LÓGICA

1. LÓGICA SIMBÓLICA

En las ciencias en general y en matemática en particular se usan códigos ya establecidos. Sería imposible pensar en el avance de los conocimientos sin un lenguaje común, claro y sin ambigüedades, Es necesario que acordemos con respecto a la precisión del lenguaje a utilizar, la simbología a emplear para simplificar enunciados y esquemas de razonamiento.

Proposiciones

Una proposición es una oración declarativa, de la cual se puede decir si es verdadera o falsa.
Puede que falte información para decidir; no obstante lo que importa es que es susceptible de ser V o F. Asociado a la proposición está su "valor de verdad".

Sean las siguientes expresiones:
1. No grites.
2. El cinco es un número impar.
3. ¡Ojalá que apruebe el parcial de Introducción a la Matemática!
4. ¿Estudiamos en la Biblioteca?
5. El calor dilata los cuerpos.
6. El producto bruto interno creció en un 5% en el último año.

Respecto de algunas de esta expresiones no podemos decir si son verdaderas o falsas y con respecto a otras, sí. De las oraciones dadas, tenemos que: 1.es Imperativa, 3.Exclamativa, 4.Interrogativa, 2, 5 y 6 son susceptible de ser verdadero (V) o falso (F).

Conectivos Lógicos

Los conectivos son nexos mediante las cuales se conectan dos o más proposiciones simples, o se modifica una proposición dada.

1. Los enteros **y** las fracciones son racionales
2. Las inversiones son públicas **o** privadas.
3. El último balance de la empresa "La Lógica S.A." arrojó pérdidas **o** ganancias.
4. **Si** la figura ABCD es un rectángulo, **entonces** tiene vértices.
5. La figura ABCD es un cuadrilátero **si y sólo si** tiene 4 lados.

leo	símbolo	Operación
"y"	$\wedge$	Conjunción
"o"	$\vee$	Disyunción inclusiva
"o"..."o"	$\veebar$	Disyunción exclusiva
"no"	$\backsim$	Negación
"Si ... entonces"	$\rightarrow$	Condicional
... "Si y sólo si"....	$\longleftrightarrow$	Bicondicional

Operaciones Lógicas

Conjunción o producto lógico

de las proposiciones simples p y q es la proposición compuesta que se obtiene reuniéndolas a ambas en el orden dado, mediante el conectivo "y"
Tabla de verdad

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción o suma lógica

de las proposiciones p y q es la proposición compuesta que se obtiene uniendo ambas proposiciones simples, mediante el conectivo "o", con sentido incluyente.
Tabla de verdad

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva

es la proposición compuesta que se obtiene uniendo ambas proposiciones simples, mediante el conectivo "o"..."o" con sentido excluyente.
Tabla de verdad

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:
a) A las 20 hs, iré a la Facultad o al cine
b) Me voy o me quedo

Negación

de una proposición p es la proposición que se obtiene anteponiendo a la dada, la palabra: "no", "es falso que"... o "no es cierto que"...
Tabla de verdad

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ejemplo:
p: 3 es divisor de 10
∼p: 3 no es divisor de 10
donde: v(p) = F; v(∼p) = V

Condicional o implicación material
Es la proposición compuesta p→q y que se obtiene anteponiendo a la primera el condicional "si" y uniendo ambas, mediante la palabra "entonces". Se denomina antecedente a la proposición p y consecuente: q
Tabla de verdad

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo:
2 x 3 = 7 → Mendoza es la capital de Argentina

Bicondicional
es la conjunción entre p→q y q→p es decir: (p→q) ∧ (q→p)
Tabla de verdad

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

El bicondicional es verdadero cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

Implicación Formal. Se llama implicación formal o simplemente implicación a aquella relación entre enunciados en las que q se deduce lógicamente de p. Se simboliza: p⇒q . (No se hacen tablas de verdad)
Si p⇒q se dice que "p es condición suficiente para q", "q es condición necesaria para p".

