МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт компьютерных технологий и информационной безопасности

Кафедра высшей математики

Отчет по лабораторной работе 8

по дисциплине «Компьютерная графика»
на тему:

«Центральное и параллельное проецирование на плоскость»

Выполнил (а) студент
группы КТбо2-1
Иван Иванович Иванов
Проверил: Мнухин Валерий Борисович

г. Таганрог
2023

Цель работы: продолжение изучения однородных координатат в проективном пространстве. Использование однородных координат для построения центральных и параллельных проекций точек трехмерного пространства на картинную плоскость..

Ход работы

1. Распаковать архив *CG-Lab8.zip* в отдельную папку.
2. В ту же папку поместить файл **`PolytopeData<N>.m`** функции, описывающей многогранник (файл был создан ранее при выполнении лабораторной работы 7).
3. В строке 9 скрипта **`POLYTOPEPROJECTIONS.m`** заменить имя на **`PolytopeData<N>.m`** созданной функции.
4. Запустить скрипт **`POLYTOPEPROJECTIONS.m.`** В ходе его выполнения барицентр многогранника будет автоматически смещён в начало координат. Подобрать параметры масштабирования в строках 19 и 20 скрипта так, чтобы добиться его оптимальной формы и размера, гарантирующих хорошую видимость проекций на последующих этапах выполнения работы.
5. Вывести на печать матрицу координат вершин многогранника (строка 22 скрипта)
6. Для центрального проецирования выбрать центр проекции VP и плоскость проекции P (строки 24 и 28 скрипа) по усмотрению студента, но так, чтобы обеспечить хорошую видимость проекций на последующих этапах выполнения работы.
7. Вывести на печать матрицу VP координат проекций вершин многогранника на плоскость P (строка 34 скрипта) в глобальной системе координат. Сохранить матрицу T соответствующего преобразования.
8. Сохранить изображение скелета многогранника и его проекции на плоскость P. Обеспечить хорошую видимость деталей изображения его 3D-вращением.
9. Вывести на печать матрицу VPC координат проекций вершин многогранника на плоскость P в локальной системе координат плоскости P (строка 36 скрипта). Сохранить матрицу T2 соответствующего преобразования.
10. Сохранить изображение проекции скелета многогранника на плоскости P и локальной системы координат в этой плоскости.
11. Вернувшись к п.6, выбрать центр проекции бесконечно удалённым, и повторить п.7-10 для случая параллельного проецирования.
12. Проанализировать работу и взаимодействие использовавшихся программ, Сделать соответствующие выводы.

Отчёт должен содержать:

1) данные об исходном многограннике и координаты его вершин (как в п.5 выше).
2) изображение скелета многогранника и его проекции на плоскость P при центральном проецировании.
3) матрицу VP координат проекций вершин многогранника на плоскость P в глобальной системе координат при центральном проецировании.
4) матрицу T соответствующего преобразования.
5) матрицу VPC координат проекций вершин многогранника на плоскость P в локальной системе координат.
6) матрицу T2 соответствующего преобразования.
7) изображение проекции скелета многогранника на плоскости P и локальной системы координат в этой плоскости.
8) данные пунктов 2-7 для случая параллельного проектирования.
9) Текст скрипта **`POLYTOPEPROJECTIONS.m`** **, а также** функций **`ViewplaneProjectionCoord.m`** и **`NormalizeCoord.m`** **.**
10) формулы из файла **ProjectiveTransform.pdf** для вычисления координат проекций и матриц T и T2

До завершения защиты работы все использовавшиеся файлы должны храниться на каком-либо носителе, и быть доступны в ходе защиты работы.
Отчёт предоставляется в виде файла MS-Word и должен быть отправлен по e-адресу ***mnukhin.valeriy@mail.ru*****.**

Защита лабораторной работы проводится в форме индивидуального собеседования с каждым студентом по теоретической и практической частям выполненной работы. Наличие отчёта не является основанием для зачёта лабораторной работы.

Центральные и параллельные проекции

Проецирование — отображение трехмерного объекта на плоскость, называемую *картинной плоскостью* или *плоскостью проекции*. Различают *центральное* и *параллельное* проецирование. В первом случае проецирующие лучи исходят из точки, называемой *центром проецирования*, во втором — проецирующие лучи параллельны и характеризуются своим направлением (другими словами, исходят из бесконечно удалённой точки).

Рассмотрим вначале случай центрального проецирования.

Допустим, что в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$, которую условимся называть *глобальной* (или *мировой*) системой координат. Пусть в этой системе координат плоскость проекции P задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а центр проектирования VP (от англ. *viewpoint*) имеет координаты $\left[p_x, p_y, p_z\right]$. Кроме того, выберем на плоскости проекции P произвольную *локальную* систему координат $O'x'y'$, никак не связанную с системой $Oxyz$.

Нас будет интересовать следующая задача.

