UNIVERSIDAD NACIONAL
GUILLERMO BROWN

LÓGICA DE PREDICADOS

Matemática General - 02

Prof. Gangale Valeria

Matemática = Lenguaje de símbolos

Veamos algunos símbolos que nos van a ser útiles:

- Variables proposicionales:

  x y z (w u v t)
- Números: a b c d
- Símbolos matemáticos:

  $= \ < \ > \ \geq \ \leq \ \equiv \ \approx \ \neq \ /$
- Constantes proposicionales:

  V (1) F (0)
- Símbolos Lógicos:

  $\vee \ \wedge \ \Rightarrow \ \Leftrightarrow \ \forall \ \exists$

La **lógica** es la rama de la Matemática que analiza la forma en la que razonamos. Es la disciplina que por medio de reglas y estrategias determina la validez de un argumento.
La lógica es la base de todo razonamiento automatizado que es primordial en informática.

Lógica de predicados

Se utiliza en la ciencia (y en general) para los razonamientos y teorías

Una proposición es un enunciado u oración afirmativa la cual se puede dar un valor de verdad. Podemos decir si es verdadero o falso

- “Einstein fue un físico teórico”
- “La letra o tiene dos significados”
- “Marcela ganó en las olimpíadas matemáticas”

También son proposiciones todas las leyes científicas, las fórmulas matemáticas

- $E = mc^2$ y $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

No son proposiciones las opiniones, proverbios, refranes, modismos, suposiciones o juicios de valor, las oraciones interrogativas, las exhortativas o imperativas, las desiderativas; las exclamativas o admirativas y los enunciados abiertos.

Ella es muy bella   Abrí la puerta   ¿Hoy es viernes?

Las proposiciones se representan con letras : p; q; r; t ; w….

La lógica proposicional o de predicados estudia la formación de proposiciones complejas a partir de proposiciones simples

Proposición : tiene una valor lógico V O F

Simple: sin conectores lógicos

Compuesta: con conectores lógicos, unen dos o más proposiciones

Simón es un hombre trabajador → p
Simón es una persona amigable → q
Simón es un hombre trabajador y una persona amigable → p ^ q

PROPOSICIONES

Clasificación: Simples y Compuestas

Nombre	Símbolo	Notación	Lectura
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q
Disyunción	$\vee$	$p \vee q$	p ó q
Disyunción exclusiva	$\underline{\vee}$	$p \underline{\vee} q$	ó p ó q (no ambas)
Implicación	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	p implica q
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p si y solo si q
Negación	$\neg$	$\neg p$	no p

Conectivos Lógicos

¿Cómo hacemos para saber el valor de verdad de las proposiciones compuestas?

Para eso usamos las:
Leyes de la lógica básicas:

Tabla de verdad de los conectivos

Proposición p	Proposición q	conjunción	Disy. inclusiva	Disy. exclusiva	condicional	Bicondicional	negación
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\underline{p \vee q}$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$	$\sim p$
v	v	v	v	f	v	v	f
v	f	f	v	v	f	f	f
f	v	f	v	v	v	f	v
f	f	f	f	f	v	v	v

Las proposiciones compuestas pueden tener mas de dos proposiciones simples unidas por los conectivos lógicos, veamos como se simbolizan

Y luego hacemos la tabla

¿qué pasa si tengo mas variables? ¿cuántas posibilidades voy a tener?

Cant de Prop	Cant de pos
1 proposición	2 posibilidades
2 proposiciones	4 posibilidades
3 proposiciones	8 posibilidades
4 proposiciones	16 posibilidades
N proposiciones	¿?

$$2^n$$

EJEMPLOS:

1) Juan practica tenis y Matías juega al fútbol

P = «Juan practica tenis»

Q= «Matías juega al fútbol»

CONJUNCIÓN

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2) El perro ladra o mueve la cola

P = «El perro ladra»

Q= «mueve la cola»

DISYUNCIÓN

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3) Julieta está casada o soltera

P = «Julieta está casada»

Q= «Julieta está soltera»

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

P	Q	P $\underline{\vee}$ Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4) Si llueve entonces se mojará el piso

P = «Si llueve» Antecedente

Q= «se mojará el piso» Consecuente

IMPLICACIÓN O CONDICIONAL

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5) Podré ingresar a la Universidad sí y solo sí apruebo el CPU

P = «Podré ingresar a la Universidad »

Q= «si apruebo el CPU»

BICONDICIONAL

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

6) No es cierto que mañana es sábado

P = «mañana es sábado» — **NEGACIÓN**

P	~ P
V	F
F	V

Guía para la simbolización:

- Identifico los conectivos
- Identifico las proposiciones simples
- simbolizo la oración!

