

# 기초 역학과 해석 역학

*xylosper*

March 21, 2013



# 차례

차례	i
<b>1 벡터</b>	<b>1</b>
1.1 벡터의 성질	1
1.1.1 기본 정의	1
1.1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈	1
1.1.3 기저 벡터	1
1.1.4 벡터의 크기	3
1.2 벡터의 곱	3
1.2.1 내적	3
1.2.2 외적	4
1.2.3 스칼라 삼중곱	5
1.2.4 벡터 삼중곱	6
<b>2 뉴턴의 운동 법칙</b>	<b>7</b>
2.1 기준틀	7
2.2 뉴턴의 운동 법칙	7
2.2.1 제1법칙: 관성의 법칙	7
2.2.2 제2법칙: 가속도의 법칙	8
2.2.3 제3법칙: 작용-반작용의 법칙	8
2.3 질점계의 운동	9
2.3.1 운동량 보존 법칙	9
2.3.2 질량 중심의 운동	9
2.4 여러가지 운동	10
2.4.1 등속 원운동	10
2.4.2 단순 조화 진동	11
<b>3 일과 역학적 에너지</b>	<b>13</b>
3.1 일	13
3.1.1 일의 정의	13
3.1.2 경로 의존성	13
3.1.3 일률	14
3.2 보존력과 포텐셜 에너지	14
3.2.1 보존력	14
3.2.2 포텐셜 에너지	15
3.2.3 중력 포텐셜 에너지	16
3.2.4 조화 포텐셜 에너지	16
3.3 역학적 에너지	17
3.3.1 운동 에너지와 일	17

3.3.2	역학적 에너지와 일	18
3.3.3	역학적 에너지 보존 법칙	18
3.4	포텐셜 에너지와 안정성	19
3.4.1	평형점의 종류	19
3.4.2	단순 조화 진동	20
3.4.3	회전하는 진자	20
3.5	비조화 포텐셜에 의한 진동	21
3.5.1	진동의 주기	21
3.5.2	단순 조화 진동	21
3.5.3	동시적 진동	22
<b>4</b>	<b>여러가지 진동 운동</b>	<b>23</b>
4.1	연성 진동	23
4.1.1	기준 모드	23
4.1.2	맥놀이	24
4.1.3	행렬에 의한 일반적인 풀이	25
4.2	감쇠 진동	27
4.2.1	미분 방정식	27
4.2.2	감쇠 진동의 종류	28
4.2.3	에너지 손실	30
4.2.4	Q 인자	32
4.3	강제 진동	33
4.3.1	정상 상태와 과도 상태	33
4.3.2	응답 함수	35
4.3.3	에너지 균형	37
<b>5</b>	<b>질점의 회전 운동과 중심력</b>	<b>41</b>
5.1	각운동량과 토크	41
5.1.1	동경 벡터와 접선 벡터	41
5.1.2	각운동량	41
5.1.3	토크	43
5.1.4	각운동량 보존 법칙	44
5.2	중심력	44
5.2.1	정의	44
5.2.2	각운동량 보존	45
5.2.3	역학적 에너지 보존	45
5.3	중심력에 의한 운동	46
5.3.1	유효 포텐셜 에너지	46
5.3.2	동경 운동 방정식	46
5.3.3	궤도 방정식	47
<b>6</b>	<b>행성의 운동</b>	<b>49</b>
6.1	2체 문제	49
6.1.1	2입자계의 운동 방정식	49
6.1.2	좌표 변환	49
6.1.3	각운동량과 운동 에너지	50

6.2	중력	50
6.2.1	만유 인력 법칙	50
6.2.2	포텐셜 에너지	51
6.2.3	궤도의 에너지	52
6.3	케플러의 행성 운동 법칙	53
6.3.1	제1법칙: 타원 궤도의 법칙	53
6.3.2	제2법칙: 면속도 일정의 법칙	54
6.3.3	제3법칙: 조화의 법칙	55
6.4	행성 운동에 대한 몇 가지 이야기	56
6.4.1	유한한 크기	56
6.4.2	열린 궤도	57
6.4.3	위성 궤도	58
6.4.4	탈출 속도	59
<b>7</b>	<b>비관성계의 역학</b>	<b>61</b>
7.1	관성력	61
7.1.1	비관성계	61
7.1.2	일정한 가속도의 경우	62
7.2	회전하는 기준틀	62
7.2.1	각속도 벡터	62
7.2.2	회전 기준틀의 각속도	63
7.2.3	속도 변환 규칙	64
7.2.4	가속도 변환 규칙	65
7.3	회전 기준틀의 관성력	65
7.3.1	코리올리 힘	66
7.3.2	원심력	66
7.3.3	지구 표면에서 작용하는 힘	67
<b>8</b>	<b>강체의 운동</b>	<b>69</b>
8.1	강체의 회전 운동	69
8.1.1	고정축에 대한 회전	69
8.1.2	관성 모멘트의 계산	70
8.1.3	평행축 정리	71
8.2	순회전 운동	72
8.2.1	각운동량과 토크	72
8.2.2	일과 운동 에너지	72
8.2.3	강체의 회전 운동과 질점의 병진 운동의 유사성	73
8.3	복합 운동	74
8.3.1	각운동량	74
8.3.2	토크	77
8.3.3	운동 에너지	78
8.3.4	복합 진자	78
8.3.5	비스듬히 회전하는 막대	79
8.3.6	자이로스코프	80
8.3.7	고립계의 각운동량 보존	81
8.4	관성 텐서	82

8.4.1	임의의 회전에 대한 각운동량	82
8.4.2	일반화된 평행축 정리	83
8.4.3	수직축 정리	84
8.4.4	관성 텐서의 주축	85
8.4.5	관성 텐서의 시각화	86
8.4.6	오일러 방정식	86
8.4.7	회전 운동의 안정성	87
<b>9</b>	<b>라그랑지 역학</b>	<b>89</b>
9.1	변분법	89
9.1.1	양함수와 음함수	89
9.1.2	범함수	89
9.1.3	오일러 방정식	91
9.1.4	함수가 여러개인 경우	93
9.1.5	응용: 페르마의 원리와 스넬의 법칙	94
9.2	라그랑지안	95
9.2.1	변분 원리	95
9.2.2	라그랑지 방정식	97
9.2.3	일반화 좌표	98
9.3	제약 조건이 있는 운동	100
9.3.1	자유도	100
9.3.2	홀로노믹	100
9.3.3	라그랑지 승수법	101
9.3.4	응용: 곡선위의 운동	103
9.4	보존 법칙	105
9.4.1	뇌터의 정리	105
9.4.2	일반화 운동량 보존 법칙	106
9.4.3	시간 대칭성과 해밀토니안	107
9.4.4	역학적 에너지 보존 법칙	108
<b>10</b>	<b>해밀턴 역학</b>	<b>111</b>
10.1	해밀턴 방정식	111
10.1.1	해밀토니안의 변수	111
10.1.2	해밀턴 방정식	112
10.1.3	해밀턴 방정식을 이용한 풀이	113
10.2	정준 변환	115
10.2.1	해밀턴 역학의 변환	115
10.2.2	모함수에 의한 정준 변환	116
10.2.3	모함수의 일반화	118
10.3	푸아송 괄호식	120
10.3.1	푸아송 괄호식의 정의와 성질	120
10.3.2	운동의 제약 조건	121
10.3.3	정준 변환에 대한 푸아송 괄호식의 불변성	122
10.3.4	푸아송 괄호식에 의한 정준 변환의 표현	124
10.4	위상 공간	125
10.4.1	위상 궤적	126

---

10.4.2	리우빌 정리 . . . . .	127
10.4.3	위상 공간의 시간 발전 . . . . .	129
10.5	양자 역학으로의 전개 . . . . .	129
10.5.1	해밀턴 야코비 방정식 . . . . .	129
10.5.2	슈뢰딩거 방정식 . . . . .	131
10.5.3	불확정성 원리와 푸아송 괄호식 . . . . .	133
10.5.4	고전 역학으로의 회귀 . . . . .	136
찾아보기		137





## 1.1 벡터의 성질

## 1.1.1 기본 정의

스칼라(scalar)는 하나의 숫자인 크기와 그 단위만으로 나타낼 수 있는 물리량이다.

- 스칼라의 예: 온도  $T$ , 밀도  $\rho$ , 시간  $t$

벡터(vector)는 크기와 함께 공간속에서의 방향까지 지정하는 물리량이다.

- 벡터의 예: 힘  $\vec{F}$ , 가속도  $\vec{a}$ , 속도  $\vec{v}$ , 위치  $\vec{r}$

벡터는 스칼라와 구분하여 위의 예와 같이 문자 위에 화살표를 표시하거나 다음과 같이 굵은 글씨로 표기한다.L

공간상에 벡터를 표시할 때는 그림 1.1과 같이 화살표로 나타낸다. 화살표의 길이는 벡터의 크기를 나타내고 벡터의 방향은 화살표가 가리키는 방향이 된다.

벡터의 크기는 절댓값 기호를 이용하여 나타내며, 간단하게 본래 벡터를 나타내는 기호에서 화살표를 제거하거나 혹은 굵은 글자의 본래의 글자체로 표기하여 나타내기도 한다.

$$|\vec{a}| = |\mathbf{a}| = a \quad (1.1)$$

크기가 1인 벡터를 특별히 단위 벡터라 부르며, 벡터  $\mathbf{a}$ 와 평행한 단위 벡터를  $\hat{\mathbf{a}}$  또는  $\mathbf{e}_a$ 로 나타내기로 약속한다.

벡터  $\mathbf{a}$ 에 스칼라  $\lambda$ 를 곱한 양  $\lambda\mathbf{a}$ 도 벡터이다. 그 크기는  $|\lambda|\mathbf{a}$ 이며, 방향은  $\mathbf{a}$ 와 평행하되  $\lambda > 0$ 인 경우는  $\mathbf{a}$ 와 같은 방향을 가리키고,  $\lambda < 0$ 의 경우는  $\mathbf{a}$ 의 반대방향을 가리킨다.

## 1.1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

벡터의 덧셈과 뺄셈은 그림 1.2와 같이 계산한다.  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 는  $\mathbf{a}$ 의 화살표 끝과  $\mathbf{b}$ 의 화살표 시작점을 일치시켰을 때 그릴 수 있는 삼각형의 나머지 한 변에 평행하고 이 때 방향은  $\mathbf{a}$ 의 시점으로부터  $\mathbf{b}$ 의 종점을 향한다.  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 는  $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ 와 동일하며 따라서  $\mathbf{a}$ 와  $-\mathbf{b}$ 로 그릴 수 있는 삼각형의 나머지 한 변과 평행하고 방향은  $\mathbf{a}$ 의 시점에서  $-\mathbf{b}$ 의 종점을 향한다.

벡터의 덧셈은 교환 법칙과 결합 법칙이 성립한다.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \quad (1.2)$$

## 1.1.3 기저 벡터

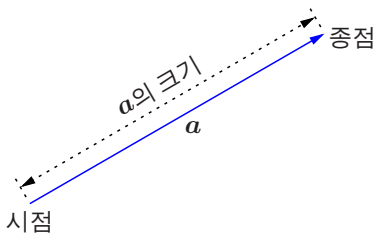


그림 1.1 화살표에 의한 벡터

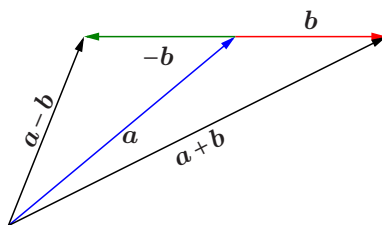


그림 1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

평면상의 임의의 벡터는 2개의 서로 다른 벡터의 선형 결합<sup>1</sup>으로 모두 나타낼 수 있다. 마찬가지로 3차원 공간에서는 3개의 서로 다른 벡터의 선형 결합으로 모든 벡터를 나타낼 수 있다. 이 벡터를 기저 벡터(basis vector)라고 부른다.

기저 벡터는 서로 평행하지만 않으면 얼마든지 원하는 대로 선택할 수 있다. 그러나 일반적으로는 데카르트 좌표계(Cartesian coordinate system)<sup>2</sup>에서 그림 1.3과 같이 각 축에 평행한 단위 벡터를 기저 벡터로 선택하고 이들은 주로 다음과 같은 기호로 나타낸다.

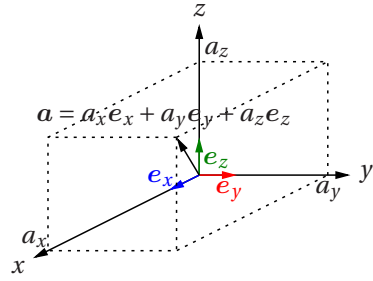


그림 1.3 데카르트 좌표계의 단위 기저 벡터

$$e_x, e_y, e_z \quad \text{또는} \quad i, j, k \quad (1.3)$$

이들은 **기본 단위 벡터**라고 불리며, 단위 벡터이므로 크기가 모두 1로 같고 서로 수직이다.

$$|e_i| = 1 \quad (i = x, y, z), \quad e_i \perp e_j \quad (i \neq j) \quad (1.4)$$

그림 1.3처럼 임의의 벡터는 기본 단위 벡터의 이들의 선형결합으로 나타낼 수 있다.

$$a = a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z = \sum_i^{x,y,z} a_i e_i \quad (1.5)$$

이 때  $a_x, a_y, a_z$ 를 각각  $a$ 의  $x$ 성분,  $y$ 성분,  $z$ 성분이라 하며, 다음과 같이 성분만으로 벡터를 표시하기도 한다.

$$a = (a_x, a_y, a_z) \quad (1.6)$$

혹은 벡터의 성분을 요소로 가지는  $3 \times 1$ 의 행렬로 나타내거나  $1 \times 3$ 의 행렬로 나타내기도 한다.

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{또는} \quad a = (a_x \quad a_y \quad a_z) \quad (1.7)$$

전자를 열벡터(column vector)라 하고 후자를 행벡터(row vector)라 하며 이들도 벡터의 성분 표시 방법이다. 계산식에 따라서는 벡터를 행렬로 취급하는게 편리한 경우가 많고 이 때는 주로 열벡터의 형태로 이용되며 행벡터는 드물게 등장한다.

기본 단위 벡터를 성분 표시로 나타내면 다음과 같다.

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

벡터의 덧셈이나 뺄셈을 계산할 때는 성분 표시를 하면 단순한 행렬의 덧셈이 되므로 성분끼리 더하고 빼면 된다.

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

<sup>1</sup> 임의의  $n$ 개의 벡터  $a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ 의 선형 결합이란 각 벡터에 적당한 상수  $c_i$ 를 곱하여 더한  $\sum_i c_i a_i = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$ 를 가리킨다.

<sup>2</sup> 일반적으로 많이 쓰이는  $xyz$ 축에 의해 나타내어지는 직교 좌표계의 이름이다.

이를 기본 단위 벡터로 나타내면,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) + (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) \\ &= (a_x + b_x) \mathbf{e}_x + (a_y + b_y) \mathbf{e}_y + (a_z + b_z) \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (1.10)$$

의 계산을 시행한 것과 등가이다.

### 1.1.4 벡터의 크기

벡터의 크기는 화살표의 길이이며, 이는 공간상에서 화살표의 시점과 종점사이의 거리에 해당한다. 따라서  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 의 크기는 피타고라스의 정리로부터 다음과 같이 구해진다.

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.11)$$

여기서  $\mathbf{a}$ 와 평행한 벡터  $\mathbf{a}/a$ 의 크기를 구해보면,

$$\frac{|\mathbf{a}|}{a} = \frac{a}{a} = 1 \quad (1.12)$$

가 얻어진다. 따라서  $\mathbf{a}$ 에 평행한 단위 벡터는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{a} \quad (1.13)$$

## 1.2 벡터의 곱

### 1.2.1 내적

두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대해서, 내적(inner product)은  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 와 같이 쓰고 두 벡터 사이의 각을  $\theta$ 를 이용하여 다음 식으로 정의한다.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1.14)$$

내적의 결과는 스칼라이기 때문에 내적은 스칼라 곱(scalar product)이라고도 불리운다. 정의식으로부터 내적은 교환 법칙이 성립하고, 분배 법칙도 성립한다.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (1.15)$$

그림 1.4로부터 알 수 있듯이,  $b \cos \theta$ 는  $\mathbf{b}$ 의  $\mathbf{a}$ 에 평행한 성분이고 마찬가지로  $a \cos \theta$ 는  $\mathbf{b}$ 에 평행한  $\mathbf{a}$ 의 성분이다. 두 벡터가 평행( $\theta = 0$ )이라면 내적은 단순히 크기의 곱이 되고, 반평행<sup>3</sup>( $\theta = \pi$ )이라면 크기의 곱에 -가 붙는다. 두 벡터가 수직이라면 평행한 성분은 존재하지 않으므로( $\cos \theta = 0$ ) 내적은 0이 된다.

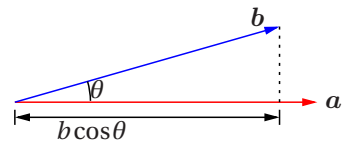


그림 1.4 내적의 의미

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (1.16)$$

<sup>3</sup>두 벡터를 나타내는 선분은 평행하지만 화살표의 방향이 반대인 경우를 가리킨다.

같은 두개의 벡터의 내적을 벡터의 제곱으로 정의하고, 그 결과는 벡터의 크기의 제곱과 같으므로, 벡터의 크기는 내적의 제곱근으로 나타낼 수 있다.

$$a^2 \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (1.17)$$

기본 단위 벡터는 크기가 1이고 서로 수직인 벡터이므로 다음의 관계식을 만족한다.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.18)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 크로네커 델타(Kronecker delta)라 불리며 다음과 같이 정의되어 있다.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1.19)$$

이 성질을 이용하면 벡터의 내적을 성분으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) \cdot (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_i a_i b_i \end{aligned} \quad (1.20)$$

즉, 벡터의 내적은 각 성분의 곱을 합한 것과 같다.

벡터를 열벡터로 나타내면 내적은  $\mathbf{a}^t$ ( $\mathbf{a}$ 의 전치 행렬<sup>4</sup>=행벡터)와  $\mathbf{b}$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^t \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.21)$$

특히, 어떤 벡터와 기본 단위 벡터의 내적은 해당 축 방향의 성분

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i \quad (1.22)$$

와 같다.

성분을 알 수 있는 두 벡터가 있다면

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \quad (1.23)$$

의 방법으로 두 벡터의 사이각을 계산할 수 있다.

## 1.2.2 외적

두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대해서 외적(outer product)은  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 라고 쓴다. 외적의 결과는 또다른 벡터이므로 벡터곱(vector product)이라고도 불리며, 외적은 방향과 크기를 갖는다. 외적의 방향은 그림1.5와같이  $\mathbf{a}$ 에서  $\mathbf{b}$ 로 사이각이 작은 쪽으로 회전시켰을 때 오른나사가 진행하는 방향<sup>5</sup>으로 정의한다. 외적의 크기는

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \quad (1.24)$$

로 정의되고, 이는  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 로 그려지는 평행 사변형(그림1.5의 초록색 부분)의 넓이와 같다.

<sup>4</sup>  $n \times m$ 의 행렬  $\mathbf{A} = (A_{ij})$ 의 전치 행렬은  $m \times n$ 의 행렬  $\mathbf{A}^t = (A_{ji})$ 을 가리킨다. 즉, 대각 성분에 대해서 성분을 뒤집은 행렬이다.

<sup>5</sup>  $\mathbf{a}$ 에서  $\mathbf{b}$ 로 한손으로 오른손으로 감았을 때 엄지가 향하는 방향이라고도 표현한다.

벡터의 외적에 대해서 분배 법칙이 성립하지만 일반적으로 결합 법칙은 성립하지 않는다<sup>6</sup>.

$$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c) \quad (1.25)$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad (1.26)$$

한편, 교환 법칙은 성립하지 않으나 벡터의 순서가 뒤바뀌면 사이각이 그대로이므로 크기가 같고 방향이 반대인 벡터가 되며, 평행한 두 벡터의 외적은 사이각이 0이므로 0이 된다.

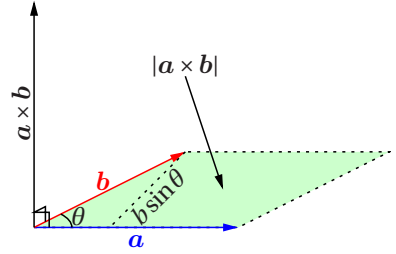


그림 1.5 외적의 정의

$$a \times b = -b \times a, \quad a \times a = 0 \quad (1.27)$$

데카르트 좌표계는 오른손 좌표계<sup>7</sup>이기 때문에, 기본 단위 벡터 둘을 순서대로 외적하면 나머지 기본 단위 벡터가 얻어진다.

$$e_x \times e_y = e_z, \quad e_y \times e_z = e_x, \quad e_z \times e_x = e_y \quad (1.28)$$

곱의 순서가 바뀌면 -부호가 붙는다. 또한 같은 단위 벡터들의 외적은 0이다. 이로부터 벡터의 외적을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z) \times (b_x e_x + b_y e_y + b_z e_z) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) e_x + (a_z b_x - a_x b_z) e_y + (a_x b_y - a_y b_x) e_z \end{aligned} \quad (1.29)$$

외적은 성분으로 나타내면  $x, y, z$ 의 순서대로 반복적으로 성분과 기본 단위 벡터가 나타난다는 규칙성이 있으나 표현이 번잡하다. 행렬식의 계산에 익숙하다면 다음과 같은 표기가 더 간단할 수 있다,

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} e_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} e_z = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

### 1.2.3 스칼라 삼중곱

다음과 같은 형태의 벡터 곱을 스칼라 삼중곱(scalar triple product)이라 부른다.

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.31)$$

스칼라 삼중곱은 다음과 같이 순서대로 곱의 순서를 바꿀 수 있다.

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) \quad (1.32)$$

또한 스칼라 삼중곱은 세 벡터를 세 변으로 가지는 평행 육면체의 부피와 같다.

<sup>6</sup>일반적으로 성립하지 않는다는 것은, 경우에 따라서는 성립할 수도 있다는 뜻이다.

<sup>7</sup> $x$ 축에서  $y$ 축으로 오른손을 감아 쥐었을 때  $z$ 축의 방향이 엄지손가락의 방향이 되는 좌표계

### 1.2.4 벡터 삼중곱

다음과 같은 형태의 곱을 벡터 삼중곱(vector triple product)이라 한다.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (1.33)$$

벡터 삼중곱의 결과는 벡터이며 다음 등식을 만족한다.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (1.34)$$

이로부터  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 는  $\mathbf{b}$ 와  $\mathbf{c}$ 를 포함하는 평면속에 존재함을 알 수 있다.

## 뉴턴의 운동 법칙

### 2.1 기준틀

운동을 기술하는 기준이 되는 좌표계를 기준틀(frame of reference) 또는 기준계라 한다. 하나의 기준계에서 다른 기준틀로는 적당한 변환식이 존재한다. 예를 들어 그림 2.1과 같이 두 기준틀이  $x$ 축 방향으로  $a$ 만큼 떨어져 있는 경우, 두 좌표계의 변환식은 다음과 같다.

$$x' = x + a, y' = y, z' = z, t' = t \quad (2.1)$$

이번에는 그림 2.2처럼 한 기준틀에 대해서 다른 기준틀이 일정한 속도  $v = v\mathbf{e}_x$ 로 움직이고 있을 때, 두 기준틀은  $vt$ 만큼 떨어져 있으므로 변환식은 다음과 같다.

$$x' = x + vt, y' = y, z' = z, t' = t \quad (2.2)$$

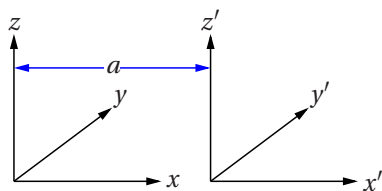


그림 2.1 고정된 두 기준틀

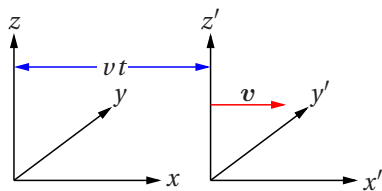


그림 2.2 일정한 속도로 움직이는 기준틀

어느 변환식에서도 시간은 동일함에 주의하라. 고전적인 역학에서 시간은 절대적이기 때문에 기준틀에 의존하지 않는다.

기준틀을 크게 관성계와 비관성계로 나눌 수 있다. 관성계(inertial frame of reference)란 앞으로 설명하는 뉴턴의 운동 법칙(Newton's laws of motion)이 성립하는 기준틀로, 그림 2.2처럼 일정한 속도로 움직이거나 정지해있는 기준틀이다. 비관성계의 예로는 가속하는 기준틀이나 회전하는 기준틀이 있다.

### 2.2 뉴턴의 운동 법칙

이 법칙들은 관성계 안에서 운동하는 질점에겐 적용된다.

#### 2.2.1 제1법칙: 관성의 법칙

■관성의 법칙 질점에 작용하는 힘이 없으면 질점의 운동 속도는 변하지 않는다.

질점의 속도(velocity)를  $v$ 라고 하면 관성의 법칙을 수식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \text{const.} \quad (2.3)$$

시간 미분은 매우 자주 등장하므로 시간 미분을  $\dot{\mathbf{r}} \equiv d\mathbf{r}/dt$ 와 같이 문자 위에 점을 찍는 것으로 나타내기로 약속한다. 이 표기로 나타내면,

$$\mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \text{const.} \quad (2.4)$$

이다. 여기서  $\mathbf{v} = 0$ 인 경우도 포함되는 것에 주의하라. 즉 작용하는 힘이 없으면 멈춰있는 물체는 그대로 멈춰있고 운동중인 물체는 같은 속도로 계속해서 움직이며, 이처럼 물체가 운동 상태(속도)를 유지하려는 성질을 관성(inertia)이라 부른다.

### 2.2.2 제2법칙: 가속도의 법칙

■ **가속도의 법칙** 질점에 작용하는 알짜힘(net force)  $\mathbf{F}$ 는 가속도  $\mathbf{a}$ 에 비례한다.

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} \quad (2.5)$$

가속도(acceleration)는 속도의 시간 미분이므로 변위의 2계 도함수이다. 여기서  $m$ 은 비례 계수이며 관성 질량(inertial mass) 혹은 단순히 질량(mass)이라고 불리운다. 질량이 클수록 가속도를 만드는데 더 큰 힘이 필요하므로 질량은 관성의 크기를 나타낸다고 할 수 있다. 제2법칙은 운동을 직접 계산할 수 있게 해주기 때문에 **운동 방정식**(equation of motion)이라고도 불리운다. 벡터의 성분으로 운동 방정식을 나타내면 각 성분별로 비례 관계가 성립한다.

$$F_x = m\ddot{x}, F_y = m\ddot{y}, F_z = m\ddot{z} \quad (2.6)$$

여기서 운동량(momentum)  $\mathbf{p}$ 를

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}} \quad (2.7)$$

와 같이 정의하면, 제2법칙은 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad (2.8)$$

여기서  $\mathbf{F}$ 는 특정 힘을 나타내는 것이 아니라 입자에 작용하는 모든 힘의 합인 알짜힘임에 주의하라. 이 법칙은 힘의 유래를 알려주는 것이 아니다. 이 법칙이 나타내는 것은 질량  $m$ 인 어떤 입자가 가속도  $\ddot{\mathbf{r}}$ 로 운동하고 있다면, 여기에 작용하는 알짜힘이  $m\ddot{\mathbf{r}}$ 과 같다는 것이다. 구체적인 힘의 원천은 뉴턴의 운동 법칙의 밖에서 얻어진다. 예를 들면 중력의 법칙이나 쿨롱의 법칙 등이다.