Задача. Пусть объект проецирования характеризуется точками P_0, P_1, ..., P_n, координаты которых в системе $Oxyz$ задаются столбцам матрицы

$$V = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \end{bmatrix}.$$

Пусть $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ — проекции этих точек на картинную плоскость P. Требуется найти матрицу W координат точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ в локальной системе координат $O'x'y'$:

$$W = \begin{bmatrix} x'_0 & x'_1 & \dots & x'_n \\ y'_0 & y'_1 & \dots & y'_n \end{bmatrix}.$$

Решение. Перейдём к однородным координатам. При этом матрицы V и W принимают вид

$$V = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} x'_0 & x'_1 & \dots & x'_n \\ y'_0 & y'_1 & \dots & y'_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

центр проектирования имеет координаты $VP = \left[p_x, p_y, p_z, 1\right]$, а плоскость проекции P может быть отождествлена с точкой $P = \left[A, B, C, D\right]$ проективного пространства.

Решение задачи будет состоять из двух этапов. На первом этапе построим матрицу

$$U = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_n \\ Y_0 & Y_1 & \dots & Y_n \\ Z_0 & Z_1 & \dots & Z_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

координат точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ на картинной плоскости P в глобальной системе координат. Для этого достаточно найти матрицу T такую, что $TV = \widetilde{U}$, где $\widetilde{U}$ — матрица координат точек, эквивалентных $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ в проективном пространстве, (другими словами, таких, что последний элемент столбца в $\widetilde{U}$ может быть отличен от единицы). Можно показать, что

$$T = \bigl(VP\bigr)^{\top} P - \bigl(VP\,,\,P\bigr) I,$$

где I — единичная матрица размера 4×4, а $\bigl(VP\,,\,P\bigr)$ — скалярное произведение векторов VP и P, т.е.,

$$\bigl(VP\,,\,P\bigr) = Ap_x + Bp_y + Cp_z + D\,.$$

Другими словами,

$$T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \bigl[\,A,\, B,\, C,\, D\,\bigr] - (Ap_x + Bp_y + Cp_z + D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Ap_x & Bp_x & Cp_x & Dp_x \\ Ap_y & Bp_y & Cp_y & Dp_y \\ Ap_z & Bp_z & Cp_z & Dp_z \\ A & B & C & D \end{bmatrix} - (Ap_x + Bp_y + Cp_z + D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -Bp_y - Cp_z - D & Bp_x & Cp_x & Dp_x \\ Ap_y & -Ap_x - Cp_z - D & Cp_y & Dp_y \\ Ap_z & Bp_z & -Ap_x - Bp_y - D & Dp_z \\ A & B & C & -Ap_x - Bp_y - Cp_z \end{bmatrix}.$$

Вычислив $\widetilde{U} = TV$, разделим элементы в её столбцах на значение последнего элемента в столбце. В полученной матрице последняя строка будет состоять из одних единиц, и, следовательно, она совпадает с требуемой матрицей U. (Отметим, что отсутствие нулей в последней строке матрицы $\widetilde{U}$ гарантируется требованием принадлежности всех точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ картинной плоскости.) Таким образом, первый этап решения поставленной задачи завершён.

Второй этап решения задачи состоит в преобразовании матрицы U в матрицу

$$W = \begin{bmatrix} x'_0 & x'_1 & \dots & x'_n \\ y'_0 & y'_1 & \dots & y'_n \end{bmatrix}.$$

координат точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ в локальной системе координат на плоскости P. Понятно, что для этого необходимо каким-то образом задать эти локальные координаты.

Пусть O, X, и Y — три разичные точки плоскости P, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ образуют базис на картинной плоскости P. Пусть $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$ — орты этих векторов:

$$\boldsymbol{Ox} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right)^{\circ} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}\,, \qquad \boldsymbol{Oy} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right)^{\circ} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OY}}\,.$$

В качестве локальной системы координат возьмём $\left\langle O, \boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{Oy} \right\rangle$.

Пусть в глобальной декартовой системе координат точка O имеет координаты $\left[\, O_1, O_2, O_3 \,\right]$, $\boldsymbol{Ox} = \left[\, Ox_1, Ox_2, Ox_3 \,\right]$, $\boldsymbol{Oy} = \left[\, Oy_1, Oy_2, Oy_3 \,\right]$. Переходя к проективным координатам, и учитывая, что O является точкой, а $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$ — осями, указывающими направления, получим

$$O\left[\, O_1, O_2, O_3, 1 \,\right], \quad \boldsymbol{Ox} = \left[\, Ox_1, Ox_2, Ox_3, 0 \,\right], \quad \boldsymbol{Oy} = \left[\, Oy_1, Oy_2, Oy_3, 0 \,\right].$$

Составим из этих координат матрицу

$$K = \begin{bmatrix} Ox_1 & Ox_2 & Ox_3 & 0 \\ Oy_1 & Oy_2 & Oy_3 & 0 \\ O_1 & O_2 & O_3 & 1 \end{bmatrix},$$

и найдём

$$H = \left(KK^{\top}\right)^{-1} K\,.$$

Вычислив $\widetilde{W} = HU$, разделим элементы в столбцах $\widetilde{W}$ на значение последнего элемента в столбце. После исключения из полученной матрицы последней, третьей, строки, состоящей из единиц, получим требуемую матрицу W декартовых координат точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ в системе координат $\left\langle O, \boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{Oy} \right\rangle$ на портретной плоскости P.

Таким образом, поставленная задача полностью решена. ■

Нам остаётся рассмотреть случай параллельного проектирования. В этом случае центр проектирования VP является бесконечно удалённой точкой. Полагая $VP = \left[\, p_x, p_y, p_z, 0 \,\right]$, сводим случай параллельного проектирования к рассмотренному выше.