y_i_j, z_i_j, gi_j, bi_j, ai_j) =
```

$$\begin{pmatrix} \cos(\mathrm{ai}_j)\cos(\mathrm{bi}_j) & \cos(\mathrm{ai}_j)\sin(\mathrm{bi}_j)\sin(\mathrm{gi}_j)-\cos(\mathrm{gi}_j)\sin(\mathrm{ai}_j) & \sin(\mathrm{ai}_j)\sin(\mathrm{gi}_j)+\cos(\mathrm{ai}_j)\cos(\mathrm{gi}_j)\sin(\mathrm{bi}_j) & x_{i,j} \\ \cos(\mathrm{bi}_j)\sin(\mathrm{ai}_j) & \cos(\mathrm{ai}_j)\cos(\mathrm{gi}_j)+\sin(\mathrm{ai}_j)\sin(\mathrm{bi}_j)\sin(\mathrm{gi}_j) & \cos(\mathrm{gi}_j)\sin(\mathrm{ai}_j)\sin(\mathrm{bi}_j)-\cos(\mathrm{ai}_j)\sin(\mathrm{gi}_j) & y_{i,j} \\ -\sin(\mathrm{bi}_j) & \cos(\mathrm{bi}_j)\sin(\mathrm{gi}_j) & \cos(\mathrm{bi}_j)\cos(\mathrm{gi}_j) & z_{i,j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
T_0_1 =
```

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{O,1}) & -\sin(\theta_{O,1}) & 0 & x_{O,1} \\ \sin(\theta_{O,1}) & \cos(\theta_{O,1}) & 0 & y_{O,1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
T_1_2 =
```

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{1,2}) & -\sin(\theta_{1,2}) & 0 & L_1 \\ \sin(\theta_{1,2}) & \cos(\theta_{1,2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
T_2_3 =
```

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{2,3}) & -\sin(\theta_{2,3}) & 0 & L_2 \\ \sin(\theta_{2,3}) & \cos(\theta_{2,3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T_3_P =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T_0_P =

$$\begin{pmatrix} \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & x_{O,1} + L_2 \cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1 \cos(\theta_{O,1}) + L_3 \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & y_{O,1} + L_2 \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1 \sin(\theta_{O,1}) + L_3 \sigma_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

3.2. Cinemática inversa de la posición

La idea central es, definir la cinemática inversa, como el problema de hallar los angulos de las articulaciones del robot q a partir de la postura obtenida del efector final $x(q)$ y una meta o la postura deseada de dicho efector final x_d.

A Partir de la transformación homogénea $T(q) = \begin{bmatrix} R(q) & p(q) \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, donde el vector de posición del efector se extrae como $p = T_{1,3,4}$ y la rotación como $R = T_{1,3,13}$ para construir el vector de posición $x(q)$ de la cinemática directa, el error surge porque:

- La postura actual del efector obtenida por la cinemática directa $x(q)$ no coincide con la meta x_d,
- Pueden existir ciertas singularidades en un robot planar 3R, por ejemplo, con un brazo totalmente extendido o plegado, ya que, se pierde la dirección de movimiento en el plano

Para el SCARA planar usamos el **vector de postura** en el plano, este será la base para evaluar el error de postura.

$$x(q) = xy\phi = p_x(q)p_y(q)\phi(q),$$

El error que queremos anular es:

$$e(q) = x_d - x(q).$$

Ahora para solucionar este error se propuso un algoritmo, donde se desarrolla una función de cálculo para la cinematica inversa; se van a necesitar diferentes argumentos, el primero es la posición inicial de las articulaciones para realizar el cálculo númerico, posteriormente la longitud de cada uno de los eslabones, el vector de posición calculado anteriormente y un tamaño de paso para el calculo numerico. Incluimos un contador, que nos permitira saber cuantas iteraciones (por medio de un while) se han realizado , asi mismo una variable q que se inicializara,y donde se almacenarán las posiciones de las articulaciones en cada ciclo de cálculo, es decir, se utilizará la matriz homogenea en cada iteración.

Por lo tanto:

- Dentro del while estará el vector de posición y se definira el error entre la posición obtenida y la posicion deseada, el ciclo while se rompe cuando el error sea menor o igual a un factor de tolerancia admisible para un valor de error.
- Entonces consideraremos que el calculo numerico es correcto, y a continuacion utilizando cualquier calculo numerico de integración, como el del trapecio, calculamos la cinematica inversa.

En concreto el número de repeticiones del ciclo se define por dos cosas: el tamaño del paso que definiremos y un factor de tolerancia admisible, de acuerdo al tipo de robot que estamos utilizando, el robot SCARA. A continuación se muestra el modelo que será utilizado en el algoritmo:

MODELO DE VELOCIDADES Y JACOBIANO

La relación entre velocidades articulares y cartesianas es

$$\dot{x} = J_\theta(q)\,\dot{q}, \qquad J_\theta(q) = \frac{\partial x}{\partial q}.$$

J_θ es el Jacobiano de $x(q)$. Esta relación es la pieza clave que hace posible la cinemática inversa numérica.

El Jacobiano es la función lineal que describe cómo pequeños cambios en las articulaciones producen cambios en la postura del efector:

$$\Delta x \;\approx\; J_\theta(q)\,\Delta q.$$

Este concepto será utilizado para mover el efector hacia la meta x_d corrigiendo las articulaciones. Sin J_θ no sabríamos en qué dirección mover q para reducir el error $e = x_d - x(q)$. **(Extensión) Aceleraciones y control**

Derivando $\dot{x} = J_\theta \dot{q}$ se obtiene

$$\ddot{x} = J_\theta \ddot{q} + \dot{J}_\theta \dot{q},$$

lo que se usa en planeación dinámica o control operacional.

MITIGACIÓN DEL ERROR: Damped Least Squares (DLS)

Para mover el efector hacia la meta minimizando $\|e\|$, usamos una corrección articular tipo *mínimos cuadrados amortiguados*:

$$\Delta q = \underbrace{\left(J_\theta^\top J_\theta + \lambda^2 I\right)^{-1} J_\theta^\top}_{J_\lambda^+}\; e,$$

donde $\lambda > 0$ es el **factor de amortiguamiento**. Esta regularización es clave: cerca de una singularidad J_θ se vuelve mal condicionado y la pseudoinversa pura amplifica el ruido; el término $\lambda^2 I$ estabiliza la inversión y evita cálculos que tiendan a infinito, produciendo pasos controlados y robustos.

INTEGRACIÓN NÚMERICA(Metódo del trapecio)

En lugar de actualizar con un solo paso de Euler, aplicamos un esquema tipo **trapecio** (Heun). Sea $h > 0$ el paso y $k = 0, 1, 2, \ldots$ el índice iterativo.

1. Predicción (Euler):

$$q^{\text{pred}} = q^{(k)} + h\,\Delta q^{(k)}, \qquad \Delta q^{(k)} = J_\lambda^+\big(q^{(k)}\big)\, e\big(q^{(k)}\big).$$

2. Corrección: recalculamos error y Jacobiano en q^{pred} y promediamos:

$$\Delta q^{\text{corr}} = J_\lambda^+\big(q^{\text{pred}}\big)\, e\big(q^{\text{pred}}\big), \qquad q^{(k+1)} = q^{(k)} + \frac{h}{2}\Big(\Delta q^{(k)} + \Delta q^{\text{corr}}\Big).$$

Este predictor–corrector reduce el error de linealización típico de Euler, mejora la *tasa de convergencia* y disminuye oscilaciones cuando el objetivo está cerca.

Además, los ángulos se normalizan con `wrapToPi(·)` para evitar saltos $\pm\pi$ (otra fuente de errores artificiales).

CRITERIO DE PARO

El lazo iterativo se detiene cuando

$$\|e(q^{(k)})\| \le \texttt{tol} \quad o \quad k \ge k_{\text{máx}}.$$

En cada iteración almacenamos $q^{(k)}$ y $\|e\|$ para graficar la convergencia y verificar que el algoritmo reduce el error hasta un valor admisible.

Con esta estrategia, el algoritmo *mitiga el error* porque:

- minimiza directamente $\|e\|$ en el espacio de tarea,
- usa **amortiguamiento** para evitar inestabilidades en singularidades, y
- aplica **trapecio** para mejorar la precisión de cada actualización.

```
R =
```

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) & -\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) & 0 \\ \sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) & \cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
r =
```

$$\begin{pmatrix} x_{O,1}+L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\cos(\theta_{O,1})+L_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) \\ y_{O,1}+L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\sin(\theta_{O,1})+L_3\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
xi_O_P =
```

$$\begin{pmatrix} x_{O,1}+L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\cos(\theta_{O,1})+L_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) \\ y_{O,1}+L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\sin(\theta_{O,1})+L_3\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) \\ \theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1} \end{pmatrix}$$

```
J_theta =
```
J_θ

```
J_theta =
```

$$\begin{pmatrix} -L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})-L_1\sin(\theta_{O,1})-\sigma_1 & -L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})-\sigma_1 & -\sigma_1 \\ L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\cos(\theta_{O,1})+\sigma_2 & L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+\sigma_2 & \sigma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = L_3\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = L_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

```
Jinv =
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})}{\sigma_2} & -\frac{\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})}{\sigma_2} & \frac{L_3\,\sigma_4\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})-L_3\,\sigma_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})}{\sigma_2} \\ \frac{L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\cos(\theta_{O,1})}{\sigma_1} & \frac{L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\sin(\theta_{O,1})}{\sigma_1} & -\frac{L_1\,L_3\,\sigma_4\sin(\theta_{O,1})-L_1\,L_3\,\sigma_3\cos(\theta_{O,1})+L_2\,L_3\,\sigma_4\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})-L_2\,L_3\,\sigma_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})}{\sigma_1} \\ -\frac{\cos(\theta_{O,1})}{\sigma_6-\sigma_5} & -\frac{\sin(\theta_{O,1})}{\sigma_6-\sigma_5} & \frac{\sigma_6-\sigma_5+L_3\,\sigma_4\sin(\theta_{O,1})-L_3\,\sigma_3\cos(\theta_{O,1})}{\sigma_6-\sigma_5} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = L_1\,L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\sin(\theta_{O,1})-L_1\,L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\cos(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = L_1\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\sin(\theta_{O,1})-L_1\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\cos(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = \sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_5 = L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\cos(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_6 = L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\sin(\theta_{O,1})$$

4. Modelado cinemático de las velocidades

Para un SCARA planar (tres juntas rotacionales en el plano), la idea es relacionar cómo se mueven las **articulaciones** con cómo se mueve el **efector final** (x, y, ϕ). Se determina a los ángulos de las juntas y sus velocidades:

$$q = \theta_1\theta_2\theta_3^\top, \qquad \dot{q} = \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3^\top,$$

El estado del efector es:

$$x = xy\phi^\top, \qquad \dot{x} = \dot{x}\dot{y}\dot{\phi}^\top.$$

4.1. Cinemática directa de velocidades.

Primero se arma la cinemática directa de posición $x(q)$ con las longitudes L_1, L_2, L_3. Al derivar respecto al tiempo aparece el **Jacobiano**

$$J_\theta(q) = \frac{\partial x}{\partial q}.$$

La ecuación clave es

$$\dot{x} \;=\; J_\theta(q)\,\dot{q}\ .$$

Esto dice que si conozco las velocidades de las juntas, puedo calcular directamente la velocidad del efector final con una multiplicación matriz–vector. En el SCARA, la tercera *fila* de J_θ suele ser 111, así que

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3.$$