En este caso la coma reemplaza al "entonces"

Condicional

Conjunción

Si $\underbrace{\text{la información no es completa para compradores}}_{p}$ y $\underbrace{\text{vendedores}}_{q}$, $\underbrace{\text{hay una falla de mercado}}_{r}$

p: la información no es completa para compradores
q: la información no es completa para vendedores
r: hay una falla en el mercado

$$(p \land q) \rightarrow r$$

En este caso la coma reemplaza al "entonces"

Condicional

Conjunción

Si $\underbrace{\text{la información no es completa para compradores}}_{p}$ y $\underbrace{\text{vendedores}}_{q}$, $\underbrace{\text{hay una falla de mercado}}_{r}$

$(p \wedge q) \longrightarrow r$

p	q	$(p \wedge q)$	r	$(p \wedge q) \longrightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V
F	F	F	F	V

Otro ejemplo: Si 8 es impar y 6 es impar, entonces 8 < 6

P = «8 es impar»

Q = «6 es impar» $2^3 = 8$

R = «8 < 6»

P	Q	R	P ∧ Q	(P ∧ Q)→ R
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Condición necesaria y suficiente:

Suficiente: un elemento o hecho es condición suficiente de la existencia de otro cuando al darse el primero debe darse el segundo, pero sin que ello signifique que la existencia del segundo quepa deducirla del primero
(alcanza que ocurra p para que ocurra q)

“Si llueve, se mojarán las calles”

Necesaria: un elemento o hecho es condición necesaria de la existencia de otro; cuando si bien es cierto que debe darse el primero para que se de el segundo, no basta eso.

“Si el alumno conoce el inglés entonces puede matricularse en la universidad”

Si un elemento es condición necesaria de otro, entonces éste es condición suficiente de aquel.

Condición necesaria y suficiente: un hecho o elemento es condición necesaria y suficiente de otro si del hecho de darse el primero se sigue necesariamente el segundo y viceversa.

“Si no respira ;está muerto”

Veamos el siguiente ejemplo:

¿ES VERDADERA O FALSA?

"X es un número positivo"

$\underbrace{\hphantom{\text{X es un número positivo}}}$

Función proposicional

¿Cómo se simboliza?

Universo = conjunto donde "vive" la variable (en el ejemplo U = { los pares} o U = { -6; -8; 6; 50}

Defino la función proposicional: P(x) = x es positivo o P(x) = x ≥ 0

Veamos ahora estas frases:

"Todos los números son naturales"

"Algunos números son irracionales"

¿Cómo se simboliza?

- Cuantificador Universal (Para Todos): $\forall$ x P(x)
- Cuantificador Existencial (Existe): $\exists$ x Q(x)

¿Cuándo son verdaderas o falsas?

Depende del Universo

- **<u>Cuantificador Universal</u>:** p(x) se cumple para todos los valores de la variable x.

La proposición se lee: “Para todos los x pertenecientes al universo, se cumple p(x)”

Simbolización: $\forall x P(x)$

Otras palabras que son sinónimos del Cuantificador Universal:

“Para todo x”, “Todos los x”, “Para cada x”, “Para cualquier x”

<u>Valor de verdad para el Cuantificador Universal</u>

- Es Verdadero cuando se verifica para todas las x pertenecientes al universo.
- Es Falso cuando, por lo menos, existe un elemento del universo para el cual no se verifica.

- **<u>Cuantificador Existencial</u>**: p(x) se cumple para algunos valores de la variable x.

La proposición se lee: “Existe al menos un x perteneciente al universo, tal que se cumple p(x)”

Simbolización: $\exists x P(x)$

Otras palabras que son sinónimos del Cuantificador Existencial:

“Para algunos x”, “Algunos x”, “Existe x”, “Hay x”

<u>Valor de verdad para el Cuantificador Existencial</u>

- Es Verdadero cuando al menos para un elemento del universo se verifica.
- Es Falso si para cada elemento del universo no se verifica.