### 2.2.3 제3법칙: 작용-반작용의 법칙

■ **작용 반작용의 법칙** 두 입자1, 2가 상호작용할 때 입자1이 입자2에 힘  $\mathbf{F}_{21}$ 을 작용함과 동시에 입자2가 입자1에 힘의 크기가 같고 방향이 반대인 힘  $\mathbf{F}_{12}$ 를 작용한다.

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (2.9)$$

이 때 기준이 되는 입자로부터 바라본 힘을 작용(action)이라 하고, 그 반대 방향의 힘을 반작용(reaction)이라 한다. 작용이 존재하기 때문에 반작용이 존재하는 것이 아니라 작용과 반작용이 동시에 존재하는 것임에 주의하라. 또한 작용과 반작용이 반드시 일직선상에 존재할 필요는 없다.



## 2.3 질점계의 운동

### 2.3.1 운동량 보존 법칙

세 입자 1, 2, 3이 존재할 때, 이들의 상호 작용을 고려한 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}, \quad \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}, \quad \dot{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} \quad (2.10)$$

위 식의 양변을 더하면,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31}) + (\mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32}) \quad (2.11)$$

가 된다. 여기에 제3법칙  $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$ 을 대입하면, 우변은 0이 된다. 따라서,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = 0 \quad (2.12)$$

가 얻어진다. 이 식은 세 입자의 운동량의 총합이 불변임을 의미한다.

이 결과는 쉽게 임의의  $N$ 개의 입자계로 확장이 가능하다.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N) = 0 \quad (2.13)$$

이로부터 입자계의 총 운동량이 보존됨을 알 수 있고, 이 결과를 **운동량 보존 법칙**(law of conservation of momentum)이라 한다. 이 식은 계를 구성하는 입자간의 상호 작용만을 고려하여 얻어졌기 때문에, 입자간 상호작용 이외의 힘이 존재할 때는 성립하지 않는다. 이때, 계의 내부 입자들 간의 상호 작용을 **내력**(internal force)이라하고, 계의 외부로부터 입자들에게 가해지는 힘을 **외력**(external force)이라 부른다. 위 결과를 정리하면 다음과 같다.

■ **운동량 보존의 법칙** 외력이 존재하지 않을 때 계의 총 운동량  $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$ 는 보존된다.

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (2.14)$$

### 2.3.2 질량 중심의 운동

뉴턴의 운동 법칙을 소개할 때 질점에 적용되는 법칙이라고 하였다. 따라서 우리는 거시적인 물체에 적용할 수 있는 운동 방정식을 구해야 한다. 거시적인 물체는 여러개의 질점들의 집합으로 볼 수 있다.  $N$ 개의 입자로 구성되어 입자들이 서로 상호작용하고 있는 계를 생각하자. 입자간의 상호작용 외에  $i$ -번째 입자에 작용하는 외력을  $\mathbf{F}_i$ 라고 하면  $N$ 개의 입자에 대한 운동 방정식을 세울 수 있다.

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.15)$$

이 운동 방정식을 모두 더하면, 좌변의 첫번째 항의 총합은 작용-반작용의 법칙으로부터 0이 된다. 따라서,

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (2.16)$$

이 얻어진다.

입자들의 운동량의 총합을  $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ , 외력의 총합(알짜힘)을  $\mathbf{F}_e = \sum_i \mathbf{F}_i$ 라 하면,

$$\mathbf{F}_e = \dot{\mathbf{P}} \quad (2.17)$$

가 된다. 이 때, 총 운동량의 시간 미분을

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = M \frac{d^2}{dt^2} \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (2.18)$$

와 같이 변형한다. 여기서  $M = \sum_i m_i$ 은 입자들의 총 질량이다. 여기에

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (2.19)$$

로 정의된 벡터를 대입하면,

$$\mathbf{F}_e = M \ddot{\mathbf{R}} \quad (2.20)$$

이 얻어진다. 여기서  $\mathbf{R}$ 을 질량 중심(center of mass; COM)이라 한다. 따라서 다체계(many body system) 또는 질점계의 운동은, 총 질량이 질량 중심에 모여있는 질점에 모든 외력이 작용할 때의 운동으로 간주할 수 있다. 따라서,

총질량  $M$ 의 질점계의 운동은 질량 중심  $\mathbf{R}$ 에 외력  $\mathbf{F}_e$ 가 작용할 때의 운동과 같다.

$$\mathbf{F}_e = M \ddot{\mathbf{R}} \quad (2.21)$$

예를 들어 그림 2.3과 같이 마찰이 없는 평면으로 비스듬하게 낙하하는 상자의 운동을 생각해 보자. 이 상자에 작용하는 전체 중력은, 상자의 질량 중심에 작용하는 것으로 간주할 수 있기 때문에 질량 중심이 연직 방향으로 이동하도록 운동한다. 따라서 평면에 접한 상자의 모서리 혹은 꼭지점은 왼쪽으로 미끄러지게 된다.

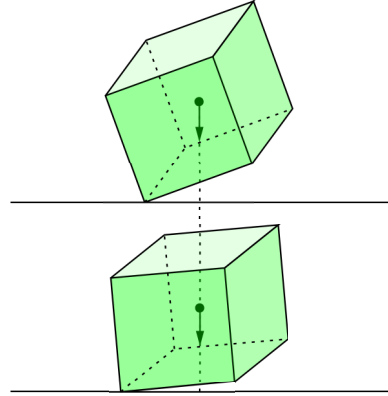


그림 2.3 마찰 없는 평면으로 낙하하는 상자

## 2.4 여러가지 운동

### 2.4.1 등속 원운동

일정한 반경 원 궤도를 따라 일정한 속력으로 회전하는 운동을 등속 원운동이라 한다. 이 때, 운동을 기술하는 단위 벡터로 회전하는 좌표계를 이용하면 편리하다. 그림 2.4와 같이  $\mathbf{e}_x$ 와  $\mathbf{e}_y$ 를 각각  $\theta$ 만큼 회전시킨 벡터를  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ 라 하면,

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y$$

의 관계에 있다. 이 때  $\mathbf{e}_r$ 은 위치 벡터와 평행한 방향의 단위 벡터이고  $\mathbf{e}_\theta$ 는 회전 방향의 단위 벡터가 된다.  $\mathbf{e}_r$ 과  $\mathbf{e}_\theta$ 도 서로 수직이며,

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z \quad (2.22)$$

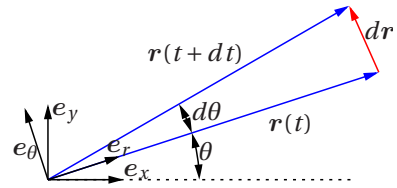


그림 2.4 회전 운동의 미소 변위

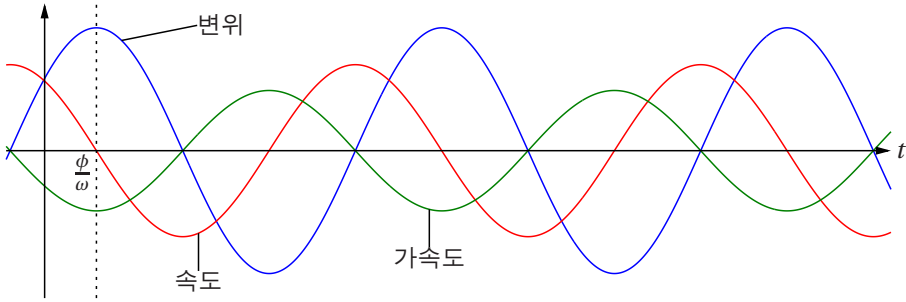


그림 2.5 단순 조화 진동의 변위, 속도, 가속도

를 만족한다.  $\theta$ 가 시간에 따라서 변하면 이들도 시간에 따라서 변하며 그 시간 미분은 각각 다음과 같다.

$$\dot{e}_r = -\omega \sin\theta e_x + \omega \sin\theta e_y = \omega e_\theta \quad (2.23)$$

$$\dot{e}_\theta = -\omega \cos\theta e_x - \omega \sin\theta e_y = -\omega e_r \quad (2.24)$$

여기서

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.25)$$

는 단위 시간당 회전각도를 나타내는 각속도(angular velocity)이다.

다시 본래의 운동으로 돌아가, 반경  $A$ 의 등속 원운동에서 위치 벡터는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{r} = A\mathbf{e}_r \quad (2.26)$$

속도 벡터는 변위의 시간 미분이므로,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = A\dot{\mathbf{e}}_r = \omega A\mathbf{e}_\theta \quad (2.27)$$

가 얻어진다.  $\mathbf{e}_\theta$ 는 변위 벡터  $\mathbf{r}$ 에 수직이므로 회전 운동의 속도는 원운동의 접선 방향임을 알 수 있다. 가속도는 속도의 시간 미분이며, 일정 속력이므로  $v = A\omega$ 가 시간에 의존하지 않음에 주의하여 계산하면,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \omega A\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\omega^2 A\mathbf{e}_r = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (2.28)$$

이 얻어진다. 따라서 등속 원운동하는 질점의 가속도는 위치 벡터의 반대 방향, 즉 원의 중심 방향을 향하는 것을 알 수 있다. 이 때문에 원운동을 발생시키는 가속도를 구심 가속도(centripetal acceleration)라 부른다.

### 2.4.2 단순 조화 진동

등속 원운동하는 변위의 수평 방향 운동 성분은 다음과 같다.

$$x = A\cos(\omega t - \phi) \quad (2.29)$$

$$\dot{x} = -\omega A\sin(\omega t - \phi) \quad (2.30)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t - \phi) = -\omega^2 x \quad (2.31)$$

이 운동을 단순 조화 진동(simple harmonic oscillation)이라 하며 단순히 조화 진동(harmonic oscillation)이나 단진동이라고도 한다. 그림 2.5에 위 결과를 나타내었다. 이 때,  $A$ 를 진폭,  $\omega t - \phi$ 를 진동의 위상,  $\phi$ 를 초기 위상,  $\omega$ 를 각진동수(angular frequency)라고 부른다. 단진동의 주기  $T$ 는,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.32)$$

로 구해진다.  $T$ 의 단위가 초(s)일 때 진동수  $f = 1/T$ 의 단위는 Hz가 쓰이며, 각진동수는 주로  $s^{-1}$ 의 단위가 이용된다. 위상은 무차원이다.

(2.31)로부터, 조화 진동을 나타내는 운동 방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x \quad (2.33)$$

이것은 용수철 상수가  $k = m\omega^2$ 인 후크의 법칙(Hooke's law)

$$F = -kx \quad (2.34)$$

와 일치한다. 따라서 용수철에 매달린 물체의 운동도 단진동이며, 이 때의 각진동수는

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.35)$$

이다.

## 일과 역학적 에너지

### 3.1 일

#### 3.1.1 일의 정의

힘  $\mathbf{F}$ 를 가해 미소 변위  $d\mathbf{r}$ 만큼 움직였을 때 한 일(work)  $dW$ 는 다음으로 정의된다.

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.1)$$

공간상의 어떤 점 1에서 다른 점 2로 경로  $C$ 를 따라서 이동했을 때 한 총 일은 다음과 같은 선적분으로 쓸 수 있다.

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.2)$$

#### 3.1.2 경로 의존성

일반적으로 일은 이동 경로에 의존하여 달라질 수 있다. 가장 간단한 예로 수평 방향으로 운동 마찰력

$$\mathbf{f} = -\mu N \hat{\mathbf{v}} \quad (3.3)$$

이 존재할 때 하는 일을 계산해보자.  $\mu$ 는 운동 마찰 계수이고  $\hat{\mathbf{v}}$ 는 속도 방향의 단위 벡터이다. 즉, 마찰력은 크기가 일정하지만 이동 방향과 반대 방향으로 작용한다. 여기에  $\mathbf{F}_e$ 를 가해서 이동 시킬 때 합력은  $\mathbf{F}_e + \mathbf{f}$ 이다. 이 때 물체의 가속도를 무시할 수 있을 만큼 천천히 물체를 움직이게 하기로 한다. 가속도가 없으므로 알짜힘은 0이고, 따라서,

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{f} = \mu N \hat{\mathbf{v}} \quad (3.4)$$

이다. 이 때,  $\hat{\mathbf{v}} = d\mathbf{x}/|d\mathbf{x}|$ 이고,  $\hat{\mathbf{v}}$ 는 미소 변위와 평행하므로  $\hat{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|$ 이고,  $d\mathbf{r}$ 만큼 이동했을 때 한 일은

$$dW = \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = \mu N |d\mathbf{r}| > 0 \quad (3.5)$$

이 된다. 문제를 간단히 하기 위해서 물체의 운동은  $x$ 축 일직선상으로 제한하여  $x = x_1$ 에서 출발하여  $x = x_2$ 로 이동한 후, 다시  $x = x_1$ 로 돌아가면, 이 때 한 일의 총량은,

$$W = \int_C \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} \mu N |dx| + \int_{x_2}^{x_1} \mu N |dx| = 2\mu N |x_2 - x_1| \quad (3.6)$$

이 되어 얼마나 멀리까지 갔다가 돌아오는가에 따라서 일의 크기가 달라진다.

그러나 종종 일이 경로에 의존하지 않고 출발점과 도착점의 위치에만 의존하는 경우도 있다. 예를 들어, 연직 위쪽 방향을  $+x$ 로 잡고, 질량  $m$ 을 연직 방향으로 힘  $\mathbf{F}_e$ 를 가하여 천천히 움직였을 때 한 일을 구해보자. 이 때도 역시 가속도가 없다고 간주하면  $\mathbf{F}_e$ 는 중력  $\mathbf{F} = -mge_x$  ( $g$ 는 중력 가속도)와 크기가 같고 방향이 반대가 된다.

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}_e = -\mathbf{F} = mge_x \quad (3.7)$$

마찬가지로  $x = x_1$ 에서  $x = x_2$ 까지 들어올린 후,  $x = x_1$ 으로 다시 천천히 내려놓았을 때 힘  $\mathbf{F}_e$ 가 한 일은,

$$W = \int_C \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} mg dx + \int_{x_2}^{x_1} mg dx = 0 \quad (3.8)$$

가 되어, 아무리 멀리까지 들어올렸다가 내려놓아도 한 일은 항상 0이다. 즉 이동 경로와 무관하다. 다음 절에서 경로에 무관하게 일이 결정되는 힘에 대해서 살펴볼 것이다.

### 3.1.3 일률

일은 힘과 거리의 내적이므로 시간과 (직접적으로는) 무관하다. 그러나 역학적인 기계를 평가함에 있어서는 얼마나 짧은 시간 안에 많은 일을 할 수 있는가가 중요한 요인이 될 수 있다. 여기서 일의 시간 미분을 **일률**(power)로 정의한다.

$$P = \dot{W} = \frac{dW}{dt} \quad (3.9)$$

즉, 일률이란 단위시간당 할 수 있는 일의 양을 나타낸다. 여기에 (3.1)을 대입하면,

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.10)$$

가 얻어진다. 따라서 일률은 힘과 속도의 내적으로도 계산할 수 있다.

## 3.2 보존력과 포텐셜 에너지

### 3.2.1 보존력

일상적으로 접하는 힘들은 크게 다음과 같이 나눌 수 있다.

- 힘이 직접 시간의 함수로 주어진 경우:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$
- 힘이 위치의 함수로 주어진 경우:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$
- 힘이 속도와 위치의 함수로 주어진 경우:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

힘이 직접 시간의 함수로 주어지는 경우에는 단순히 운동 방정식을 적분하여 풀 수 있다. 두번째와 세번째의 힘은 공간상의 위치에 따라서 힘의 크기가 달라지고, 이처럼 위치에 따라서 힘이 달라지는 공간을 역장(force field)이라고 부른다. 여기서는 특히 두 번째 종류의 힘에 주목하여 설명한다.

위치에만 의존하는 힘을 **보존력**(conservative force)이라 하고 이러한 역장을 보존력 장이라한다. 보존력장  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ 속에서 물체를 움직이기 위해서는 보존력에 거슬러서 외부로부터 힘  $\mathbf{F}_e$ 를 작용해야 한다. 이 때, 전 절의 예와 마찬가지로 물체의 가속도를 무시할 수 있을 만큼 매우 천천히 물체를 움직이기로 하면 외력의 총합은  $\mathbf{F}_e + \mathbf{F} = 0$ 이므로,

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

라 할 수 있다.  $\mathbf{F}_e$ 의 힘을 가하여 미소 변위  $d\mathbf{r}$ 만큼 움직이면 그때 한 일을  $dV$ 라고 하면,

$$dV = \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \quad (3.12)$$

와 같다. 위 식은  $V$ 의 전미분이므로,

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.13)$$

가 성립한다. 위 식은 벡터  $\mathbf{F}$ 가 어떤 스칼라  $-V$ 의 그래디언트<sup>1</sup>(gradient)임을 나타낸다.

$$\mathbf{F} = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z \quad (3.14)$$

$\text{grad}V$ 는 벡터 미분 연산자<sup>2</sup>

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.15)$$

를 이용하여  $\nabla V$ 로 나타내는 경우가 많다. 여기서  $V$ 를 포텐셜 에너지(potential energy)라 한다.

■ 포텐셜 에너지 보존력  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 은 어떤 스칼라  $V$ 에 대해서,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V \quad (3.16)$$

와 같이 나타내어질 수 있고, 스칼라  $V$ 를 포텐셜 에너지라 부른다.

### 3.2.2 포텐셜 에너지

보존력장에 대한 일에 특별히 포텐셜 에너지라는 이름이 부여된 것은 이 물리량이 특별하기 때문이다. 보존력장  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 은 위치에 대한 함수이기 때문에  $\mathbf{F} = -\nabla V$ 로 정의되는 포텐셜 에너지  $V(\mathbf{r})$  또한 위치에 대한 함수이다. 따라서 포텐셜 에너지는 공간상의 각 위치에 대응되는 값을 가진다. 보존력장 속에서 물체를  $\mathbf{r}_1$ 부터  $\mathbf{r}_2$ 로 이동시키는 어떤 경로  $C$ 를 따라서 한 일은,

$$W = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla V \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dV = V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) \quad (3.17)$$

가 얻어진다.<sup>3</sup> 위 결과는 경로  $C$ 에 의존하지 않는다. 이로부터 우리는 보존력과 포텐셜 에너지에 대한 중요한 성질을 알 수 있다.

■ 보존력과 일 보존력  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V$ 에 거슬러서( $\mathbf{F}_{\text{외력}} = -\mathbf{F}$ )  $\mathbf{r}_1$ 부터  $\mathbf{r}_2$ 까지 이동하면서 한 일  $W$ 는 포텐셜 에너지  $V(\mathbf{r})$ 의 변화량과 같으며 경로에 의존하지 않는다.

$$W = V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) \quad (3.18)$$

<sup>1</sup>구배라고도 하며, 1차원의 경우 접선의 기울기를 나타낸다.

<sup>2</sup> $\nabla$ 는 델(del) 또는 나블라(nabla)라고 읽는다.

<sup>3</sup>임의의 함수  $f(\mathbf{r})$ 에 대해서,  $\nabla f \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$ 이다.

포텐셜 에너지는  $\mathbf{F} = -\nabla V$ 에 의해서 정의되기 때문에, 절대적인 값이 정해지지 않는다.<sup>4</sup> 정의식이 포텐셜 에너지의 절대적인 값을 알려주지 않으므로, 일반적으로는 어떤 기준점에서의 포텐셜 에너지를 포텐셜 에너지의 원점으로 삼는다.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ 에서 포텐셜 에너지의 값을 0이라고 정하면, 포텐셜 에너지  $V(\mathbf{r})$ 은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \Leftrightarrow V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.19)$$

3.1.2절에서 예로 든 마찰력과 중력에 의한 일의 차이는, 그 힘이 보존력이냐 아니냐로부터 결정된다. 마찰력은 위치뿐만 아니라 속도에도 의존<sup>5</sup>하기 때문에 처음에 예로 든 힘중에 세번째에 속하며 이는 보존력이 아니다. 따라서 경로에 따라서 한 일이 바뀔 수 있다. 반면에 중력은 위치의 함수로 나타낼 수 있기 때문에<sup>6</sup>, 중력장은 보존력장이며 따라서 포텐셜 에너지가 정의할 수 있고 이때 한 일은 경로와 상관없이 포텐셜 에너지의 차로만 결정된다. 여기서 가장 쉽게 접할 수 있는 중력에 의한 포텐셜 에너지와 단진동과 같은 조화 포텐셜 에너지를 소개한다.

### 3.2.3 중력 포텐셜 에너지

질량이 각각  $m, M$ 인 두 물체 사이에 작용하는 중력의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.20)$$

이 힘은 위치에만 의존하므로 보존력장이고, 포텐셜 에너지를 정의할 수 있다. 무한 원점  $|\mathbf{r}_0| \rightarrow \infty$ 를 기준으로 하여 포텐셜 에너지를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{mM}{r} \quad (3.21)$$

중력에 의한 포텐셜 에너지는 거리에 반비례한다.

단 지표면 근처에서 지구의 반경  $R$ 에 비해서 매우 작은 높이  $h$ 만 변하는 운동을 고려할 경우  $r = R + h \simeq R$ 로 근사하여,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \simeq -G \frac{M}{R^2} m \mathbf{e}_{\perp} = -mg \mathbf{e}_{\perp}, \quad V \simeq mgh \quad (3.22)$$

와 같이 근사할 수 있다. 여기서  $g = \sqrt{GM/R^2}$ 이고  $\mathbf{e}_{\perp}$ 는 연직 위 방향의 단위 벡터이다. 단, 이 경우에 포텐셜 에너지의 원점은 무한 원점이 아니라  $h=0$ 이 되는 곳이다.

### 3.2.4 조화 포텐셜 에너지

조화 포텐셜 에너지는, 다음과 같은 보존력에 대한 포텐셜 에너지이다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k_x x \mathbf{e}_x - k_y y \mathbf{e}_y - k_z z \mathbf{e}_z = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (3.23)$$

<sup>4</sup>  $g(x) = \frac{d}{dx} G(x)$ 의 관계에 있을 때,  $G(x)$ 는  $g(x)$ 의 부정 적분이기 때문에 임의의 적분 상수를 포함한다.

<sup>5</sup> 마찰력은 속력에는 의존하지 않지만 운동 방향, 즉 속도의 방향에 의존한다.

<sup>6</sup> 상수는 값이 일정한 함수로 볼 수 있다.



즉, 각  $x, y, z$  방향으로 훅의 법칙과 같은 복원력이 작용하는 경우이다. 이 때, 포텐셜 에너지는  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 을 기준으로 하여,

$$V(\mathbf{r}) = - \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} k_x^2 x^2 + \frac{1}{2} k_y^2 y^2 + \frac{1}{2} k_z^2 z^2 \quad (3.24)$$

가 얻어진다.  $k = k_x = k_y = k_z$ 인 경우에는,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}, \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k r^2 \quad (3.25)$$

이 된다. 이처럼 조화 포텐셜 에너지는 변위의 제곱에 비례하는 에너지를 가진다. 조화 진동은 진동을 기술하는 가장 기본적인 방법이기 때문에 조화 포텐셜 에너지는 여러 분야에 응용된다.

### 3.3 역학적 에너지

#### 3.3.1 운동 에너지와 일

앞서 보존력장에 거슬러서 운동할 때의 일을 통해 포텐셜 에너지를 구했다.<sup>7</sup> 여기서는 가속도가 존재할 때 일이 어떤 형태로 나타내어지는지 계산한다. 물체에 알짜힘  $\mathbf{F}_{\text{net}}$ 가 가해지면 가속도  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ 가 생기고 따라서 물체에 일을 하면 물체의 속도  $\mathbf{v}$ 가 변할 수 있다. 이 때 운동 방정식은,

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} \quad (3.26)$$

이고, 따라서 이 힘이 하는 일은,

$$dW = \mathbf{F}_{\text{net}} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot d\mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (3.27)$$

와 같이 쓸 수 있다. 이 때, 속도가  $\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}) \rightarrow \mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ 로 변했다고 하면, 총 일은

$$W = \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m (v_{2x}^2 - v_{1x}^2) + \frac{1}{2} m (v_{2y}^2 - v_{1y}^2) + \frac{1}{2} m (v_{2z}^2 - v_{1z}^2) \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (3.29)$$

가 된다.

여기서 속도  $\mathbf{v}$ 에 대해서 운동 에너지(kinetic energy)를 다음과 같이 정의한다.

■ 운동 에너지    속도  $\mathbf{v}$ 로 운동하는 질점  $m$ 의 운동 에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.30)$$

운동 에너지의 정의로부터,

$$dT = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = dW \quad \Leftrightarrow \quad W = T(\mathbf{v}_2) - T(\mathbf{v}_1) = \Delta T \quad (3.31)$$

<sup>7</sup> 포텐셜 에너지를 정의할 때 질점에 가해진 알짜힘은 0이었다.

가 되고, 우리는 일-에너지 정리(work-energy theorem)로 알려진 다음의 정리를 얻을 수 있다.

■ **일-에너지 정리** 질점에 가해진 **알짜힘**이 한 일은 질점의 운동 에너지의 변화량과 같다.

### 3.3.2 역학적 에너지와 일

운동 에너지와 포텐셜 에너지를 합쳐서 역학적 에너지(mechanical energy)라 부른다.

■ **역학적 에너지** 질점의 운동 에너지를  $T$ , 포텐셜 에너지를  $V$ 라 할 때, 역학적 에너지  $E$ 는 다음과 같다.

$$E = T + V \quad (3.32)$$

만약 보존력장  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  안에서 힘  $\mathbf{F}_e$ 를 가해서 물체가 가속도를 가지고 운동하는 경우 알짜힘은,

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F} \quad (3.33)$$

이다. 이 때  $\mathbf{F}_e$ 가 한 일은,

$$dW = \mathbf{F}_{\text{net}} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dT + dV \quad (3.34)$$

이다. 첫 번째항은 알짜힘에 의한 일로, 일-에너지 정리로부터 운동 에너지의 변화량과 같다. 두 번째 항은 포텐셜 에너지의 정의  $\mathbf{F} = -\nabla V$ 로부터 포텐셜 에너지의 변화량과 같다. 따라서 총 일은

$$W = \Delta T + \Delta V = \Delta E \quad (3.35)$$

와 같다. 이로부터 우리는 다음의 사실을 알 수 있다.<sup>8</sup>

보존력장안에서 질점에 가한 힘이 한 일은 계에 한 일은 질점의 역학적 에너지의 변화량과 같다.

이 결과는 뒤집어서 질점의 역학적 에너지가 변화한다면, 질점으로부터 일을 받아낼 수도 있음을 나타낸다.

### 3.3.3 역학적 에너지 보존 법칙

외부의 힘 없이 보존력  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 에 의해서만 운동하는 경우를 생각해보자. 이 때 운동 방정식은

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\dot{\mathbf{v}} \quad (3.36)$$

이다. 포텐셜 에너지의 정의로부터 우변은  $-\nabla V$ 와 같고, 양변에  $d\mathbf{r}$ 의 내적을 취하면,

$$(\text{우변}) = -\nabla V \cdot d\mathbf{r} = -dV, \quad (\text{좌변}) = m\dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = dT \quad (3.37)$$

가 된다. 따라서,

$$dT + dV = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T + \Delta V = 0$$

<sup>8</sup>이 표현을 일-에너지 정리와 비교해보라. 일-에너지 정리는 알짜힘이 한 일에 대한 정리이고, 여기서에 힘은 보존력장안에서 가한 힘, 즉 알짜힘에서 보존력에 의한 기여를 제외한 힘이다.

임을 알 수 있다. 이는 운동 에너지와 포텐셜 에너지의 총량, 즉 역학적 에너지가 변화하지 않음을 의미하며, 이 결과를 역학적 에너지 보존 법칙(law of conservation of mechanical energy)라 부른다.<sup>9</sup>

■역학적 에너지 보존 법칙 보존력에 의해서 운동하는 물체의 역학적 에너지는 보존된다.

