Ecuación

Una ecuación es una función proposicional que expresa la *igualdad* entre dos *expresiones algebraicas*, que involucran una o más variables.

Una *expresión algebraica* es cualquier combinación de números expresados por letras, o por letras y cifras, vinculados entre sí mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación.

Ejemplo de ecuaciones: i) $4+x=2$ ii) $3y-y^2=-4$

Los valores que verifican la ecuación, se llaman *raíces* o *soluciones* . El conjunto de todas las raíces se llama conjunto solución.

Para el ejemplo
i) $C_s=\{-2\}$ porque verifica la igualdad $4+(-2)=2$
ii) $C_s=\{-1,4\}$ porque verifica la igualdad $3.(-1)-(-1)^2=-4$ y $3.4-4^2=-4$

- El conjunto solución depende del conjunto numérico de referencia

Ej: $4+x=2$ No tiene solución si el conjunto referencial o universal es U=**N**
Ej: $2x+1=6$ No tiene solución si el conjunto universal es U=**Z**

Mientras no se diga otra cosa, nuestro conjunto universal será U=**R**

Identidad

Ecuación cuyo conjunto solución es el referencial; dicho de otra forma una identidad es una ecuación que se verifica para todo valor de la variable.
Ej: $x^2-4=(x+2).(x-2)$; $C_s=\mathbf{R}$

Ecuación Lineal en una variable

Ej: $2x-3=1$

Esta ecuación tiene una única variable: el exponente de la variable es uno (1). Por eso decimos que es una ecuación de primer grado o lineal.
En general una ecuación lineal en la variable *x* se presenta bajo la forma:

$$ax+b=0; \qquad a,b\in \mathbf{R}\wedge a\neq 0$$

a y *b* son constantes no especificadas, generalmente llamadas parámetros; frente a cada problema los parámetros asumen un valor y un significado particular.

Resolver la ecuación $2x-3=1$ o $ax+b=0$ es encontrar las raíces. Para eso necesitamos realizar ciertas operaciones que la transforman en otra más fácil de resolver pero que admite las mismas soluciones que la ecuación dada. Es decir una ecuación equivalente a la dada.

Dos ecuaciones son equivalentes, si y sólo si tienen el mismo conjunto solución.

Las operaciones que nos permite pasar de una ecuación a otra equivalente son:

i. Sumar algebraicamente a los dos miembros de la ecuación, cualquier constante, o cualquier expresión algebraica entera que contenga a la variable.

Por ejemplo: en la ecuación: $4-x=10$
sumo miembro a miembro -4 y obtengo:

$$4-x+(-4)=10+(-4)$$
$$4-x-4=10-4$$
$$-x=6$$

Esta ecuación es equivalente a la dada

ii. Otra operación consiste en multiplicar los dos miembros de la ecuación por una constante distinta de cero. Se debe advertir que *sólo hablamos* de *constantes* y no de expresiones algebraicas enteras que incluyan a la variable, ya que esto generaría una ecuación no equivalente a la dada.

$4-x=10$, llegamos a la ecuación equivalente:
$-x=6$ y multiplicamos miembro a miembro por (-1): $x=-6$
En esta ecuación, equivalente a la dada, la solución es obvia: $C_s=\{6\}$.

Dijimos que en general una ecuación lineal se presenta bajo la forma de :

$$ax+b=0; \qquad a,b\in \mathbf{R} \wedge a\neq 0$$

¿Cómo encontramos el conjunto solución?

Sumamos a los dos miembros (-*b*), luego:

$$ax+b-b=0-b$$
$$ax=-b$$

como $a\neq 0$, existe $\frac{1}{a}$ y puedo multiplicar miembro a miembro por $\frac{1}{a}$:

$$\frac{1}{a}.ax=\frac{1}{a}(-b)\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$
$$C_s=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Preguntémonos que pasaría si $a=0$

i) $a=0$ y $b=0$ $\Rightarrow 0.x+0=0$, ecuación que se verifica $\forall x\in \mathbf{R}$ (identidad)