```
J_theta =
```

$$\begin{pmatrix} -L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) - L_1\sin(\theta_{O,1}) - \sigma_1 & -L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) - \sigma_1 & -\sigma_1 \\ L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) + L_1\cos(\theta_{O,1}) + \sigma_2 & L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) + \sigma_2 & \sigma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = L_3\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = L_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

4.2. Cinemática inversa de velocidades.

A veces lo que conozco es la velocidad deseada del efector $\dot{x}$ (p. ej., "muévete hacia la derecha a 5 cm/s"), y necesito las velocidades articulares que producen ese movimiento. Idealmente,

$$\dot{q} \;=\; J_\theta(q)^{-1}\,\dot{x}$$

(si J_θ es cuadrada y no singular). Si J_θ no es cuadrada o está cerca de una singularidad, uso la **seudoinversa** (o la seudoinversa amortiguada para mayor estabilidad):

$$\dot{q} = J_\theta^{+}\,\dot{x} \qquad o \qquad \dot{q} = \left(J_\theta^\top J_\theta + \lambda^2 I\right)^{-1} J_\theta^\top\,\dot{x}.$$

Así obtengo las velocidades de cada junta que mejor aproximan la velocidad deseada del efector.

Qué hay que cuidar. Cuando el brazo está totalmente estirado o plegado, el Jacobiano pierde "direcciones" y el sistema se vuelve sensible (singularidades). Por eso conviene usar la versión amortiguada con λ pequeño y, si hace falta, limitar las velocidades máximas de las juntas. Con esto, el modelo directo e inverso de velocidades del SCARA queda claro y listo para control por velocidad o para seguir trayectorias en el plano.

aceleraciones en un SCARA planar

Siguiendo la misma idea que con las velocidades, ahora queremos relacionar las **aceleraciones** de las juntas con la **aceleración** del efector final

$$\ddot{x} = \ddot{x}\ddot{y}\ddot{\phi}^\top.$$

Las variables articulares son

$$q = \theta_1\theta_2\theta_3^\top, \qquad \dot{q} = \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3^\top, \qquad \ddot{q} = \ddot{\theta}_1\ddot{\theta}_2\ddot{\theta}_3^\top.$$

Jinv =

$$\begin{pmatrix} -\frac{\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})}{\sigma_2} & -\frac{\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})}{\sigma_2} & \frac{L_3\,\sigma_4\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})-L_3\,\sigma_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})}{\sigma_2} \\ \frac{L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\cos(\theta_{O,1})}{\sigma_1} & \frac{L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\sin(\theta_{O,1})}{\sigma_1} & -\frac{L_1\,L_3\,\sigma_4\sin(\theta_{O,1})-L_1\,L_3\,\sigma_3\cos(\theta_{O,1})+L_2\,L_3\,\sigma_4\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})-L_2\,L_3\,\sigma_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})}{\sigma_1} \\ -\frac{\cos(\theta_{O,1})}{\sigma_6-\sigma_5} & -\frac{\sin(\theta_{O,1})}{\sigma_6-\sigma_5} & \frac{\sigma_6-\sigma_5+L_3\,\sigma_4\sin(\theta_{O,1})-L_3\,\sigma_3\cos(\theta_{O,1})}{\sigma_6-\sigma_5} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = L_1\,L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\sin(\theta_{O,1}) - L_1\,L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\cos(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = L_1\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\sin(\theta_{O,1}) - L_1\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\cos(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = \sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_5 = L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\cos(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_6 = L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\sin(\theta_{O,1})$$

4.3. Cálculo de las velocidades lineales

v_O_C1 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\,x_{1,C1}\sin(\theta_{O,1}) \\ \dot{\theta}_{O,1}\,x_{1,C1}\cos(\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_O_C2 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\,(x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\sin(\theta_{O,1})) - \dot{\theta}_{1,2}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) \\ \dot{\theta}_{O,1}\,(x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})+L_1\cos(\theta_{O,1})) + \dot{\theta}_{1,2}\,x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_O_C3 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\,(\sigma_1+\sigma_3+L_1\sin(\theta_{O,1})) - \dot{\theta}_{1,2}\,(\sigma_1+\sigma_3) - \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) \\ \dot{\theta}_{O,1}\,(\sigma_4+L_1\cos(\theta_{O,1})+\sigma_2) + \dot{\theta}_{1,2}\,(\sigma_4+\sigma_2) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = x_{3,C3}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = x_{3,C3}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})$$

4.4. Cálculo de las velocidades angulares

```
omega_1_1 = ω_{1,1}
```

```
omega_0_0 = 3×1
        0
        0
        0

n_1_1 = 3×1
        0
        0
        1
```

R_0_1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{O,1}) & -\sin(\theta_{O,1}) & 0 \\ \sin(\theta_{O,1}) & \cos(\theta_{O,1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1_0 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{O,1}) & \sin(\theta_{O,1}) & 0 \\ -\sin(\theta_{O,1}) & \cos(\theta_{O,1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

omega_1_1 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{O,1} \end{pmatrix}$$

```
omega_2_2 = ω_{2,2}
```

```
n_2_2 = 3×1
        0
        0
        1
```

R_1_2 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{1,2}) & -\sin(\theta_{1,2}) & 0 \\ \sin(\theta_{1,2}) & \cos(\theta_{1,2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_2_1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{1,2}) & \sin(\theta_{1,2}) & 0 \\ -\sin(\theta_{1,2}) & \cos(\theta_{1,2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

omega_2_2 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{O,1} \end{pmatrix}$$

omega_3_3 = $\omega_{3,3}$

```
n_3_3 = 3×1
     0
     0
     1
```

R_2_3 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{2,3}) & -\sin(\theta_{2,3}) & 0 \\ \sin(\theta_{2,3}) & \cos(\theta_{2,3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_3_2 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{2,3}) & \sin(\theta_{2,3}) & 0 \\ -\sin(\theta_{2,3}) & \cos(\theta_{2,3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

omega_3_3 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{2,3} + \dot{\theta}_{O,1} \end{pmatrix}$$

v_O_C3 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\ (\sigma_1 + \sigma_3 + L_1 \sin(\theta_{O,1})) - \dot{\theta}_{1,2}\ (\sigma_1 + \sigma_3) - \dot{\theta}_{2,3}\, x_{3,C3} \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1}) \\ \dot{\theta}_{O,1}\ (\sigma_4 + L_1 \cos(\theta_{O,1}) + \sigma_2) + \dot{\theta}_{1,2}\ (\sigma_4 + \sigma_2) + \dot{\theta}_{2,3}\, x_{3,C3} \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = x_{3,C3} \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = x_{3,C3} \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = L_2 \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = L_2 \cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

5. Modelado cinemático de las aceleraciones

5.1. Cinemática directa de las aceleraciones

Partimos de la relación de velocidades

$$\dot{x} = J_\theta(q)\, \dot{q}.$$

Si derivamos otra vez con respecto al tiempo, aparece el término extra por el cambio del Jacobiano:

$$\ddot{x} \ = \ J_\theta(q)\, \ddot{q} \ + \ \dot{J}_\theta(q, \dot{q})\, \dot{q} \ .$$

- $J_\theta(q)$ es el Jacobiano (el mismo de las velocidades).
- $\dot{J}_\theta$ es la **derivada temporal** del Jacobiano. Recoge efectos tipo "curvatura" (Coriolis/centrífugos) porque el Jacobiano cambia cuando el robot se mueve.

En el SCARA planar suele pasar que la **tercera fila** del Jacobiano es 111; entonces

$$\ddot{\phi} = \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3,$$

y en esa fila $\dot{J}_\theta$ es cero (porque esa fila no depende de q).

```
Jdot =
```

$$\begin{pmatrix} -\sigma_1 - \mathrm{qk}_1\,(\sigma_4 + L_1\cos(\theta_{O,1}) + L_3\,\sigma_3) - L_3\,\mathrm{qk}_3\,\sigma_3 & -\mathrm{qk}_1\,(\sigma_4 + L_3\,\sigma_3) - \sigma_1 - L_3\,\mathrm{qk}_3\,\sigma_3 & -L_3\,\sigma_3\,(\mathrm{qk}_1 + \mathrm{qk}_2 + \mathrm{qk}_3) \\ -\mathrm{qk}_1\,(\sigma_6 + L_1\sin(\theta_{O,1}) + L_3\,\sigma_5) - \sigma_2 - L_3\,\mathrm{qk}_3\,\sigma_5 & -\mathrm{qk}_1\,(\sigma_6 + L_3\,\sigma_5) - \sigma_2 - L_3\,\mathrm{qk}_3\,\sigma_5 & -L_3\,\sigma_5\,(\mathrm{qk}_1 + \mathrm{qk}_2 + \mathrm{qk}_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \mathrm{qk}_2\,(\sigma_4 + L_3\,\sigma_3)$$

$$\sigma_2 = \mathrm{qk}_2\,(\sigma_6 + L_3\,\sigma_5)$$

$$\sigma_3 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = L_2\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_5 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_6 = L_2\sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

5.2. Cinemática inversa de las aceleraciones

Ahora el objetivo es el contrario: si conozco la aceleración deseada del efector $\ddot{x}$ y también las velocidades actuales $\dot{q}$, ¿qué aceleraciones articulares $\ddot{q}$ debo aplicar?

Reordenamos la fórmula directa:

$$\ddot{q} \;=\; J_\theta(q)^{-1}\Big(\ddot{x} - \dot{J}_\theta(q,\dot{q})\,\dot{q}\Big) \qquad (si$$

J_θ es cuadrada e invertible).

Si estamos cerca de una singularidad (brazo muy estirado o plegado) es mejor usar una versión estable con **seudoinversa amortiguada**:

$$\ddot{q} = \left(J_\theta^\top J_\theta + \lambda^2 I\right)^{-1} J_\theta^\top \left(\ddot{x} - \dot{J}_\theta\,\dot{q}\right),$$

donde $\lambda > 0$ es pequeño. Esta forma reduce explosiones numéricas y hace el cálculo más robusto.