보존력장 안에서 운동하는 물체의 총 역학적 에너지는  $E = T + V$ 이다. 운동 에너지는 0보다 작아질 수 없으므로  $T \geq 0$ 이고, 따라서,

$$T = E - V \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad E \geq V \quad (3.38)$$

가 얻어진다. 따라서 물체의 포텐셜 에너지는 역학적 에너지보다 커질 수 없다. 이것은 포텐셜 에너지가 물체가 존재할 수 있는 곳과 없는 곳 사이의 장벽으로 작용할 수 있다는 것을 의미한다. 포텐셜 에너지는 물체의 존재 유무와 상관없이 보존력장에 의해서 계산될 수 있으므로, 만약 어떤 곳의 포텐셜 에너지가 물체가 가진 총 역학적 에너지보다 크다면 그 곳에는 물체가 존재할 수 없다. 이러한 의미로 종종 포텐셜 에너지는 **포텐셜 장벽(potential barrier)**이라고도 표현된다.

### 3.4 포텐셜 에너지와 안정성

#### 3.4.1 평형점의 종류

포텐셜 에너지  $V$ 속에서 운동하는 물체에는 보존력  $\mathbf{F} = -\nabla V$ 가 작용한다. 문제를 간단하게 하기 위해서 1차원 운동으로 제한하면,

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (3.39)$$

라고 쓸 수 있다. 이 때,  $F(x_0) = 0$ 이라 하자. 그러면  $x = x_0$ 에서는 알짜힘이 0이고  $x_0$ 는 질점에 작용하는 힘이 없는 평형점이다.

한편으로

$$F'(x_0) = \left( \frac{dF}{dx} \right)_{x=x_0} = - \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} \quad (3.40)$$

은 평형점의 안정성(stability)을 결정한다. 힘을  $x \sim x_0$  주변에서 변위의 1차식으로 근사하면,

$$F(x) = F'(x_0)(x - x_0) \quad (3.41)$$

와 같이 쓸 수 있다. 위 식은 평형점에서  $F(x_0) = 0$ 임을 이용한 식이므로, 이하의 내용은 평형점이 아닌 곳에서는 적용되지 않는다.  $F' < 0$ 이면 변위와 힘은 반대 방향이 된다. 이때 평형점으로부터 약간만 어긋나도 변위와 반대 방향으로 힘이 작용하기 때문에 다시 평형점으로 돌아오게 되고, 따라서 이 평형점은 안정하다. 반면에  $F' > 0$ 이면 변위와 힘이 같은 방향이므로 조금만 평형점에서 어긋나도 힘에 의해서 변위 방향으로 더 멀어지게 되는 불안정한 상태가 된다. 한편으로  $F' = 0$ 이면  $F''$ 의 부호를 이용하여 비슷한

<sup>9</sup>보존력이라는 이름은 이러한 역학적 에너지를 보존시키는 성질로부터 비롯되었다.

고찰을 하여 안정성을 살필수 있다. 그러나 임의의  $n$ 계 도함수에대해서  $F^{(n)}(x_0) = 0$ 이라면 어떠한 변위에 대해서도 여전히 알짜힘은 0이 되어 다시 평형 상태가 된다. 이처럼 주어진 변위가 그대로 유지되는 경우를 중립(neutral stability)라고 한다.

이상을 포텐셜 에너지에 대해서 나타내면 다음과 같다.

■ **평형점의 안정성** 포텐셜 에너지  $V$ 의 조건에 따라서 평형점은 다음과 같이 분류된다.

안정한 평형점

$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2} > 0$

불안정한 평형점

$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2} < 0$

중립의 평형점

$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^3V}{dx^3} = \dots = 0$

(3.42)

따라서 안정한 평형점은 포텐셜 에너지가 극소값을 가지는 곳이고, 불안정한 평형점은 극대값을 가지는 곳임을 알 수 있다. 한편, 포텐셜 에너지가 일정한 곳에서는 중립 상태가 된다.

3.4.2 단순 조화 진동

3.2.4절에서 복원력에 의해서 진동하는 물체의 포텐셜 에너지를 구하였다.

$$V = \frac{1}{2} kx^2, \quad F = -\frac{dV}{dx} = -kx \quad (k > 0)$$

(3.43)

이 보존력장 안에서는 역학적 에너지가 보존되므로 그림3.1과같이 변위가 최대일 때 ( $x = x_{\max}$ )  $V = V_{\max}$ 이고  $T = 0$ 이며,  $x = 0$ 일 때  $V = 0$ 이고  $T = V_{\max}$ 가 된다.

그림3.1으로부터  $x = 0$ 에서  $V$ 는 극소값(최소값)을 가지므로 이 점은 안정한 평형점이 된다. 실제로 용수철에 매달린 물체를 평형점에서 밀거나 당기면 용수철에 의해서 다시 원위치로 돌아가려는 힘(복원력)이 작용한다.

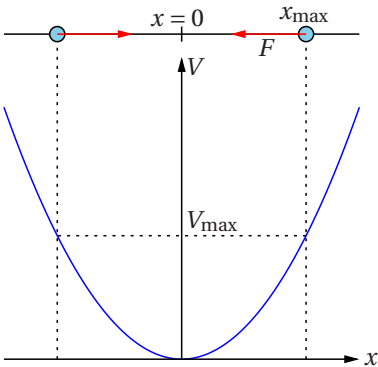


그림 3.1 조화 포텐셜의 운동

3.4.3 회전하는 진자

그림3.2는 한 점을 기준으로 연직면상에서 회전하고 있는 진자를 나타낸 것이다. 진자의 길이를  $L$ 이라 하면 중심각  $\theta$ 일 때 가장 낮은 곳으로부터의 높이는  $L(1 - \cos\theta)$ 이고, 따라서 가장 낮은 곳을 기준으로 한 진자의 포텐셜 에너지는,

$$V = mgL(1 - \cos\theta)$$

(3.44)

가 얻어진다. 이때 포텐셜 에너지의 도함수는 각각

$$\frac{dV}{d\theta} = mgL\sin\theta, \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = mgL\cos\theta$$

(3.45)

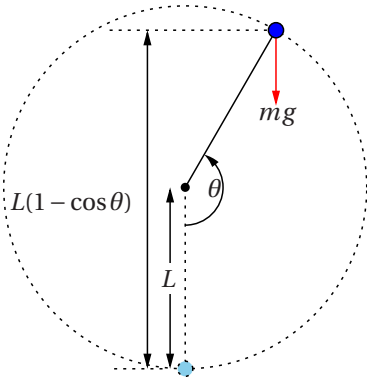


그림 3.2 회전하는 진자

가 된다. 주기함수이므로  $0 \leq \theta < 2\pi$ 의 범위만 고려하면, 1계 도함수는  $\theta = 0, \pi$ 에서 0이 되고,  $V$ 는  $\theta = 0$ 에서 아래로 볼록,  $\theta = \pi$ 에서 위로 볼록인 함수임을 알 수 있다. 따라서 최저점과 최고점 모두 평형점이지만 최저점은 안정한 평형점이고 최고점은 불안정한 평형점이 된다.

### 3.5 비조화 포텐셜에 의한 진동

#### 3.5.1 진동의 주기

조화 포텐셜( $V \propto x^2$ )이 아니어도 안정한 평형점 주변에서는 언제나 변위와 반대 방향의 힘이 작용하기 때문에 그곳에서 유한한 에너지를 가지고 운동하는 물체는 일정한 주기를 가지고 진동을 하게 된다. 포텐셜 에너지가 높은 곳에서 출발한 물체는 포텐셜 에너지가 낮은 곳을 향해서 이동하면서 가속되어 운동 에너지가 증가하고, 극소값에 도달하면 오로지 관성에 의해서 운동하게 된다. 다시 평형점을 지나면 운동 에너지가 감소하고 최초의 포텐셜 에너지와 같은 지점에 도달하면 돌아오게 된다. 이 진동의 주기를 구해보자.

역학적 에너지 보존 법칙으로 부터, 총 역학적 에너지

$$E = T(\dot{x}) + V(x) \quad (3.46)$$

는 상수이다. 여기에 운동에너지

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (3.47)$$

을 대입하여  $\dot{x}$ 에 대해서 정리하면,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}} \quad (3.48)$$

가 얻어지고, 이 미분 방정식은 다음과 같이 변수 분리할 수 있다.

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))/m}} \quad (3.49)$$

위 식을 적분함으로써  $x(t)$ 를 구할 수 있고,<sup>10</sup> 이로부터 주기를 계산하는 것이 가능하다.

#### 3.5.2 단순 조화 진동

가장 간단한 예는 다시 단순 조화 진동의 경우이다. 이 때,

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.50)$$

이고, 최초에  $x = x_0$ 에서 정지한 상태로 운동을 시작하였다면, 총 역학적 에너지는

$$E = \frac{1}{2} kx_0^2 \quad (3.51)$$

<sup>10</sup>해석적으로든 수치적으로든 원리적으로 계산이 가능하다.

이다. 이를 (3.49)에 대입하면 다음과 같다.

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{k(x_0^2 - x^2)/m}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \frac{x}{x_0} + t_0 \quad (3.52)$$

여기서  $t_0$ 는 적분 상수이다.  $\omega = \sqrt{k/m}$ 이라 하고 위 식을  $x$ 에 대해서 정리하면,

$$x = x_0 \sin(\omega(t - t_0)) = x_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (\phi \equiv \omega t_0) \quad (3.53)$$

가 얻어져 단진동의 변위가 얻어지고, 주기  $T$ 는,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.54)$$

가 되어 단순 조화 진동의 주기와 일치하는 것을 알 수 있다.

### 3.5.3 등시적 진동

평형점 주변에서 다음과 같이 변하는 포텐셜을 생각해보자.

$$V = b|x|^n \quad (n \geq 2) \quad (3.55)$$

$n=2$ 인 경우에는 조화 포텐셜과 일치하지만 그보다 큰 차수에 대해서는 조화 포텐셜이 아니다. 총 역학적 에너지를

$$E = b|x_0|^n \quad (3.56)$$

이라 하고 이에 대해서  $x-t$ 관계를 구해보면,

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2(E - b|x|^n)/m}} = \sqrt{\frac{m}{2b}} \frac{dx}{\sqrt{|x_0|^n - |x|^n}} \quad (3.57)$$

$x=0$ 일 때  $t=0$ 이라고 하면  $x=x_0$ 일 때 주기의 1/4만큼의 시간이 필요하므로  $t=T/4$ 이다. 따라서,

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{2b}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{|x_0|^n - |x|^n}} \quad (3.58)$$

이고,  $z = x/x_0$ 라고 하면,

$$T = \sqrt{\frac{8m}{b}} |x_0|^{1-\frac{n}{2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - |z|^n}} \quad (3.59)$$

가 된다. 여기에  $|x_0| = (b/E)^{1/n}$ 을 대입하면 다음 결과를 얻는다.<sup>11</sup>

$$T \propto E^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

따라서, 일반적으로 주기는 역학적 에너지의 총량에 따라서 달라질 수 있다. 예를 들어,  $n=4$ 의 경우,  $T \propto E^{-1/4}$ 가 되어 총 역학적 에너지가 클 수록 주기가 작아지게 된다. 주기가 에너지에 의존하지 않게 되는 유일한 값은  $n=2$ 인 경우이며 이것은 조화 포텐셜에 대응된다. 이처럼 진동의 주기가 에너지에 의존하지 않을 때, 그 진동을 등시적(isochronous)라고 한다. 조화 포텐셜 외에 등시적인 진동을 나타내는 예로는  $V(x) = ax^2 + b/x^2$ 이 있다.

<sup>11</sup>정적분은 다른 변수에 의존하지 않으므로 상수이다.

## 여러가지 진동 운동

## 4.1 연성 진동

## 4.1.1 기준 모드

연성 진동(coupled vibration)이란 복수의 물체가 연결되어 진동하는 운동을 말한다. 여기에서는 그림 4.1처럼 용수철 상수  $k$ 의 용수철에 연결된 질량  $m$ 의 두 질점의 운동을 살펴보기로 한다.

두 질점의 변위를 각각  $x_1, x_2$ 라 하면, 두 변위에 대한 운동 방정식은 다음과 같다.

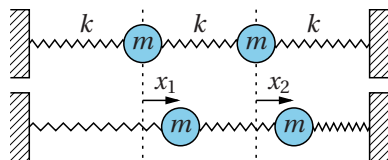


그림 4.1 용수철에 연결된 두 질점의 연성 진동

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1), \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \quad (4.1)$$

두 방정식은 연립 2계 미분 방정식이다. 여기서 두 방정식의 양변을 더하고 빼면,

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2), \quad m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -3k(x_1 - x_2) \quad (4.2)$$

가 되어, 독립된 두 방정식이 되고, 각각의 해는  $k$  또는  $3k$ 의 용수철에 매달려서 조화 진동하는 해가 되므로<sup>1</sup>

$$x_a \equiv x_1 + x_2 = A \cos(\omega_a t - \phi_a), \quad \omega_a = \sqrt{k/m} \quad (4.3)$$

$$x_b \equiv x_1 - x_2 = B \cos(\omega_b t - \phi_b), \quad \omega_b = \sqrt{3k/m} \quad (4.4)$$

가 얻어진다. 여기서 정의한 정의한 두 변수  $x_a = x_1 + x_2$ 와  $x_b = x_1 - x_2$ 를 계의 기준 자리표(normal coordinate)라 한다. 두 질점의 연성 운동에 대한 기준 자리표는 각각 질량 중심( $x_a/2 = (x_1 + x_2)/2$ )과 상대 변위( $x_b = x_1 - x_2$ )에 대응된다.

각 질점의 변위는

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_a + x_b) = \frac{1}{2}A \cos(\omega_a t + \phi_a) + \frac{1}{2}B \cos(\omega_b t + \phi_b) \quad (4.5)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_a - x_b) = \frac{1}{2}A \cos(\omega_a t + \phi_a) - \frac{1}{2}B \cos(\omega_b t + \phi_b) \quad (4.6)$$

가 된다. 만약  $B=0$ 이면  $x_a$ 의 성분만이 존재하고  $x_1 = x_2$ 가 되며,  $A=0$ 이면  $x_b$ 의 성분만이 존재하며  $x_1 = -x_2$ 가 된다. 하나의 성분만이 존재하는 경우는 두 질점은 **같은 진동수로 진동**하며, 동시에 평형점( $x_1 = x_2 = 0$ )을 통과한다. 기준 자리표의 진동을 진동하는 계의 기준 모드(normal mode) 또는 기준 진동이라 하며, 기준 진동의 진동수를 고유 진동수라 한다. 기준 모드의 갯수는 계의 운동을 기술하는 자유도와 같다. 이 경우 계의 운동은 두

<sup>1</sup>2.4.2절 참고

개의 변위에 의해서 기술되므로, 기준 모드도 두 개이다. 여기에서는  $x_a$ 의 진동을 A 모드,  $x_b$ 의 진동을 B 모드라 칭하기로 한다. 연성 진동의 두 기준 모드에서 질점의 변위는 각각,

$$\begin{cases} A \text{ 모드: } x_1 = x_2 & (\text{동위상}) \\ B \text{ 모드: } x_1 = -x_2 & (\text{역위상}) \end{cases} \quad (4.7)$$

이고, A 모드는 두 질점이 같은 방향으로 진동(위상차 0 또는 동위상)하는 경우에 해당하며, B 모드는 두 질점이 반대 방향으로 진동(위상차  $\pi$  또는 역위상)하는 경우를 나타낸다.

#### 4.1.2 맥놀이

$AB \neq 0$ 인 경우에는 연성 진동의 변위들은 두 기준 모드의 합으로 나타내어 진다. 이것이 가능한 이유는 우리가 최초로 푼 미분 방정식이 선형 미분 방정식이기 때문이다. 이처럼 기준이 되는 진동 모드의 합으로 임의의 진동을 나타내는 것을 중첩의 원리(principle of superposition)이라 한다.

$A = B$ 일 때, 두 기준 모드의 진폭은 같아 진다. 이 때  $x_1$ 은 삼각함수 공식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos\left(\frac{\omega_a - \omega_b}{2}t + \frac{\phi_a - \phi_b}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2}t + \frac{\phi_a + \phi_b}{2}\right) \\ &= A \cos(\omega_{\text{mod}}t + \phi_{\text{mod}}) \cos(\omega_{\text{avg}}t + \phi_{\text{avg}}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

각 상수는 다음과 같이 정의되어 있다.

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{\omega_a + \omega_b}{2}, \quad \omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_a - \omega_b}{2}, \quad \phi_{\text{avg}} = \frac{\phi_a + \phi_b}{2}, \quad \phi_{\text{mod}} = \frac{\phi_a - \phi_b}{2} \quad (4.9)$$

$\omega_{\text{avg}}$ 는 두 기준 모드의 평균 각진동수이고,  $\omega_{\text{mod}}$ 는 변조 각진동수(modulation angular frequency)라 불린다.  $\phi_{\text{mod}}$ 와  $\phi_{\text{avg}}$ 는 상수로 이하의 설명에 영향을 미치지 않으므로 생략(또는  $\phi_a = \phi_b = 0$ 인 경우를 가정)하기로 한다.

$\omega_{\text{mod}} < \omega_{\text{avg}}$ 이므로  $\cos\omega_{\text{mod}}t$ 의 진동 안에는  $\cos\omega_{\text{avg}}t$ 의 진동이 여러번 포함될 수 있다. 따라서  $x_1$ 의 운동은 각진동수  $\omega_{\text{avg}}$ 의 진동이 다음과 같이 시간에 따라 진폭이 변화하는(변조된) 운동이 된다.

##### ■ 맥놀이의 진폭 변조

$$A_{\text{mod}} = A \cos\omega_{\text{mod}}t = A \cos\frac{\omega_a - \omega_b}{2}t \quad (4.10)$$

에 특히  $\omega_a \approx \omega_b$ 인 경우(동시에  $\omega_a > \omega_b$ ),  $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{avg}}$ 이고, 빠른 진동( $\omega_{\text{avg}}$ )의 진폭이 매우 느리게 주기적으로 변조( $\omega_{\text{mod}}$ )된다. 이처럼 진동수가 비슷한 두 진동이 중첩되어 주기적으로 진폭이 변화하는 현상을 맥놀이(beat)라 한다.

그림 4.2는  $\omega_a/\omega_b = 10/9$ 일 때의 맥놀이를 나타낸 것이다. 맥놀이의 주기  $T_{\text{beat}}$ 는 진폭 변조 크기  $|A_{\text{mod}}|$ 의 주기  $T_{\text{mod}}$ 로 정의된다.  $A_{\text{mod}}$ 의 주기는  $T_{\text{mod}} = 2\pi/\omega_{\text{mod}}$ 이므로 맥놀이의 주기는 그 절반이고, 맥놀이 진동수(beat frequency)는 변조 진동수의 두배가 된다.

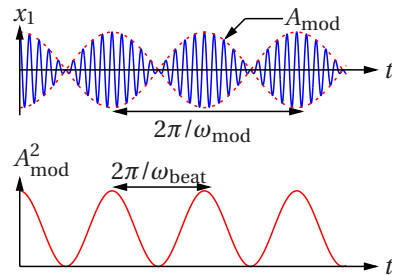


그림 4.2 맥놀이의 진폭 변조



### ■ 맥놀이의 주기와 진동수

$$T_{\text{beat}} = \frac{T_{\text{mod}}}{2} = \frac{\pi}{\omega_{\text{mod}}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{beat}}} \Leftrightarrow \omega_{\text{beat}} = 2\omega_{\text{mod}} \quad (4.11)$$

연성 진동의 문제에서 초기 조건을

$$x_1 = A, \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad (4.12)$$

와 같이 설정하면,

$$x_1 = \frac{1}{2} A \cos \omega_a t + \frac{1}{2} A \cos \omega_b t = A \cos \omega_{\text{mod}} t \cos \omega_{\text{avg}} t \quad (4.13)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} A \cos \omega_a t - \frac{1}{2} A \cos \omega_b t = A \sin \omega_{\text{mod}} t \sin \omega_{\text{avg}} t \quad (4.14)$$

이 얻어진다. 두 질점의 변위는 변조 진동과 평균 진동이 모두 위상이  $\pi/2$  만큼 어긋나 있다. 특히 진폭의 제곱은 단진동의 에너지에 비례하므로,  $x_1$ 의 진폭 변조가 최소 ( $A \cos \omega_{\text{mod}} t = 0$ )일 때  $x_2$ 의 진폭 변조는 최대가 되며 따라서 이 때 계의 에너지는 두 번째 질점에 집중되어 있다. 반대로  $x_2$ 의 진폭 변조가 최소 ( $A \sin \omega_{\text{mod}} t = 0$ )일 때  $x_1$ 의 진폭 변조가 최대이므로 이 때는 첫 번째 질점에 에너지가 집중되어 있다. 두 질점은 진폭 변조에 따라서 에너지를 주고 받으며, 에너지는  $A_{\text{mod}}^2$ 에 비례하므로, 두 질점 사이에서 에너지가 이동하는 주기는 맥놀이 주기와 같다.

**■ 맥놀이의 에너지** 맥놀이의 에너지는  $A_{\text{mod}}^2$ 에 비례하여 진동한다. 연성 진동의 맥놀이에서 역학적 에너지는 두 질점 사이를 왕복한다.

#### 4.1.3 행렬에 의한 일반적인 풀이

기준 모드를 찾기 위한 더 일반적인 방법으로 행렬을 이용할 수 있다. 문제를 더 일반화하여 질점의 질량(왼쪽부터  $m_1, m_2$ )과 용수철의 용수철 상수(왼쪽부터  $k_1, k_2, k_3$ )가 모두 다른 경우에 대해서 풀어보기로 한다. 이 때 미분 방정식은 다음과 같다.

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 \quad (4.15)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 \quad (4.16)$$

이를 행렬을 이용하여 나타내면,

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

가 된다. 여기서,

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

라고 하면, 연립 미분 방정식은 다음의 행렬에 대한 미분 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$M \ddot{x} = -Kx \quad (4.19)$$

위 식에서  $\mathbf{K}$ 는 대각 행렬( $K_{12} = K_{21}$ )임에 주의하라. 이는 우연이 아니라 뉴턴의 제3법칙이 반영된 것이다.  $\mathbf{K}$ 의 비대각 성분은 두 질점 사이에 작용하는 힘을 나타내기 때문에 작용 반작용의 법칙으로부터 반드시 마주보는 비대각 성분은 일치해야 한다.

기준 모드에서 두 질점은 같은 진동수로 진동하므로, 기준 모드의 진동수를  $\omega$ 라고 하면 우리는  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$ 라는 형태의 해를 구하면 된다. 여기서  $\mathbf{x}_0$ 는 시간에 의존하지 않는 상수 벡터이다. (4.19)에  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$ 를 대입하면,

$$(i\omega)^2 \mathbf{M} \mathbf{x} = -\mathbf{K} \mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{x} = 0 \quad (4.20)$$

이 되고, 이 방정식이 자명하지 않은 해( $\mathbf{x} = 0$ 이외의 해)를 가지기 위해서는  $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ 의 행렬식이 0이어야 한다.

■ 고유 진동수 연성 진동의 고유 진동수  $\omega$ 는 다음의 방정식으로 주어진다.

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4.21)$$

위 방정식을 정리하면,

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} \quad (4.22)$$

$$= (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0 \quad (4.23)$$

가 되어, 다음과 같은  $\omega^2$ 에 대한 2차 방정식이 된다.

$$m_1 m_2 \omega^4 - [m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)]\omega^2 + (k_2 + k_3)(k_1 + k_2) - k_2^2 = 0 \quad (4.24)$$

이로부터  $\omega^2$ 은,

$$\omega^2 = \frac{1}{2m_1 m_2} \left[ m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) \pm \sqrt{[m_1(k_2 + k_3) - m_2(k_1 + k_2)]^2 + 4m_1 m_2 k_2^2} \right]$$

가 되고, 이로부터  $\omega > 0$ 인 해는,

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{2m_1 m_2} \left[ m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) - \sqrt{[m_1(k_2 + k_3) - m_2(k_1 + k_2)]^2 + 4m_1 m_2 k_2^2} \right]}$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1}{2m_1 m_2} \left[ m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) + \sqrt{[m_1(k_2 + k_3) - m_2(k_1 + k_2)]^2 + 4m_1 m_2 k_2^2} \right]}$$

의 두개가 얻어지고, 이들이 기준 진동의 각진동수가 된다.

각진동수가 얻어졌으므로, 기준 자리표를 구할 수 있다. (4.20)으로부터,

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{k_2 + k_3 - m_2 \omega^2}{k_2} x_2 \quad (4.25)$$

이고, 따라서,

$$\mathbf{x}_a = A \begin{pmatrix} 1 \\ r(\omega_a) \end{pmatrix} e^{-i\omega_a t}, \quad \mathbf{x}_b = B \begin{pmatrix} 1 \\ r(\omega_b) \end{pmatrix} e^{-i\omega_b t}; \quad r(\omega) = \frac{k_2 + k_3 - m_2 \omega^2}{k_2} \quad (4.26)$$

가 얻어진다. 이 때,

$$r(\omega_a) = \frac{1}{2k_2} \left[ (k_2 + k_3) - \frac{m_2}{m_1} (k_1 + k_2) + \sqrt{\left[ (k_2 + k_3) - \frac{m_2}{m_1} (k_1 + k_2) \right]^2 + 4 \frac{m_2}{m_1} k_2^2} \right] > 0$$

$$r(\omega_b) = \frac{1}{2k_2} \left[ (k_2 + k_3) - \frac{m_2}{m_1} (k_1 + k_2) - \sqrt{\left[ (k_2 + k_3) - \frac{m_2}{m_1} (k_1 + k_2) \right]^2 + 4 \frac{m_2}{m_1} k_2^2} \right] < 0$$

이므로  $\omega_a$ 의 모드는 두 질점이 동위상으로 진동하는 기준 모드이고  $\omega_b$ 의 모드는 역위상으로 진동하는 기준 모드임을 알 수 있다.

■ **기준 모드** 두 질점의 연성 진동은 일반적으로 동위상과 역위상의 두가지 기준 모드를 가진다.

위 결과에

$$m_1 = m_2 = m, \quad k_1 = k_2 = k_3 = k \quad (4.27)$$

를 대입하면,

$$\omega^2 = \frac{2k \pm k}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}, & r(\omega_a) = 1 \\ \omega_b = \sqrt{\frac{3k}{m}}, & r(\omega_b) = -1 \end{cases} \quad (4.28)$$

이 되어 다음과 같은 두 기준 모드를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \quad (4.29)$$

위 식의 실수부만 취하면 4.1.1절의 결과와 일치함을 확인할 수 있다.

## 4.2 감쇠 진동

### 4.2.1 미분 방정식

다음 운동 방정식은 용수철 상수  $k$ 의 용수철에 의한 단순 조화 진동을 나타낸다.

$$m\ddot{x} = -kx \quad (4.30)$$

공기저항을 고려하는 경우나, 점성이 있는 유체 속에서 진동하는 경우, 여기에 속도에 비례하는 항력  $f = -\gamma'\dot{x}$ 가 추가되어,

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma'\dot{x} \quad (4.31)$$

가 되고,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 와  $\gamma = \gamma'/m$ 을 대입하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

■ **감쇠 조화 진동의 미분 방정식**

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.32)$$

여기서  $\gamma$ 는 진동에 대한 저항의 크기를 나타내며,  $\omega_0$ 는  $\gamma=0$ , 즉 조화 진동일 때의 각진동수를 나타낸다. 비보존력이 존재하므로 이 경우 총 에너지는 보존되지 않고, 총 역학적 에너지가 줄어들어 진동 폭이 점점 줄어든다. 이처럼 항력이 존재하는 진동을 **감쇠 진동(damped oscillation)**이라 부르며, 특히 이 경우에는  $\gamma=0$ 일 때의 진동이 조화 진동이므로 감쇠 조화 진동(damped harmonic oscillation)이라 불린다. 여기에서는 특별히 언급하지 않는 한 감쇠 진동은 감쇠 조화 진동을 나타내기로 한다.