Ejemplo:
"Si un número "a"es entero, entonces "a" es racional".
Es equivalente a: "Ser entero es suficiente para ser racional" o " Es suficiente que "a " sea entero para que sea racional" o bien "es necesario que "a" sea racional para que sea entero.

Equivalencia. Si q es deducible (lógicamente de p) y p es deducible de q, esto establece una relación entre p y q llamada equivalencia que se simboliza p⇔q .
p: condición necesaria y suficiente para q
q: condición necesaria y suficiente para p
Ejemplo:

p: 10 es múltiplo de 5
q: existe un número entero que multiplicado por 5 da por resultado 10.
10 es múltiplo de 5 si y sólo si existe un número entero que multiplicado por 5 da por resultado 10.

Empleo de más de un conectivo:

1) Construir la tabla de la proposición -p∧q

p	q	~	p	∨	q
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	**F**	F
F	V	V	F	**V**	V
F	F	V	F	**V**	F

1) -p∨-q

p	q	~	p	∨	~q
V	V	F		**F**	F
V	F	F		**V**	V
F	V	V		**V**	F
F	F	V		**V**	V

3) [(p→q)∧ ∼q]→∼p

p	q	p →	q ∧	~q	→	~p
V	V	V	F	F	**V**	F
V	F	F	F	V	**V**	F
F	V	V	F	F	**V**	V
F	F	V	V	V	**V**	V

Equivalencia Lógica

Dos proposiciones que tienen idénticas tablas de verdad, se dicen que son equivalentes. Esto significa que al vincular las proposiciones con el bicondicional, éste resulta lógicamente equivalente (siempre verdadero)
Son equivalentes: $\sim$ (p∧q) y $\sim p \vee \sim q$
se simboliza así: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

p	q	~	$(p \wedge q)$	↔	~ p	∨	~ q
V	V	F	V	**V**	F	F	F
V	F	V	F	**V**	F	V	V
F	V	V	F	**V**	V	V	F
F	F	V	F	**V**	V	V	V

Ley lógica o tautología:
Cuando una proposición compuesta resulta siempre V. independientemente de los valores de verdad de las proposiciones intervinientes, se dice que es una tautología.

Ejemplo: $[(p \to q) \wedge p] \to q$

$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$p]$	$\to$	q
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	F	F	V	**V**	F
F	V	V	F	F	**V**	V
F	V	F	F	F	**V**	F

Si la condicional es una tautología, puedo decir que existe una relación entre el antecedente y consecuente, llamada "implicación".
Mirando la tabla anterior podemos afirmar que: $[(p \to q) \wedge p] \to q$ es tautología.

Contradicción:
es una proposición compuesta que resulta siempre falsa cualquiera que fueren los valores de verdad de las proposiciones vinculadas.
Ejemplo: $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\sim p$	$\vee$	$\sim q$
V	V	V	**F**	F	F	F
V	F	F	**F**	F	V	V
F	F	V	**F**	V	V	F
F	F	F	**F**	V	V	V

Contingencia:
es una proposición cuya tabla de verdad presenta valores de verdad verdaderos unos y falsos otros. Ejemplo: $(p \wedge q) \to r$

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\to$	r
V	V	V	**V**	V
V	V	V	**F**	F
V	F	F	**V**	V
V	F	F	**V**	F
F	F	V	**V**	V
F	F	V	**V**	F
F	F	F	**V**	V
F	F	F	**V**	F

Leyes del álgebra proposicional:

1) Involución $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

2) Idempotencia : $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

3) Conmutatividad: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

4) Asociatividad: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

5) Distributividad:

a) de la conjunción respecto a la disyunción:

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

b) de la disyunción respecto a la conjunción:

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

6) Leyes de De Morgan:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

7) Negación de una condicional:

$$\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Todas estas leyes se demuestran construyendo las tabla de verdad respectiva. En todas ellas debe ser tautologías.