```
Jinv_dot =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{qk}_1\cos(\theta_{O,1}) + 2\,\mathrm{qk}_2\cos(\theta_{O,1}) - \mathrm{qk}_1\cos(2\,\theta_{1,2} + \theta_{O,1})}{L_1\,\sigma_2} & \frac{\mathrm{qk}_1\sin(\theta_{O,1}) + 2\,\mathrm{qk}_2\sin(\cdots}{L\cdots} \\ -\frac{L_2\,\mathrm{qk}_1\cos(\theta_{O,1}) + L_2\,\mathrm{qk}_2\cos(\theta_{O,1}) - L_2\,\mathrm{qk}_1\cos(\theta_{1,2})^2\cos(\theta_{O,1}) + L_1\,\mathrm{qk}_2\cos(\theta_{1,2})\cos(\theta_{O,1}) + L_1\,\mathrm{qk}_1\sin(\theta_{1,2})\sin(\theta_{O,1}) + L_2\,\mathrm{qk}_1\cos(\theta_{1,2})\sin(\theta_{1,2})\sin(\theta_{O,1})}{L_1\,L_2\,\sigma_1} & -\frac{L_2\,\mathrm{qk}_1\sin(\theta_{O,1}) + L_2\,\mathrm{qk}_2\sin(\theta_{O,1}) - L_2\,\mathrm{qk}_1\cos(\theta_{1,2})^2\sin(\theta_{O,1}) - L_1\,\mathrm{qk}_1\cos\cdots}{L\cdots} \\ \frac{\mathrm{qk}_2\cos(\theta_{1,2})\cos(\theta_{O,1}) + \mathrm{qk}_1\sin(\theta_{1,2})\sin(\theta_{O,1})}{L_2\,\sigma_1} & -\frac{\mathrm{qk}_1\cos(\theta_{O,1})\sin(\theta_{1,2}\cdots}{\cdots} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \cos(\theta_{1,2})^2 - 1$$

$$\sigma_2 = \cos(2\,\theta_{1,2}) - 1$$

5.3. Cálculo de las aceleraciones lineales

a_0_C1 =

$$\begin{pmatrix} -x_{1,C1}\cos(\theta_{O,1})\,{\dot{\theta}_{O,1}}^{2} - \ddot{\theta}_{O,1}\,x_{1,C1}\sin(\theta_{O,1}) \\ \ddot{\theta}_{O,1}\,x_{1,C1}\cos(\theta_{O,1}) - {\dot{\theta}_{O,1}}^{2}\,x_{1,C1}\sin(\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

a_0_C2 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{1,2}\,\left(\sigma_4 + \dot{\theta}_{O,1}\,x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\right) - \ddot{\theta}_{O,1}\,\sigma_1 - \dot{\theta}_{O,1}\,\left(\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_2 + \sigma_4\right) - \ddot{\theta}_{1,2}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) \\ \ddot{\theta}_{O,1}\,\sigma_2 - \dot{\theta}_{1,2}\,\left(\sigma_3 + \dot{\theta}_{O,1}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})\right) - \dot{\theta}_{O,1}\,\left(\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_1 + \sigma_3\right) + \ddot{\theta}_{1,2}\,x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) + L_1\sin(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) + L_1\cos(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = \dot{\theta}_{1,2}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = \dot{\theta}_{1,2}\,x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})$$

a_0_C3 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\,\left(\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_1 + \sigma_3 + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_5\right) - \ddot{\theta}_{O,1}\,\sigma_2 - \dot{\theta}_{2,3}\,\left(\dot{\theta}_{1,2}\,x_{3,C3}\,\sigma_5 + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_5 + \dot{\theta}_{O,1}\,x_{3,C3}\,\sigma_5\right) - \ddot{\theta}_{1,2}\,(x_{3,C3}\,\sigma_7 + \sigma_8) - \dot{\theta}_{1,2}\,\left(\sigma_3 + \dot{\theta}_{O,1}\,(\sigma_6 + x_{3,C3}\,\sigma_5) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_5\right) - \ddot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_7 \\ \ddot{\theta}_{O,1}\,\sigma_1 + \ddot{\theta}_{1,2}\,(\sigma_6 + x_{3,C3}\,\sigma_5) - \dot{\theta}_{O,1}\,\left(\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_2 + \sigma_4 + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_7\right) - \dot{\theta}_{2,3}\,\left(\dot{\theta}_{1,2}\,x_{3,C3}\,\sigma_7 + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_7 + \dot{\theta}_{O,1}\,x_{3,C3}\,\sigma_7\right) - \dot{\theta}_{1,2}\,\left(\sigma_4 + \dot{\theta}_{O,1}\,(x_{3,C3}\,\sigma_7 + \sigma_8) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_7\right) + \ddot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sigma_6 + L_1\cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\,\sigma_5$$

$$\sigma_2 = x_{3,C3}\,\sigma_7 + \sigma_8 + L_1\sin(\theta_{O,1})$$

5.4. Cálculo de las aceleraciones angulares

```
z =
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

```
alpha_0_0 =
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

```
alpha_1_1 =
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_{O,1}\end{pmatrix}$$

```
alpha_2_2 =
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_{1,2}+\ddot{\theta}_{O,1}\end{pmatrix}$$

```
alpha_3_3 =
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_{1,2}+\ddot{\theta}_{2,3}+\ddot{\theta}_{O,1}\end{pmatrix}$$

```
alpha_1_1 =
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_{O,1}\end{pmatrix}$$

```
alpha_2_2 =
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_{1,2}+\ddot{\theta}_{O,1}\end{pmatrix}$$

```
alpha_3_3 =
```

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_{1,2}+\ddot{\theta}_{2,3}+\ddot{\theta}_{O,1}\end{pmatrix}$$

6. Construcción del modelo dinámico

1) DATOS POR ESLABÓN

- Masa m_i y **tensor de inercia** en el centro de masa I_{C_i} (en tus celdas: `I_C1`, `I_C2`, `I_C3`),
- **Centro de masa** respecto al marco base p_{O,C_i},
- **Velocidades** v_{O,C_i} y **velocidades angulares** ω_i,
- **Gravedad** como vector fijo $g_v = 0 - g0^\top$ para el plano.

2. Energía cinética (por cuerpo):

$$K_i = 12\, m_i\, v_{O,C_i}^\top v_{O,C_i} \;+\; 12\, \omega_i^\top I_{C_i} \omega_i$$

(en tus celdas: `k_1`, `k_2`, `k_3`).

3. Energía potencial (por gravedad):

$$U_i = m_i\, g_v^\top p_{O,C_i}$$

(en tus celdas: `u_1`, `u_2`, `u_3`).

4. Lagrangiano del robot:

$$L(q, \dot{q}) = K - U = \sum_i K_i - \sum_i U_i$$

(variable `La` o `L`).

5. Ecuaciones de Lagrange (una por junta):

$$\tau = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Se determina que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ (p. ej. `D_theta1`), se hace la derivada total y se resta $\frac{\partial L}{\partial q}$. El resultado es el **modelo dinámico compacto**:

$$\tau = M(q)\,\ddot{q} \;+\; C(q,\dot{q})\,\dot{q} \;+\; g(q)$$

donde:

- $M(q)$ = **matriz de inercia** (simétrica y definida positiva),
- $C(q,\dot{q})\dot{q}$ = **términos de Coriolis/centrífugos** (cuadráticos en $\dot{q}$),
- $g(q)$ = **término gravitatorio**.

En el notebook puedes extraerlos como:

$$M(q) = \frac{\partial \tau}{\partial \ddot{q}}, \qquad g(q) = \tau\big|_{\ddot{q}=0,\ \dot{q}=0}, \qquad C(q,\dot{q})\dot{q} = \tau\big|_{\ddot{q}=0} - g(q).$$

v_0_C1 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\, x_{1,C1} \sin(\theta_{O,1}) \\ \dot{\theta}_{O,1}\, x_{1,C1} \cos(\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_0_C2 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\, (x_{2,C2} \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1 \sin(\theta_{O,1})) - \dot{\theta}_{1,2}\, x_{2,C2} \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) \\ \dot{\theta}_{O,1}\, (x_{2,C2} \cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1 \cos(\theta_{O,1})) + \dot{\theta}_{1,2}\, x_{2,C2} \cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_0_C3 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\, (\sigma_1 + \sigma_3 + L_1 \sin(\theta_{O,1})) - \dot{\theta}_{1,2}\, (\sigma_1 + \sigma_3) - \dot{\theta}_{2,3}\, x_{3,C3} \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1}) \\ \dot{\theta}_{O,1}\, (\sigma_4 + L_1 \cos(\theta_{O,1}) + \sigma_2) + \dot{\theta}_{1,2}\, (\sigma_4 + \sigma_2) + \dot{\theta}_{2,3}\, x_{3,C3} \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = x_{3,C3} \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = x_{3,C3} \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = L_2 \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = L_2 \cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

omega_1_1 = $\omega_{1,1}$

```
omega_0_0 = 3×1
     0
     0
     0

n_1_1 = 3×1
     0
     0
     1
```

R_0_1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{O,1}) & -\sin(\theta_{O,1}) & 0 \\ \sin(\theta_{O,1}) & \cos(\theta_{O,1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1_0 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{O,1}) & \sin(\theta_{O,1}) & 0 \\ -\sin(\theta_{O,1}) & \cos(\theta_{O,1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

omega_1_1 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{O,1} \end{pmatrix}$$

omega_2_2 = $\omega_{2,2}$

n_2_2 = 3×1