(4.32)는 상수 계수의 2계 선형 미분 방정식이어서 간단히 풀 수 있다. 여기에서는 다음과 같은 일반해를 가정하여 대입법으로 풀기로 한다.<sup>2</sup>

#### ■ 감쇠 진동의 일반해

$$x = A \cos(\omega t + \phi) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (A \neq 0) \quad (4.33)$$

위에서 가정한 일반해를 미분 방정식에 대입하면,

$$\omega \left( \frac{2}{\tau} - \gamma \right) \sin(\omega t + \phi) - \left( \omega^2 - \frac{1}{\tau^2} + \frac{\gamma}{\tau} - \omega_0^2 \right) \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad (4.34)$$

가 얻어진다. 위 식은 임의의  $t$ 에 대해서 성립해야 하므로 두 항의 계수가 0이 되어야 한다. 따라서,

$$\omega \left( \frac{2}{\tau} - \gamma \right) = 0, \quad \omega^2 - \frac{1}{\tau^2} + \frac{\gamma}{\tau} - \omega_0^2 = 0 \quad (4.35)$$

가 얻어지고, 다음 두가지 경우로 나뉘어서 생각할 수 있다.

1.  $\gamma = 1/\tau$ 일 때:  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$ 이고,  $x$ 가 실수이기 위해서는  $\gamma < \omega_0$ 이어야 한다.
2.  $\omega = 0$ 일 때:  $1/\tau = \gamma/2 \pm \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$ 이고,  $x$ 가 실수이기 위해서  $\gamma > \omega_0$ 이어야 한다.

여기서 구해지는 것은  $\omega$ 와  $\tau$ 뿐이다. 2계 미분 방정식의 일반해에는 2개의 임의 상수가 포함되어야 하며  $A$ 와  $\phi$ 가 임의 상수이다. 이제 각 경우에 대해서 해의 구체적인 형태를 살펴보자.

#### 4.2.2 감쇠 진동의 종류

**미급 감쇠**  $\gamma/2 < \omega_0$ 의 경우, 일반해는 다음과 같다.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) e^{-\gamma t}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (4.36)$$

$\omega < 0$ 인 경우는  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $\phi \rightarrow -\phi$ 로 하면 동일한 결과가 얻어지므로 임의 상수  $\phi$ 에  $\omega$ 의 부호 의존성을 밀어넣을 수 있다. 따라서 여기에서는  $\omega > 0$ 인 경우만을 고려하기로 한다. 이 때 속도는

$$\dot{x}(t) = -A \left[ \omega \sin(\omega t + \phi) + \frac{\gamma}{2} \cos(\omega t + \phi) \right] e^{-\frac{\gamma}{2} t} \quad (4.37)$$

이다.

<sup>2</sup>  $A=0$ 이면  $x=0$ 이 되어 미분 방정식을 만족하지만 이것은 전혀 움직임이 없는 상태이므로 물리적으로 의미가 없다.

두 임의 상수  $A$  및  $\phi$ 는 초기 조건으로부터 결정된다. 초기 조건으로  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ 가 주어지면,

$$x(0) = A \cos \phi = x_0 \quad (4.38)$$

$$\dot{x}(0) = -A \left( \omega \sin \phi + \frac{\gamma}{2} \cos \phi \right) = v_0 \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow A \sin \phi = - \left( \frac{\gamma x_0}{2} + v_0 \right) / \omega \quad (4.40)$$

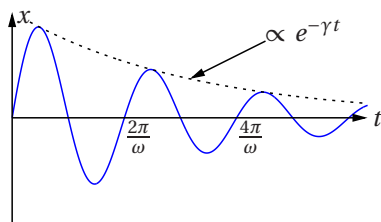


그림 4.3 미급 감쇠의 예

가 얻어진다. 이 결과를

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) e^{-\frac{\gamma}{2}t} = (A \cos \phi \cos \omega t - A \sin \phi \sin \omega t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (4.41)$$

에 대입하면,

$$x(t) = \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\gamma x_0 / 2 + v_0}{\omega} \sin \omega t \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (4.42)$$

가 구해진다. 식이 약간 복잡해 보이지만, 예를 들어,  $x_0 = 0$ 인 경우에는,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega t \quad (4.43)$$

가 되어 그림 4.3처럼 진폭이 줄어들면서 진동하는 모습을 나타낸다. 초기 조건에 따라서 처음의 진폭이나 위상은 다소 달라질 수 있으나 이 경우 공통되게 **진동과 함께 지수함수적으로 진폭이 감소**하는 운동을 하며, 이러한 운동을 가벼운 감쇠 진동(lightly-damped oscillation) 또는 **미급 감쇠(under-damping)**이라 한다. 이 진동의 주기는,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}} \quad (4.44)$$

가 되어 단순 조화 진동의 주기  $2\pi/\omega_0$ 보다 길어진다. 진폭은 한 주기당  $e^{-\gamma T/2}$ 의 배율로 작아지는데, 여기서  $\gamma \ll \omega (< \omega_0)$ 의 극한에서는 감소율을  $e^{-\gamma T/2} \sim 1$ 이라고 근사할 수 있고, 이는 항력이 작으면 감쇠 조화 진동이 단순 조화 진동에 접근함을 나타낸다.

**임계 감쇠** 미급 감쇠의 해 (4.42)에서  $\gamma/2 \rightarrow \omega_0$ 의 극한을 생각해 보자. (4.44)로부터, 이 경우 주기가 무한히 길어짐을 알 수 있고, 따라서 전혀 **진동하지 않는** 해가 얻어진다. 이때의 해를 **임계 감쇠(critical damping)**이라고 하며,  $\gamma/2 \rightarrow \omega_0$ 일 때,  $\omega \rightarrow 0$ 이 되고, 따라서 (4.42)로부터 이 경우의 해는,

$$x(t) = [x_0 + (\gamma x_0 / 2 + v_0)t] e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (4.45)$$

가 된다.

마찬가지로, 간단한 경우의 예로  $x_0 = 0$ 인 경우,

$$x(t) = v_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (4.46)$$

가 되어 그림 4.4와 같은 운동을 하게 된다.

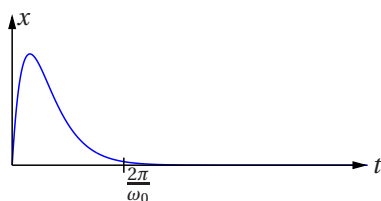


그림 4.4 임계 감쇠의 예

**과도 감쇠** 마지막으로  $\gamma/2 > \omega_0$  인 경우에는  $\omega = 0$  이고  $1/\tau = \gamma/2 \pm \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$  이므로, 해는 다음과 같다.

$$x = A \cos \phi e^{-\frac{t}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2})} \quad (4.47)$$

이 해는 두개의 선형 독립인 해를 포함하고 있고 미분 방정식 (4.32)는 선형 미분 방정식이므로, 일반해는 이들의 선형 결합으로 나타내어진다.

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}), \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}) \quad (4.48)$$

초기 조건  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ 를 대입하여 임의 상수를 결정하면,

$$A = -\frac{v_0 + \frac{x_0}{\tau_2}}{\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}}, \quad B = \frac{\frac{x_0}{\tau_1} + v_0}{\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}} \quad (4.49)$$

가 되어 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}} \left[ \left( \frac{x_0}{\tau_1} + v_0 \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \left( v_0 + \frac{x_0}{\tau_2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right] \quad (4.50)$$

이 해는 무거운 감쇠(heavy damping) 또는 **과도 감쇠(over damping)**이라 불리며, **진동하지 않는 해**이다. 역시 간단한 예로  $x_0 = 0$ 인 경우에는,

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}} \left( e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (4.51)$$

가 되며 그림 4.5와 같은 결과가 얻어진다.

### 4.2.3 에너지 손실

감쇠 진동의 세가지 해 모두 진폭이 감소한다는 공통점을 가지고 있다. 이들의 운동을 비교하기 쉽게, 정지된 상태로 최초에 같은 변위  $x_0$ 를 주었을 때에 대해서 비교해보자.

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.52)$$

그림 4.6은 세가지 해의 변위와 에너지를 나타낸 것이다. 진동하는 해는  $\gamma/2 < \omega_0$  일 때, 즉 항력에 의한 에너지 손실이 작을 때에만 나타난다.

흥미로운 것은 **임계 감쇠( $\gamma/\omega_0 = 2$ )일 때 가장 감쇠가 빠르다**는 것이다. 항력이 클수록 에너지 손실이 크다고 생각하기 쉽지만,  $\gamma$ 가 클수록 오히려 에너지

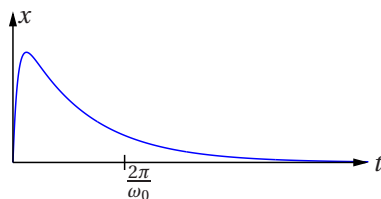


그림 4.5 과도 감쇠의 예

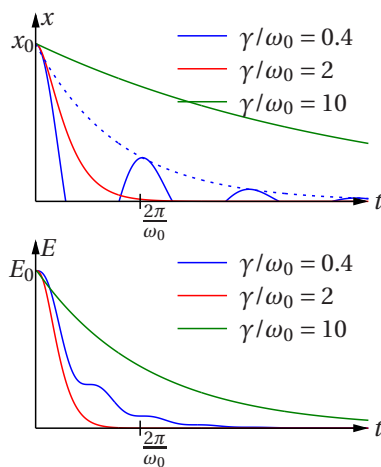


그림 4.6  $\gamma$ 에 따른 해의 분류

손실은 적어진다. 감쇠 진동자의 역학적 에너지는 조화 진동자와 같은 식으로 나타내어 진다.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad (4.53)$$

위 식을 시간으로 미분하면,

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + m \omega_0^2 x \dot{x} = m \dot{x} (\ddot{x} + \omega_0^2 x) \quad (4.54)$$

가 되고, 여기에 감쇠 진동의 운동 방정식 (4.32)를 대입하면 다음을 얻을 수 있다.<sup>3</sup>

#### ■ 감쇠 진동의 에너지 손실

$$\frac{dE}{dt} = -m\gamma \dot{x}^2 = -\gamma' \dot{x}^2 \quad (4.55)$$

지금 관심있는 것은  $\gamma$ 가 커질 때 에너지 손실 비율이므로, 과도 감쇠의 속도를 구해보기로 한다. 일반해 (4.48)로부터 과도 감쇠의 속도는,

$$\dot{x}(t) = -\frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{B}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (4.56)$$

가 되고, 이는 속도가 지수함수적으로 감소함을 나타낸다. 따라서 과도 감쇠에서  $\gamma$ 가 커졌을 때  $\gamma$ 의 증가보다  $\dot{x}^2$ 의 감소가 훨씬 크기 때문에  $|dE/dt|$ 는 오히려 작아지게 된다.<sup>4</sup> 이러한 결과나 나오는 이유는, 에너지 손실을 가져오는 항력이 속도에 의존하기 때문이다. 항력이 클수록 초기의 운동에너지가 감소하여 속력이 급격히 떨어지고, 이는 항력을 약하게 하는 결과가 되어 오히려 에너지 손실의 비율은 줄어들게 되는 것이다.

진동하는 해인 미급 감쇠의 경우, 그림(4.6)로부터 알 수 있듯이, 계단과 같은 형태로 에너지가 감소한다. 미급 감쇠 진동의 일반해 (4.42)로부터 미급 감쇠 진동의 속도를 구해보면,

$$\dot{x}(t) = -A[\omega \sin(\omega t + \phi) + \gamma \cos(\omega t + \phi)] e^{-\frac{\gamma}{2}t} = -AB \sin(\omega t + \phi + \psi) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (4.57)$$

와 같이 쓸 수 있다. 단, 이때

$$B = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2/4}, \quad \tan \psi = \frac{\gamma}{2\omega} \quad (4.58)$$

이다. 따라서 속도도 변위와 같이 진동하면서 감쇠하게 되고, 중간 중간  $\dot{x} = 0$ 이 되는 점이 존재하게 된다.  $\dot{x} = 0$ 일 때 항력도 0이되어 그 시간에는 에너지 손실이 없어져 총 역학적 에너지에는 반주기( $\pi/\omega$ )마다 변곡점이 존재하게 된다.

$\gamma \ll \omega_0$ 인 경우(very lightly-damped oscillation)에는

$$\omega \simeq \omega_0, \quad B \simeq \omega \simeq \omega_0, \quad \tan \psi \simeq 0 \Leftrightarrow \psi \simeq 0 \quad (4.59)$$

<sup>3</sup>단순 조화 진동은 에너지가 보존되므로 단위 시간당 에너지 손실은 항력에 의한 일률과 같다.

<sup>4</sup> $\gamma$ 가 선형으로 증가할 때  $\dot{x}$ 는 지수 함수적으로 감소한다.

와 같이 근사할 수 있고, 이 경우 속도는,

$$\dot{x}(t) \simeq -A\omega_0 \sin(\omega t + \phi) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (4.60)$$

가 얻어진다. 따라서 총 에너지는,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \simeq \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} \equiv E_0 e^{-\gamma t} \quad (4.61)$$

와 같은 형태로 나타내어 지고, 에너지 손실은 다음과 같다.

#### ■ 미급 감쇠의 에너지 손실

$$\frac{dE}{dt} \approx -\gamma E_0 e^{-\gamma t} \quad (4.62)$$

여기서  $E_0$ 는  $t=0$ 일 때의 총 에너지를 나타낸다.

#### 4.2.4 Q 인자

감쇠 진동은 다음의 식으로 정의된 값으로 에너지 손실 정도를 나타낼 수 있다.

■ Q 인자 품질 인자(quality factor) 또는 Q 인자(Q factor)를 다음 식으로 정의한다.

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \rightarrow \begin{cases} Q > \frac{1}{2} & \rightarrow \text{미급 감쇠 진동} \\ Q = \frac{1}{2} & \rightarrow \text{임계 감쇠} \\ Q < \frac{1}{2} & \rightarrow \text{과도 감쇠} \end{cases} \quad (4.63)$$

Q 인자는 미급 감쇠의 운동을 기술하는데 특히 유용하다.  $\gamma \ll \omega_0$  일 때, (4.62)로부터  $\gamma$ 는,

$$\gamma = \frac{1}{E_0 e^{-\gamma t}} \left| \frac{dE}{dt} \right| = \frac{1}{E} \left| \frac{dE}{dt} \right| \quad (4.64)$$

와 같이 나타낼 수 있고, 이 때 Q 인자는 다음과 같이 쓸 수 있다.

#### ■ 미급 감쇠의 Q 인자 1

$$Q \approx \frac{\omega_0 E}{|dE/dt|} = \frac{\omega_0 \times (\text{저장된 에너지})}{(\text{단위 시간당 손실되는 에너지})} \quad (4.65)$$

한편,  $\gamma$ 가 충분히 작으면 (4.62)의  $e^{-2\gamma t}$ 에 의한 감쇠는 매우 작아지고, 따라서 한주기  $2\pi/\omega \approx 2\pi/\omega_0$  동안 손실되는 에너지는  $(2\pi/\omega_0)|dE/dt|$ 와 같이 나타낼 수 있다. 이를 이용하여 Q 인자를 다음과 같이 해석하는 것도 가능하다.

#### ■ 미급 감쇠의 Q 인자 2

$$Q \approx \frac{2\pi E}{(2\pi/\omega_0)|dE/dt|} = \frac{2\pi \times (\text{저장된 에너지})}{(\text{한 주기당 손실되는 에너지})} \quad (4.66)$$

이처럼 미급 감쇠의 경우 에너지 손실이 적을 수록 Q 인자는 커진다. 아날로그 시계등에 쓰이는 석영 진동자의 Q 인자는  $10^4$ 에서  $10^6$  정도의 값을 가진다.



$Q$  인자는 진폭의 감소에도 관여한다. (4.42)로부터 미급 감쇠의 진폭은  $Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}$ 와 같이 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 따라서 한 주기마다 감소하는 비율은  $e^{-\delta}$ 와 같은 형태로 나타낼 수 있으며, 이 때 진폭은 한번 진동할 때 마다 다음과 같이 변해간다

$$A, Ae^{-\delta}, Ae^{-2\delta}, Ae^{-3\delta}, \dots \quad (4.67)$$

이 때  $\delta$ 를 미급 감쇠의 감쇠율(decayment)라 한다.  $\gamma \ll \omega_0$  일 때, 한 주기의 진폭비는,

$$\frac{Ae^{-\frac{\gamma}{2}(t+2\pi/\omega_0)}}{Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}} = e^{-\pi\gamma/\omega_0} \quad (4.68)$$

이고, 따라서 감쇠율은 다음과 같이  $Q$  인자로 나타낼 수 있다.

#### ■미급 감쇠의 감쇠율

$$\delta = \frac{\pi\gamma}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q} \quad (4.69)$$

### 4.3 강제 진동

강제 진동(forced oscillation 또는 driven oscillation)은 진동자에 주기적인 외부힘이 가해지고 있는 경우를 나타낸다. 이 때의 운동 방정식은,

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma'\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad (4.70)$$

와 같은 형태로 나타낼 수 있다. 양변을  $m$ 으로 나누어 정리하면 다음과 같다.

#### ■강제 진동의 미분 방정식

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0 x = P \cos \omega t \quad (4.71)$$

와 같이 쓸 수 있다. 비단 역학적인 문제 뿐만이 아니라, 이러한 형태의 미분 방정식은 여러 곳에서 나타난다. 예를 들어 저항, 코일, 축전기가 연결된  $RLC$  교류 회로에서 전하의 이동을 나타내는 미분 방정식

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \cos \omega t \quad (4.72)$$

도 강제 진동의 미분 방정식을 따른다.

#### 4.3.1 정상 상태와 과도 상태

**정상 상태** 강제 진동은 최초에는 감쇠 진동과 비슷하게 진동하지만 충분히 시간이 지나면 외부의 힘(driving force; 구동력)의 주기로 진동하게 되고, 따라서 정상 상태(steady state)에서는 다음과 같이 구동력의 각진동수  $\omega$ 로 진동하는 해가 된다.

$$x = x_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (4.73)$$

정상 상태의 진동수는 구동력의 진동수로 주어지기 때문에, 이 해에서 관심을 갖게 되는 것은 진폭  $x_0$ 이다. 진폭  $x_0$ 는 미분 방정식을 통해서 결정되기 때문에 진폭은 구동력에

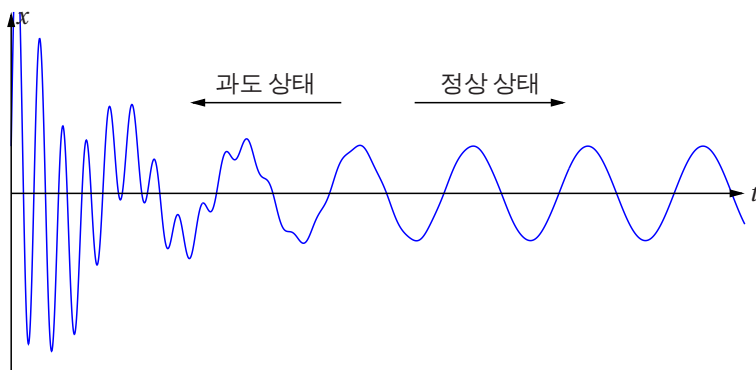


그림 4.7 강제 진동의 시간 발전

의존한다. 따라서 이 미분 방정식을 푸는 것은 입력(input)  $P$ 에 대한 출력(output) 또는 응답(response)  $x_0$ 를 구하는 것이 된다. 여기에서는 더 간단하게 풀기 위해 복소수를 이용한 풀이를 보이기로 한다. 복소수  $\tilde{x}$ 를 다음 미분 방정식의 해라고 하자.

#### ■ 강제 진동의 복소수 미분 방정식

$$\ddot{\tilde{x}} + \gamma \dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = P e^{-i\omega t} \quad (4.74)$$

위 방정식의 실수부만을 취하면 본래의 강제 진동의 미분 방정식과 일치한다.<sup>5</sup> 따라서 위 미분 방정식의 해의 실수부  $\text{Re}(\tilde{x})$ 가 강제 진동의 해가 된다.

정상 상태의 복소수 해를,

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t} \quad (4.75)$$

와 같이 쓰기로 하고, 미분 방정식(4.74)에 대입하면,

$$-\omega^2 \tilde{x} - i\gamma\omega \tilde{x} + \omega_0^2 \tilde{x} = P e^{-i\omega t} \quad (4.76)$$

가 되고, 따라서 다음의 해가 구해진다.

#### ■ 강제 진동 정상 상태의 복소수 해

$$\tilde{x} = \frac{P e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (4.77)$$

**과도 상태** 이 장에서는 강제 진동에 대해 정상 상태 위주로 다룰 예정이나, 일반해에 대해서도 간단히 소개한다. 정상 상태의 해는 미분 방정식 (4.74)를 만족하는 특수해이다.<sup>6</sup> 우리가 구한 특수해를  $\tilde{X}$ 라 하면, (4.74)의 일반해는 다음과 같은 형태로 주어진다.<sup>7</sup>

$$\tilde{x} = A e^{-i\Omega_1 t} + B e^{-i\Omega_2 t} + \tilde{X}(t) \quad (4.78)$$

<sup>5</sup> 실수부를 취하면 우변은 오일러 공식으로부터  $\text{Re}(e^{-i\omega t}) = \cos\omega t$ 이다.

<sup>6</sup> 임의의 상수를 포함하지 않기 때문에 일반해가 될 수 없다.

<sup>7</sup> 2개의 임의의 상수  $A, B$ 를 포함하고 대입해보면 미분 방정식을 만족하므로 일반해이다.

이 때,  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 는,

$$\Omega^2 + i\gamma\Omega - \omega_0^2 = 0 \quad (4.79)$$

을 만족하는 두 해이고,  $A, B$ 는 임의 상수이다. 정상 상태의 특수해는  $A = B = 0$ 인 경우에 해당한다.

(4.79)의 2차 방정식을 풀면

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( -i\gamma \pm \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \quad (4.80)$$

을 얻을 수 있고, 따라서 일반해의 지수 함수 부분은,

$$e^{-i\Omega t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\pm \frac{1}{2}i\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}t} \quad (4.81)$$

가 된다.  $\gamma/2$ 와  $\omega_0$ 의 대소 관계에 따라서 위 지수 함수는 진동하는 해를 포함하기도 안하기도 할 것이다(자세한 것은 감쇠 진동 참고). 그러나 공통적으로 포함된  $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ 는 진폭의 지수 함수적 감쇠를 나타내기 때문에,  $\gamma t \gg 1$ 이 되면  $e^{-i\Omega t}$  부분은 0에 근접하고 정상 상태가 된다. 이 때, 정상 상태가 되기 이전의 초기의 진동을 과도 상태(transient state)라 부른다. 그림 4.7은  $\omega_0 > \gamma/2$ 인 경우(미급 감쇠 진동)에 대해서 강제 진동의 해를  $t=0$ 부터 나타낸 것이다. 처음에는 감쇠 진동에 정상 상태의 해가 중첩되어 불규칙하게 진동하는 과도 상태가 나타나지만 충분히 시간이 지나면 정상 상태의 해만이 남는다.

### 4.3.2 응답 함수

강제 진동 정상 상태의 진동수는 입력 진동수로 정해지는 값이므로 우리는 진동의 진폭에 주목하기로 한다. 여기서 입력에 대한 응답 비를 구하기 위해서, 입력  $P$ 에 대한 응답  $\tilde{x}_0$ 의 비를  $\chi = \tilde{x}_0/P$ 로 정의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

#### ■ 강제 진동의 응답 함수

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (4.82)$$

$\chi(\omega)$ 는 주어진 입력 진동수에 대해 출력을 계산할 수 있는 함수로 **응답 함수(response function)**라 한다.  $\chi$ 의 크기  $|\chi|$ 와 편각  $\phi$ 는,

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \quad \tan \phi(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.83)$$

로 주어진다. 응답 함수로부터 복소수 진폭  $\tilde{x}_0$ 를 계산하면,

$$\tilde{x}_0(\omega) = P\chi(\omega) = P|\chi(\omega)|e^{i\phi(\omega)} \quad (4.84)$$

와 같이 쓸 수 있고, 복소수 해는,

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t} = P\chi e^{-i\omega t} = P|\chi(\omega)|e^{-i(\omega t - \phi)} \quad (4.85)$$

가 된다. 따라서 강제 진동의 실제 물리적 변위는,

$$x = \text{Re}(\tilde{x}) = \text{Re}[\tilde{x}_0(\omega)e^{-i\omega t}] = P|\chi(\omega)|\cos(\omega t - \phi(\omega)) \quad (4.86)$$

가 된다.

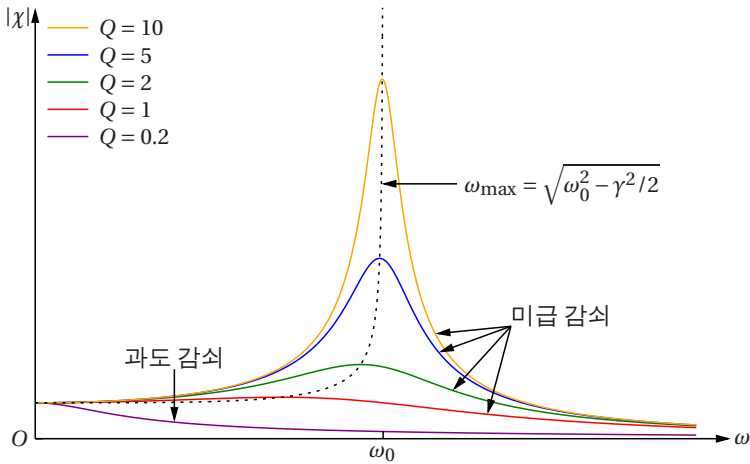


그림 4.8 다양한 Q 인자에 대한  $|\chi(\omega)|$

강제 진동의 진폭 (4.86)으로부터, 강제 진동의 진폭  $x_0$ 는,

$$x_0(\omega) = P|\chi(\omega)| = |\tilde{x}_0(\omega)| \quad (4.87)$$

가 되어 복소수 진폭의 절대값과 같고, 응답 함수의 절대값에 비례한다. 따라서 진폭의 진동수의존성을 살펴보기 위해서는 응답 함수의 절대값을 살펴봐야 한다.

