Центральные и параллельные проекции

Проецирование — отображение трехмерного объекта на плоскость, называемую *картинной плоскостью* или *плоскостью проекции*. Различают *центральное* и *параллельное* проецирование. В первом случае проецирующие лучи исходят из точки, называемой *центром проецирования*, во втором — проецирующие лучи параллельны и характеризуются своим направлением (другими словами, исходят из бесконечно удалённой точки).

Рассмотрим вначале случай центрального проецирования.

Допустим, что в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$, которую условимся называть *глобальной* (или *мировой*) системой координат. Пусть в этой системе координат плоскость проекции P задается уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а центр проектирования VP (от англ. *viewpoint*) имеет координаты $\left[p_x, p_y, p_z\right]$. Кроме того, выберем на плоскости проекции P произвольную *локальную* систему координат $O'x'y'$, никак не связанную с системой $Oxyz$.

Нас будет интересовать следующая задача.

Задача. Пусть объект проецирования характеризуется точками P_0, P_1, ..., P_n, координаты которых в системе $Oxyz$ задаются столбцам матрицы

$$V = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \end{bmatrix}.$$

Пусть $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ — проекции этих точек на картинную плоскость P. Требуется найти матрицу W координат точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ в локальной системе координат $O'x'y'$:

$$W = \begin{bmatrix} x'_0 & x'_1 & \dots & x'_n \\ y'_0 & y'_1 & \dots & y'_n \end{bmatrix}.$$

Решение. Перейдём к однородным координатам. При этом матрицы V и W принимают вид

$$V = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} x'_0 & x'_1 & \dots & x'_n \\ y'_0 & y'_1 & \dots & y'_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

центр проектирования имеет координаты $VP = \left[p_x, p_y, p_z, 1\right]$, а плоскость проекции P может быть отождествлена с точкой $P = \left[A, B, C, D\right]$ проективного пространства.

Решение задачи будет состоять из двух этапов. На первом этапе построим матрицу

$$U = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_n \\ Y_0 & Y_1 & \dots & Y_n \\ Z_0 & Z_1 & \dots & Z_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

координат точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ на картинной плоскости P в глобальной системе координат. Для этого достаточно найти матрицу T такую, что $TV = \widetilde{U}$, где $\widetilde{U}$ — матрица координат точек, эквивалентных $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ в проективном пространстве, (другими словами, таких, что последний элемент столбца в $\widetilde{U}$ может быть отличен от единицы). Можно показать, что

$$T = \big(VP\big)^{\top} P - \big(VP\,,\,P\big) I,$$

где I — единичная матрица размера 4×4, а $\big(VP\,,\,P\big)$ — скалярное произведение векторов VP и P, т.е.,

$$\big(VP\,,\,P\big) = Ap_x + Bp_y + Cp_z + D\,.$$

Другими словами,

$$T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A, & B, & C, & D \end{bmatrix} - (Ap_x + Bp_y + Cp_z + D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Ap_x & Bp_x & Cp_x & Dp_x \\ Ap_y & Bp_y & Cp_y & Dp_y \\ Ap_z & Bp_z & Cp_z & Dp_z \\ A & B & C & D \end{bmatrix} - (Ap_x + Bp_y + Cp_z + D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -Bp_y - Cp_z - D & Bp_x & Cp_x & Dp_x \\ Ap_y & -Ap_x - Cp_z - D & Cp_y & Dp_y \\ Ap_z & Bp_z & -Ap_x - Bp_y - D & Dp_z \\ A & B & C & -Ap_x - Bp_y - Cp_z \end{bmatrix}.$$

Вычислив $\widetilde{U} = TV$, разделим элементы в её столбцах на значение последнего элемента в столбце. В полученной матрице последняя строка будет состоять из одних единиц, и, следовательно, она совпадает с требуемой матрицей U. (Отметим, что отсутствие нулей в последней строке матрицы $\widetilde{U}$ гарантируется требованием принадлежности всех точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ картинной плоскости.) Таким образом, первый этап решения поставленной задачи завершён.

Второй этап решения задачи состоит в преобразовании матрицы U в матрицу

$$W = \begin{bmatrix} x'_0 & x'_1 & \dots & x'_n \\ y'_0 & y'_1 & \dots & y'_n \end{bmatrix}.$$

координат точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ в локальной системе координат на плоскости P. Понятно, что для этого необходимо каким-то образом задать эти локальные координаты.

Пусть O, X, и Y — три разичные точки плоскости P, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ образуют базис на картинной плоскости P. Пусть $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$ — орты этих векторов:

$$\boldsymbol{Ox} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right)^{\circ} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}, \qquad \boldsymbol{Oy} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right)^{\circ} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OY}}.$$

В качестве локальной системы координат возьмём $\langle O, \boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{Oy} \rangle$.

Пусть в глобальной декартовой системе координат точка O имеет координаты $[O_1, O_2, O_3]$, $\boldsymbol{Ox} = [Ox_1, Ox_2, Ox_3]$, $\boldsymbol{Oy} = [Oy_1, Oy_2, Oy_3]$. Переходя к проективным координатам, и учитывая, что O является точкой, а $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$ — осями, указывающими направления, получим

$$O[O_1, O_2, O_3, 1], \quad \boldsymbol{Ox} = [Ox_1, Ox_2, Ox_3, 0], \quad \boldsymbol{Oy} = [Oy_1, Oy_2, Oy_3, 0].$$

Составим из этих координат матрицу

$$K = \begin{bmatrix} Ox_1 & Ox_2 & Ox_3 & 0 \\ Oy_1 & Oy_2 & Oy_3 & 0 \\ O_1 & O_2 & O_3 & 1 \end{bmatrix},$$

и найдём

$$H = \left(KK^{\top}\right)^{-1} K.$$

Вычислив $\widetilde{W} = HU$, разделим элементы в столбцах $\widetilde{W}$ на значение последнего элемента в столбце. После исключения из полученной матрицы последней, третьей, строки, состоящей из единиц, получим требуемую матрицу W декартовых координат точек $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ в системе координат $\langle O, \boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{Oy} \rangle$ на портретной плоскости P.

Таким образом, поставленная задача полностью решена. ■

Нам остаётся рассмотреть случай параллельного проектирования. В этом случае центр проектирования VP является бесконечно удалённой точкой. Полагая $VP = [p_x, p_y, p_z, 0]$, сводим случай параллельного проектирования к рассмотренному выше.