Ejemplo :

Sea $P(x)$ = "x es impar" en $U=\{1;2;3\}$

seria $\exists\, x/P(x) \longrightarrow$ Existe algún número que pertenece a U que es impar

Sea $Q(x) = x-2 > 0$ con $x \in \mathbb{N}$ $\forall x\, ;Q(x) \longrightarrow$ todo número natural restado a dos es mayor a cero **FALSO**

Sería : $\exists x/Q(x) \longrightarrow$ existe por lo menos un número natural que restado a dos es mayor a cero

<u>Para negar los cuantificadores</u>

- $\sim (\forall x\, ;P(x)) \leftrightarrow \exists x / \sim P(x)$
- $\sim (\exists x/P(x)) \leftrightarrow \forall x\, ; \sim P(x)$

<u>Otras negaciones:</u> **:**

- $\sim(\forall x\, ; P(x) \wedge Q(x)) = \exists x / \sim(P(x) \wedge Q(x))$ sería $\exists x / \sim P(x) \vee \sim Q(x)$
- $\sim(\exists x/ \sim P(x) \longrightarrow Q(x)) = \forall x\, ; \sim (\sim P(x) \longrightarrow Q(x))$ sería $\forall x\, ; \sim P(x) \wedge \sim Q(x)$

Negación de cuantificadores

$$\sim (\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \sim P(x)$$

Ejemplo N°1:

"Todos los números son impares"

Universo: {Números Enteros}

P(x): "x es impar"

Entonces la simbolización es: $\forall x P(x)$

En el universo de los Números Enteros la proposición es **falsa**.

Negación: "Existe al menos un número que no es impar"

Simbolización: $\exists x \sim P(x)$

La negación de la proposición resulta **verdadera**.

Negación de cuantificadores

$$\sim(\forall x\, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)$$

$$\sim(\exists x\, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \sim P(x)$$

Ejemplo N°2:

"Algunos números son múltiplos de 9"

Universo: {Números Enteros} P(x): "x es múltiplo de 9"

Entonces la simbolización es: $\exists x\, P(x)$

En el universo de los Números Enteros la proposición es **verdadera**.

Negación: "Todos los números no son múltiplos de 9"

Simbolización: $\forall x \sim P(x)$

La negación de la proposición resulta **falsa**.

Hagamos algunos ejemplos del punto 5 (práctica)

* Hay cisnes negros

U= {cisnes}
P(x)= «x es negro»

$\exists x/P(x)$ Existen cisnes negros

Negación: $\sim[\exists x/P(x)]$ seria **$\forall x\ ;\sim P(x)$**
Todos los cisnes no son negros

*Todos aprobamos el curso y disfrutamos las vacaciones

U = {alumnos}

P(x)= «x aprobamos el curso»

Q(x) = «x disfrutamos las vacaciones»

$\forall x\ ; P(x) \wedge Q(x)$ todos los alumnos aprueban el curso y disfrutan las vacaciones

Negación

$\sim[\forall x\ ; P(x) \wedge Q(x)]$ seria **$\exists x; \sim P(x) \vee \sim Q(x)$**

Algunos alumnos no aprueban el curso o no disfrutan las vacaciones

- Todos los hombres son mortales

U= {Hombres}
P(x)= «x son mortales»

$\forall x / P(x)$ Todos los hombres son mortales

<u>Negación</u> : $\sim[\forall x/P(x)]$ seria **$\exists x \,;\, \sim P(x)$**
Todos los hombres no son mortales

*Todas las flores son rojas y existen flores que no son azules

U =

P(x)=

Q(x) =

Leyes de la Lógica:

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ (Modus Ponens)

$(\sim q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \sim p$ (Modus Tolens)

$((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$ (Modus Tollendo Ponens)

$p \rightarrow (p \vee q)$ (Adición)

$(p \wedge q) \rightarrow p$ (Simplificación)

Doble Negación:

- $p \iff \sim(\sim p)$

Leyes Conmutativas:

- $p \wedge q \iff q \wedge p$
- $p \vee q \iff q \vee p$

Leyes Distributivas:

- $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

Son leyes porque el bicondicional es una TAUTOLOGÍA

Leyes Asociativas:

- $p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r$
- $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$

Leyes de De Morgan:

