Проективное 2D-преобразование задается образами четырёх точек

Утверждение. Пусть известно, что некоторое проективное преобразование плоскости переводит точки p_1, p_2, p_3, p_4, образующие четырехугольник, в точки P_1, P_2, P_3, P_4. Тогда матрица

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

этого преобразования определяется координатами точек p_1, p_2, p_3, p_4 и их образов P_1, P_2, P_3, P_4 с точностью до значения элемента h_{33}.

Доказательство. Пусть $p_k = (x_k, y_k)$, $P_k = (X_k, Y_k)$, где $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда, если

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{X_k} \\ \widetilde{Y_k} \\ \widetilde{Z_k} \end{bmatrix}$$

то $X_k = \widetilde{X_k}/\widetilde{Z_k}$, и $Y_k = \widetilde{Y_k}/\widetilde{Z_k}$. Другими словами,

$$X_k = \frac{h_{11}x_k + h_{12}y_k + h_{13}}{h_{31}x_k + h_{32}y_k + h_{33}}, \qquad Y_k = \frac{h_{21}x_k + h_{22}y_k + h_{23}}{h_{31}x_k + h_{32}y_k + h_{33}}.$$

Перепишем эти равенства как

$$X_k\Big(h_{31}x_k + h_{32}y_k + h_{33}\Big) = h_{11}x_k + h_{12}y_k + h_{13}, \quad Y_k\Big(h_{21}x_k + h_{22}y_k + h_{23}\Big) = h_{11}x_k + h_{12}y_k + h_{13}$$

и заметим, что их можно рассматривать как два линейных уравнения относительно неизвестных h_{ij}. Получаем следующую систему из 8 уравнений с 9 неизвестными. Если принять, что $h_{33} = 1$, она имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_1x_1 & -X_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -Y_1x_1 & -Y_1y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_2x_2 & -X_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -Y_2x_2 & -Y_2y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_3x_3 & -X_3y_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -Y_3x_3 & -Y_3y_3 \\ x_4 & y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_4x_4 & -X_4y_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & 1 & -Y_4x_4 & -Y_4y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{bmatrix}$$

Решая эту систему, получаем значения 8 элементов матрицы H проективного преобразования.