Luego si $a=0$ y $b=0$: $C_s=\mathbf{R}$

ii) $a=0$ y $b\neq 0$: $\Rightarrow 0.x+b=0$, contradicción, $C_s=\phi$

Ej:

a) $3-2(1-x)=5+7(x-3)$

$$3-2+2x=5+7x-21$$
$$2x-7x=5-21-3+2$$
$$-5x=-17$$
$$x=\frac{17}{5} \qquad\qquad C_S=\left\{\frac{17}{5}\right\}$$

b) $1-\dfrac{2x-3}{4}=\dfrac{2-5x}{3}-3x$

$$\frac{4-2x+3}{4}=\frac{2-5x-9x}{3}$$
$$\frac{7-2x}{4}=\frac{2-14x}{3}$$
$$21-6x=8-56x$$
$$56x-6x=8-21$$
$$50x=-13$$
$$x=-\frac{13}{50}$$

Ecuación cuadrática

Se presenta bajo la forma:

$$ax^2+bx+c=0; \quad a,b,c\in \mathbf{R} \wedge a\neq 0$$

a: se llama coeficiente cuadrático
b: coeficiente lineal
c: término indepediente

Métodos de solución:

1. Completando Cuadrados

Para completar cuadrado "a" debe ser "1" si no lo fuera, se saca "a" factor común

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c$$

como $a\neq 0$ $\quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

Ahora completamos cuadrados:

divido por 2 al coeficiente de x: $\frac{b}{2a}$, y luego elevamos al cuadrado : $\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$

sumo miembro a miembro: $\frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

Factorizando el trinomio cuadrado perfecto del primer miembro:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Sacando raíz cuadrada a ambos miembros:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

por propiedad de módulo:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Luego:

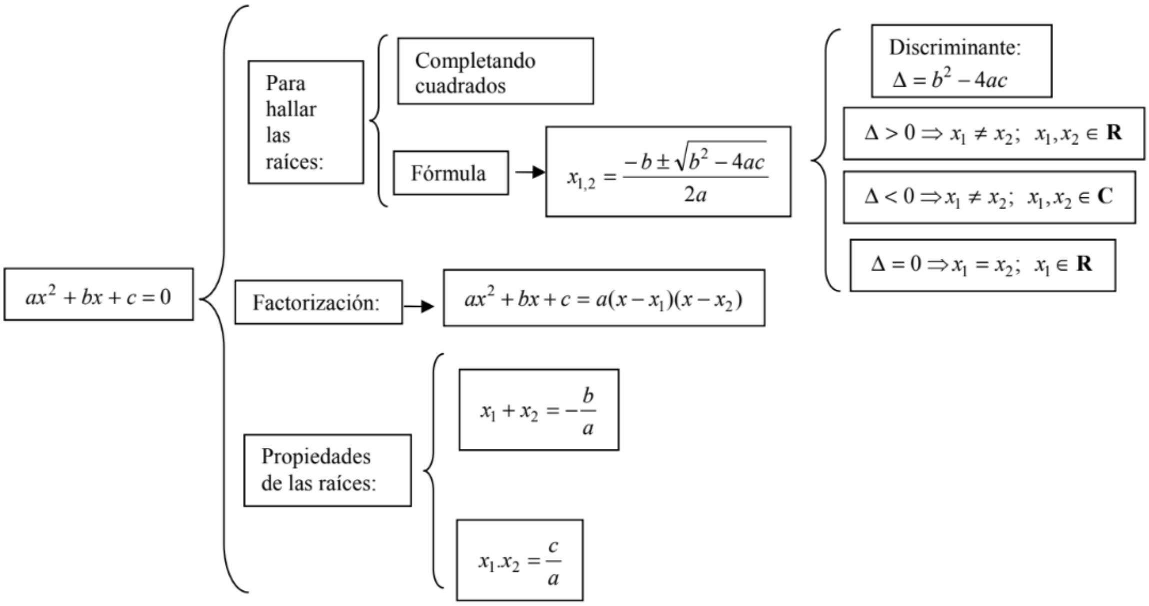
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. Aplicando la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El número que figura bajo el radical: b^2-4ac se llama discriminante y su signo da la naturaleza de las raíces:

$b^2-4ac>0$: 2 raíces reales y distintas
$b^2-4ac=0$: 2 raíces reales iguales (una raíz doble)
$b^2-4ac<0$: 2 raíces complejas conjugadas



Ejemplos

Ej: i) $x^2+5x+6=0$

Resolveremos:

a) completando cuadrados y
b) usando la fórmula

divido por 2 el coeficiente de x: $\frac{5}{2}$, y

luego elevamos al cuadrado : $\frac{5^2}{2^2}=\frac{25}{4}$

a) $x^2+5x=-6$

$$x^2+5x+\frac{25}{4}=-6+\frac{25}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\left|x+\frac{5}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow x+\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}$$

$$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}=\begin{cases}x_1=-3\\x_2=-2\end{cases}\qquad C_S=\{-2,-3\}$$

b) $x^2+5x+6=0$ $\qquad a=1;\quad b=5;\quad c=6$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.1.6}}{2.1}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}=\begin{cases}x_1=-3\\x_2=-2\end{cases}\qquad C_S=\{-2,-3\}$$

Ej: ii) $3x^2+6x+3=0$

$$3(x^2+2x)=-3$$
$$x^2+2x=-1$$
$$x^2+2x+1=-1+1$$
$$(x+1)^2=0$$
$$x=-1\qquad C_S=\{-1\}$$

Por fórmula:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{6}=-1\qquad C_S=\{-1\}$$

Ej: iii) $x^2+x+1=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}\qquad C_S=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

Ecuaciones racionales

Son de la forma: $\dfrac{p(x)}{q(x)}=0$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x (expresiones algebraicas enteras) y $q(x)$ no es un polinomio nulo.

Las raíces de $\dfrac{p(x)}{q(x)}=0$, son las raíces de $p(x)=0$ que no anulan a $q(x)$.

ii)

$$\frac{3x}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1}-1$$

$$\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}+1=0$$

$$\frac{3x-(x+1)^2+x^2-1}{x^2-1}=0$$

$$\frac{3x-\cancel{x^2}-2x-1+\cancel{x^2}-1}{x^2-1}=0$$

$$\frac{x-2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \wedge x^2-1\neq 0$$

$x=2$; como $x=2$ no anula el denominador: $C_S=\{2\}$

Ecuaciones irracionales

La variable aparece bajo el signo radical

Ej: i)

$$2\sqrt{x+4}-x=1$$

$$2\sqrt{x+4}=1+x$$

$$\left(2\sqrt{x+4}\right)^2=(1+x)^2$$

$$4(x+4)=1+2x+x^2$$

$$4x+16=x^2+2x+1$$

$$x^2-2x-15=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}=\begin{cases}x_1=5\\ x_2=-3\end{cases}$$

Verificación:

$x=5 \Rightarrow 2.\sqrt{5+4}-5=1$

$2.3-5=1$ Verdadero

$x=-3 \Rightarrow 2.\sqrt{-3+4}-(-3)=1$

$2.1+3=1$ Falso

$\therefore C_S=\{5\}$

ii)

$$\sqrt{x+13}-\sqrt{7-x}=2$$

$$\sqrt{x+13}=2+\sqrt{7-x}$$

$$\left(\sqrt{x+13}\right)^2=\left(2+\sqrt{7-x}\right)^2$$

$$x+13=2^2+2.2\sqrt{7-x}+\left(\sqrt{7-x}\right)^2$$

$$x+13=4+4\sqrt{7-x}+7-x$$

$$2x+2=4\sqrt{7-x}$$

$$(2x+2)^2=\left(4\sqrt{7-x}\right)^2$$

$$4x^2+8x+4=16.(7-x)$$

$$4x^2+8x+4=112-16x$$

$$4x^2+24x-108=0$$

$$\left(4x^2+24x-108\right)\frac{1}{4}=0.\frac{1}{4}$$

$$x^2+6x-27=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+108}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{-6\pm 12}{2}=\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-9\end{cases}$$

Verificación:

$x=3 \Rightarrow \sqrt{3+13}-\sqrt{7-3}=2$

$4-2=2$ Verdadero

$x_2=-9 \Rightarrow \sqrt{-9+13}-\sqrt{7-(-9)}=2$

$2-4=2$ Falso

$C_S=\{3\}$

Sistemas de ecuaciones lineales

En muchos problemas de economía, física, ingeniería, estadística, etc, aparecen sistemas lineales de ecuaciones.