그림4.8은 여러가지 Q 인자에 대한  $|\chi|$ 을 나타낸 것이다. 여기서 Q 인자는 감쇠 진동에서와 마찬가지로  $Q = \omega_0/\gamma$ 이고,  $Q > 1/2$ 인 경우 미급 감쇠를,  $Q < 1/2$ 인 경우 과도 감쇠를 나타내며, 미급 감쇠의 경우 Q가 클수록 에너지 손실이 작은 진동이 된다. 미급 감쇠 진동의 경우  $|\chi|$ 는 최대값을 가지며,

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - (\omega_0^2 - \gamma^2/2))^2 + \omega_0^4 - (\omega_0^2 - \gamma^2/2)^2}} \quad (4.88)$$

와 같이 고치면,  $\omega_0^2 > \gamma^2/2$ ,

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2} \quad (4.89)$$

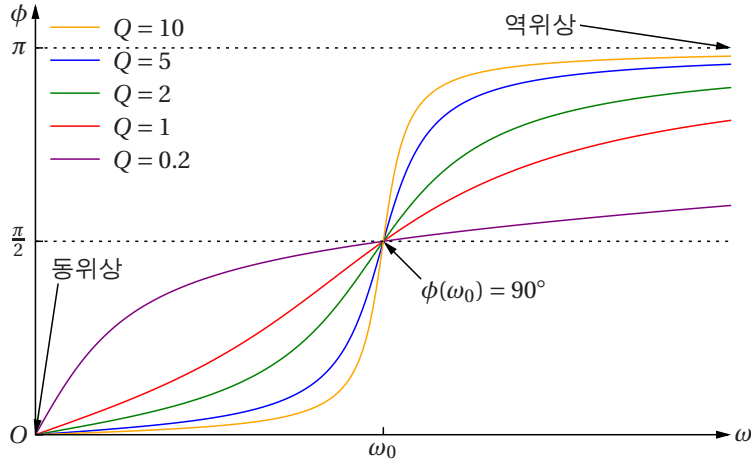
에서  $|\chi|$ 가 최대값을 가진다는 것을 알 수 있다. 이 때, 응답 함수가 최대가 되는 각진동수  $\omega_{\max}$ 를 공명 (각)진동수라고 한다.공명 각진동수는 감쇠 진동의 각진동수  $\omega_1$ 에 대해,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} > \omega_{\max} \quad (4.90)$$

임에 주의하라. 진폭의 최대값은 감쇠 진동의 진동수보다 약간 낮은 공명 진동수에서 얻어진다. 단,  $Q \gg 1$ 인 경우,

$$\omega_{\max} \sim \omega_1 \sim \omega_0 \quad (4.91)$$

에 접근한다.

그림 4.9 다양한 Q 인자에 대한  $\phi(\omega)$ 

**강제 진동의 위상** (4.86)로부터,  $\chi$ 의 편각  $\phi$ 는 입력(구동력)에 대한 출력(변위)의 위상 지연을 나타낼 수 있다.  $\phi = 0$ 인 경우에는 완전히 동기되어 구동력과 변위가 같은 방향을 가지며, 이를 동위상(in-phase)라 한다. 반면에  $\phi = \pi$ 인 경우에는 구동력과 변위가 항상 반대 방향으로 진동하는 역위상(antiphase) 상태가 된다.

그림 4.9는  $\phi(\omega)$ 를 여러 Q 인자의 경우에 대해 계산한 결과이다.  $\omega = 0$ 일 때 모든 Q에 대해서

$$\phi(0) = 0 \quad (4.92)$$

이다.  $\omega = 0$ 이란 전혀 진동하지 않는 경우이므로 당연히 변위는 구동력에 따라서 운동하게 되고 따라서 동위상이다. 구동력의 진동수가 조금씩 커지면 위상 지연이 나타나기 시작하며, 입력 진동수가 조화 진동자의 고유 진동수  $\omega_0$ 와 같아지면 ( $\omega = \omega_0$ ), Q의 값에 상관없이,

$$\phi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} \quad (4.93)$$

가 되어 위상차는 항상 직각을 이루게 된다. 또한 Q가 커질수록  $\omega \sim \omega_0$  주변에서 위상이 급격하게 변화한다. 입력 진동수가 더 커지면 위상차는  $\pi$ 에 접근하며, 따라서 고유 진동수보다 구동력의 진동수가 더 커지면 역위상에 가까워진다. 이는  $\omega \gg \omega_0$ 일 때,

$$\tan \phi \simeq -\frac{\omega_0}{Q\omega} \rightarrow -0 \quad (4.94)$$

이 되어,  $0 < \phi < \pi$ 일 때,  $\phi \rightarrow \pi$ 가 되는 것으로부터 확인할 수 있다.

### 4.3.3 에너지 균형

**응답 함수의 실수부와 허수부** (4.86)으로부터, 실제 진폭은 절대값  $|\chi|$ 에 비례하므로, 진폭을 결정하기 위해서는  $\chi$ 의 실수부와 허수부를 모두 구해야 한다.  $\chi$ 의 실수부와 허수부를 각각  $\chi_1, \chi_2$ 라고 하면,

$$\chi_1(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad \chi_2(\omega) = \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (4.95)$$

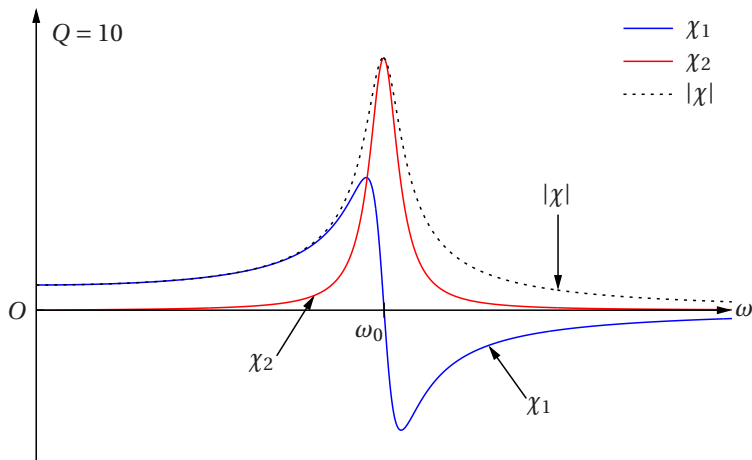


그림 4.10 응답 함수  $\chi(\omega)$ 의 실수부  $\chi_1(\omega)$ 와 허수부  $\chi_2(\omega)$

이고,  $\chi_2$ 는  $\gamma$ 에 비례하여  $\gamma=0$ 이면  $\chi$ 는 실수가 됨을 알 수 있다. 그림 4.10으로부터 알 수 있듯이, 진폭( $\propto |\chi|$ )이 최대일 때 같이  $\chi_2$ 도 최대값을 갖는다. 단, 실제 진폭에는 실수부도 기여하기 때문에 진폭이 최대인 진동수와 허수부가 최대인 진동수가 완전히 일치하지는 않으나,  $Q$ 의 값이 커질수록 최대가 되는 진동수는 모두  $\omega_0$ 에 가까워진다. 또한,  $Q$  인자가 커지면  $\chi_2$ 의 봉우리(peak)는  $\omega = \omega_0$ 에 대해 대칭이 되는 반면에 실수부는 반대칭에 가까워진다.  $\omega = \omega_0$ 에서 위상 지연은 직각이기 때문에  $\chi$ 는 허수축상에 놓이게 되고, 따라서  $\chi_1(\omega_0)$ 는 반드시 0이 된다.

$\gamma=0$ 인 경우,  $|\chi(\omega)|$ 는  $\omega = \omega_0$ 에서 발산하고, 따라서 진폭과 에너지가 무한대가 된다. 그러나 실제로는  $\gamma \neq 0$ 이고 반드시 항력에 의한 에너지 손실이 존재하기 때문에 이러한 발산은 관측되지 않는다. 이 때, 진폭이 최대인 곳에서 에너지의 발산이 일어나므로, 그 때 에너지 손실도 최대가 되어야 한다. 진폭이 최대일 때 응답 함수의  $\chi_2$ 가 최대가 되는 것은,  $\chi_2$ 가 에너지 손실에 관여하고 있음을 시사하며, 실제로  $\chi_2$ 가 에너지 손실을 나타냄을 앞으로 보일 것이다. 처음에 복소수의 응답 함수  $\chi$ 를 도입한 것은 수학적인 테크닉이었지만,  $\chi$ 의 실수부 뿐만 아니라 허수부도 물리적으로 중요한 의미를 가진다는 것을 알 수 있다.

**항력에 의한 에너지 손실**  $\gamma \neq 0$ 일 때, 매 진동마다 항력에 의해서 에너지 손실이 발생하며, 이는 진폭과 에너지의 발산을 막는 중요한 메카니즘이다.

속도  $v$ 로 운동하는 물체에 가해지는 힘  $F$ 에 의한 일률  $P$ 는  $P = Fv$ 로 주어진다.<sup>8</sup> 질점에 가해지는 힘과 질점의 속도를,

$$F = F_0 \cos(\omega t - \phi_1), \quad v = v_0 \cos(\omega t - \phi_2) \tag{4.96}$$

라고 하면 일률은,

$$P = \frac{1}{2} F_0 v_0 [\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(2\omega t - \phi_1 - \phi_2)] \tag{4.97}$$

<sup>8</sup> 정상 상태의 진동은 지속되므로 총 일의 양을 계산하면 발산하게 되므로 일보다 일률이 중요하다. 일률의 정의는 3.1.3절을 참고하라.

와 같고, 이 일률을 한 주기에 대해 평균을 내면, 진동하는 두 번째항은 없어지고 첫 번째 항만이 남는다. 이는  $F$ 와  $v$ 가 같은 방향일 때는 일을 하지만, 반대 방향일 때는 반대로 일을 빼는 역할을 하기 때문이다. 이 때 평균 일률을  $\bar{P}$ 라고 하면,

$$\bar{P} = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos(\Delta\phi) \quad (4.98)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $\Delta\phi = |\phi_1 - \phi_2|$ 는 힘과 속도의 위상차를 나타낸다. 이 결과를 이용하여 바로 계산해도 되지만, 복소수를 이용하여 더 간단하게 표현할 수도 있다. 힘과 속도의 복소수 표현을

$$\tilde{F} = F_0 e^{-i(\omega t - \phi_1)}, \quad \tilde{v} = v_0 e^{-i(\omega t - \phi_2)} \quad (4.99)$$

라 하면,  $\tilde{F}$ 와  $\tilde{v}$ 의 켈레 복소수  $\tilde{v}^*$ 의 곱은,

$$\tilde{F} \tilde{v}^* = F_0 v_0 e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \quad (4.100)$$

가 되고, 따라서,

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{F} \tilde{v}^*) \quad (4.101)$$

와 같다. 이 때  $\Delta\phi$ 는 두 복소수  $\tilde{F}$ 와  $\tilde{v}$ 의 사이각에 해당한다.

항력의 경우,

$$F = -m\gamma v \quad (4.102)$$

이므로, 항력의 평균 일률  $\bar{P}_{\text{loss}}$ 은,

$$\bar{P}_{\text{loss}} = -\frac{m\gamma}{2} \text{Re}(\tilde{v} \tilde{v}^*) = -\frac{m\gamma |\tilde{v}|^2}{2} < 0 \quad (4.103)$$

이 되어, 에너지 손실(loss)을 나타낼 수 있다. 이 때, 복소수 속도는 복소수 변위 (4.85)로부터,

$$\tilde{v} = \dot{\tilde{x}} = -i\omega \frac{F_0}{m} \chi e^{-i\omega t} \quad (4.104)$$

와 같고, 일률은

$$\bar{P}_{\text{loss}} = -\frac{\gamma \omega^2 F_0^2 |\chi|^2}{2m} \quad (4.105)$$

가 된다. 여기에 (4.95)로부터  $\gamma \omega |\chi|^2 = \chi_2$ 를 대입하면 다음의 매우 중요한 사실을 알 수 있다.

■ **응답 함수의 허수부** 정상 상태의 에너지 손실률  $\bar{P}_{\text{loss}}$ 는 응답 함수의 허수부  $\chi_2$ 에 비례한다.

$$\bar{P}_{\text{loss}} = -\frac{\omega F_0^2 \chi_2}{2m} \propto \chi_2 \quad (4.106)$$

예를 들어 고체의 전자와 전자기장의 상호 작용을 기술하는 로렌츠 모형(Lorentz model)도 강제 진동의 미분 방정식으로 기술되며, 이 때 응답 함수의 허수부는 고체에 흡수되어 잃어버린 전자기장의 에너지를 나타내기 때문에 허수부로부터 빛에 대한 흡수 스펙트럼(absorption spectrum)을 계산할 수 있다.

구동력에 의한 에너지 공급 한편, 구동력은 일을 하여 계에 지속적으로 에너지를 공급하는 역할을 한다. 속도와 변위는  $\pi/2$ 의 위상차를 가지므로 변위와 구동력의 위상차를  $\phi$ 라 했을 때, 구동력에 의한 한 주기 평균 일률을  $\bar{P}_{\text{gain}}$ 는

$$\bar{P}_{\text{gain}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{F} \tilde{v}^*) = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} F_0 v_0 \sin \phi \quad (4.107)$$

과 같이 나타낼 수 있다.

4.9로부터 위상차에 따른 일률의 변화를 예측할 수 있다.  $\omega \ll \omega_0$ 일 때는  $\phi \ll 1$ 이므로 에너지 공급은 매우 작다.  $\omega \rightarrow 0$ 의 극한에서는 전혀 진동하지 않으므로 구동력에 의한 일도 없다. 반면에  $\omega$ 가 증가하여  $\omega_0$ 에 가까워지면 이번엔 속도와 힘이 동위상이 되어 일률은 최대가 되고, 진동수가 더 커지면 위상차는 다시 줄어들어 일률은 작아지게 된다.

정상 상태는 진동이 계속되는 상태이므로, 총 역학적 에너지는 변하지 않는다. 그러나 앞의 절에서 항력에 의한 일은 항상 에너지 손실을 일으킴을 보였다. 따라서 계에 가해지는 구동력은, 항력에 의한 손실과 같은 양의 일을 공급해야 한다. (4.101)과 (4.104)를 이용하여,  $\bar{P}_{\text{gain}}$ 을 계산해보면,

$$\bar{P}_{\text{gain}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{F} \tilde{v}^*) = \frac{\omega F_0^2}{2m} \text{Re}(i\chi^*) = \frac{\omega F_0^2}{2m} \text{Im}(\chi) = \frac{\omega F_0^2 \chi_2}{2m} \quad (4.108)$$

가 되어,

$$\bar{P}_{\text{gain}} = -\bar{P}_{\text{loss}} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{P}_{\text{gain}} + \bar{P}_{\text{loss}} = 0 \quad (4.109)$$

이 얻어진다. 따라서,

구동력에 의한 에너지 공급과 항력에 의한 에너지 손실은 같다.



## 질점의 회전 운동과 중심력

### 5.1 각운동량과 토크

#### 5.1.1 동경 벡터와 접선 벡터

회전 운동에서는 기저 벡터로  $e_x, e_y, e_z$ 보다 회전면을  $xy$ 평면으로 잡고  $e_r, e_\theta, e_z$ 를 기저 벡터로 이용하는 것이 더 편리한 경우가 많다. 여기서  $e_r$ 는  $r$ 방향의 단위 벡터이고,  $e_\theta$ 는  $r$ 에 반시계 방향으로 수직인 단위 벡터이다. 앞으로  $e_r$ 의 방향을 동경 방향(radial direction),  $e_\theta$ 의 방향을 접선 방향(tangential direction)이라고 칭하기로 한다. 이 때, 다음 관계식이 유용하다.<sup>1</sup>

$$\dot{e}_r = \omega e_\theta, \quad \dot{e}_\theta = -\omega e_r, \quad e_r \times e_\theta = e_z \quad (5.1)$$

$\theta$ 는 회전각을 나타내며,  $\dot{\theta}$ 는 각속도이다. 마지막 관계식은  $r$ 에 평행하게  $xy$ 평면 놓은 경우로, 앞으로도 특별히 언급하지 않는 한 회전면을  $xy$ 면으로 한다. 이후에는 특별한 언급없이 이 관계식을 이용할 것이다.

#### 5.1.2 각운동량

위치  $r$ 의 질점이 운동량  $p$ 를 가지고 있을 때, 각운동량(angular momentum)  $L$ 은 다음식으로 정의된다.

##### ■ 각운동량의 정의

$$L = r \times p \quad (5.2)$$

각운동량은  $r$ 과  $p$ 가 수직일 때 최대가 되고, 평행일 때 0이 된다. 원점을 중심으로 한 원운동은 항상  $r$ 과  $p$ 가 수직이기 때문에 각운동량은 원운동에 가까울수록 커진다. 따라서 각운동량은 회전하는 물체가 가지는 물리량이라고 할 수 있다.  $p$ 가  $r$ 에 대한 수직 성분을 전혀 가지지 않는 경우는 물체가  $r$ 방향으로 직선운동하는 경우이고, 이 경우에는 각운동량은 0이고 전혀 회전하지 않는다. 각운동량의 방향은  $r$ 과  $p$ 를 포함하는 평면에 대해 수직이다.<sup>2</sup>  $r$ 과  $p$ 를 포함하는 평면을  $xy$ 평면으로 하면,

$$L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

가 되어  $L$ 은  $z$ 축 방향을 향한다. 물체의 회전 방향으로 오른손을 감쌌을 때, 엄지손가락이 향하는 방향이  $L$ 의 방향이 된다.

몇 가지 경우에 대해 각운동량을 계산해보자.

<sup>1</sup>증명은 2.4.1절을 참고하라.

<sup>2</sup>자세한 것은 외적 참고.

1. 원운동의 경우: 원점을 중심으로 원운동하는 질점은 위치벡터와 속도 벡터가 수직이므로,  $L = |\mathbf{L}| = r p$ 와 같다. 방향은 회전면에 수직이다. 구체적으로는,  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ 이라 하면,

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}} = m r \dot{\mathbf{e}}_r = m r \omega \mathbf{e}_\theta \quad (5.4)$$

이다( $\omega$ 는 각속도). 따라서,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m r^2 \omega \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = m r^2 \omega \mathbf{e}_z \quad (5.5)$$

가 된다.  $\omega > 0$ 이라면 각운동량은  $\mathbf{e}_z$ 의 방향이므로 원운동은 반시계 방향으로 회전함을 알 수 있다.

2. 직선 운동의 경우:  $xy$ 평면내에서  $y = ax + b$ 의 직선을 따라서 일정한 속도  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y$ 으로 운동하는 질점의 각운동량은,

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m (x \mathbf{e}_x + (ax + b) \mathbf{e}_y) \times (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y) = m (x v_y - (ax + b) v_x) \mathbf{e}_z \quad (5.6)$$

이다. 이 때, 질점은 기울기가  $a$ 인 직선을 따라 움직이므로,  $v_y = a v_x$ 이고,

$$\mathbf{L} = m (a x v_x - (ax + b) v_x) \mathbf{e}_z = -m b v_x \mathbf{e}_z \quad (5.7)$$

가 된다. 이 때, 직선과 원점 사이의 거리  $R$ 과 속력  $v$ ,

$$R = \frac{|b|}{\sqrt{1+a^2}}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |v_x| \sqrt{1+a^2} \quad (5.8)$$

로부터, 각운동량의 크기는,

$$|\mathbf{L}| = m |b v_x| = m R v \quad (5.9)$$

가 된다. 충분히 먼 거리( $x \gg a$ )에서 회전 방향( $\mathbf{r}$ 에 수직한 방향)으로의 속도가 매우 작아지고  $\mathbf{v}$ 는  $\mathbf{r}$ 과 평행한 것처럼 보이므로 각운동량의 크기가 일정한 것이 이상하게 보일 수 있다. 그러나 거리가 멀어지면 동시에 회전 반경도 커지기 때문에 회전 속도의 감소와 회전 반경의 증가가 상쇄되어 일정한 크기가 된다.  $b = 0$ 인 경우에는 직선이 원점을 통과하므로  $\mathbf{r}$ 과  $\mathbf{v}$ 가 평행하여 각운동량은 0이 된다.

더 일반적으로 각운동량은 각속도  $\dot{\theta}$ 를 이용하여 나타낼 수 있다. 질점의 속도는,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} r \mathbf{e}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (5.10)$$

와 같이 동경 속도  $v_r \mathbf{e}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r$ 과 접선 속도  $v_\theta \mathbf{e}_\theta = r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ 로 분해할 수 있다. 이 때, 각운동량은,

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = m r \mathbf{e}_r \times (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z \quad (5.11)$$

과 같다. 각운동량은 회전하는 질점의 물리량이기 때문에 ( $\mathbf{r}$ 에 평행한) 동경 속도는 기여하지 않는다. 각운동량의  $z$  성분은,

$$L = m r^2 \dot{\theta} \quad (5.12)$$

가 된다.

## 5.1.3 토크

뉴턴의 가속도 법칙은 운동량의 시간 미분이 운동에 변화를 가하는 힘이 됨을 나타낸다.

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad (5.13)$$

따라서 각운동량의 시간 미분은 회전 운동을 일으키는 요인이라고 생각할 수 있다. 이 때 각운동량의 시간 미분을 토크(torque; 돌림힘)라 부른다.

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} \quad (5.14)$$

각운동량의 정의로부터, 토크  $\boldsymbol{\tau}$ 는,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (5.15)$$

와 같이 계산되고, 이 때  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ 으로부터  $\mathbf{p}$ 와  $\dot{\mathbf{r}}$ 은 평행하므로 위 식의 첫 번째 항은 0이 되고, 두 번째 항의  $\dot{\mathbf{p}}$ 은 (5.13)으로부터 힘  $\mathbf{F}$ 와 같다. 따라서 토크는 변위와 힘을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

## ■ 토크의 정의

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5.16)$$

토크는 에너지와 같은 차원<sup>3</sup>을 가지지만 물리적 의미가 다르기 때문에 토크를 나타내는 데에 에너지의 단위(J, cal 등)는 사용하지 않고, Nm를 이용한다. 토크의 방향은  $\mathbf{r}$ 과  $\mathbf{F}$ 를 포함하는 평면에 수직이며, 토크의 방향으로 오른손 엄지를 세우고 손을 감췄을 때, 토크는 네 손가락이 감싸는 방향으로 회전을 일으킨다.

(5.10)은 질점의 속도를  $\mathbf{e}_r$ 과  $\mathbf{e}_\theta$ 로 나타낸 것이다. 질점의 가속도도 마찬가지로  $\mathbf{e}_r$ 과  $\mathbf{e}_\theta$ 로 나타내면,

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (5.17)$$

가 되고 위 식은 동경 가속도  $a_r\mathbf{e}_r$ 과 접선 가속도  $a_\theta\mathbf{e}_\theta$ 로 나눌 수 있다.

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (5.18)$$

동경 가속도의 첫 번째 항  $\ddot{r}$ 은 동경 방향의 운동을 나타내고, 두 번째 항  $-r\dot{\theta}^2$ 은 구심 가속도를 나타낸다. 접선 가속도의 첫 번째 항  $r\ddot{\theta}$ 은 접선 방향의 운동을 나타내고,  $2\dot{r}\dot{\theta}$ 은 추가적인 접선 방향에의 기여를 나타낸다.

토크를  $\mathbf{e}_r$ 과  $\mathbf{e}_\theta$ 를 기저 벡터로 하여 나타내보면,

$$\boldsymbol{\tau} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times (a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta) = mra_\theta\mathbf{e}_z \quad (5.19)$$

가 된다. 각운동량에 접선 속도만이 기여하듯이, 토크에는 접선 가속도만이 기여한다. 여기서, 토크의  $z$ 성분을  $\tau$ 라 했을 때, (5.12)로부터,

$$\tau = mra_\theta = m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} \quad (5.20)$$

임에 주의하라. 토크는 각운동량의 시간 미분이므로 당연히 성립해야 하는 관계식이다.

<sup>3</sup>(길이) × (힘)

회전 운동에 있어서 토크의 역할은 병진 운동에 있어서 힘의 역할과 같다. 토크가 클수록 회전하는 힘이 커진다. 단, 힘이 물체를 움직이게 하는 요인이 아니라 속도를 변화시키는 요인인 것처럼, 토크는 회전 자체에 필요한 요인이 아니라 회전 속도(각속도)나 회전 방향을 변화시키는 요인이다.

토크의 크기가 단순히 힘에만 비례하지 않고 거리에도 비례하는 것은 우리의 일상적인 경험과도 일치한다. 줄에 공을 매달아 회전 시킬 때, 우리는 줄의 길이가 길수록 회전시키기 힘들다고 느낀다. 이것은 회전 반경이 커질수록 회전에 필요한 토크가 커지기 때문이다.

### 5.1.4 각운동량 보존 법칙

토크는 각운동량의 시간미분이므로, 토크가 없으면 각운동량은 상수가 되며, 이를 각운동량 보존 법칙(law of conservation of angular momentum)이라 한다.

■ 각운동량 보존 법칙 토크가 0이면 질점의 각운동량은 보존된다.

$$\tau = 0 \Leftrightarrow L = \text{const} \quad (5.21)$$

예를 들어 등속 원운동은 각속도가 변하지 않으므로 토크가 0이며 이 때 각운동량은 보존된다. 각운동량이 보존될 때, 각운동량  $L$ 은 상수 벡터이다. 이 때,  $r$ 은 항상  $L$ 에 수직이므로, 질점은  $L$ 에 수직인 하나의 평면 안에서만 운동한다.

(5.12)로부터, 각속도는 각운동량을 이용해서

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \propto \frac{1}{r^2} \quad (5.22)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 각운동량이 보존될 때  $L$ 은 상수이므로 각속도는 회전 반경의 제곱에 반비례함을 알 수 있다. 따라서 각운동량 보존 법칙이 성립하는 운동은, 원점에 가까울수록 각속도가 빨라진다. 또한,  $r^2\dot{\theta} = L/m = \text{const}$ 와 같이 쓸 수 있으므로, 각운동량이 보존될 때  $r^2\dot{\theta}$ 라는 양<sup>4</sup>이 일정해짐을 알 수 있다.

## 5.2 중심력

### 5.2.1 정의

질점의 회전 운동에서 특히 자주 등장하는 것이 중심력(central force)이다.

■ 중심력 방향이 질점의 위치 벡터(동경 벡터)  $r$ 에 평행하며 크기가 거리(동경)  $r = |r|$ 에만 의존하는 힘을 중심력이라 한다.

$$F(r) = f(r)e_r \quad (5.23)$$

물체를 등속 원운동 시키는 힘인 구심력도 중심력의 하나이다. 구심 가속도는 (2.28)로 주어지므로, 질량  $m$ 의 질점에 대한 구심력은,

$$F = -mr\omega^2 e_r \quad (5.24)$$

<sup>4</sup> 후술할 케플러의 제2법칙과 연관되어 있는 양이다.

와 같다. 구심력은 언제나  $\mathbf{r}$ 과 반평행하며, 그 크기는  $|f(r)| = m\omega^2 r$ 로 원점으로부터의 거리(반경)  $r$ 에만 의존한다. 각속도  $\omega$ 는 등속 원운동의 경우 상수이다.

또 다른 대표적인 중심력의 예는 뉴턴의 만유 인력의 법칙으로 주어지는 중력과 쿨롱의 법칙으로 주어지는 전기력이 있다.

$$\mathbf{F}_{\text{중력}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{F}_{\text{전기력}} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon r^2}\mathbf{e}_r \quad (5.25)$$

중력은 두 질점의 질량  $m_1, m_2$ 의 곱에 비례하며 전기력은 두 전하  $q_1, q_2$ 의 곱에 비례한다. 또한, 양쪽 모두 거리의 제곱에 반비례한다. 역학에서는 주로 중력을 다루게 되고, 전기력은 전자기학에서 다루어지지만, 두 힘은 매우 닮아있기 때문에 여러가지 성질을 공유한다. 단, 중력은 인력만이 존재하지만 전기력은 인력과 척력 모두 존재할 수 있다는 것이 다르다.

### 5.2.2 각운동량 보존

중심력 (5.23)에 대한 토크는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r} \times \mathbf{e}_r = 0 \quad (5.26)$$

이로부터 다음을 얻는다.

■ **중심력의 성질 1** 중심력에 의한 토크는 0이고 중심력에 의한 운동은 각운동량이 보존된다.

토크가 0이므로 접선 방향 가속도는 존재하지 않는다. 이는 중심력을 동경 벡터  $\mathbf{r}$ 과 평행한 힘으로 정의했기 때문에 당연한 결과이다. 그러므로 중심력에 의한 가속도는 다음과 같이 동경 가속도만으로 표현된다.

$$\ddot{\mathbf{r}} = a_r \mathbf{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r \quad (\text{중심력에 의한 가속도}) \quad (5.27)$$

### 5.2.3 역학적 에너지 보존

중심력은 위치에만 의존하므로 보존력이다. 실제로 일을 계산하여 이를 증명할 수 있다. (5.10)으로부터,

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta \quad (5.28)$$

이고, 중심력에 의한 일은,

$$W = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int f(r) dr \quad (5.29)$$

가 되어, 원점으로부터의 거리  $r$ 에만 의존하므로 이동 경로에는 의존하지 않는다.

