TEMA 1: CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. CLASIFICACIÓN

Números Naturales
El conjunto de los números naturales está formado por infinitos elementos, de los cuales el primero es 1, el siguiente es el anterior más uno, así 2 = 1+1; 3=2+1, 4=3+1, etc.
N= { 1, 2, 3, 4, 5, ...}
Para todo par de números naturales está definida la **suma** y el **producto**; mientras que la diferencia y el cociente de números naturales se pueden resolver sólo en algunos casos.

Números Enteros

Este conjunto numérico surge debido a una restricción observada al realizar la resta de números naturales. Cuando el minuendo es menor que el sustraendo, la operación no está definida en el conjunto de los naturales. Entonces, con vistas a definir esta operación, se amplía el conjunto N creando el de los números enteros.
Por lo tanto, los números enteros están formados por los números naturales (enteros positivos), el cero y los números enteros negativos.
Z = { ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ...}
Z = N $\cup$ Z^{-} $\cup$ $\{0\}$

En Z son cerradas (es decir, si tomamos dos números enteros y los operamos; su resultado es también un número entero) las operaciones de **adición**, **sustracción** y **multiplicación**. Pero la división entre enteros no siempre tiene como resultado un número entero.

Números Racionales
Los números racionales aparecen para dar solución a las divisiones que no eran posibles en Z. El conjunto de los números racionales se define de la siguiente forma:
Q= $\{\frac{a}{b}$ / a, b ε Z y b$\neq$ 0$\}$ donde a es el numerador y b es el denominador.

En otras palabras, los números racionales son los que pueden expresarse en forma de fracción. Los números naturales, los enteros, las expresiones decimales exactas y las periódicas pueden expresarse en forma de fracción, por lo tanto, todos ellos son números racionales.

Números Irracionales
El conjunto de los números irracionales se simboliza con la letra I. Los números irracionales no pueden expresarse en forma de fracción, ya que su expresión tiene infinitas cifras decimales no periódicas.
Por ejemplo, son números irracionales las raíces no exactas de números naturales: $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{3}$.
También son irracionales los números especiales como $\pi \cong 3{,}1415...$ el número áureo de las proporciones perfectas $\varphi = 1{,}618033...$, etc.

Números Reales
La unión del conjunto Q con el conjunto I, forma el conjunto de los números Reales.

$$R = Q \cup I$$

La forma en que los distintos conjuntos se relacionan entre sí, la podemos ver mediante la siguiente representación gráfica:

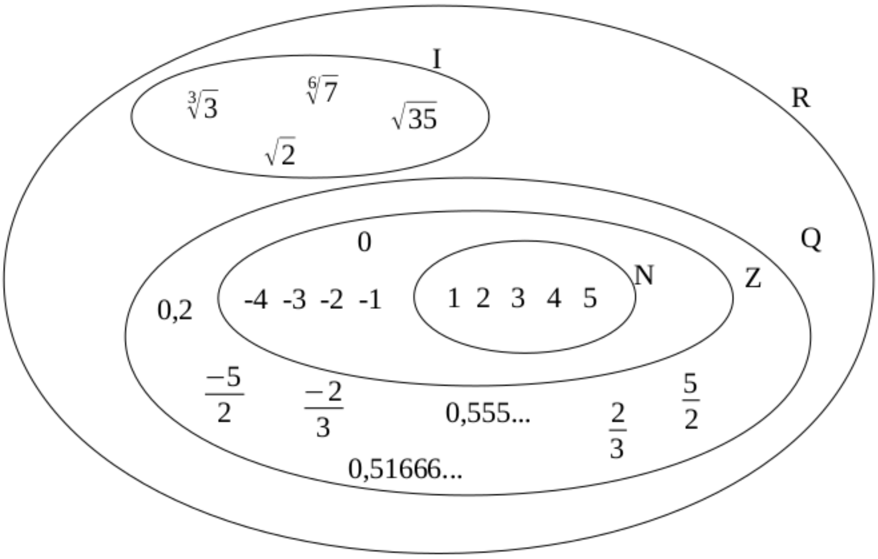

Figure 1: Conjuntos Numéricos

2. PROPIEDADES DE IGUALDAD

Una igualdad es un enunciado en el que dos símbolos o grupos de símbolos denominan un mismo número. El símbolo "=" se emplea para expresar una igualdad. Así podemos escribir: 6+1=7 ó 18-2=16

Las siguientes propiedades de igualdad son evidentes, pero es necesario tenerlas en mente.

Propiedad Reflexiva: Para cualquier número real **a**: a = a	**Propiedad Simétrica**: Para cualesquiera números reales **a** y **b**: Si a = b, entonces b = a
Propiedad Transitiva: Para cualesquiera números reales **a**, **b** y **c**: Si a = b y b = c, entonces a = c	**Propiedad de Sustitución:** Para cualesquiera números reales **a** y **b**: Si a = b, entonces a se puede sustituir por b, o b por a, en cualquier enunciado sin cambiar su significado. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

3. PROPIEDADES DE LOS NUMEROS REALES

Sean a, b y c cualesquiera números reales ($\forall$ a , b , c $\in$ R):