```
0
0
1
```

R_1_2 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{1,2}) & -\sin(\theta_{1,2}) & 0 \\ \sin(\theta_{1,2}) & \cos(\theta_{1,2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_2_1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{1,2}) & \sin(\theta_{1,2}) & 0 \\ -\sin(\theta_{1,2}) & \cos(\theta_{1,2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

omega_2_2 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{O,1} \end{pmatrix}$$

6.1. Dinámica directa

Problema: dados los torques τ (y el estado actual $q, \dot{q}$), ¿qué **aceleraciones articulares** $\ddot{q}$ produce el robot? Se despeja $\ddot{q}$:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}(\tau - C(q, \dot{q})\,\dot{q} - g(q))$$

Esto es **dinámica directa**. Con $\ddot{q}$ se **simula** integrando:

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \ddot{q}_k\,\Delta t, \qquad q_{k+1} = q_k + \dot{q}_{k+1}\,\Delta t.$$

Se usa en simulación, validación de controladores y para estudiar la respuesta del SCARA ante distintas señales de torque.

4) ¿CUÁNDO USO CADA UNA?

- **Dinámica inversa:** cuando ya tengo $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$ y necesito **qué torque aplicar**. Ideal para feedforward/seguimiento.
- **Dinámica directa:** cuando conozco el torque τ (p. ej., una ley de control) y quiero **predecir el movimiento** integrando $\ddot{q}$.

$$\text{“}\textbf{Inversa}\text{''}: \quad \tau = M\,\ddot{q} + C\,\dot{q} + g, \qquad \text{“}\textbf{Directa}\text{''}: \quad \ddot{q} = M^{-1}(\tau - C\,\dot{q} - g)\,.$$

6.2. Modelo dinámico por ecuaciones de Eüler-Lagrange

V_C1_C1 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_{O,1}\, x_{1,C1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

V_0_C1 =

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{O,1}\, x_{1,C1} \sin(\theta_{O,1}) \\ \dot{\theta}_{O,1}\, x_{1,C1} \cos(\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ans =

$$\dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}\, x_{1,C1}^{2}$$

ans =

$$\dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}\, x_{1,C1}^{2}$$

6.3. Cálculo de la posición de los centros de masa

T_1_C1 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{1,C1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T_0_C1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_{O,1}) & -\sin(\theta_{O,1}) & 0 & x_{O,1} + x_{1,C1}\cos(\theta_{O,1}) \\ \sin(\theta_{O,1}) & \cos(\theta_{O,1}) & 0 & y_{O,1} + x_{1,C1}\sin(\theta_{O,1}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T_2_C2 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{2,C2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\cos(\theta_{1,2})\sin(\theta_{O,1}) - \cos(\theta_{O,1})\sin(\theta_{1,2}) & 0 & x_{O,1} + x_{2,C2}\,\sigma_1 + L_1\cos(\theta_{O,1}) \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & y_{O,1} + x_{2,C2}\,\sigma_2 + L_1\sin(\theta_{O,1}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \cos(\theta_{1,2})\cos(\theta_{O,1}) - \sin(\theta_{1,2})\sin(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = \cos(\theta_{1,2})\sin(\theta_{O,1}) + \cos(\theta_{O,1})\sin(\theta_{1,2})$$

T_3_C3 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{3,C3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T_0_C3 =

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\cos(\theta_{2,3})\,\sigma_4 - \sin(\theta_{2,3})\,\sigma_3 & 0 & x_{O,1} + L_2\,\sigma_3 + L_1\cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\,\sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & y_{O,1} + L_2\,\sigma_4 + L_1\sin(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\,\sigma_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \cos(\theta_{2,3})\,\sigma_3 - \sin(\theta_{2,3})\,\sigma_4$$

$$\sigma_2 = \cos(\theta_{2,3})\,\sigma_4 + \sin(\theta_{2,3})\,\sigma_3$$

$$\sigma_3 = \cos(\theta_{1,2})\cos(\theta_{O,1}) - \sin(\theta_{1,2})\sin(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2})\sin(\theta_{O,1}) + \cos(\theta_{O,1})\sin(\theta_{1,2})$$

p_0_C1 =

$$\begin{pmatrix} x_{O,1} + x_{1,C1}\cos(\theta_{O,1}) \\ y_{O,1} + x_{1,C1}\sin(\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

p_0_C2 =

$$\begin{pmatrix} x_{O,1} + x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1\cos(\theta_{O,1}) \\ y_{O,1} + x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1\sin(\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

p_0_C3 =

$$\begin{pmatrix} x_{O,1} + L_2\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1\cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1}) \\ y_{O,1} + x_{3,C3}\sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1}) + L_2\sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1\sin(\theta_{O,1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.4. Definición de los elementos de inercia

g_V =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

I_C1 =

$$\begin{pmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{pmatrix}$$

I_C2 =

$$\begin{pmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{pmatrix}$$

I_C3 =

$$\begin{pmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{pmatrix}$$

6.5. Cálculo de Lagrangiano

k_1 =

$$\frac{\dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}\ (m_1\, x_{1,C1}^{\ 2} + I_{zz1})}{2}$$

k_2 =

$$\frac{m_2\, L_1^{\ 2}\, \dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}}{2} + m_2 \cos(\theta_{1,2})\, L_1\, \dot{\theta}_{1,2}\, \dot{\theta}_{O,1}\, x_{2,C2} + m_2 \cos(\theta_{1,2})\, L_1\, \dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}\ x_{2,C2} + \frac{m_2\, \dot{\theta}_{1,2}^{\ 2}\ x_{2,C2}^{\ 2}}{2} + \frac{I_{zz2}\, \dot{\theta}_{1,2}^{\ 2}}{2} + m_2\, \dot{\theta}_{1,2}\, \dot{\theta}_{O,1}\, x_{2,C2}^{\ 2} + I_{zz2}\, \dot{\theta}_{1,2}\, \dot{\theta}_{O,1} + \frac{m_2\, \dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}\ x_{2,C2}^{\ 2}}{2} + \frac{I_{zz2}\, \dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}}{2}$$

k_3 =

$$\frac{m_3\ \left(\dot{\theta}_{O,1}\ (\sigma_2 + L_1 \cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\, \sigma_4) + \dot{\theta}_{1,2}\ (\sigma_2 + x_{3,C3}\, \sigma_4) + \dot{\theta}_{2,3}\, x_{3,C3}\, \sigma_4\right)^2}{2} + \frac{m_3\ \left(\dot{\theta}_{O,1}\ (x_{3,C3}\, \sigma_3 + \sigma_1 + L_1 \sin(\theta_{O,1})) + \dot{\theta}_{1,2}\ (x_{3,C3}\, \sigma_3 + \sigma_1) + \dot{\theta}_{2,3}\, x_{3,C3}\, \sigma_3\right)^2}{2} + I_{zz3}\ (\dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{2,3} + \dot{\theta}_{O,1})\ \left(\frac{\dot{\theta}_{1,2}}{2} + \frac{\dot{\theta}_{2,3}}{2} + \frac{\dot{\theta}_{O,1}}{2}\right.$$

where

$\sigma_1 = L_2 \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$

$\sigma_2 = L_2 \cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$

$\sigma_3 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$

$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$

u_1 = $g\, m_1\ (y_{O,1} + x_{1,C1} \sin(\theta_{O,1}))$

u_2 = $g\, m_2\ (y_{O,1} + x_{2,C2} \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1 \sin(\theta_{O,1}))$

u_3 = $g\, m_3\ (y_{O,1} + x_{3,C3} \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1}) + L_2 \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1 \sin(\theta_{O,1}))$

La =

$$\frac{I_{zz2}\, \dot{\theta}_{1,2}^{\ 2}}{2} + \frac{I_{zz2}\, \dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}}{2} + \frac{\dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}\ (m_1\, x_{1,C1}^{\ 2} + I_{zz1})}{2} + \frac{m_3\ \left(\dot{\theta}_{O,1}\ (\sigma_2 + L_1 \cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\, \sigma_4) + \dot{\theta}_{1,2}\ (\sigma_2 + x_{3,C3}\, \sigma_4) + \dot{\theta}_{2,3}\, x_{3,C3}\, \sigma_4\right)^2}{2} + \frac{m_3\ \left(\dot{\theta}_{O,1}\ (x_{3,C3}\, \sigma_3 + \sigma_1 + L_1 \sin(\theta_{O,1})) + \dot{\theta}_{1,2}\ (x_{3,C3}\, \sigma_3 + \sigma_1) + \dot{\theta}_{2,3}\, x_{3,C3}\, \sigma_3\right)^2}{2} - g\, m_3\ (y_{O,1} + x_{3,C3}$$

where

$\sigma_1 = L_2 \sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$

$\sigma_2 = L_2 \cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$

$\sigma_3 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$

$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$

6.6. Cálculo de los pares

```
D_theta1 =
```

$$I_{zz2}\,\dot{\theta}_{1,2} + I_{zz2}\,\dot{\theta}_{O,1} + \dot{\theta}_{O,1}\,\left(m_1\,{x_{1,C1}}^2 + I_{zz1}\right) + \frac{I_{zz3}\,\left(\dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{2,3} + \dot{\theta}_{O,1}\right)}{2} + I_{zz3}\,\left(\frac{\dot{\theta}_{1,2}}{2} + \frac{\dot{\theta}_{2,3}}{2} + \frac{\dot{\theta}_{O,1}}{2}\right) + m_2\,\dot{\theta}_{1,2}\,{x_{2,C2}}^2 + m_2\,\dot{\theta}_{O,1}\,{x_{2,C2}}^2 + m_3\,\sigma_1\,\left(\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_1 + \dot{\theta}_{1,2}\,(\sigma_3 + x_{3,C3}\,\sigma_4) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_4\right) + m_3\,\sigma_2\,\left(\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_2 + \dot{\theta}_{1,2}\,(x_{3,C3}\,\sigma_6 + \sigma_5) +$$

where

$$\sigma_1 = \sigma_3 + L_1\cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\,\sigma_4$$

$$\sigma_2 = x_{3,C3}\,\sigma_6 + \sigma_5 + L_1\sin(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = L_2\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_5 = L_2\sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_6 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

```
tao_1 =
```

$$\ddot{\theta}_{O,1}\,\left(I_{zz1} + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3\,{\sigma_5}^2 + {L_1}^2\,m_2 + m_3\,{\sigma_3}^2 + m_1\,{x_{1,C1}}^2 + m_2\,{x_{2,C2}}^2 + 2\,L_1\,m_2\,x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2})\right) - \dot{\theta}_{1,2}\,\left(m_3\,\left(\sigma_4 + \dot{\theta}_{O,1}\,(x_{3,C3}\,\sigma_7 + \sigma_8) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_7\right)\sigma_5 - m_3\,\sigma_3\,\left(\sigma_6 + \dot{\theta}_{O,1}\,(\sigma_{10} + x_{3,C3}\,\sigma_9) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_9\right) - m_3\,(\sigma_{10} + x_{3,C3}\,\sigma_9$$

where

$$\sigma_1 = \dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_3 + \sigma_4 + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_7$$

$$\sigma_2 = \dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_5 + \sigma_6 + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_9$$

$$\sigma_3 = x_{3,C3}\,\sigma_7 + \sigma_8 + L_1\sin(\theta_{O,1})$$