Condicionales asociadas:

Sea la condicional p→q que llamaremos directa, hay otras tres asociadas a él: recíproca, contraria, contrarecíproca

$p \rightarrow q$ Directa
$q \rightarrow p$ Reciproca
$\sim p \rightarrow \sim q$ Contraria
$\sim q \rightarrow \sim p$ Contrarrecíproca

Al construir las tablas de verdad de cada proposición, existe las siguientes relaciones: (verifique)
$q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

Esta última conclusión, es importante ya que a veces es más fácil probar la contrarrecíproca que la directa, lo que puede hacerse dada la equivalencia entre ambas.

Funciones proposicionales

Cuando decimos:
"x es un evasor fiscal"
"y es un productor triguero"
"z + 4 es menor que 10"

x, y, z, son sujetos indeterminados; se llaman variables
Entonces esta expresiones no son proposiciones

Función Proposicional

Una expresión que contenga una o más variable y que puede trasformarse en una proposición haciendo asignaciones a las variables, se denomina función proposicional de una variable o más variable. Genéricamente se simboliza: p(x)

El conjunto de valores que hacen el valor de verdad de p(x) sea verdadero: v(p(x)) = V constituyen el conjunto de verdad de p(x).

Ejemplo:
sujeto: x
predicado: p(x) : x es una acreedor privilegiado de Argentina
¿Cómo se pasa de una función preposicional a una proposición?. Hay dos formas:
i) Asignándole a la variable
ii) Usando cuantificadores

Ejemplo:

i) Asignándole a la variable
p(x) : x es una alumno de lógica computacional
Habrá un conjunto de verdad: Conjunto de asignaciones de la variable que hacen que p(a) sea verdadera
p(a) : Juan Perez es una alumno de lógica computacional (en este caso estamos ante una proposición)

Ejemplo:
Sea p(x) : x $<$ x +1 definida en los N para todo x de N , p(x) es verdadero

ii) Usando cuantificadores

$$\text{Cuantificadores} \begin{cases} \nearrow \text{Existencial: } \exists x \,/\, p(x) \\ \searrow \text{Universal. } \forall x : p(x) \end{cases}$$

Ejemplos: ∃ x / p(x)

1) Existe por lo menos un alumno de lógica computacional.
p(x) : x es un alumno de lógica computacional.
en símbolos:
$\exists$ x / p(x)
El valor de verdad: v[$\exists$x / p(x)]= V

2) Todos los alumnos son de lógica computacional
p(x) : x es un alumno de lógica computacional.
en símbolos:
$\forall$x : p(x)
El valor de verdad: v[$\forall$x : p(x)]= F

3) Todo planeta es opaco
p(x) : x es un planeta opaco
$\forall$ x : p(x)

4) Algunos soldados son valientes
p(x) : x es un soldado valiente
$\exists$x / p(x)

Negación de cuantificadores

La negación de un cuantificador universal es equivalente a un cuantificador existencial que niega la función proposicional.

$$\sim (\forall x : p(x)) \Leftrightarrow \exists x / \sim p(x)$$

Ejemplos:

$\forall$ x : p(x) Todos los enteros son pares
la negación:
$\exists$ x : $\sim$ p(x) : Algunos enteros no son pares:

Cuantifiquemos: p(z) : z + 4 < 10 , para que resulte falsa
$\forall$ z $\in$ N : z + 4 < 10
v($\forall$ z $\in$ N: z + 4 < 10)=F
$\sim$ ($\forall$ z $\in$ N: z + 4 < 10)=V
$\sim$ ($\forall$ z $\in$ N : z + 4 < 10) $\Leftrightarrow \exists z \in$ N / z + 4 $\geq$ 10

Para demostrar que $\forall$ x : p(x) es falsa, es suficiente comprobar que al menos una de las proposiciones es falsa.

La negación de un cuantificador existencial es equivalente a un cuantificador universal que niega la función proposicional.

$$\sim (\exists x / p(x)) \Leftrightarrow \forall x :\sim p(x)$$

Ejemplo:
$\exists x \in N / x + 1 < 5$
$\sim (\exists x \in N / x + 1 < 5) \Leftrightarrow \forall x \in N : x + 1 \geq 5$