■ **중심력의 성질 2** 중심력은 보존력이고 중심력에 의한 운동은 역학적 에너지가 보존된다.

## 5.3 중심력에 의한 운동

### 5.3.1 유효 포텐셜 에너지

중심력이 거리에만 의존하므로, 중심력에 의한 포텐셜 에너지  $V$ 도 거리에만 의존한다.

$$V(r) = -W = -\int f(r) dr \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}(r) = f(r) \mathbf{e}_r = -\nabla V(r) \quad (5.30)$$

한편, 운동 에너지는 (5.10)으로부터

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (5.31)$$

이고, 총 역학적 에너지는,

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \quad (5.32)$$

가 된다.

여기에 (5.12)로부터,

$$\frac{L^2}{m^2 r^2} = r^2 \dot{\theta}^2 \quad (5.33)$$

를 대입하면,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \overbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}^{V_{\text{eff}}(r)} + V(r) \quad (5.34)$$

와 같이 쓸 수 있다.

■ **중심력의 역학적 에너지** 중심력에 의한 운동의 역학적 에너지는

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (5.35)$$

이다. 이 때 **유효 포텐셜 에너지**(effective potential energy)  $V_{\text{eff}}(r)$ 은 다음과 같다.

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (5.36)$$

실제 2차원(각운동량에 수직한 평면) 운동의 포텐셜 에너지는  $V(r)$ 이지만, 이 운동을 원점으로부터의 거리  $r$ 에 대한 1차원 운동으로 나타내었을 때,  $V_{\text{eff}}$ 는 유효적인 포텐셜 에너지로 작용한다. 중심력은 보존력이므로 역학적 에너지  $E$ 는 상수이다.

### 5.3.2 동경 운동 방정식

포텐셜 에너지와 보존력과의 관계로부터,  $V_{\text{eff}}(r)$ 에 대응하는 유효 보존력을 계산할 수 있다. 유효 보존력을  $f_{\text{eff}}$ 라 하면,

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = f_{\text{eff}}(r) \mathbf{e}_r = -\nabla V_{\text{eff}} \quad (5.37)$$

로부터 다음과 같이 구해 진다.

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = -\frac{L^2}{2m} \nabla \left( \frac{1}{r^2} \right) - \nabla V = \left( \frac{L^2}{mr^3} + f(r) \right) \mathbf{e}_r \Leftrightarrow f_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{mr^3} + f(r) \quad (5.38)$$

중심력에 의해 운동하는 물체의 운동 방정식은,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = f(r) \mathbf{e}_r \quad (5.39)$$

이고 여기에 (5.27)과 (5.22)를 대입하면,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \Leftrightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + f(r) = m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} + f(r) = f_{\text{eff}}(r) \quad (5.40)$$

가 되어 동경 거리  $r$ 에 대한 운동 방정식이 얻어진다.

■ 동경 운동 방정식 동경 거리  $r$ 에 대한 중심력의 유효 운동 방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{r} = f_{\text{eff}}(r) \quad (5.41)$$

이 때  $f_{\text{eff}}(r)$ 은  $V_{\text{eff}}(r)$ 로부터 정해지는 유효 보존력이다.

$$f_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{mr^3} + f(r) \quad (5.42)$$

$f_{\text{eff}}$ 는 중심력에 의한 2차원 운동을 거리에 대한 1차원으로 사영했을 때, 물체에 작용하는 유효적인 보존력을 나타낸다.

### 5.3.3 궤도 방정식

중심력에 의해 운동하는 질점은 많은 물리량이 거리에만 의존하므로, 이 때 질점의 원점 주변 궤도는 극좌표 함수

$$r = r(\theta) \quad (5.43)$$

로 나타내는 것이 간편하다. 이 때,  $r(\theta)$ 는 질점의 운동 궤도를 나타낸다. 이 궤도 방정식을 구하는 방법은 다음의 두 가지가 있다.

하나는 3.5절에서와 마찬가지로 에너지 보존 법칙으로부터 궤도 방정식을 유도하는 것이다. 우선,  $r(\theta)$ 에 대한 미분 방정식은,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \quad (5.44)$$

로 주어진다. 이 때,  $\dot{r}$ 은 계의 총 에너지 (5.35)로부터,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))} \quad (5.45)$$

와 같고, (5.22)로부터  $\dot{\theta} = L/mr^2$ 이므로 다음의 변수 분리형 미분 방정식이 얻어진다.

#### ■ 궤도의 미분 방정식 1

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))}}{L} \quad (5.46)$$

다른 방법은 거리에 대한 방정식 (5.41)을 푸는 것이다. 이 방정식을 풀기위해서  $u = 1/r$ 로 변수 변환을 한다. (5.22)로부터,

$$L = mr^2\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{u^2 L}{m} \quad (5.47)$$

이고, 이를 이용하여 다음과 같은 방법으로  $\ddot{r}$ 을  $u$ 와  $\theta$ 로 나타낼 수 있다.

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \quad (5.48)$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L\dot{\theta}}{\mu} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{u^2 L^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (5.49)$$

한 편,

$$f_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{mr^3} + f(r) = \frac{u^3 L^2}{m} + f(u^{-1}) \quad (5.50)$$

이다. 이상의 결과를 (5.41)에 대입하면,

$$-\frac{u^2 L^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{u^3 L^2}{m} + f(u^{-1}) \quad (5.51)$$

가 되어, 다음의 미분 방정식을 얻을 수 있다.

#### ■ 궤도의 미분 방정식 2

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = - \left( u + \frac{mf(u^{-1})}{u^2 L^2} \right) \quad (u = 1/r) \quad (5.52)$$

이 미분 방정식에 중심력은  $f/u^2 = fr^2$ 과 같은 형태로 포함되어있기 때문에, 중력이나 전기력과 같이  $f \propto r^{-2}$ 인 경우에 특히 유용하다.



## 행성의 운동

### 6.1 2체 문제

#### 6.1.1 2입자계의 운동 방정식

물체 사이의 상호작용이 존재할 때, 두 물체의 운동을 계산하는 문제를 2체 문제라 한다. 질점  $m_2$ 가 질점  $m_1$ 에 힘  $\mathbf{F}$ 를 작용할 때, 작용 반작용의 법칙에 의해서  $m_1$ 은  $m_2$ 에  $-\mathbf{F}$ 의 힘을 작용한다. 이 때 두 질점의 위치  $\mathbf{r}_1$ 과  $\mathbf{r}_2$ 에 대한 운동 방정식은 다음과 같다.

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F} \quad (6.1)$$

2체 문제는 두 방정식이 하나의 힘  $\mathbf{F}$ 를 통해 연결되어 있는 연립 미분 방정식이므로 한 질점의 운동 방정식보다 풀기가 어렵다. 그러나 2체 문제는 적절한 좌표 변환을 통해서 독립된 두개의 미분 방정식으로 분리하는 것이 가능하다.<sup>1</sup>

#### 6.1.2 좌표 변환

2체 문제를 풀기 위해서 다음과 같이 좌표를 변환하기로 한다.

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (6.2)$$

첫 번째 좌표  $\mathbf{R}$ 은 두 질점의 질량 중심<sup>2</sup>이다. (6.2)를 이용하여  $\ddot{\mathbf{R}}$ 을 계산하면,

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}}{m_1 + m_2} = 0 \quad (6.3)$$

이 되어 다음의 방정식을 얻는다.

#### ■ 질량 중심의 운동 방정식

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (6.4)$$

두 번째 좌표  $\mathbf{r}$ 은 두 물체의 상대 좌표이다. (6.1)로부터  $\ddot{\mathbf{r}}$ 은,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F} \quad (6.5)$$

와 같고 이를 정리하면 다음의  $\mathbf{r}$ 에 대한 운동 방정식이 얻어진다.

#### ■ 상대 좌표의 운동 방정식

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad \left( \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (6.6)$$

<sup>1</sup> 세 질점의 상호 작용에 의한 3체 문제는 일반적인 해를 구할 수 없고 몇 가지 구속 조건에 의한 특수해만을 구할 수 있다고 알려져 있다.

<sup>2</sup> (2.19) 참고

여기서  $\mu$ 를 환산 질량(reduced mass) 또는 유효 질량(effective mass)라 부른다. 위 식은, 상대 좌표  $\mathbf{r}$ 의 운동을 질량  $\mu$ 인 하나의 질점에 외력  $\mathbf{F}$ 가 작용하는 운동으로 간주할 수 있음을 나타낸다.

이처럼 2체 문제는 두 질점의 좌표대신 질량 중심 좌표와 상대 좌표로 나타내면 각각 독립적인 질점의 운동 방정식으로 변환하는 것이 가능하다. 이들을 풀어서  $\mathbf{r}$ 과  $\mathbf{R}$ 을 구하면, 각각의 정의로부터  $\mathbf{r}_1$ 과  $\mathbf{r}_2$ 는 다음식으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \quad (6.7)$$

특히, (6.4)는 질량 중심의 가속도가 없음을 나타내므로 기준틀의 원점으로 질량 중심을 택해도 여전히 기준틀은 관성계이므로 뉴턴의 운동 법칙이 성립한다. 따라서 우리는 필요할 때  $\mathbf{R} = 0$ 이라고 둘 수 있다.

### 6.1.3 각운동량과 운동 에너지

두 질점의 계의 총 각운동량은,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (6.8)$$

와 같다. 여기서  $\mathbf{R} = 0$ 이라 하고 (6.7)을 대입하면,

$$\mathbf{L} = \frac{\mu^2}{m_1} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu^2}{m_2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu^2 \overbrace{\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}^{1/\mu} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (6.9)$$

가 된다. 따라서 총 각운동량은 다음과 같다.

#### ■ 2입자계의 각운동량

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\mu \quad (\mathbf{p}_\mu = \mu \dot{\mathbf{r}}) \quad (6.10)$$

여기서  $\mathbf{p}_\mu = \mu \dot{\mathbf{r}}$ 는 질량이  $\mu$ 인 하나의 질점의 운동량이며, 각운동량은 상대 좌표 운동의 각운동량과 같다. 이는 원점을 질량 중심으로 고정하면 실질적으로 계의 운동을 나타내는 방정식이 (6.6)이기 때문에 당연한 결과라고 할 수 있다.

마찬가지로 총 운동 에너지는  $\dot{\mathbf{r}}$ 의 속도로 운동하는 질점  $\mu$ 의 운동 에너지와 같다.

#### ■ 2입자계의 운동 에너지

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (6.11)$$

## 6.2 중력

### 6.2.1 만유 인력 법칙

두 질점  $m$ 과  $M$ 사이에서 작용하는 중력은 뉴턴의 만유 인력의 법칙으로 주어진다. 질점  $M$ 의 위치를  $\mathbf{r}_M$ , 질점  $m$ 의 위치를  $\mathbf{r}_m$ 이라 하고, 이들의 상대 위치를  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$ 이라 하면, 질점  $M$ 이 질점  $m$ 에 작용하는 중력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}_G = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|^3} (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M) = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (6.12)$$

여기서  $r = |\mathbf{r}|$ 은 두 질점사이의 거리를 나타내고,  $\mathbf{e}_r$ 은  $M$ 을 중심으로 한 동경 벡터  $\mathbf{r}$ 에 평행한 단위 벡터이며,  $G$ 는 중력 상수라 불리는 상수로 다음과 같은 값을 갖는다.

$$G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$$

중력 (6.12)은 질점  $M$ 을 중심으로 한 동경 벡터  $\mathbf{r}$ 에 평행하고, 그 크기는 거리에만 의존하므로 중심력을  $\mathbf{F}_G = f_G(r) \mathbf{e}_r$ 의 형태로 나타내면 동경 방향 성분  $f_G(r)$ 은,

$$f_G(r) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (6.13)$$

이 된다. 중력의 방향은  $-\mathbf{e}_r$ 의 방향이고,  $\mathbf{e}_r$ 은  $M$ 에서  $m$ 을 향하는 벡터이므로, 중력은  $m$ 에서  $M$ 을 향한다. 따라서 중력은 질점  $m$ 을  $M$ 쪽으로 끌어 당기는 인력이 된다. 작용 반작용의 법칙으로부터 이는  $M$ 의 입자에서도 마찬가지이다.

중력은 두 질점의 상호 작용을 나타내므로, 질점이 두개인 계의 운동은 중력에 의한 2체 문제가 된다. 여기서 두 질점의 환산 질량  $\mu$ 를,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \quad (6.14)$$

과 같이 정의하면, 상대 좌표에 대한 운동 방정식은 (6.6)으로부터,

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(r) \mathbf{e}_r = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (6.15)$$

이 된다. 따라서 두 질점의 중력에 의한 운동을 구하기 위해서, 우리는 질량  $\mu$ 의 질점이 중심력  $\mathbf{f}(r) \mathbf{e}_r$ 에 의해서 운동하는 문제를 풀면 된다.

### 6.2.2 포텐셜 에너지

중력에 의한 포텐셜 에너지는 (5.30)으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$V(r) = -\int_{\infty}^r f(r) dr = -\frac{GMm}{r} \quad (6.16)$$

이 때, 포텐셜 에너지의 기준은  $r_0 \rightarrow \infty$ (무한 원점)에서  $V=0$ 이 되게 잡았다.

중력도 중심력이므로, 중력에 대해서도 (5.36)과 같은 유효 포텐셜 에너지를 정의할 수 있다.

#### ■ 중력의 유효 포텐셜 에너지

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r} \quad (6.17)$$

위 식을 이용하여 총 역학적 에너지를 나타내면,

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (6.18)$$

과 같다. 여기서 운동 에너지는 환산 질량  $\mu$ 에 대한 운동 에너지임에 주의하라.

그림 6.1은 중력의 유효 포텐셜 에너지 (6.17)을 나타낸 것이다. 두 질점 사이의 거리  $r$ 이 작을 때에는 (6.17)의 첫 번째 항이 주로 기여하여 두 질점 사이에는 **유효적으로** 척력이 작용하고, 거리가 멀어지면 두 번째 항이 주가 되어 다시 인력이 작용한다. 따라서 거리만으로 볼 때,  $E < 0$ 인 경우에는 동경 운동에 에너지가 0이 되는 두 거리  $r_{\min}$ 과  $r_{\max}$  사이에서 비조화 진동하게 된다.

실제 두 질점은 중심력에 의해 회전 운동을 하기 때문에, 원점과 가장 가까운 반경이  $r_{\min}$ , 가장 먼 반경이  $r_{\max}$ 인 타원 궤도를 그리게 되며, 에너지가 포텐셜 에너지의 최소값이 되면  $r_{\min} = r_{\max}$ 가 되어 원궤도가 된다.  $E \geq 0$ 의 경우는 중력에 속박되지 않으므로 자유롭게 운동할 수 있다.

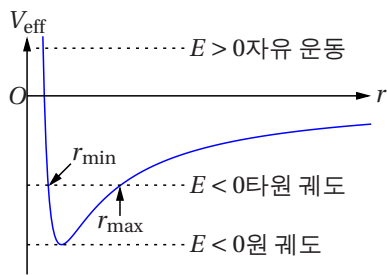


그림 6.1 중력의 유효 포텐셜 에너지

### 6.2.3 궤도의 에너지

질점  $\mu$ 의 실제 궤도  $r(\theta)$ 는 궤도의 미분 방정식 (5.52)로 주어진다. 여기에,

$$f(u^{-1}) = -GMmu^2 \quad (6.19)$$

을 대입하면,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\left(u - \frac{\mu GMm}{L^2}\right) \quad (6.20)$$

가 되고, 이 때, 우변을  $w$ 라 놓으면, 미분 방정식은  $d^2 w/d\theta^2 = -w$ 가 되어  $w$ 는 삼각 함수임을 알 수 있다. 따라서 일반해는,

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\mu GMm}{L^2} + A \cos(\theta + \phi) \quad (6.21)$$

가 되고, 여기서  $A$ 와  $\phi$ 는 임의 상수이다.  $\theta$ 의 시작점을 항상  $-\phi$ 가 되게 하면 초기 위상  $\phi$ 는 무시할 수 있고,

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\mu GMm}{L^2}, \quad A = \frac{\varepsilon}{r_0} \quad (6.22)$$

라고 놓으면,

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{r_0} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (6.23)$$

가 얻어진다. 여기서  $r_0$ 는  $\theta = 0$ 일 때의 거리를 나타내며,  $\varepsilon$ 는 임의의 상수이다. 이 때,  $\varepsilon < 0$ 인 경우는  $-\cos \theta = \cos(\theta - \pi)$ 로부터  $\pi$ 를 다시  $\theta$ 의 시작점으로 잡은 것과 동일하다. 따라서  $\varepsilon \geq 0$ 인 경우만을 다루기로 한다.

구체적인 궤도의 형태는 다음 절에서 다루기로 하고, 여기에서는 (6.23)으로부터 알 수 있는 에너지에 대한 고찰을 하자. 두 천체계의 총 역학적 에너지는 (6.18)로부터,

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GmM}{r} \quad (6.24)$$

이다. 이 때,  $r$ 은  $r_{\min}$ 과  $r_{\max}$ 사이에서 진동하므로,  $r = r_{\min}$  또는  $r = r_{\max}$ 일 때  $\dot{r} = 0$ 이 된다. 따라서, 총 에너지는,

$$E = \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} - \frac{GMm}{r_{\min}} = \frac{1}{2r_{\min}} \left( \frac{L^2}{\mu r_{\min}} - 2GMm \right) \quad (6.25)$$

와 같다.  $r_{\min}$ 을 구하기 위해서,  $dr/d\theta = 0$ 이 되는  $\theta$ 를 찾으면,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-r_0 \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0, \pi \quad (6.26)$$

이고, 이 때  $r(0) < r(\pi)$ 이므로,

$$r_{\min} = r(0) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon} = \frac{L^2}{\mu GMm(1 + \varepsilon)} \quad (6.27)$$

가 얻어진다. 따라서 총 역학적 에너지는 다음과 같다.

#### ■ 궤도의 역학적 에너지

$$E = \frac{\mu}{2} \left( \frac{GMm}{L} \right)^2 (\varepsilon^2 - 1) \quad (6.28)$$

질점이 닫힌 궤도를 그리기 위해서는  $E < 0$ 이어야 하므로,  $\varepsilon < 1$ 일 때에만 닫힌 궤도가 그려지고,  $\varepsilon \geq 1$ 일 때에는 열린 궤도가 됨을 예측할 수 있고, 이는 전 절의 분석 결과와 일치한다.

## 6.3 케플러의 행성 운동 법칙

케플러(Kepler)는 1609년과 1619년 두 차례에 걸쳐서 브라헤(Brahe)의 관측 기록을 바탕으로 태양계 행성의 운동에 대해서 세 가지 법칙이 성립함을 발견하였다. 이 법칙들을 케플러의 행성 운동 법칙(Kepler's laws of planetary motion) 또는 케플러의 법칙이라 부른다.

여기에서는 이 법칙들이 뉴턴 역학을 통해 어떻게 나타나는지 살펴보기로 한다. 우리의 주된 관심은 태양에 대해서 행성이 어떻게 움직이는가이므로,  $M$ 을 태양을 질량으로,  $m$ 을 행성의 질량으로 생각하기로 한다. 이 때  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$ 은 태양을 원점으로 했을 때 행성의 위치이며,  $r$ 은 행성과 태양 사이의 거리가 된다.

### 6.3.1 제1법칙: 타원 궤도의 법칙

■ 타원 궤도의 법칙 태양계 행성의 공전 궤도는 타원이며, 타원의 한 초점에 태양이 위치한다.

첫 번째 법칙은 행성의 공전 궤도에 대한 법칙이다. 이미 앞의 절에서 중력에 속박되어 운동하는 경우의 일반적인 궤도가 (6.23)과 같음을 구하였다. 여기에서는 이 궤도의 구체적인 형태를 구하기로 한다.

$\varepsilon < 1$ 인 경우, (6.23)은 잘 알려진 타원의 방정식이 된다. 이를 확인하기 위해서 극좌표를 데카르트 좌표계로 나타내기로 한다.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (6.29)$$

를 (6.23)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$\frac{(x+d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.30)$$

여기서  $a, b, d$ 는 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a = \frac{r_0}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad d = \frac{\varepsilon r_0}{1 - \varepsilon^2} = a\varepsilon \quad (6.31)$$

(6.30)은 장축의 길이가  $a$ , 단축의 길이가  $b$ 인 타원의 방정식이다.  $d = \sqrt{a^2 - b^2}$ 은 타원의 중심으로부터 초점까지의 거리를 나타낸다. 따라서 이 경우 그림6.2와같이 한 초점이 원점에 위치한 타원이 얻어진다.

이 결과를 태양과 행성에 적용하면, 그림6.2의 타원 궤도는 태양을 원점으로 했을 때의 행성의 공전 궤도가 된다. 또한, 이 때 원점은 타원의 초점이기도 하므로, 케플러의 제1법칙이 증명된다. 행성이 태양에 가장 가까운 위치를 근일점, 가장 먼 점을 원일점이라 하는데, 그림6.2의 두  $x$ 절편이 근일점과 원일점이 되어,

$$r_{\min} = a - d = a(1 - \varepsilon) \quad (6.32)$$

$$r_{\max} = a + d = a(1 + \varepsilon) \quad (6.33)$$

이 각각 근일점과 원일점에서의 행성과 대상 사이의 거리가 된다.

장축과 단축의 비

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (6.34)$$

은 궤도의 형태를 결정하며,  $\varepsilon$ 의 값에 따라서 그림6.3과 같이 행성의 운동이 크게 달라진다.  $\varepsilon$ 을 이심률(eccentricity)라 하며, 이심률이 작을 수록 원에 가까운 타원이 되어,  $\varepsilon = 0$ 일 때는 완전한 원궤도가 된다. 반면에  $\varepsilon = 1$ 인 경우는 포물선 궤도가,  $\varepsilon > 1$ 인 경우에는 쌍곡선 궤도가 얻어져,  $\varepsilon \geq 1$ 인 경우에는 근일점에 접근한 후 무한대로 멀어진다.

### 6.3.2 제2법칙: 면속도 일정의 법칙

■ **면속도 일정의 법칙** 같은 시간동안 태양과 행성을 잇는 선분이 휩쓸고 가는 면적은 항상 일정하다.

여기서 행성이나 혜성이 휩쓸고 간 면적이란, 그림6.4의 초록색 부분 처럼, 위치 벡터  $\mathbf{r}$ 이 지나간 호에 대한 (타원)부채꼴의 면적을 가리킨다. 단위 시간당 휩쓸고 간 면적을

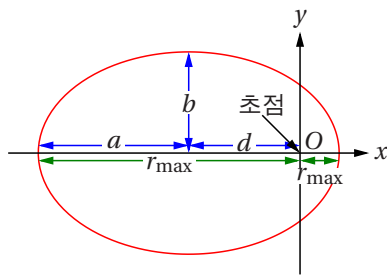


그림 6.2 중력에 의한 타원 궤도

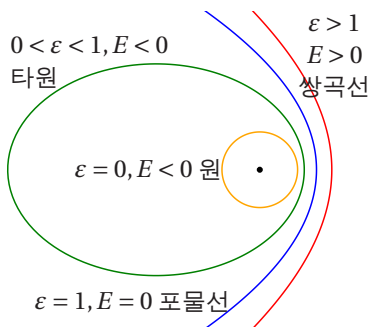


그림 6.3 이심률  $\varepsilon$ 과 행성 궤도

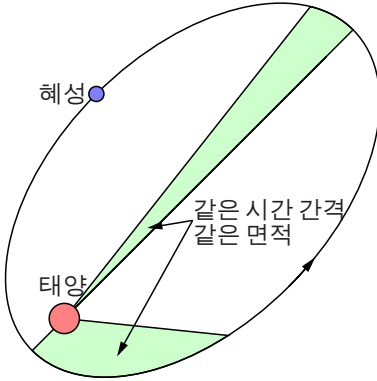


그림 6.4 케플러의 면속도 일정의 법칙

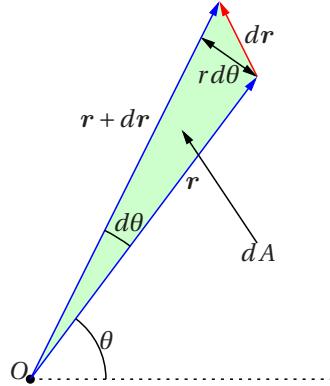


그림 6.5 순간 면속도

면속도(area velocity)라고 하며, 케플러의 면속도 일정의 법칙은 중력에 의해 운동하는 행성이나 행성의 면속도가 일정함을 나타낸다.

사실 면속도 일정의 법칙은 중력뿐만 아니라 중심력의 일반적인 성질임을 보일 수 있다. 미소 각도  $d\theta$ 만큼 회전했을 때의 면적 변화는 그림 6.5로부터,

$$dA = \frac{1}{2} \times r \times r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (6.35)$$

가 된다. 따라서 면속도는 다음과 같다.

#### ■ 면속도

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (6.36)$$

여기서 (5.22)로부터  $r^2 \dot{\theta} = L/\mu$ 이고, 이를 대입하면,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{const} \quad (6.37)$$

가 얻어진다. 중심력에 의한 운동은 각운동량이 보존되므로  $L$ 은 상수이고 면속도  $dA/dt$ 가 일정하다는 케플러의 제2법칙이 증명된다. 즉, 케플러의 면속도 일정의 법칙은 각운동량 보존 법칙과 동가라고 할 수 있다.

### 6.3.3 제3법칙: 조화의 법칙

■ 조화의 법칙 행성의 공전 주기  $T$ 의 제곱은 타원 궤도의 장축  $a$ 의 세제곱에 비례한다.

$$T^2 \propto a^3 \quad (6.38)$$

세 번째 법칙은 행성 운동의 주기에 대한 법칙이다. 조화의 법칙을 증명하기 위해서는 행성의 공전 주기를 구해야 한다.

행성의 운동은 면속도가 일정하므로 전체 공전 궤도면의 면적을 면속도로 나누면 주기가 된다. 타원의 전체 면적은  $A = \pi ab$ 이고, 면속도는 (6.37)로부터  $dA/dt = L/2\mu$ 이

므로, 주기  $T$ 는,

$$T = \frac{A}{dA/dt} = \frac{2\pi\mu ab}{L} \quad (6.39)$$

가 된다. 이 때, (6.22)와 (6.31)로부터,

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{ar_0} = L\sqrt{\frac{a}{\mu GMm}} \quad (6.40)$$

이고, 이를 (6.39)에 대입하여 양변을 제곱하면,

$$T^2 = \left( \frac{2\pi\mu a}{L} L\sqrt{\frac{a}{\mu GMm}} \right)^2 = \frac{4\pi^2\mu a^3}{GMm} \quad (6.41)$$

가 되어 주기의 제곱이 장축의 세제곱에 비례한다는 케플러의 제3법칙을 증명할 수 있다.

특히, 태양계에서 태양의 질량은 다른 행성들에 비해 훨씬 크기 때문에  $M \gg m$ 이고, 이 때  $\mu \simeq m$ 이라고 근사할 수 있다. 이를 이용하면,

$$T^2 \simeq \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Leftrightarrow T^2 a^{-3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const} \quad (6.42)$$

가 되어  $T^2 a^{-3}$ 이라는 값이 상수가 된다. 따라서 우리는 행성의 주기로부터 궤도의 장축을 예측하거나 그 반대로 가능하며, 또는 여러 행성에 대해서  $T$ 와  $a$ 를 관측하여 태양의 질량을 예측하는 것도 가능하다.