```
D_theta2 =
```

$$I_{zz2}\,\dot{\theta}_{1,2} + I_{zz2}\,\dot{\theta}_{O,1} + \frac{I_{zz3}\,\left(\dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{2,3} + \dot{\theta}_{O,1}\right)}{2} + I_{zz3}\,\left(\frac{\dot{\theta}_{1,2}}{2} + \frac{\dot{\theta}_{2,3}}{2} + \frac{\dot{\theta}_{O,1}}{2}\right) + m_2\,\dot{\theta}_{1,2}\,{x_{2,C2}}^2 + m_2\,\dot{\theta}_{O,1}\,{x_{2,C2}}^2 + m_3\,(x_{3,C3}\,\sigma_3 + \sigma_1)\,\left(\dot{\theta}_{O,1}\,(x_{3,C3}\,\sigma_3 + \sigma_1 + L_1\sin(\theta_{O,1})) + \dot{\theta}_{1,2}\,(x_{3,C3}\,\sigma_3 + \sigma_1) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_3\right) + m_3\,(\sigma_2 + x_{3,C3}\,\sigma_4)\,\left(\dot{\theta}_{O,1}\right.$$

where

$$\sigma_1 = L_2\sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = L_2\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

```
tao_2 =
```

$$\ddot{\theta}_{1,2}\ \left(I_{zz2}+I_{zz3}+m_2\,x_{2,C2}{}^2+m_3\ (\sigma_{12}+x_{3,C3}\,\sigma_{11})^2+m_3\ (x_{3,C3}\,\sigma_9+\sigma_{10})^2\right)-\dot{\theta}_{1,2}\ \left(m_3\ (\sigma_{12}+x_{3,C3}\,\sigma_{11})\,\sigma_3-m_3\ (x_{3,C3}\,\sigma_9+\sigma_{10})\,\sigma_4-m_3\ (\sigma_{12}+x_{3,C3}\,\sigma_{11})\,\sigma_1+m_3\ (x_{3,C3}\,\sigma_9+\sigma_{10})\,\sigma_2+L_1\,m_2\,\dot{\theta}_{O,1}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2})\right)+\ddot{\theta}_{O,1}\ (m_2\,x_{2,C2}{}^2+$$

where

$$\sigma_1=\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_5+\sigma_7+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_9$$

$$\sigma_2=\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_6+\sigma_8+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_{11}$$

$$\sigma_3=\sigma_7+\dot{\theta}_{O,1}\ (x_{3,C3}\,\sigma_9+\sigma_{10})+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_9$$

```
D_theta3 =
```

$$\frac{I_{zz3}\ (\dot{\theta}_{1,2}+\dot{\theta}_{2,3}+\dot{\theta}_{O,1})}{2}+I_{zz3}\left(\frac{\dot{\theta}_{1,2}}{2}+\frac{\dot{\theta}_{2,3}}{2}+\frac{\dot{\theta}_{O,1}}{2}\right)+m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_1\ \left(\dot{\theta}_{O,1}\ (x_{3,C3}\,\sigma_1+\sigma_3+L_1\sin(\theta_{O,1}))+\dot{\theta}_{1,2}\ (x_{3,C3}\,\sigma_1+\sigma_3)+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_1\right)+m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_2\ \left(\dot{\theta}_{O,1}\ (\sigma_4+L_1\cos(\theta_{O,1})+x_{3,C3}\,\sigma_2)+\dot{\theta}_{1,2}\ (\sigma_4+x_{3,C3}\,\sigma_2)+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_2\right)$$

where

$$\sigma_1=\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2=\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_3=L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_4=L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1})$$

```
tao_3 =
```

$$\dot{\theta}_{2,3}\ (m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_9\,\sigma_4+m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{11}\,\sigma_1-m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{11}\,\sigma_3-m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_9\,\sigma_2)+\ddot{\theta}_{1,2}\ (I_{zz3}+m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{11}\ (\sigma_{12}+x_{3,C3}\,\sigma_{11})+m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_9\ (x_{3,C3}\,\sigma_9+\sigma_{10}))+\ddot{\theta}_{2,3}\ \left(m_3\,x_{3,C3}{}^2\,\sigma_{11}{}^2+m_3\,x_{3,C3}{}^2\,\sigma_9{}^2+I_{zz3}\right)+\dot{\theta}_{1,2}\ (m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{11}\,\sigma_1+m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_9\ (\sigma_8$$

where

$$\sigma_1=\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_5+\sigma_6+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_9$$

$$\sigma_2=\dot{\theta}_{O,1}\,\sigma_7+\sigma_8+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_{11}$$

$$\sigma_3=\dot{\theta}_{1,2}\,x_{3,C3}\,\sigma_9+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_9+\dot{\theta}_{O,1}\,x_{3,C3}\,\sigma_9$$

```
tao =
```

$$\ddot{\theta}_{O,1}\ \left(I_{zz1}+I_{zz2}+I_{zz3}+m_3\,\sigma_{12}{}^2+L_1{}^2\,m_2+m_3\,\sigma_{14}{}^2+m_1\,x_{1,C1}{}^2+m_2\,x_{2,C2}{}^2+2\,L_1\,m_2\,x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2})\right)-\dot{\theta}_{1,2}\ (m_3\,\sigma_2\,\sigma_{12}-m_3\,\sigma_{14}\,\sigma_1-\sigma_9+\sigma_8+L_1\,m_2\,\dot{\theta}_{1,2}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2})+2\,L_1\,m_2\,\dot{\theta}_{O,1}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2}))+$$

$$\ddot{\theta}_{1,2}\ \left(I_{zz2}+I_{zz3}+m_2\,x_{2,C2}{}^2+m_3\ (\sigma_{17}+x_{3,C3}\,\sigma_{16})^2+m_3\ (x_{3,C3}\,\sigma_{18}+\sigma_{19})^2\right)-\dot{\theta}_{1,2}\ \left(m_3\ (\sigma_{17}+x_{3,C3}\,\sigma_{16})\,\sigma_2-m_3\ (x_{3,C3}\,\sigma_{18}+\sigma_{19})\,\sigma_1-\sigma_9+\sigma_8+L_1\,m_2\,\dot{\theta}_{O,1}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2})\right)+\ddot{\theta}_{O,1}\,\sigma_3+\dot{\theta}_{2,3}\ (m_3\ (x_{3,C3}\,\sigma_{18}+\sigma_{19})\,\sigma_4-m_3\ (\sigma_{17}+$$

$$\dot{\theta}_{2,3}\ (m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{18}\,\sigma_4+m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{16}\,\sigma_{11}-m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{16}\,\sigma_5-m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{18}\,\sigma_{10})+\ddot{\theta}_{1,2}\,\sigma_6+\ddot{\theta}_{2,3}\ \left(m_3\,x_{3,C3}{}^2\,\sigma_{16}{}^2+m_3\,x_{3,C3}{}^2\,\sigma_{18}{}^2+I_{zz3}\right)+\dot{\theta}_{1,2}\ (m_3\,x_{3,C3}$$

where

$$\sigma_1=\sigma_{13}+\dot{\theta}_{O,1}\ (\sigma_{17}+x_{3,C3}\,\sigma_{16})+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_{16}$$

$$\sigma_2=\sigma_{15}+\dot{\theta}_{O,1}\ (x_{3,C3}\,\sigma_{18}+\sigma_{19})+\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_{18}$$

```
M1 =
```

$$\begin{pmatrix} I_{zz1} + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3\,\sigma_1^2 + L_1^2\,m_2 + m_3\,\sigma_2^2 + m_1\,x_{1,C1}^2 + m_2\,x_{2,C2}^2 + 2\,L_1\,m_2\,x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2}) \\ m_2\,x_{2,C2}^2 + L_1\,m_2\cos(\theta_{1,2})\,x_{2,C2} + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3\,(\sigma_3 + x_{3,C3}\,\sigma_4)\,\sigma_1 + m_3\,(x_{3,C3}\,\sigma_6 + \sigma_5)\,\sigma_2 \\ I_{zz3} + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_4\,\sigma_1 + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_6\,\sigma_2 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sigma_3 + L_1\cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\,\sigma_4$$

$$\sigma_2 = x_{3,C3}\,\sigma_6 + \sigma_5 + L_1\sin(\theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = L_2\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_5 = L_2\sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_6 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

```
M2 =
```

$$\begin{pmatrix} m_2\,x_{2,C2}^2 + L_1\,m_2\cos(\theta_{1,2})\,x_{2,C2} + I_{zz2} + I_{zz3} + m_3\,(\sigma_2 + x_{3,C3}\,\sigma_4)\,(\sigma_2 + L_1\cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\,\sigma_4) + m_3\,(x_{3,C3}\,\sigma_3 + \sigma_1)\,(x_{3,C3}\,\sigma_3 + \sigma_1 + L_1\sin(\theta_{O,1})) \\ I_{zz2} + I_{zz3} + m_2\,x_{2,C2}^2 + m_3\,(\sigma_2 + x_{3,C3}\,\sigma_4)^2 + m_3\,(x_{3,C3}\,\sigma_3 + \sigma_1)^2 \\ I_{zz3} + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_4\,(\sigma_2 + x_{3,C3}\,\sigma_4) + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_3\,(x_{3,C3}\,\sigma_3 + \sigma_1) \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = L_2\sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = L_2\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

```
M3 =
```

$$\begin{pmatrix} I_{zz3} + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_2\,(\sigma_4 + L_1\cos(\theta_{O,1}) + x_{3,C3}\,\sigma_2) + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_1\,(x_{3,C3}\,\sigma_1 + \sigma_3 + L_1\sin(\theta_{O,1})) \\ I_{zz3} + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_2\,(\sigma_4 + x_{3,C3}\,\sigma_2) + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_1\,(x_{3,C3}\,\sigma_1 + \sigma_3) \\ m_3\,x_{3,C3}^2\,\sigma_2^2 + m_3\,x_{3,C3}^2\,\sigma_1^2 + I_{zz3} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sin(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = \cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_3 = L_2\sin(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_4 = L_2\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