Nos dedicaremos a analizar sólo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (sistema 2x2). Antes de estudiar los sistemas, analicemos el problema siguiente.

Cada ecuación lineal con dos incógnitas es la ecuación de una recta en el plano y resolver el sistema es hallar todos los puntos (x, y) del plano que pertenecen a ambas rectas.

Respecto al conjunto solución de un sistema 2x2, tenemos tres posibilidades:

i) Solución única
Existe único par (x_o,y_o) que verifica simultáneamente las dos ecuaciones. Geométricamente tenemos dos rectas no paralelas, que se cortan en un único punto. En este caso se dice que el sistema es compatible determinado.

ii) Infinitas soluciones:
Existen infinitos pares (x, y) que verifican las dos ecuaciones. Geométricamente tenemos una única recta; es decir que las dos ecuaciones del sistema representan a la misma recta. En este caso también se dice que el sistema es compatible indeterminado.

iii) Ninguna solución
Ningún par (x, y) verifica simultáneamente las dos ecuaciones. Geométricamente tenemos dos rectas dos recta paralelas. Se dice que el sistema es incompatible.

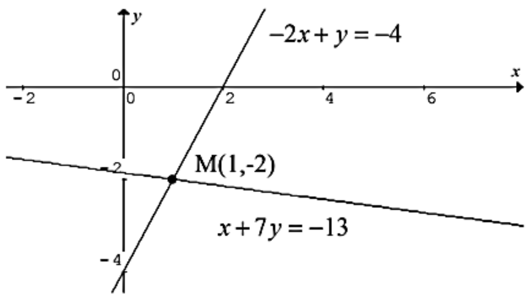
Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & [1] \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{R} \\ a_2x+b_2y=c_2 & [2] \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{R} \end{cases} \text{ y no simultáneamente nulos}$$

Hay distintos métodos para resolver; uno de los más elementales es el de sustitución. Consiste en despejar en una de las ecuaciones, una de las incógnitas, llevar a la otra reemplazando.

Ejemplos

i) $\begin{cases} -2x+y=-4 & [1] \\ x+7y=-13 & [2] \end{cases}$



Despejo "y" de [1]: $y=2x-4$ [3]

luego reemplazo [3] en [2]: $x+7(2x-4)=-13$

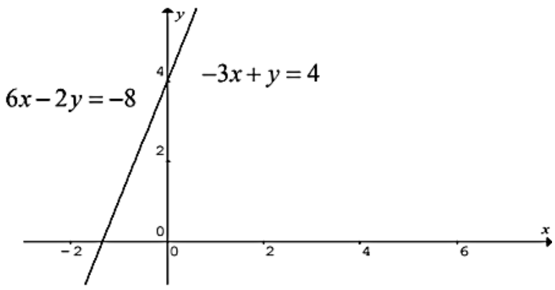
$$x+14x-28=-13$$
$$15x=15$$
$$x=1$$

Ahora llevamos este valor de x = 1 a la ecuación [3] : $y=2.1-4$

$y=-2$ Unica solución

Por lo tanto $C_S=\{(1,-2)\}$ $(1,-2)$ es un par ordenado

ii) $\begin{cases} -3x+y=4 \\ 6x-2y=-8 \end{cases}$



$$y=4+3x$$
$$6x-2(4+3x)=-8$$
$$6x-8-6x=-8$$
$$-8=-8 \quad \text{Identidad - Infinitas soluciones}$$

$C_S=\{(x,y)/y=4x+3x\}$

iii) $\begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$

$y = 2x$

$4x - 4x = 4$

$0 = 4$ contradicción – ninguna solución

$C_S = \phi$