## 6.4 행성 운동에 대한 몇 가지 이야기

### 6.4.1 유한한 크기

엄밀하게 말하면 지금까지의 논의는 모두 질점의 운동에 대해서만 성립하는데, 당연히 실제 천체는 질점이 아니다. 단, 천체의 밀도가 일정한 구의 형태라고 가정하면, 천체의 중력은 천체의 중심에 놓인 질점에서의 한 중력과 같음을 증명할 수 있다. 이 증명에는 중력에 대한 가우스의 법칙을 활용하는데, 가우스의 법칙은 전자기학에서 자세히 다루어지기 때문에 구체적인 증명 과정은 생략하기로 한다. 또한, 실제로 천체들은 완전한 구형도 아니며 밀도가 일정하지도 않다. 그러나 행성의 운동 궤도에 비하면 행성이나 태양의 반경은 매우 작기 때문에 사실상 질점으로 간주할 수 있고, 지금까지의 논의가 잘 성립한다.

앞서 말했듯이, 행성의 표면은 완전한 구면이 아니다. 일반적으로 행성들은 자전의 영향으로 인해, 저위도일수록 표면에서 중심까지의 거리가 크고, 극으로 갈수록 작아진다. 이러한 구대칭성의 결여는 행성의 자전축에 영향을 준다. 예를 들어 지금으로부터 약 13000년전의 지구는 그림 6.6과 같이, 자전축이 현재의 기울어진 방향과 반대였다. 팽이의 회전축이 기울어져서 회전하듯이, 자전축도 매우 느린속도이지만 일정한 주기로 서서히 회전하며, 이러한 현상을 세차 운동이라 한다. 지구 자전축의 세차 운동은 약 26000년을 주기로 한다.

행성의 자전축과 수직한 평면을 자전면이라고 한다. 지구의 경우 자전 방향이 공전 방향과 일치하지만, 공전면과 자전면은 약 23도 어긋나 있다. 달의 경우, 달의 공전면은 지구의 공전면에서 5도 기울어져 있고, 달의 자전면은 공전면과 고각 1.5도 어긋나 있다. 또한, 달은 공전주기와 자전주기가 모두 27일로 일치하여 항상 지구에 같은 면을 향하고 있다.



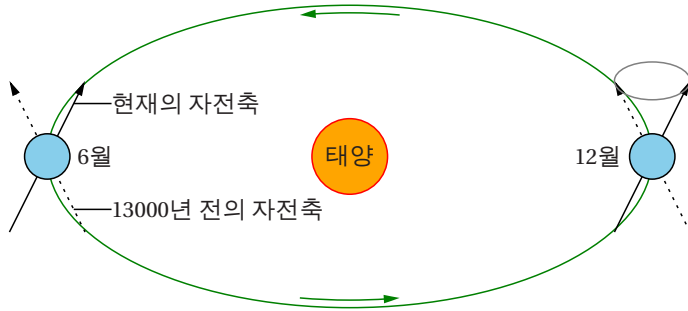


그림 6.6 지구의 세차 운동

### 6.4.2 열린 궤도

앞서 행성의 궤도는 총 역학적 에너지의 크기에 따라서 타원, 포물선, 쌍곡선의 세가지로 나뉜다고 설명하고,  $\varepsilon < 1$  인 경우에는 중력에 속박되어 닫힌 궤도(타원 궤도)를 그린다고 설명하였다. 반대로  $\varepsilon \geq 1$  인 경우에는 중력에 속박되지 않으며 이 때 궤도는 한쪽이 열려있게 된다. 단, 행성이란 항성의 중력에 속박되어 공전하는 천체를 가리키므로 엄밀하게 말하면 열린 궤도로 운동하는 천체는 행성이라 할 수 없다. 따라서 여기에서는 단순히 천체라 칭하기로 한다.

$\varepsilon = 1$  인 경우, 궤도 방정식은, (6.23)과 (6.29)로부터,

$$r = \frac{r_0}{1 + \cos\theta} \Leftrightarrow x = -\frac{y^2}{2r_0} + \frac{r_0}{2} \quad (6.43)$$

가 된다. 원일점은 존재하지 않으며(무한대), 근일점에서의 거리는  $r_{\min} = r_0/2$ 이다. (6.28)로부터, 포물선 궤도( $\varepsilon = 1$ )는 총 역학적 에너지가 0인 경우에만 실현될 수 있다.

$\varepsilon > 1$  인 경우에 마찬가지로 방법으로 궤도 방정식을 구하면 다음과 같은 쌍곡선의 방정식이 얻어진다.

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos\theta} \Leftrightarrow \frac{(x^2 - d^2)}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.44)$$

이 때,  $a, b, d$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$a = \frac{r_0}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \quad d = \frac{\varepsilon r_0}{\varepsilon^2 - 1} \quad (6.45)$$

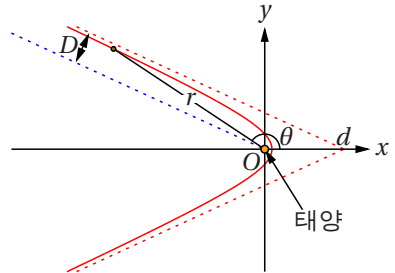


그림 6.7 쌍곡선 궤도

그림 6.7은 쌍곡선 궤도의 한 예를 나타낸다. 쌍곡선 (6.44)의 점근선은  $|x - d| \gg a, |y| \gg b$  인 경우로부터 다음과 같이 주어진다.

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - d) \quad (6.46)$$

천체가 쌍곡선 궤도를 그리기 위해서는 (6.28)로부터,  $E > 0$ 이어야 하며, 이를 위해서는 무한 원점에서 운동 에너지를 가져야 한다. 무한 원점에서 천체의 속력을  $v_\infty$ 라 하고,

접근선과 원점(태양)사이의 거리를  $D$ 라고 할 때, 계의 역학적 에너지와 각운동량의 크기(5.9 참고)는 각각,

$$E = T_{\infty} = \frac{1}{2}\mu v_{\infty}^2, \quad L = \mu D v_0 \quad (6.47)$$

이다. 여기서  $T_{\infty}$ 는 무한 원점에서 운동 에너지를 나타낸다. 이를 (6.18)에 대입하여  $\varepsilon$ 에 대하여 정리하면,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left( \frac{\mu D v_{\infty}^2}{GMm} \right)^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{T_{\infty}}{V(D)} \right)^2} \quad (6.48)$$

이 얻어진다. 위 결과에서  $D \neq 0 (\Leftrightarrow V(D) < \infty)$ 이고  $v_{\infty} > 0 (\Leftrightarrow T_{\infty} > 0)$ 이면  $\varepsilon$ 은 반드시 1보다 크다. 따라서 무한 원점에서(충분히 먼거리에서) 운동을 시작한 천체가 태양에 접근할 때의 궤도는 항상 쌍곡선이 된다.  $D$ 는 충돌 인자(impact parameter)라 불리는데,  $D=0$ 인 경우에 쌍곡선의 접근선이 원점을 통과하고, 천체의 궤도상에 태양이 놓여있으므로 천체가 접근하면 태양과 충돌하게 된다.  $v_{\infty}=0$ 인 경우에는 무한 원점에서 정지해 있으므로 천체가 운동하지 않는 상태를 나타낸다.

#### 6.4.3 위성 궤도

행성의 중력에 의해서 행성 주변을 돌고 있는 천체를 위성이라하며, 사람에 의해서 만들어진 인공물을 위성 궤도에 쏘아 올린 경우 인공 위성이라 칭한다. 질량이  $M$ , 반경이  $R$ 인 구형 행성에 대해서, 질량  $m$ 인 위성이 반경  $r$ 의 원 궤도를 그리기 위한 조건을 구해보자. 이 때, 위성의 궤도는 행성의 궤도 방정식 (6.23)에서  $\varepsilon=0$ 인 경우에 대응된다.

$$r = r_0 = \frac{L^2}{\mu GMm} = \frac{(\mu r^2 \dot{\theta})^2}{\mu GMm} \quad (6.49)$$

이로부터 각속도는,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{GMm}{\mu r^3} = \text{const} \quad (6.50)$$

을 만족한다. 따라서 위성은 등속 원운동을 하며, 이 때 위성의 속력을  $v_1$ 라하면,  $v_1 = r\dot{\theta}$ 이고,

$$v_1 = \sqrt{\frac{GMm}{\mu r}} \approx \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (6.51)$$

가 얻어진다. 여기서  $M \gg m$ 일 때,  $\mu \approx m$ 임을 이용하였다. 위 결과는 천체 주변에서 반경  $r$ 의 원궤도를 그리기 위한 최소 속력을 나타낸다.

지구의 표면에서 원궤도를 그리며 운동하기 위해서 필요한 속력을 제1우주 속도라 하며,  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ,  $M \approx 6.0 \times 10^{24} \text{kg}$ ,  $r \approx 6380 \text{km}$ 로부터  $v_1 \approx 7.9 \text{km/s}$ 가 얻어진다. 따라서 지구 주변을 돌고 있는 모든 인공 위성은 제1우주속도 7.9km/s보다 빠른 속도로 움직이고 있다. 또한, 인공 위성의 궤도중, 공전 주기가 지구의 자전주기 24시간과 일치하는 궤도를 특별히 정지 궤도라 하며, 지구에서 바라본 정지 궤도 상의 위성은 항상 같은 위치에 있기 때문에 정지 위성이라 불린다. 공전 주기가 24시간이 되기 위해서는 각속도가  $\dot{\theta} = 360^\circ/24\text{시간}$ 이면 되므로,

$$r \approx \left( \frac{GM}{\dot{\theta}^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 36000 \text{km} \quad (6.52)$$

가 얻어진다. 즉, 지구 중심으로부터 36000km떨어져서 원 운동하는 인공 위성은 모두 정지 위성이다.

### 6.4.4 탈출 속도

천체 표면의 물체는 천체의 중력에 속박되어있기 때문에 일정 크기 이상의 운동에너지가 없으면 천체의 중력으로부터 벗어날 수 없다. 이 때, 천체의 중력으로부터 벗어나기 위해서 필요한 최소한의 속도를 탈출 속도(escape velocity)라 한다. 천체의 중력으로부터 벗어나기 위해서는 역학적 에너지가 0 이상이어야 한다. 천체의 질량을  $M$ , 반경을  $R$ 이라 하고, 표면에서 질점  $m$ 의 물체를 속력  $v$ 로 쏘아올렸을 때 역학적 에너지는,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0 \quad (6.53)$$

이다. 이로부터,

$$v > v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (6.54)$$

가 얻어지며,  $v_0$ 가 탈출 속도가 된다.

탈출 속도  $v_0$ 는 물체의 질량에는 의존하지 않고 천체의 질량과 반경에만 의존한다. 지구의 탈출 속도를 제2우주 속도라 하며, 지구의 경우  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ,  $M \approx 6.0 \times 10^{24} \text{kg}$ ,  $R \approx 6380 \text{km}$ 로부터,  $v_0 \approx 11.2 \text{km/s}$ 가 얻어진다.



## 비관성계의 역학

## 7.1 관성력

관성계는 뉴턴의 운동 법칙이 성립하는 기준틀이다. 비관성계에서 뉴턴의 운동 법칙은 어떻게 수정되어야 하는지 살펴보기로 한다.

## 7.1.1 비관성계

그림 7.1과 같은 두 기준틀  $xyz$ 와  $x'y'z'$ 를 생각하자. 이 때  $xyz$ 는 정지 또는 등속 운동하는 관성계라 하고, 두 기준틀의 원점의 상대 좌표는  $\mathbf{R}$ 로 주어진다. 한 질점의 위치가  $xyz$  기준틀에서는 위치 벡터  $\mathbf{r}$ 로,  $x'y'z'$  기준틀에서는  $\mathbf{r}'$ 으로 나타내어 질 때, 이들 사이에는 다음의 변환식이 성립한다.<sup>1</sup>

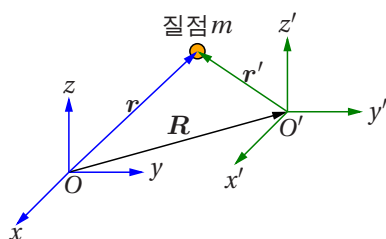


그림 7.1 두 기준틀에서 바라본 운동

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R} \quad (7.1)$$

따라서 속도와 가속도에서 대해서도 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}, \quad \ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}} \quad (7.2)$$

이 때, 두 기준틀에서 관측되는 질점  $m$ 에 작용하는 힘은 각각,

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}' = m\ddot{\mathbf{r}}' = m\ddot{\mathbf{r}} - m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} \quad (7.3)$$

과 같이 나타낼 수 있다.

$\ddot{\mathbf{R}} = 0$ 인 경우에는  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ 이며, 따라서 두 기준틀에서는 같은 힘을 관측하므로, 같은 운동 법칙이 성립한다. 이것이 지금까지 우리가 다뤄온 기준틀이 관성계인 경우이다. 반면에  $\ddot{\mathbf{R}} \neq 0$ 인 경우에는 두 기준틀에서 관측하는 힘이 달라지므로, 운동 법칙도 달라진다. 구체적으로,  $x'y'z'$  기준틀에서는  $xyz$  기준틀에서 관측되는 힘 외에, 추가로,

$$\mathbf{F}_{\text{관성력}} = -m\ddot{\mathbf{R}} \quad (7.4)$$

이 작용한다. 이처럼, 관성계에 대해서 가속 운동하는 기준틀에서만 관측되는 힘을 **관성력(inertial force)**이라 하며, 관성력은,

$$(\text{관성력}) = -(\text{질량}) \times (\text{기준계의 가속도}) \quad (7.5)$$

로 주어진다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

<sup>1</sup>그림 7.1에서 세 벡터의 관계를 살펴보라.

■ **관성력** 가속도  $A$ 로 운동하는 비관성계의 질점  $m$ 에는 다음의 관성력이 항상 작용한다.

$$F_{\text{관성력}} = -mA \quad (7.6)$$

■ **비관성계의 운동 방정식** 비관성계에서 질점에 알짜힘  $F$ 가 작용할 때 운동 방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{r} = F + F_{\text{관성력}} = F - mA \quad (7.7)$$

관성력이라는 이름은, 관성력이 관성 질량에 비례하는 것으로부터 유래되었다. 즉, 관성이 클수록 관성력도 크게 작용한다. 관성력의 대표적인 예는 가속/감속하는 엘리베이터 또는 차량 안에서 느껴지는 힘이다. 이 경우 실제로 힘을 가하는 주체가 없음에도 불구하고 기준틀(엘리베이터 또는 차량)가 가속(감속)하기 때문에 관성력을 받게 된다. 이 관성력은 작용의 주체가 없기 때문에 작용 반작용의 법칙이 적용되지 않는다.<sup>2</sup>

### 7.1.2 일정한 가속도의 경우

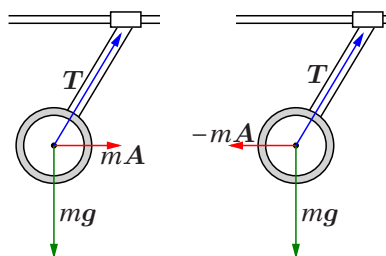


그림 7.2 일정한 가속도  $A$ 로 운동하는 열차 안의 손잡이를 열차 밖에서 본 경우(왼쪽)와 열차 안에서 본 경우(오른쪽)

일정한 가속도  $A$ 로 운동하고 있는 열차안에 매달린 손잡이를 생각하자. 그림 7.2에는 같은 상황을 열차의 밖에서 정지된 지면으로부터 바라본 경우와, 열차안에서 열차와 함께 이동하면서 바라본 경우가 그려져 있다. 손잡이 줄의 질량은 무시하기로 하자.

열차 밖에서 바라본 손잡이에 작용하는 힘은 손잡이 줄에 의한 장력  $T$ 과 중력  $mg$  두가지이다. 손잡이는 열차와 함께  $A$ 의 가속도로 운동하고 있으므로, 이 두가지 힘의 합력이  $mA$ 와 같다(왼쪽).

반면에 열차와 함께 이동하는 경우에는 손잡이는 기준틀에 대해서 정지해있으므로  $T + mg$ 를 상쇄할 수 있는 힘이 존재해야 한다. 이 힘이 바로 관성력  $-mA$ 에 해당한다. 따라서 열차 안의 관찰자는 장력과 중력과 관성력 세가지 힘에 의해서 알짜힘이 0인

상태를 관측하게 된다(오른쪽).

관성력은 가속 운동하는 계의 모든 질량에 작용하므로, 관찰자도 힘을 느낄 수 있다. 만약 관찰자가 자신이 열차 안에 있다는 것을 모르고 있다면, 관찰자는 사실상 **중력과 관성력을 구분할 수 없다**. 이 때, 관찰자가 느끼는 유효 중력은 다음과 같다.

$$mg_{\text{eff}} = mg - mA \quad (7.8)$$

## 7.2 회전하는 기준틀

### 7.2.1 각속도 벡터

회전 운동을 하기 위해서는 가속도가 필요하므로, 기준틀이 회전운동을 하는 경우에도 관성력이 관측될 수 있다. 여기에서는 일정한 각속도로 회전하는 기준틀을 가정한다.

<sup>2</sup> 운동 법칙이 성립하지 않는다는 의미에서 관성력은 가상의 힘(pseudo force)라고도 불리지만, 관성력도 엄연히 실재하는 힘이다.

이러한 운동을 논하는데에 유용한 **각속도 벡터**를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}}{\rho^2} = \omega \mathbf{e}_\omega; \quad \omega = \dot{\theta}, \quad \mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\theta \quad (7.9)$$

여기서  $\omega = \dot{\theta}$ 는 각속도를 나타내며,  $\boldsymbol{\rho}$ 는 그림 7.3과 같이 회전의 중심으로부터 위치 벡터  $\mathbf{r}$ 로 뺀 벡터로 모멘트 팔(moment arm)이라고 한다.  $\mathbf{e}_\rho$ 는  $\boldsymbol{\rho}$ 방향의 단위 벡터를 나타내고,  $\mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\theta$ 는 회전면에 수직인 회전축 방향의 단위 벡터를 나타낸다.

그림 7.3의 경우, 회전축이  $z$ 축과 평행하므로  $\mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_z$ 이고, 모멘트 팔  $\boldsymbol{\rho}$ 는 그와 수직하므로  $xy$ 면과 평행하다. 회전축( $\mathbf{e}_\omega$ )과 위치 벡터( $\mathbf{r}$ )의 사잇각을  $\phi$ 라하면,

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_\rho = r \sin \phi \mathbf{e}_\rho \quad (7.10)$$

의 관계가 성립한다. 이 때, 일정한  $\mathbf{r}$ 과  $\boldsymbol{\rho}$ 는 같은 각속도로 등속 원운동을 하고 있으므로,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} = \rho \omega \mathbf{e}_\theta \quad (7.11)$$

이다. 이 때 다음의 매우 유용한 관계식이 성립한다.

#### ■ 속도와 각속도의 관계

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \quad (7.12)$$

이 관계식은 벡터 삼중곱 (1.34)의 성질을 이용하여 다음과 같이 간단히 증명된다.

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \omega (\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\theta) \times \rho \mathbf{e}_\rho = \omega \rho (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho) \mathbf{e}_\theta = \omega \rho \mathbf{e}_\theta = \mathbf{v} \quad (7.13)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega (\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\theta) \times r \mathbf{e}_r = \omega r (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\rho) \mathbf{e}_\theta = \omega r \sin \phi \mathbf{e}_\theta = \omega \rho \mathbf{e}_\theta = \mathbf{v} \quad (7.14)$$

그림 7.3을 통해 벡터들의 위치 관계를 확인하라.

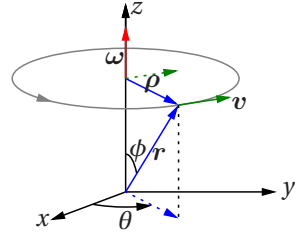


그림 7.3 각속도 벡터  $\boldsymbol{\omega}$ 에 대한 위치 관계

### 7.2.2 회전 기준틀의 각속도

그림 7.4와 같은 상황을 생각하자.  $xyz$  기준틀은 정지(또는 등속 운동)하고 있고,  $x'y'z'$  기준틀은  $z$ 축을 회전축으로하여  $xyz$  기준틀에 대해서 각속도 벡터  $\boldsymbol{\omega}_0$ 로 회전하고 있다. 두 기준틀의 원점은 같고,  $z$ 축과  $z'$ 은 일치한다. 이 때,  $\boldsymbol{\omega}_0$ 로 회전하는 기준틀  $x'y'z'$ 에 대해서 각속도 벡터  $\boldsymbol{\omega}_1$ 로 회전하는 질점이 있다고 하자.

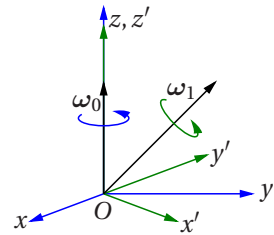


그림 7.4 회전하는 기준틀

$xyz$  기준틀에 대한  $x'y'z'$  기준틀의 상대속도를  $\mathbf{v}_0$ 라 하고,  $x'y'z'$  기준틀에 대한 질점의 상대 속도를  $\mathbf{v}_1$ 이라 하자. 이때,  $xyz$  기준틀에 대한 질점의 속도를  $\mathbf{v}$ 라하면,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad (7.15)$$

의 관계가 성립한다. 두 기준틀은 원점을 공유하므로, 질점의 위치는 하나의 벡터  $\mathbf{r}$ 로 나타낼 수 있다. 위 식에 회전 운동에 대한 각속도 벡터의 관계식 (7.12)를 적용하면,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7.16)$$

가 얻어진다.  $\mathbf{v}$ 와  $\mathbf{r}$ 은 모두  $xyz$  기준틀에 대한 물리량이므로,  $\boldsymbol{\omega}$ 는  $xyz$  기준틀에서 바라본 질점의 각속도 벡터에 해당한다. 즉, 속도 벡터와 마찬가지로 두 기준틀에 대한 각속도 벡터는 상대 운동의 식을 만족한다.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_1 \quad (7.17)$$

예를 들어 회전하는 원반 위에서 회전 축을 수평으로 팔을 뻗어 돌리면, 원반 밖에서 바라본 팔의 각속도 벡터는 원반의 각속도 벡터와, 원반에 대한 팔의 각속도 벡터의 합으로 나타내어진다.

### 7.2.3 속도 변환 규칙

원점이 일치하는 두 기준틀  $xyz$ 와  $x'y'z'$ 에 대해서, 하나의 질점이  $xyz$  기준틀 위치 벡터  $\mathbf{r}$ 로,  $x'y'z'$  기준틀에서 위치 벡터  $\mathbf{r}'$ 으로 나타내어진다고 하자. 이 때,  $x'y'z'$ 이  $xyz$ 에 대해서 일정한 각속도 벡터  $\boldsymbol{\omega}$ 로 회전하고 있을 때, 두 기준틀의 속도는  $\boldsymbol{\omega}$ 를 이용하여 어떻게 변환할 수 있는지를 찾아보자.

두 기준틀의 원점이 일치하므로  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 이다. 따라서,

$$\mathbf{r} = xe_x + ye_y + ze_z = \mathbf{r}' = x'e_{x'} + y'e_{y'} + z'e_{z'} \quad (7.18)$$

이 성립한다. (7.12)를  $e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}$ 에 대해 적용하면,

$$\dot{e}_{x'} = \boldsymbol{\omega} \times e_{x'}, \quad \dot{e}_{y'} = \boldsymbol{\omega} \times e_{y'}, \quad \dot{e}_{z'} = \boldsymbol{\omega} \times e_{z'} \quad (7.19)$$

가 얻어진다. 이제  $\mathbf{r}'$ 의 시간 미분을 계산하면,

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \dot{x}'e_{x'} + \dot{y}'e_{y'} + \dot{z}'e_{z'} + x'\dot{e}_{x'} + y'\dot{e}_{y'} + z'\dot{e}_{z'} \quad (7.20)$$

$$= \dot{\mathbf{r}}' + x'(\boldsymbol{\omega} \times e_{x'}) + x'(\boldsymbol{\omega} \times e_{x'}) + x'(\boldsymbol{\omega} \times e_{x'}) \quad (7.21)$$

$$= \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (7.22)$$

가 얻어진다. 여기에서,

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \neq \dot{\mathbf{r}}' = \dot{x}'e_{x'} + \dot{y}'e_{y'} + \dot{z}'e_{z'} \quad (7.23)$$

임에 주의하라. 위 식에서  $\dot{\mathbf{r}}'$ 은  $x'y'z'$ 와 함께 회전하고 있는 관찰자가 관측할 수 있는 속도이다. 즉, 관찰자에 대해서 기준틀이 정지했을 때의 속도에 해당한다. 특히 이 결과는 임의의 벡터  $\mathbf{x}$ 에 대해서도 성립하므로 회전 기준계의 운동을 계산할 때 매우 유용하다.

#### ■ 회전 기준틀의 벡터 $\mathbf{x}$ 의 시간 미분

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (7.24)$$



한편,  $\mathbf{r}$ 의 시간 미분은,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z = \dot{\mathbf{r}} \quad (7.25)$$

이고,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 로부터,  $d\mathbf{r}'/dt = d\mathbf{r}/dt$ 이다. 따라서 다음의 관계식을 얻는다.

■ 정지 기준틀에 대한 속도  $\mathbf{r}$ 과 회전 기준틀에 대한 속도  $\dot{\mathbf{r}}'$ 의 관계식

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (7.26)$$

다시 한 번  $d\mathbf{r}'/dt \neq \dot{\mathbf{r}}'$ 임에 주의하고,  $\dot{\mathbf{r}}'$ 의 정의를 확인하라.

### 7.2.4 가속도 변환 규칙

속도에 대한 변환 규칙을 다시 시간으로 한번 더 미분하면 가속도에 대한 변환식을 얻을 수 있다.  $\mathbf{r}$ 에 대한 가속도는,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z \quad (7.27)$$

와 같고,  $\mathbf{r}'$ 에 대한 가속도는,

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{d\dot{\mathbf{r}}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (7.28)$$

$$= \ddot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (7.29)$$

$$= \ddot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (7.30)$$

가 얻어진다. 여기서  $\boldsymbol{\omega}$ 는 일정하므로 그 시간 미분은 0이라는 점과,  $x'y'z'$  기준틀에 대한 임의의 벡터에 대해서 (7.24)가 성립함을 이용하였다. 속도의 경우와 마찬가지로,

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \neq \ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{x}\mathbf{e}_{x'} + \ddot{y}\mathbf{e}_{y'} + \ddot{z}\mathbf{e}_{z'} \quad (7.31)$$

임에 주의하라.  $\ddot{\mathbf{r}}'$ 은  $x'y'z'$  기준틀에 대해 정지해있는(기준틀과 같은 각속도로 회전하고 있는) 관찰자가 관측하는 가속도이다. 이상으로 부터, 두 기준틀의 가속도는 다음의 식으로 연결된다.

■ 정지 기준틀에 대한 가속도  $\ddot{\mathbf{r}}$ 과 회전 기준틀에 대한 가속도  $\ddot{\mathbf{r}}'$ 의 관계식

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (7.32)$$

## 7.3 회전 기준틀의 관성력

가속도의 변환식에 질점의 질량  $m$ 을 곱하면 힘에 대한 변환식이 얻어진다.

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (7.33)$$

이를 회전하는 기준틀의 입장에서 쓰면,

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega} \quad (7.34)$$

와 같다. 여기서  $\mathbf{F}$ 는 누군가가(혹은 무엇인가가) 질점에 가하는 외력으로, 기준틀의 회전 여부와 상관없이 존재하며, 작용 반작용의 법칙이 성립하는 힘이다. 반면에 뒤의 두 항은 계의 각속도가 유한한 경우에만 존재하는 관성력으로, 각각 코리올리 힘( $\dot{\mathbf{r}}'$ 에 의존)과 원심력( $\mathbf{r}'$ 에 의존)라는 이름이 붙어있다.