```
M_theta =
```

$$\begin{pmatrix} x_{1,C1}^2\,m_1 + \left(L_1^2 + 2\cos(\theta_{1,2})\,L_1\,x_{2,C2} + x_{2,C2}^2\right)m_2 + \left(\sigma_4^2 + \sigma_5^2\right)m_3 + I_{zz1} + I_{zz2} + I_{zz3} & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & x_{2,C2}^2\,m_2 + \left((\sigma_7 + x_{3,C3}\,\sigma_6)^2 + (x_{3,C3}\,\sigma_8 + \sigma_9)^2\right)m_3 + I_{zz2} + I_{zz3} & \sigma_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \left(x_{3,C3}^2\,\sigma_6^2 + x_{3,C3}^2\,\sigma_8^2\right)m_3 + I_{zz3} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \left(x_{2,C2}^2 + L_1\cos(\theta_{1,2})\,x_{2,C2}\right)m_2 + ((\sigma_7 + x_{3,C3}\,\sigma_6)\,\sigma_4 + (x_{3,C3}\,\sigma_8 + \sigma_9)\,\sigma_5)\,m_3 + I_{zz2} + I_{zz3}$$

$$\sigma_2 = (x_{3,C3}\,\sigma_6\,\sigma_4 + x_{3,C3}\,\sigma_8\,\sigma_5)\,m_3 + I_{zz3}$$

6.7. Cálculo del vector par

```
V_theta =
```

$$\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{1,2}\ \left(m_3\,\sigma_2\,\sigma_9 - m_3\,\sigma_{11}\,\sigma_1 - \sigma_6 + \sigma_5 + L_1\,m_2\,\dot{\theta}_{1,2}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2}) + 2\,L_1\,m_2\,\dot{\theta}_{O,1}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2})\right) - \dot{\theta}_{2,3}\ (m_3\,\sigma_9\,\sigma_4 - m_3\,\sigma_{11}\,\sigma_3 - m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{13}\,\sigma_8 + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{15}\,\sigma_7) \\ \dot{\theta}_{2,3}\ (m_3\ (x_{3,C3}\,\sigma_{15} + \sigma_{16})\,\sigma_3 - m_3\ (\sigma_{14} + x_{3,C3}\,\sigma_{13})\,\sigma_4 + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{13}\,\sigma_8 - m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{15}\,\sigma_7) - \dot{\theta}_{1,2}\ \left(m_3\ (\sigma_{14} + x_{3,C3}\,\sigma_{13})\,\sigma_2 - m_3\ (x_{3,C3}\,\sigma_{15} + \sigma_{16})\,\sigma_1 - \sigma_6 + \sigma_5 + L_1\,m_2\,\dot{\theta}_{O,1}\,x_{2,C2}\sin(\theta_{1,2})\right) + m_3\,\sigma_2\,\sigma_7 - m_3\,\sigma_8\,\sigma_1 + L_1\,m_2\,\dot{\theta}_{O,1}^{\ 2}\,x_{2,C2} \\ \dot{\theta}_{2,3}\ (m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{15}\,\sigma_3 + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{13}\,\sigma_8 - m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{13}\,\sigma_4 - m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{15}\,\sigma_7) + \dot{\theta}_{1,2}\ (m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{13}\,\sigma_8 + m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{15}\,\sigma_1 - m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{13}\,\sigma_2 - m_3\,x_{3,C3}\,\sigma_{15}\,\sigma_7) - m_3\,\sigma_3\,\sigma_8 + m_3\,\sigma_7\,\sigma_4 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sigma_{10} + \dot{\theta}_{O,1}\ (\sigma_{14} + x_{3,C3}\,\sigma_{13}) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_{13}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{12} + \dot{\theta}_{O,1}\ (x_{3,C3}\,\sigma_{15} + \sigma_{16}) + \dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\,\sigma_{15}$$

```
G_theta =
```

$$\begin{pmatrix} g\,m_3\ (\sigma_2 + L_1\cos(\theta_{O,1}) + \sigma_1) + g\,m_2\ (x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) + L_1\cos(\theta_{O,1})) + g\,m_1\,x_{1,C1}\cos(\theta_{O,1}) \\ g\,m_3\ (\sigma_2 + \sigma_1) + g\,m_2\,x_{2,C2}\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1}) \\ g\,m_3\,x_{3,C3}\cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1}) \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = x_{3,C3}\cos(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = L_2\cos(\theta_{1,2} + \theta_{O,1})$$

6.8. Dinámica inversa

Problema: dadas las trayectorias articulares $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$ (o la trayectoria cartesiana ya convertida), ¿qué **torques** τ debo aplicar en cada junta?

Con el modelo:

$$\tau = M(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q)$$

Se evalúa con determinados parámetros y se obtiene directamente el vector de torques. Esto es lo que usan los controladores de seguimiento: si se quiere mover el SCARA siguiendo $q(t)$, la **dinámica inversa** da la señal $\tau(t)$ que compensa inercia, Coriolis/centrífugos y gravedad.

```
Cq =
```

$$\Big(I_{zz2}\,\ddot{\theta}_{1,2} + I_{zz3}\,\ddot{\theta}_{1,2} + I_{zz3}\,\ddot{\theta}_{2,3} + I_{zz1}\,\ddot{\theta}_{O,1} + I_{zz2}\,\ddot{\theta}_{O,1} + I_{zz3}\,\ddot{\theta}_{O,1} + \sigma_{13} + \sigma_3 + \sigma_2 + m_1\,\ddot{\theta}_{O,1}\,{x_{1,C1}}^2 + \sigma_{12} + \sigma_1 + \sigma_{15} + {L_1}^2\,m_2\,\ddot{\theta}_{O,1} + {L_1}^2\,m_3\,\ddot{\theta}_{O,1} + \sigma_{14} - L_1\,m_3\,{\dot{\theta}_{1,2}}^2\,x_{3,C3}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}) - L_1\,m_3\,{\dot{\theta}_{2,3}}^2\,x_{3,C3}\,\mathrm{s}$$

where

$$\sigma_1 = m_3\,\ddot{\theta}_{O,1}\,{x_{3,C3}}^2$$

$$\sigma_2 = m_3\,\ddot{\theta}_{2,3}\,{x_{3,C3}}^2$$

```
C =
```

$$\begin{pmatrix} -\sigma_4-\sigma_3-\sigma_8-\sigma_6-\sigma_1 & -\sigma_4-\sigma_3-\sigma_2-\sigma_8-\sigma_7-\sigma_6-\sigma_1-\sigma_5 & -2\,m_3\,x_{3,C3}\,(L_1\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3})+L_2\sin(\theta_{2,3}))\,(\dot{\theta}_{1,2}+\dot{\theta}_{2,3}+\dot{\theta}_{O,1}) \\ \sigma_2+\sigma_7-\sigma_1+\sigma_5 & -\sigma_1 & -2\,L_2\,m_3\,x_{3,C3}\sin(\theta_{2,3})\,(\dot{\theta}_{1,2}+\dot{\theta}_{2,3}+\dot{\theta}_{O,1}) \\ 2\,m_3\,x_{3,C3}\,(L_2\,\dot{\theta}_{1,2}\sin(\theta_{2,3})+L_2\,\dot{\theta}_{O,1}\sin(\theta_{2,3})+L_1\,\dot{\theta}_{O,1}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3})) & 2\,L_2\,m_3\,x_{3,C3}\sin(\theta_{2,3})\,(\dot{\theta}_{1,2}+\dot{\theta}_{O,1}) & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = 2\,L_2\,m_3\,\dot{\theta}_{2,3}\,x_{3,C3}\sin(\theta_{2,3})$$

$$\sigma_2 = 2\,L_1\,m_3\,\dot{\theta}_{O,1}\,x_{3,C3}\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3})$$

```
tau_recon =
```

$$\Big(I_{zz2}\,\ddot{\theta}_{1,2} + I_{zz3}\,\ddot{\theta}_{1,2} + I_{zz3}\,\ddot{\theta}_{2,3} + I_{zz1}\,\ddot{\theta}_{O,1} + I_{zz2}\,\ddot{\theta}_{O,1} + I_{zz3}\,\ddot{\theta}_{O,1} + \sigma_{16} + \sigma_4 + \sigma_3 + m_1\,\ddot{\theta}_{O,1}\,{x_{1,C1}}^2 + \sigma_{15} + \sigma_2 + \sigma_{18} + {L_1}^2\,m_2\,\ddot{\theta}_{O,1} + {L_1}^2\,m_3\,\ddot{\theta}_{O,1} + \sigma_{17} + \sigma_{13} + \sigma_{10} + L_1\,g\,m_2\cos(\theta_{O,1}) + L_1\,g\,m_3\cos(\theta_{O,1}) +$$

where

$$\sigma_1 = g\,m_3\,x_{3,C3}\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

7. CODIGO MATLAB

Listing 1: Ejemplo de código en MATLAB

```
Exámen Robótica
Alumnos: Rocio Fabiola Romero Bernal

%Defición de la función de manera simbolica
syms Tij(x_i_j,y_i_j,z_i_j,gi_j,bi_j,ai_j)

%Definición de la transformación homógenea general
Tij(x_i_j,y_i_j,z_i_j,gi_j,bi_j,ai_j) = [cos(ai_j)*cos(bi_j) cos(ai_j)*sin(bi_j)*sin(gi_j)-sin(
    ai_j)*cos(gi_j) sin(ai_j)*sin(gi_j)+cos(ai_j)*sin(bi_j)*cos(gi_j) x_i_j; sin(ai_j)*cos(bi_j)
    cos(ai_j)*cos(gi_j)+sin(ai_j)*sin(bi_j)*sin(gi_j) sin(ai_j)*sin(bi_j)*cos(gi_j)-cos(ai_j)*sin(
    gi_j) y_i_j; -sin(bi_j) cos(bi_j)*sin(gi_j) cos(bi_j)*cos(gi_j) z_i_j; 0 0 0 1]

Modelado del robot Scara


Planteamiento del modelo cinemático directo  de la posición

syms x_0_1 y_0_1 theta_0_1 L_2 theta_1_2 L_3 theta_2_3 L_1

T_0_1 = Tij(x_0_1,y_0_1,0,0,0,theta_0_1)

T_1_2 = Tij(L_1,0,0,0,0,theta_1_2)

T_2_3 = Tij(L_2,0,0,0,0,theta_2_3)