- $\sim(p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$

Ejercicio 7 Práctica:
Demostración de algunas de las leyes anteriores

LEYES LOGICAS O TAUTOLOGIAS:

INVOLUCION o DOBLE NEGACIÓN:

$$\boxed{\sim(\sim p)}\ \boxed{\Leftrightarrow p}$$

p
V
F

$\sim p$
F
V

$\sim(\sim p)$
V
F

LEYES LOGICAS O TAUTOLOGIAS:

$\boxed{\sim(\sim p) \Leftrightarrow p}$ INVOLUCION o DOBLE NEGACIÓN:

p
V
F

$\sim p$
F
V

$\sim(\sim p)$
V
F

$\sim(\sim p)$	$\Leftrightarrow$	p
V	V	V
F	V	F

LEYES LOGICAS O TAUTOLOGIAS:

IDEMPOTENCIA:

$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

p	$\wedge$	p
V	V	V
F	F	F

$p \wedge p$	$\Leftrightarrow$	p
V	V	V
F	V	F

$(p \vee p) \Leftrightarrow p$

p	$\vee$	p
V	V	V
F	F	F

$p \vee p$	$\Leftrightarrow$	p
V	V	V
F	V	F

LEYES LOGICAS O TAUTOLOGIAS:

CONMUTATIVIDAD:

De la disyunción $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

p	$\vee$	q	$\Leftrightarrow$	q	$\vee$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	F

De la conjunción $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

p	$\wedge$	q	$\Leftrightarrow$	q	$\wedge$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F

LEYES LOGICAS O TAUTOLOGIAS:

ASOCIATIVIDAD:

De la disyunción

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$(p \vee q) \vee r$	$\Leftrightarrow$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V
F	V	F

De la conjunción

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$$

$(p \wedge q) \wedge r$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V
F	V	F
F	V	F
F	V	F
F	V	F
F	V	F
F	V	F
F	V	F

LEYES LOGICAS O TAUTOLOGIAS:

DISTRIBUTIVA: De la conjunción respecto de la disyunción

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$(p \vee q) \wedge r$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
V	V	V
F	V	F
V	V	V
F	V	F
V	V	V
F	V	F
F	V	F
F	V	F

LEYES LOGICAS O TAUTOLOGIAS:

LEYES de DE MORGAN:

a) La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

$\sim (p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \wedge \sim q$
F	V	F
F	V	F
F	V	F
V	V	V

b) La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$\sim (p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \vee \sim q$
F	V	F
V	V	V
V	V	V
V	V	V

Leyes de la lógica

Ley de identidad

$P \leftrightarrow P$

Ley de contradicción

$\sim(P \wedge \sim P)$

Ley del tercero excluido

$P \vee \sim P$

Ley de doble negación

$P \leftrightarrow \sim(\sim P)$

Leyes de simplificación: $(P \wedge Q) \rightarrow P$ $(P \wedge Q) \rightarrow Q$

$P \rightarrow (P \vee Q)$

Leyes de conmutación

$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$

$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$

Leyes de Asociación:

$[(P \wedge Q) \wedge R] \leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$

$[(P \vee Q) \vee R] \leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$

$[(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R] \leftrightarrow [P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)]$

Leyes de distribución

$[P \wedge (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$

$[P \vee (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

$[P \rightarrow (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)]$

$[P \rightarrow (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)]$

Leyes de transitividad

$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$

$[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \rightarrow (P \leftrightarrow R)$

Leyes del Dilema

$[(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow R$

$[(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)] \rightarrow (R \vee S)$

$[(\sim P \vee \sim Q) \wedge (R \rightarrow P) \wedge (S \rightarrow Q)] \rightarrow (\sim R \vee \sim S)$

Ley de Exportación

$[(P \wedge Q) \rightarrow R] \rightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$

Leyes de transposición

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)]$

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \leftrightarrow \sim P)]$

Leyes del bicondicional

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P [(P \rightarrow Q)Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)]$

Ley del condicional- disyunción

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$

Ley de reducción al absurdo

$[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \sim Q)] \rightarrow \sim P$

Leyes de dualidad de Morgan

$\sim (P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$

$\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$

Ley del Modus Ponendo Ponens

$[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$

Ley del modus Tollendo Tollens

$[(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \rightarrow \sim P$

Ley del Modus Tollendo Ponens

$[(P \vee Q) \wedge \sim P] \rightarrow Q$