	SUMA	**PRODUCTO**
Ley de clausura	a + b es un número real	a.b es un número real
Propiedad uniforme	a = b $\Rightarrow$ a+c = b+c	a = b $\Rightarrow$ a.c = b.c
Propiedad cancelativa	a+c = b+c $\Rightarrow$ a = b	a.c = b.c y c $\neq$ 0 $\Rightarrow$ a = b
Ley asociativa	(a + b) + c = a + (b + c)	(a . b) . c = a . (b . c)
Ley conmutativa	a + b = b + a	a . b = b . a
Existencia del neutro	El número real 0 es llamado identidad aditiva o neutro aditivo, ya que para todo real a: a + 0 = 0 + a = a	El número real 1 es llamado identidad multiplicativa o neutro multiplicativo, ya que para todo real a: a . 1 = 1 . a = a
Existencia del inverso	Para todo número real a, existe un único número real (llamado inverso aditivo u opuesto de a) representado, por –a de tal manera que: a + (- a) = (- a) + a = **0**	Para todo número real a $\neq$ 0, existe un único número real (llamado inverso multiplicativo o recíproco de a) representado por 1/a o a^{-1}, *detal* manera que: a.a^{-1} $= a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = \mathbf{1}$
Propiedad distributiva	a .(b + c) = a . b + a . c (a + b) . c = a . c + b . c	

4. PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

Sean x e y cualesquiera números reales; m y n números enteros ($\forall$ x , y $\in$ R , m , n $\in$ Z):
$x^n = \underbrace{x.x.x...x}$, n veces x

- **Producto de potencia de igual base:** $x^m \ . \ x^n = x^{m+n}$
- **Cociente de potencia de igual base:** $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- **Potencia de otra potencia:** $(x^m)^n = x^{m.n}$
- **Distributiva de la potencia respecto del producto:** $(x.y)^n = x^n.y^n$
- **Distributiva de la potencia respecto del cociente:** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

5. PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Sean m y n enteros positivos ($\forall$ m, n $\in Z^+$); **x** e **y** números reales (x , y $\in$ R) y existe la raíz enésima de x y de y $\left(\exists \sqrt[n]{x},\ \sqrt[n]{y}\right)$:

$\sqrt[n]{x^n}$ = x, si x > 0 o si x < 0 y n impar	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n$ $\forall$ x $\in$ R
$\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x.y}$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ si y $\neq$ 0
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$, m$\in Z^+$	$x^{(m/n)} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \left(x^{1/n}\right)^m$
$\sqrt{x^2} = \|x\|$	

6. OTRAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

1) x . y = 0 $\Rightarrow$ x = 0 $\vee$ y = 0	2) -x = (-1). x	3) x . 0 = 0
4) -(x.y) = (-x).y = x.(-y)	5) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a.c}{b.c}$, b $\neq$ 0 y c $\neq$ 0	6) $-\dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{y} = \dfrac{x}{-y}$
7) $\dfrac{x}{y} = 0 \Rightarrow x = 0$, y $\neq$ 0	8) $\dfrac{0}{b} = 0$, b $\neq$ 0	9) $\dfrac{a}{0}\ \nexists$
10) $\dfrac{0}{0}\ \nexists$	11) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{b}.a$	12) $x^0 = 1$, x $\neq$ 0
13) $0^0\ \nexists$	14) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, $a \neq 0$	15) x = x^1

a.b + a.c = a(b + c) **Factor común**
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **Cuadrado de un binomio**
$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ **Trinomio cuadrado perfecto**
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ **Cubo de un binomio**
$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ **Cuatrinomio cubo perfecto**
a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) **Diferencia de cuadrados**
$a^3 \pm b^3$ = (a $\pm$ b)$(a^2 \mp ab + b^2)$ **Suma o diferencia de potencias con igual exponente**

7. CRITERIO DE DIVISIBILIDAD

Un criterio de divisibilidad es una regla que permite reconocer, sin efectuar la división, si un número es o no divisible por otro número dado.

Criterio de divisibilidad por 2: Un número es divisible por 2 si acaba en 0 o cifra par. Ejemplos: Números divisibles por 2: 36,94,521342,40,...

Criterio de divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Ejemplos: Números divisibles por 3: 36,2142,42,...

Criterio de divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 si la última de sus cifras es 5 o es 0. Ejemplos: Números divisibles por 5: 35,2145,40,...

Criterio de divisibilidad por 9: Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9. Ejemplos: Números divisibles por 9: 495,945,53640,...

Criterio de divisibilidad por 10: Un número es múltiplo de 10 (0 divisible por 10) si su última cifra es 0. Ejemplo de múltiplos de 10: 80, 140, 3200,...

• En caso de las fracciones debemos fijarnos que el númerador y denominador sean divisibles por el mismo número para poder simplificar.

8. OPERACIONES CON NÚMEROS FRACCIONARIOS

Suma (o resta) de fracciones con *igual denominador*: Se suman (o restan) los numeradores y se coloca el mismo denominador:

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

Ejemplos: $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} - \frac{11}{4} = \frac{-8}{4}$

Suma (o resta) de fracciones con *distinto denominador*:

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d}$

Ejemplo: $\frac{1}{3} + \frac{5}{8} = \frac{1.8 + 5.3}{3.8} = \frac{8+5}{24} = \frac{23}{24}$

Multiplicación: se multiplican denominadores con denominadores y numeradores con numeradores.

$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Ejemplos: $\frac{1}{6}.\ 7 = \frac{7}{6}$ $\qquad$ $\frac{5}{7}.\frac{2}{3} = \frac{10}{21}$

División: se multiplican el dividendo por el inverso del divisor

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$

Ejemplos: $\frac{1}{6} : 7 = \frac{1}{6}.\frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ $\qquad$ $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7}.\frac{3}{2} = \frac{15}{14}$

9. CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

$$\textit{Decimales}\begin{cases} \textit{Exactos: } 0{,}56 \\ \textit{Infinitos}\begin{cases} \textit{Periódicos}\begin{cases} \textit{Puros: } 1,\widehat{26} \\ \textit{Mixtos:} 3{,}89\,\widehat{126} \end{cases} \\ \textit{No periódicos: } \sqrt{2} = 1{,}414213562... \end{cases} \end{cases}$$