T_3_P = Tij(L_3,0,0,0,0,0)
```

```
T_0_P = simplify(T_0_1*T_1_2*T_2_3*T_3_P)

Planteamiento del modelo cinemático inverso de la posición

Parámetros que integran el vector de posición

%% Extracción desde T_0_P (ROTACIÓN, POSICIÓN, ÁNGULO y EJE)     simbólico
% Submatriz de rotación y vector de posición
R = T_0_P(1:3,1:3)
r = T_0_P(1:3,4)




xi_0_P = [T_0_P(1,4);T_0_P(2,4);theta_0_1+theta_1_2+theta_2_3]

q = [theta_0_1; theta_1_2; theta_2_3];
syms J_theta

J_theta

J_theta = jacobian(xi_0_P,q)


%% Regla SIMBÓLICA de actualización (con tus variables xi_0_P y J_theta)

% Parámetros simbólicos
syms h epsJ_sym positive
syms qk1 qk2 qk3 real

% Estado articular actual simbólico q_k
qk = [qk1; qk2; qk3]

% Postura deseada simbólica en el espacio de tarea
syms x_d y_d phi_d real
xi_d = [x_d; y_d; phi_d]

% Error en q_k (usando tu estado xi_0_P)
e_k = simplify( xi_d - subs(xi_0_P, q, qk))

% Jacobiano evaluado en q_k (usando tu J_sym)
Jk(qk1,qk2,qk3) = subs(J_theta, q, qk)

% Paso predictor (Euler) con Damped Least Squares
dq1_sym = (Jk(qk1,qk2,qk3).'*Jk(qk1,qk2,qk3) + epsJ_sym*eye(3)) \ ...
          (Jk(qk1,qk2,qk3).'*e_k(qk1,qk2,qk3))

% Punto predicho q_e
q_e_sym = qk + h*dq1_sym

% Re-evaluaciones en q_e para el trapecio
J_e(qk1,qk2,qk3) = subs(J_sym,  q, q_e_sym)
e_e(qk1,qk2,qk3) = xi_d - subs(xi_0_P, q, q_e_sym)

% Paso corrector (trapecio)
dq2_sym = (J_e(qk1,qk2,qk3).'*J_e(qk1,qk2,qk3) + epsJ_sym*eye(3)) \ ...
          (J_e(qk1,qk2,qk3).'*e_e(qk1,qk2,qk3))

dq_trap_sym = (dq1_sym + dq2_sym)/2
qkp1_sym    = qk + h*dq_trap_sym

% Norma del error y criterio de paro simbólico
err_norm_k = sqrt(e_sym(qk1,qk2,qk3).'*e_sym(qk1,qk2,qk3))
syms tol positive
stop_cond  = err_norm_k <= tol



%% Conversión a función numérica (para usarla en el solver IK)
```

```
% Ajusta nombres si tus 'syms' cambian
fk_sym_fun = matlabFunction(T_0_P, ...
    'Vars', { [theta_0_1, theta_1_2, theta_2_3], [L_1, L_2, L_3], [x_0_1, y_0_1] });
% Si tu base está en el origen:
fkfun = @(q,L) double(fk_sym_fun(q(:).', L(:).', [0, 0]));

Planteamiento del modelo cinemático directo de las velocidades

J_theta = jacobian(xi_0_P,[theta_0_1, theta_1_2,theta_2_3])

Planteamiento del modelo cinemático inverso de las velocidadees

Jinv=inv(J_theta)

Planteamiento del modelo cinemático directo de las aceleraciones

% Derivada del Jacobiano: Jdot = sum_i (  J  /  q_i  ) qd_i
Jdot = diff(J_theta, q(1))*qk1 + diff(J_theta, q(2))*qk2 + diff(J_theta, q(3))*qk3
Jdot = simplify(Jdot)

Planteamiento del modelo cinemático inverso de las aceleraciones

% Derivada del inverso del Jacobiano: (d/dt) J^{-1} = - J^{-1} * Jdot * J^{-1}
Jinv_dot = simplify( - Jinv * Jdot * Jinv )
Modelo dinámico por ecuaciones de E ler -Lagrange

Se emplearan las siguientes ecuaciones para el cálculo de la energía cinética:




syms x_1_C1 theta_dot_0_1

v_C1_C1 = [0;x_1_C1*theta_dot_0_1;0]

v_0_C1 = [-x_1_C1*sin(theta_0_1)*theta_dot_0_1;x_1_C1*cos(theta_0_1)*theta_dot_0_1;0]

transpose(v_C1_C1)*v_C1_C1

simplify(transpose(v_0_C1)*v_0_C1)

Cálculo de la posición de los centros de masa

syms x_1_C1 x_2_C2 x_3_C3

T_1_C1 = Tij(x_1_C1,0,0,0,0,0)

T_0_C1 = T_0_1*T_1_C1

T_2_C2 = Tij(x_2_C2,0,0,0,0,0)

T_0_C2 = T_0_1*T_1_2*T_2_C2

T_3_C3 = Tij(x_3_C3,0,0,0,0,0)

T_0_C3 = T_0_1*T_1_2*T_2_3*T_3_C3

%Vectores de posición
p_0_C1 = [T_0_C1(1,4);T_0_C1(2,4);T_0_C1(3,4)]

p_0_C2 = simplify([T_0_C2(1,4);T_0_C2(2,4);T_0_C2(3,4)])

p_0_C3 = simplify([T_0_C3(1,4);T_0_C3(2,4);T_0_C3(3,4)])

Cálculo de la cinemática inversa (funciones aplicables)


%% Plantilla de ejecución (asignas valores cuando corras)
% q0   = [q1_0; q2_0; q3_0];        % semilla (rad)
% L    = [L1; L2; L3];              % longitudes
% h    = 0.7;                       % tamaño de paso
```

```
% tol  = 1e-5;                         % tolerancia
% kmax = 500;                          % iteraciones máx.
% epsJ = 1e-6;                         % regularización

% % Objetivo como matriz homogénea:
% % T_d = ...  % la defines tú
% xi_0_P_d = xi_0_P_from_T_traza_eje(T_d)    % <- se muestra también

% % Ejecutar la IK (devuelve historial y muestra error por iteración)
% [q_hist, info, e_hist] = ik_scara_trap_xiOP(q0, L, h, tol, kmax, fkfun, xi_0_P_d, epsJ);

% % Resultados
% q_sol = q_hist(:,end)
% info



function [q_hist, info, e_hist] = ik_scara_trap_xiOP(q0, L, h, tol, kmax, fkfun, xi_0_P_des, epsJ)
% IK numérica para SCARA (planar) usando el vector de estados xi_0_P = [x; y; phi].
% - Método: Damped Least Squares + integración del TRAPECIO.
% - Itera con while hasta norma de error <= tol o alcanzar kmax.
%
% ARGUMENTOS:
%   q0           : [n x 1] semilla articular (para SCARA 3R, n=3)
%   L            : [m x 1] longitudes de eslabones (no se usan aquí dentro, se pasan a fkfun)
%   h            : tamaño de paso (escala el incremento articular)
%   tol          : tolerancia de convergencia sobre ||e||
%   kmax         : máximo de iteraciones del while
%   fkfun        : handle fkfun(q,L)->T(4x4) (tu FK numérica desde T_0_P simbólica)
%   xi_0_P_des   : [3x1] estado deseado (x_d, y_d, phi_d)
%   epsJ         : (opcional) regularización DLS; default = 1e-6
%
% SALIDAS:
%   q_hist : historial de q por columnas (q(:,k))
%   info   : struct('converged',bool,'iters',k,'err',norma_error_final)
%   e_hist : historial de ||e|| por iteración

if nargin < 8, epsJ = 1e-6; end

q = q0(:);
q_hist = q;
e_hist = [];
k = 0;  % contador

while true
    k = k + 1;

    % 1) FK y estado actual
    T   = fkfun(q, L);               % 4x4
    xi  = xi_0_P_from_T(T);          % [x;y;phi] calculado a partir de T

    % 2) Error
    e   = xi_0_P_des(:) - xi(:);
    en  = norm(e);
    e_hist(end+1) = en;

    % 3) Criterio de paro
    if (en <= tol) || (k >= kmax)
        info = struct('converged', en <= tol, 'iters', k, 'err', en);
        break;
    end

    % 4) Jacobiano numérico de xi_0_P respecto a q
    J = jacobian_fd(@(qq) xi_0_P_from_T(fkfun(qq, L)), q);  % [3 x n]

    % 5) Predicción (Euler) con DLS
    dq1 = (J.'*J + epsJ*eye(size(J,2))) \ (J.'*e);
    q_e = wrapToPi_local(q + h*dq1);

    % 6) Corrección (trapecio): re-evaluamos en el punto predicho
    xi2 = xi_0_P_from_T(fkfun(q_e, L));
```

```
    e2  = xi_0_P_des(:) - xi2(:);
    J2  = jacobian_fd(@(qq) xi_0_P_from_T(fkfun(qq, L)), q_e);
    dq2 = (J2.'*J2 + epsJ*eye(size(J2,2))) \ (J2.'*e2);

    dq_trap = 0.5*(dq1 + dq2);

    % 7) Actualización
    q = wrapToPi_local(q + h*dq_trap);

    % 8) Guardar historial
    q_hist(:,end+1) = q;
end
end




function J = jacobian_fd(f, q, delta)
% Jacobiano por diferencias finitas de f: R^n -> R^m
if nargin < 3, delta = 1e-6; end
q = q(:);
f0 = f(q);
m  = numel(f0);
n  = numel(q);
J  = zeros(m,n);
for i = 1:n
    qi = q; qi(i) = qi(i) + delta;
    fi = f(qi);
    J(:,i) = (fi(:) - f0(:))/delta;
end
end

function a = wrapToPi_local(a)
% Normaliza ángulos a (-pi, pi]
a = mod(a + pi, 2*pi) - pi;
end

Cálculo de las velocidades

syms theta_dot_0_1 theta_dot_1_2 theta_dot_2_3

v_0_C1 = diff(p_0_C1,theta_0_1)*theta_dot_0_1+diff(p_0_C1,theta_1_2)*theta_dot_1_2+diff(p_0_C1,
    theta_2_3)*theta_dot_2_3

v_0_C2 = diff(p_0_C2,theta_0_1)*theta_dot_0_1+diff(p_0_C2,theta_1_2)*theta_dot_1_2+diff(p_0_C2,
    theta_2_3)*theta_dot_2_3

v_0_C3 = diff(p_0_C3,theta_0_1)*theta_dot_0_1+diff(p_0_C3,theta_1_2)*theta_dot_1_2+diff(p_0_C3,
    theta_2_3)*theta_dot_2_3

Cálculo de la velocidades angulares

syms omega_1_1 omega_2_2 omega_3_3
%Propagación para el primer cuerpo
omega_1_1

omega_0_0 = [0;0;0]

n_1_1 = [0;0;1]

R_0_1 = [T_0_1(1,1),T_0_1(1,2),T_0_1(1,3);T_0_1(2,1),T_0_1(2,2),T_0_1(2,3);T_0_1(3,1),T_0_1(3,2),
    T_0_1(3,3)]

R_1_0 = transpose(R_0_1)

%Ecuación de propagación
omega_1_1 = R_1_0*omega_0_0+n_1_1*theta_dot_0_1

%Propagación para el segundo cuerpo
omega_2_2
```

```
n_2_2 = [0;0;1]

R_1_2 = [T_1_2(1,1),T_1_2(1,2),T_1_2(1,3);T_1_2(2,1),T_1_2(2,2),T_1_2(2,3);T_1_2(3,1),T_1_2(3,2),T_1_2(3,3)]

R_2_1 = transpose(R_1_2)

%Ecuación de propagación
omega_2_2 = R_2_1*omega_1_1+n_2_2*theta_dot_1_2

%Propagación para el tercer cuerpo
omega_3_3

n_3_3 = [0;0;1]

R_2_3 = [T_2_3(1,1),T_2_3(1,2),T_2_3(1,3);T_2_3(2,1),T_2_3(2,2),T_2_3(2,3);T_2_3(3,1),T_2_3(3,2),T_2_3(3,3)]

R_3_2 = transpose(R_2_3)

%Ecuación de propagación
omega_3_3 = R_3_2*omega_2_2+n_3_3*theta_dot_2_3

v_0_C3

Cálculo de las aceleraciones

syms theta_ddot_0_1 theta_ddot_1_2 theta_ddot_2_3 real
qd  = [theta_dot_0_1;  theta_dot_1_2;  theta_dot_2_3];
qdd = [theta_ddot_0_1; theta_ddot_1_2; theta_ddot_2_3];
a_0_C1 = jacobian(v_0_C1,q)*qd + jacobian(p_0_C1,q)*qdd
a_0_C2 = jacobian(v_0_C2,q)*qd + jacobian(p_0_C2,q)*qdd
a_0_C3 = jacobian(v_0_C3,q)*qd + jacobian(p_0_C3,q)*qdd
Cálculo de las aceleraciones angulares

syms alpha_1_1 alpha_2_2 alpha_3_3
% Eje de cada articulación en su propio marco (SCARA: z)
z = sym([0;0;1])
alpha_0_0= sym([0;0;0])

% ===================== ENLACE 1 =====================
alpha_1_1 = R_1_0*alpha_0_0 + z*theta_ddot_0_1 + cross(omega_1_1, z*theta_dot_0_1)

% ===================== ENLACE 2 =====================
alpha_2_2 = R_2_1*alpha_1_1 + z*theta_ddot_1_2 + cross(omega_2_2, z*theta_dot_1_2)

% ===================== ENLACE 3 =====================
alpha_3_3 = R_3_2*alpha_2_2 + z*theta_ddot_2_3 + cross(omega_3_3, z*theta_dot_2_3)

% (Opcional) simplificar resultados
alpha_1_1 = simplify(alpha_1_1)
alpha_2_2 = simplify(alpha_2_2)
alpha_3_3 = simplify(alpha_3_3)

Defición de los elementos de inercia

syms g I_xx1 I_yy1 I_zz1 I_xx2 I_yy2 I_zz2 I_xx3 I_yy3 I_zz3
%vector de gravedad

g_v = [0;-g;0]

I_C1 = [I_xx1,0,0;0,I_yy1,0;0,0,I_zz1]

I_C2 = [I_xx2,0,0;0,I_yy2,0;0,0,I_zz2]

I_C3 = [I_xx3,0,0;0,I_yy3,0;0,0,I_zz3]

Cálculo del Lagrangiano

syms m_1 m_2 m_3
%energía cinética de cada uno de los cuerpos
```

```
k_1 = simplify((m_1/2)*transpose(v_0_C1)*v_0_C1+(1/2)*transpose(omega_1_1)*I_C1*omega_1_1)

k_2 = simplify((m_2/2)*transpose(v_0_C2)*v_0_C2+(1/2)*transpose(omega_2_2)*I_C2*omega_2_2)

k_3 = simplify((m_3/2)*transpose(v_0_C3)*v_0_C3+(1/2)*transpose(omega_3_3)*I_C3*omega_3_3)

% Cáclulo de la energía potencial de cada cuerpo

u_1 = -m_1*transpose(p_0_C1)*g_v

u_2 = -m_2*transpose(p_0_C2)*g_v

u_3 = -m_3*transpose(p_0_C3)*g_v

La = (k_1+k_2+k_3)-(u_1+u_2+u_3)

Cálculo de los pares

syms theta_ddot_0_1 theta_ddot_1_2 theta_ddot_2_3

D_theta1 = diff(La,theta_dot_0_1)

% Cálculo de relación

tao_1 = diff(D_theta1,theta_0_1)*theta_dot_0_1 + diff(D_theta1,theta_1_2)*theta_dot_1_2 + diff(D_theta1,theta_2_3)*theta_dot_2_3 + diff(D_theta1,theta_dot_0_1)*theta_ddot_0_1+ diff(D_theta1,theta_dot_1_2)*theta_ddot_1_2+ diff(D_theta1,theta_dot_2_3)*theta_ddot_2_3-diff(La,theta_0_1)

D_theta2 = diff(La,theta_dot_1_2)

tao_2 = diff(D_theta2,theta_0_1)*theta_dot_0_1 + diff(D_theta2,theta_1_2)*theta_dot_1_2 + diff(D_theta2,theta_2_3)*theta_dot_2_3 + diff(D_theta2,theta_dot_0_1)*theta_ddot_0_1+ diff(D_theta2,theta_dot_1_2)*theta_ddot_1_2+ diff(D_theta2,theta_dot_2_3)*theta_ddot_2_3-diff(La,theta_1_2)

D_theta3 = diff(La,theta_dot_2_3)

tao_3 = diff(D_theta3,theta_0_1)*theta_dot_0_1 + diff(D_theta3,theta_1_2)*theta_dot_1_2 + diff(D_theta3,theta_2_3)*theta_dot_2_3 + diff(D_theta3,theta_dot_0_1)*theta_ddot_0_1+ diff(D_theta3,theta_dot_1_2)*theta_ddot_1_2+ diff(D_theta3,theta_dot_2_3)*theta_ddot_2_3-diff(La,theta_2_3)

tao = [tao_1;tao_2;tao_3]

% Cálculo de la matriz de inercia

M1 = subs(tao,[theta_ddot_0_1,theta_ddot_1_2,theta_ddot_2_3,theta_dot_0_1,theta_dot_1_2,theta_dot_2_3,g],[1,0,0,0,0,0,0])

M2 = subs(tao,[theta_ddot_0_1,theta_ddot_1_2,theta_ddot_2_3,theta_dot_0_1,theta_dot_1_2,theta_dot_2_3,g],[0,1,0,0,0,0,0])

M3 = subs(tao,[theta_ddot_0_1,theta_ddot_1_2,theta_ddot_2_3,theta_dot_0_1,theta_dot_1_2,theta_dot_2_3,g],[0,0,1,0,0,0,0])

M_theta = collect([M1 M2 M3],[m_1,m_2,m_3])

Cálculo de vector pares

V_theta = subs(tao,[theta_ddot_0_1,theta_ddot_1_2,theta_ddot_2_3,theta_dot_0_1,theta_dot_1_2,theta_dot_2_3,g],[0,0,0,theta_dot_0_1,theta_dot_1_2,theta_dot_2_3,0])

G_theta = subs(tao,[theta_ddot_0_1,theta_ddot_1_2,theta_ddot_2_3,theta_dot_0_1,theta_dot_1_2,theta_dot_2_3,g],[0,0,0,0,0,0,g])

Cálculo del modelo  Dinámico inverso

% Parte Coriolis/centrífuga: C(q,q  ) q   = tau0 - g
Cq = simplify( tao - G_theta )

% Matriz C (lineal en q  ): C =    (Cq)/   q
C = simplify( jacobian(Cq, qd) )
```

```
%% === Verificación:    = M*q   + C*q   + g ===
tau_recon = simplify( M_theta*qdd + C*qd + G_theta )
```

8. Conclusión

A lo largo de este proyecto, hemos abordado una serie de retos técnicos y problemas complejos al desarrollar el algoritmo para la cinemática y dinámica de un robot SCARA, con el objetivo de optimizar y controlar sus movimientos de manera precisa. Uno de los principales problemas fue la construcción simbólica de las matrices de cinemática inversa.Sin embargo, a través del uso adecuado de MATLAB y las herramientas simbólicas, logramos superar este desafío y obtener modelos matemáticos precisos.Se creo una función para el cálculo de la cinemática inversa basandose en los problemas tipicos de movimiento que presentan los robots SCARA.

Este proyecto demuestra la importancia de la integración de la teoría de la cinemática y dinámica en la Industria 4.0, donde la automatización de procesos mediante robots es esencial para aumentar la eficiencia y reducir los costos en la producción industrial. Los conocimientos adquiridos en el diseño y control de robots SCARA, combinados con el uso de herramientas como la simulación simbólica, permiten crear soluciones robóticas altamente precisas y adaptativas, lo que beneficia tanto al ámbito académico como industrial.

9. Referencias

1. Sastry, S. (1990). Introductory to Robotics: Analysis, Control, Applications. Addison-Wesley.
2. Dorf, R. C., Bishop, R. H. (2017). Modern Control Engineering. Pearson.
3. Craig, J. J. (2005). Introduction to Robotics: Mechanics and Control. Pearson.
4. Indeed (2025). Qué hace un ingeniero en robótica: funciones, formación y salario.
5. Robotics with ROS. (2022, 15 de marzo). Inverse kinematics of a 3-DOF planar manipulator [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=NEySrXfxuDg
6. Robotics with ROS. (2022, 22 de marzo). Forward kinematics of a 3-DOF planar manipulator [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=btZJHhLGg5U
7. Robotics with ROS. (2022, 29 de marzo). Jacobian matrix for a 3-DOF planar manipulator [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=T$_{u}mUStA-mo$