### 7.3.1 코리올리 힘

#### ■ 코리올리 힘(Coriolis force)

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' \quad (7.35)$$

코리올리 힘은  $\boldsymbol{\omega}$ 와  $\dot{\mathbf{r}}'$ 의 외적으로 정의되므로, 항상 속도와 기준틀의 각속도에 대해 수직으로 작용한다.

코리올리 힘은 기준틀에 대한 질점의 속도  $\dot{\mathbf{r}}'$ 에 비례하기 때문에,  $\dot{\mathbf{r}}' = 0$ 인 경우에는 관측되지 않는다. 따라서 코리올리 힘은 회전하는 기준틀에서 유한한 속도를 가지고 운동하는 질점에게만 작용하는 관성력이다.

### 7.3.2 원심력

#### ■ 원심력(centrifugal force)

$$\mathbf{F}_F = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega} \quad (7.36)$$

그림 7.5와 같이 계의 회전축과 위치 벡터의 사이 각을  $\phi$ 라하고 벡터 삼중곱 (1.34)을 이용하여 원심력을 계산하면,

$$\mathbf{F}_F = m[(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}' - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \boldsymbol{\omega}] \quad (7.37)$$

$$= m\omega^2 (r' \mathbf{e}_r - r' \cos \phi \mathbf{e}_\omega) \quad (7.38)$$

$$= m\omega^2 \underbrace{r' \sin \phi}_{\rho} \mathbf{e}_\rho = m\omega^2 \rho \quad (7.39)$$

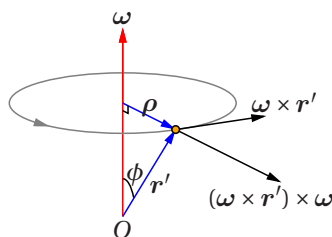


그림 7.5 원심력의 방향

여기서  $\rho$ 는  $\boldsymbol{\omega}$ 에 수직이고  $\mathbf{r}'$ 을 가리키는 벡터이다(그림 7.5 참고). 따라서 원심력은 계의 회전축으로부터 수직으로 질점을 향해 뺄어나가는 쪽을 향한다.  $\dot{\mathbf{r}}' = 0$ 인 경우, 질점에 작용하는 외력은 (7.34)로부터,

$$0 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_F \Leftrightarrow \mathbf{F} = -\mathbf{F}_F = -m\omega^2 \rho \quad (7.40)$$

가 되며, 이는 반경  $\rho$ , 각속도  $\omega$ 로 등속 원운동하는 질점의 구심력(centripetal force)과 같다. 즉, 회전계에 대해서 정지해있는 질점은, 구심력과 원심력이 평형을 이룬 상태이며, 정지한 기준틀에서 바라보면 단순히  $-\mathbf{F}_F$ 의 구심력으로 등속 원운동하고 있는 것으로 관찰된다.

## 7.3.3 지구 표면에서 작용하는 힘

지구는 하루에 한번 자전하기때문에, 지표면은 비관성계이다. 지구의 각속도 벡터는 남극에서 북극을 향하는 자전축에 평행하며, 그 크기는

$$\omega = 360^\circ / \text{하루} \approx 7.27 \times 10^{-5} \text{s}^{-1} \quad (7.41)$$

이다. 지구는 회전계이기 때문에 지구의 표면에서도 지구 자전에 의해 회전계의 두가지 관성력, 코리올리 힘과 원심력이 작용한다. 여기에서는 지구를 구로 가정하고 이 두가지 효과를 살펴보기로 한다.

지구 표면에 작용하는 원심력 지구 중력에 영향을 미친다. 지표면에 정지해있는 물체는 지구 질량에 의한 만유 인력  $\mathbf{F}_G$ 와 지구 자전에 의한 원심력  $\mathbf{F}_F$  두가지 힘을 받는다. 따라서, 정지한 물체가 느끼는 유효적인 중력은,

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F \quad (7.42)$$

와 같고, 이 방향은 그림 7.6에 표시된 것처럼, 지구 중심을 향하는 동경 벡터와 약간 어긋나게 된다. 원심력은 위도에 따라서 달라진다. 지구의 반경을  $R$ , 질점의 위도를  $\theta$ 라 했을 때 원심력의 크기는,

$$|\mathbf{F}_F| = m\omega^2 \rho = m\omega^2 R \cos \theta \quad (7.43)$$

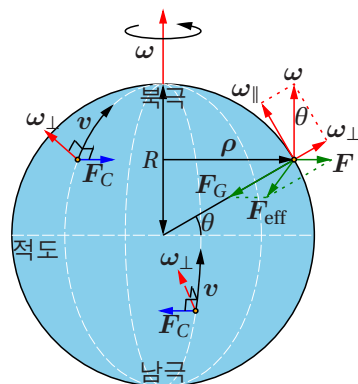


그림 7.6 지구 표면의 운동

와 같고, 따라서 적도 부근( $\theta = 0$ )에서 최대가 되고

극지방으로 갈 수록 작아진다. 특히 자전축 위에 놓인 북극점과 남극점에서 질점에게 원심력은 작용하지 않는다. 단, 원심력과 만유 인력의 비는 매우 작아서, 이 최대가 되는 적도 지방에서도 그 비는,

$$\frac{|\mathbf{F}_F|}{|\mathbf{F}_G|} = \frac{\omega^2 R}{GM/R^2} \approx 3.43 \times 10^{-3} \quad (7.44)$$

정도뿐이 되지 않는다. 따라서 지구 표면에서의 중력은 정밀한 측정을 제외하고는 거의 일정하다고 할 수 있다.

한 편, 지표면에서 운동하는 물체에는 코리올리 힘이 작용하게 된다. 지표면에서의 속도를  $\mathbf{v}$ 라 하면 그림 7.6처럼, 지구의 자전 각속도 벡터  $\omega$ 를 지표면에 수직한 각속도 성분  $\omega_\perp$ 와 평행한 각속도 성분  $\omega_\parallel$ 로 나누어서 코리올리 힘을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}_C = -2m\omega \times \mathbf{v} = -2m\omega_\perp \times \mathbf{v} - 2m\omega_\parallel \times \mathbf{v} \quad (7.45)$$

이 때,  $\omega_\parallel$ 과  $\mathbf{v}$ 는 모두 지표면에 평행하므로, 두 번째 항의  $\omega_\parallel \times \mathbf{v}$ 는 지표면에 수직한 방향인데, 이 방향은 지구 중력의 영향이 훨씬 크기 때문에 지표면의 운동에 영향을 미치는 것은 첫 번째 항이다.

$$\mathbf{F}_C = -2m\omega_\perp \times \mathbf{v} \quad (7.46)$$

이 벡터는 항상 지표면과 평행하고 속도에 수직이다. 이 때  $\mathbf{F}_C$ 의 방향은 그림 7.6과 같이 남반구와 북반구에서 방향이 반대가 된다. 북반구에서는  $\omega_\perp$ 는 지표면에서 대기로 수직으로 뻗어나오는 방향이기 때문에  $\mathbf{F}_C$ 는  $\mathbf{v}$ 에 대해 오른쪽 방향으로 작용하고, 남반구에서는  $\omega_\perp$ 는 지표면에서 지하로 수직으로 뚫고 들어가는 방향이기 때문에  $\mathbf{F}_C$ 는  $\mathbf{v}$ 에

대해 왼쪽으로 작용한다. 한편,  $|\omega_{\perp}| = |\omega| \sin \theta$ 이므로, 지표면에서 코리올리 힘의 크기  $|F_C| = 2mv\omega \sin \theta$ 이다. 와 같다. 따라서 적도에서는 코리올리 힘의 효과는 최소가 되고 극지방에서 최대가 된다. 이는 적도지방에서는 자전축이 지표면과 평행한 반면에 극지방에서는 지표면에 수직이 되는 것으로부터 쉽게 이해할 수 있다.

지표면에서 코리올리 힘의 크기는

$$|F_C| = 2mv\omega \sin \theta \quad (7.47)$$

와 같고, 방향은 운동방향에 대해서 북반구에서는 오른쪽, 남반구에서는 왼쪽으로 작용한다.

## 강체의 운동

### 8.1 강체의 회전 운동

강체란 구성 입자들의 상대적 위치가 변하지 않는 이삭적인 물체를 가리킨다. 입자들의 상대적인 위치가 고정되어 있으므로 강체는 외력이나 내력에 의해서 부피나 형태가 변하지 않는다. 여기에서는 강체의 회전 운동을 살펴보기로 한다.

#### 8.1.1 고정축에 대한 회전

고정축에 대한 회전이란, 회전축의 방향이 고정된 회전을 가리킨다. 여기서 고정되는 것은 방향뿐이므로, 방향이 고정된 채로 평행 이동(병진 운동)하는 것은 허용된다.

강체를 구성하는 여러 입자들 중  $i$ -번째 입자의 운동에 주목하기로 한다. 그림 8.1처럼 회전축은  $z$ 축으로 잡는다. 강체는 구성 입자의 상대 좌표가 변하지 않으므로, 모든 입자들은 같은 각속도를 공유한다. 회전의 각속도 벡터와 속도 벡터 사이에는 다음의 관계가 성립한다(7.2.1절 참고).

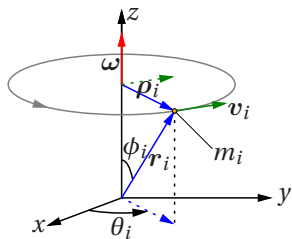


그림 8.1 고정축에 대한 회전

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i \quad (8.1)$$

여기서 회전축으로부터 수직으로 뻗은 벡터  $\boldsymbol{\rho}_i$ 를 **모멘트 팔**(arm of moment) 벡터라 하며, 그 크기는 회전 반경과 같다. 각운동량의  $z$ 성분에만 주목하면, 그에 수직인 평면에 대한 회전 반경은 모멘트 팔과 같으므로 질점의 각운동량의  $z$ 성분은,

$$L_{iz}e_z = m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{v}_i = m_i \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) = m_i \rho_i^2 \boldsymbol{\omega} = m_i \rho_i^2 \omega e_z \quad (8.2)$$

와 같고, 따라서 강체 전체의 각운동량의  $z$ 성분은,

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left( \sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega \quad (8.3)$$

가 된다. 여기서 **관성 모멘트**(moment of inertia)를 다음과 같이 정의한다.

#### ■ 질점계의 관성 모멘트

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad [\text{kgm}^2] \quad (8.4)$$

관성 모멘트를 이용하면  $L_z$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L_z = I\omega \quad (8.5)$$

구체적인  $I$ 는 질량 중심과 마찬가지로 강체의 질량 분포에 따라서 달라진다.

입자계 대신 강체와 같은 일반적인 물체의 경우에는  $m_i$  대신 미소 질량  $dm$ 에 대한 회전 반경의 제곱을 적분하여 구할 수 있다.

### ■ 강체의 관성 모멘트

$$I = \int \rho^2 dm = \iiint_V (\rho(r))^2 \rho_M(r) dV \quad (\rho_M(r): \text{질량 밀도 분포}) \quad (8.6)$$

밀도가 균일한 경우 밀도는 강체의 질량  $M$ 과 부피  $V$ 를 이용하여  $\rho_M = M/V$ 로 쓸 수 있고, 강체의 관성 모멘트는 강체의 회전축을  $z$ 축으로 잡으면

$$I = \rho_M \iiint_V (x^2 + y^2) dV = \frac{M}{V} \iiint_V (x^2 + y^2) dV \quad (8.7)$$

와 같다.

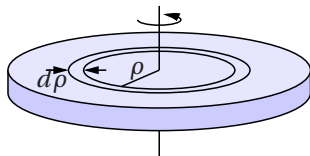
관성 모멘트의 차원은 질량과 길이의 제곱의 곱이다. 따라서 균일한 밀도의 강체의 관성 모멘트는 적당히 변형하면 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$I = Mk^2 \quad (8.8)$$

여기서  $k$ 는 길이의 차원을 가지는 양으로, **(단면) 회전 반경**(radius of gyration 또는 gy-radius) 또는 **(단면) 2차 반경** 등으로 불린다. 지금까지 회전 반경이라는 용어를 회전의 중심으로부터 질점까지의 거리로 이용해왔기 때문에, 여기에서는  $k$ 를 2차 반경으로 칭하기로 한다.

### 8.1.2 관성 모멘트의 계산

몇 가지 형태의 물체에 대해 관성 모멘트를 계산해보자. 먼저, 오른쪽 그림과 같이 원반의 회전축이 중심을 수직으로 지날 때의 관성 모멘트를 계산하기로 한다. 원반의 반경은  $R$ 이고 질량은  $M$ 이다. 원반의 면밀도를  $\rho_M = M/A$  ( $A = \pi R^2$ )라 할 때, 회전축으로부터 반경  $\rho$ , 두께  $d\rho$ 만큼 떨어진 고리의 미소 부피는, 원주와 두께의 곱으로 나타낼 수 있고, 따라서 이 부분의 미소 질량은



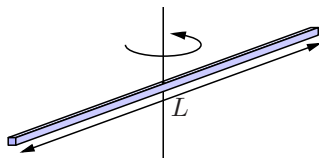
$$dm = \rho_M \times 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho_M\rho d\rho = \frac{2M}{R^2}\rho d\rho \quad (8.9)$$

와 같다. 이로부터, 관성 모멘트는

$$I = \int \rho^2 dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{2}MR^2 \quad (8.10)$$

이 된다.  $k = R/\sqrt{2}$ 라 하면,  $I = Mk^2$ 이라 쓸 수 있으므로, 원반의 2차 반경은  $R/\sqrt{2}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 길이  $L$ 의 막대가, 중심을 수직으로 지나는 축에 대하여 회전할 때의 관성 모멘트를 구해보자. 막대의 질량을  $M$ 이라 하면 막대의 선밀도는  $\lambda = M/L$ 과 같고, 회전축으로부터 위치  $x$ 의 미소 질량은,



$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx \quad (8.11)$$

이다. 따라서 관성 모멘트는,

$$I = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ML^2 \quad (8.12)$$

가 된다. 이 때 막대의 2차 반경은  $k = L/\sqrt{12}$ 이다.

앞의 문제와 같은 막대에서, 회전축이 막대의 중심이 아니라 막대의 끝에서 직교하는 경우에는 적분 구간을  $[-L/2, L/2]$ 에서  $[0, L]$ 로 바꾸기만 하면 된다.

$$I = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2 \quad (8.13)$$

이 경우의 2차 반경은  $k = L/\sqrt{3}$ 이 된다.

### 8.1.3 평행축 정리

다음의 등식을 평행축 정리(parallel axis theorem)라 한다.

#### ■ 평행축 정리

$$I = I_{\text{COM}} + MR^2 \quad (8.14)$$

여기서  $M$ 은 강체의 질량을,  $I_{\text{COM}}$ 은 질량 중심을 지나는 회전축에 대한 관성 모멘트를,  $R$ 은 질량 중심으로부터 회전축의 거리를 나타낸다. 평행축 정리는 질량 중심을 통과하는 회전축에 대한 관성 모멘트를 알고 있을 때, 임의의 평행한 다른 회전축에 대한 관성 모멘트를 구할 수 있게 해준다.

평행축 정리는 입자계에 대한 관성 모멘트의 식으로부터 간단히 증명된다. 문제의 상황은 8.1.1절과 동일하다. 이 때 관성 모멘트는 다음과 같다.

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (8.15)$$

위 식을 질량 중심에 대한 관성 모멘트로 나타내면 된다. 회전축에 대한 질량 중심을 지나는 축의 상대 좌표를  $\mathbf{R}$ , 질량 중심 축에 대한 질점  $m_i$ 의 모멘트 팔을  $\rho'_i$ 이라 할 때, 회전축에 대한  $m_i$ 의 모멘트 팔은,

$$\rho_i = \mathbf{R} + \rho'_i \quad (8.16)$$

와 같다. 따라서,

$$I = \sum_i m_i (\rho'_i + \mathbf{R})^2 = \sum_i m_i (\rho_i'^2 + 2\rho'_i \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}^2) \quad (8.17)$$

$$= \overbrace{\sum_i m_i \rho_i'^2}^{I_{\text{COM}}} + 2\mathbf{R} \cdot \sum_i m_i \rho'_i + \left( \overbrace{\sum_i m_i}^M \right) \mathbf{R}^2 \quad (8.18)$$

과 같이 변형할 수 있다. 이 때 두번째항은,

$$\sum_i m_i \rho'_i = \sum_i m_i (\rho_i - \mathbf{R}) = \overbrace{\sum_i m_i \rho_i}^{M\mathbf{R}} - \overbrace{\sum_i m_i}^M \mathbf{R} = 0 \quad (8.19)$$

이 된다. 따라서 다음의 평행축 정리를 얻는다.

$$I = I_{\text{COM}} + MR^2 \quad (8.20)$$

앞의 절의 마지막 문제를 평행축 정리로 풀어보자. 질량 중심을 지나는 축에 대한 막대의 관성 모멘트는,

$$I_{\text{COM}} = \frac{1}{12}ML^2 \quad (8.21)$$

이고 질량 중심과 막대끝의 거리는  $L/2$ 이다. 따라서 막대 끝에 대한 관성 모멘트는,

$$I = I_{\text{COM}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \quad (8.22)$$

가 되어 (8.13)와 일치한다.

## 8.2 순회전 운동

순회전 운동이란 회전축이 시간에 따라 변하지 않는 회전 운동을 말한다. 이 때, 회전축은 병진 운동도 허용되지 않는다.

### 8.2.1 각운동량과 토크

순회전을 포함하여 일반적으로 고정축에 대한 회전 운동의 각운동량의  $z$ 성분은 (8.5)로 주어진다.

$$L_z = I\omega \quad (8.23)$$

따라서 토크의  $z$ 성분은 다음과 같다.

$$\tau_z = \dot{L}_z = \frac{d}{dt}(I\omega) \quad (8.24)$$

이 때, 순회전 운동에서 회전축은 변하지 않으므로 관성 모멘트는 상수이라고,

$$\tau_z = I \frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta} = I\alpha \quad (8.25)$$

와 같다. 여기서  $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ 는 각가속도이다.

### 8.2.2 일과 운동 에너지

질점계의 운동 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (8.26)$$

여기에 회전 운동의 관계식  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ 를 대입하면,

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i|^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (8.27)$$



물리량	강체의 회전 운동	질점의 병진 운동
각운동량/운동량	$L_z = I\omega$	$p = mv$
토크/힘	$\tau_z = \dot{L}_z = I\ddot{\theta}$	$F = \dot{p} = m\ddot{r}$
일	$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta$	$W = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr$
운동 에너지	$T = \frac{1}{2} I\omega^2$	$T = \frac{1}{2} mv^2$

표 8.1 강체의 회전 운동과 질점의 병진 운동의 대응 관계

가 된다. 이 때, 각속도 벡터와 모멘트 팔은 항상 수직임을 이용하였다.

한편, 질점계의 일은,

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \quad (8.28)$$

과 같다. 여기서  $\mathbf{F}_i$ 는  $i$ -번째 질점에 가해지는 힘이다. 여기에,

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \Leftrightarrow d\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i dt \quad (8.29)$$

를 대입한 후, 스칼라 삼중곱의 성질을 이용하면,

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) dt = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\omega} dt \quad (8.30)$$

와 같이 변형할 수 있다.  $\boldsymbol{\tau}_i$ 는  $i$ -번째 질점에 가해지는 토크이고, 질점계 전체의 토크는  $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$ 와 같다. 따라서, 총 일의 양은,

$$W = \int \sum_i dW_i = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta \quad (8.31)$$

이다.

한편,  $\tau = I\dot{\omega}$ 로부터,

$$W = I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\omega}{dt} d\theta = I \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\theta}{dt} \cdot d\omega = I \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2 \quad (8.32)$$

와 같다. 따라서 회전하는 강체에 가해진 일은 회전 운동 에너지의 변화량과 같으며, 이는 일-에너지 정리의 회전 운동 버전이라고 할 수 있다.

### 8.2.3 강체의 회전 운동과 질점의 병진 운동의 유사성

표8.1는, 앞에서 유도한 결과들을 병진 운동에서 대응하는 양을 이용하여 비교한 것으로, 강체의 회전축을  $z$ 축으로 잡은 경우이다. 두 가지 운동 사이에서 같은 혹은 대응되는 물리량의 표현이 매우 닮아 있음을 알 수 있다. 강체의 회전 운동과 질점의 병진 운동 사이에 대응되는 관계는 다음과 같다.

#### ■ 회전 운동과 병진 운동의 대응 관계

$$I \leftrightarrow m, \quad \theta \leftrightarrow r, \quad \omega \leftrightarrow v, \quad L_z \leftrightarrow p, \quad \tau_z \leftrightarrow F \quad (8.33)$$

이들 사이에 공유되는 물리량은 대응 관계에 따라서 치환하면 자유롭게 변환될 수 있다. 예를 들어, 질점의 병진 운동 에너지에서 질량을 관성 모멘트로, 속도를 각속도로 바꾸면 강체의 회전 운동에 대한 운동 에너지가 얻어진다. 토크와 각가속도의 관계는 회전 운동에 대한 뉴턴의 제2운동 법칙이라고 할 수 있다.

이 대응 관계는 지금까지 우리가 도입해온 물리량들의 의미를 더욱 명확하게 해준다. 특히 관성 모멘트에 '관성'이라는 이름이 들어간 것은, 관성 질량이라는 명칭과 대응된다. 질량이 클수록 가속도를 얻기 위해 더 큰 힘이 필요하듯이, 관성 모멘트가 클수록 각가속도를 얻기 위해 더 큰 토크가 필요하다. 같은 속도라면 질량이 큰 쪽이 운동 에너지가 더 크듯이, 같은 각속도라면 관성 모멘트가 큰 쪽이 운동 에너지가 더 크다.

### 8.3 복합 운동

여기에서는 일반적인 강체의 운동을 다룬다. 강체는 회전과 병진 운동을 함께 할 수 있다. 강체의 운동에 대해서는 다음의 두가지 일반적인 정리가 존재한다.

- 오일러의 정리(Euler's theorem) 하나의 고정점을 가지는 강체의 변위는 한 축에 대한 회전으로 나타낼 수 있다.(단, 회전을 지정하지 위해서 3개의 각이 필요)
- 샤슬레의 정리(Chasles's theorem) 강체의 임의의 변위는 질량 중심의 병진 운동과 질량 중심에 대한 회전 운동으로 분리할 수 있다.

이 정리들에 대한 자세한 설명은 여러가지 교과서<sup>1</sup>에서 찾을 수 있다. 여기에서는 이와 관련된 정리들을 강체보다 더 일반적인 질점계에 대해서 증명할 것이다.

#### 8.3.1 각운동량

2.3.2절에서 질점계에 가해지는 힘에 의한 운동은, 질량 중심의 운동으로 나타낼 수 있음을 보였다. 여기서는 같은 상황에 대해서 각운동량을 계산해보기로 한다. 질점계의 각운동량  $L$ 과 질량 중심  $R$ 은 각각 다음과 같다.

$$L = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i; \quad M = \sum_i m_i \quad (8.34)$$

$M$ 은 질점계 전체의 질량이다. 질량 중심으로부터 질점의 상대 위치를  $\mathbf{r}'_i$ 이라 하면,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$ 이고, 각운동량은 다음과 같이 전개된다.

$$L = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) \quad (8.35)$$

$$= \mathbf{R} \times \underbrace{\sum_i m_i}_{M} \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i}_{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0} + \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{R}}}_0 + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \quad (8.36)$$

여기서,

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}_{M\mathbf{R}} - \sum_i m_i \mathbf{R} = 0 \quad (8.37)$$

<sup>1</sup>Classical Mechanics, H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, Pearson Education, 2006, p. 155

이다. 따라서,

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} + \sum_i \mathbf{r}' \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \quad (8.38)$$

가 얻어진다. 위식의 첫 번째 항과 두 번째 항은 각각 다음과 같이 해석할 수 있다.

$$\mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} = (\text{질량 중심}) \times (\text{질량 중심의 운동량}) = (\text{질량 중심의 각운동량}) \quad (8.39)$$

$$\sum_i \mathbf{r}' \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \sum_i (\text{질량 중심에 대한 변위})_i \times (\text{질량 중심에 대한 운동량})_i \quad (8.40)$$

$$= \sum_i (\text{질량 중심에 대한 질점의 각운동량})_i \quad (8.41)$$

그러므로 질점계의 각운동량은, 질량 중심의 각운동량과 질량 중심을 원점으로 한 질점들의 각운동량(질량 중심에 대한 상대적인 각운동량)으로 분리할 수 있다. 위 계산 과정에서  $\dot{\mathbf{R}}$ 이나  $\dot{\mathbf{R}}$ 에 대해 어떤 가정도 하지 않았고, 이들이 0이 아니더라도 위 식들은 성립한다. 위 식이 성립하기 위한 조건은  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 가 성립하기 위해서 기준틀의 원점만 고정되어 있으면 된다.

(8.38)을 그대로 강체에 대해 적용할 수 있다. 이 경우 첫 번째항은 질량 중심이 그리는 궤도, 즉 원점에 대한 공전의 각운동량이 되고, 두 번째항은 강체의 질량 중심에 대한 회전, 즉 자전에 대한 각운동량이 된다.

#### ■ 강체의 각운동량

$$\mathbf{L} = \overbrace{\mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}}^{\text{궤도 각운동량}} + \overbrace{\sum_i \mathbf{r}' \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i}^{\text{스핀 각운동량}} \quad (8.42)$$

이 때 전자를 궤도 각운동량(orbital angular momentum)이라 부르고, 후자를 스핀(자전) 각운동량(spin angular momentum)이라 부른다. 특히 회전축의 방향이  $z$ 축에 평행하게 고정된 경우, 각운동량의  $z$ 성분은,

$$L_z = (\mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}})_z + \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i)_z = MR^2\omega_O + I_{\text{COM}}\omega_S \quad (8.43)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서  $\omega_O$ 는 궤도 각속도,  $\omega_S$ 는 스핀 각속도를 나타내며,  $I_{\text{COM}}$ 은 질량 중심에 대한 회전의 관성 모멘트를 나타낸다. 여기서 질량 중심의 관성 모멘트를  $I_O = MR^2$ 이라고 하면 각운동량은,

$$L_z = I_O\omega_O + I_{\text{COM}}\omega_S \quad (8.44)$$

와 같이 나타내어 진다.

이 결과를 이용하여 태양 주위를 도는 지구의 각운동량을 계산해볼 수 있다. 계산에 필요한 양들은 다음과 같다.

$$\begin{cases} (\text{자전 각속도}) = \omega_O = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \\ (\text{공전 각속도}) = \omega_S = 2.0 \times 10^{-7} \text{ rad/s} \end{cases} \quad \begin{cases} (\text{지구 반경}) = R_E = 6380 \text{ km} \\ (\text{공전 반경}) = R_O = 1.5 \times 10^{11} \text{ m} \\ (\text{지구 질량}) = M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg} \end{cases}$$

계산을 간단하게 하기 위해서 지구는 밀도가 일정한 구로 가정하고, 지구의 공전 궤도도 원으로 가정한다. 태양을 원점으로 하여 공전면에 수직한 방향을  $z$ 축으로 잡고, 지구의

자전축도  $z$ 축에 평행한 것으로 한다. 밀도가 균일한 구의 중심을 지나는 회전축에 대한 관성 모멘트는,

$$I_{\text{COM}} = \frac{2}{5}MR^2 \quad (8.45)$$

과 같다. 따라서, 지구의 각운동량의  $z$ 성분은,

$$L_z = I_O\omega_O + I_{\text{COM}}\omega_S = MR_O^2\omega_O + \frac{2}{5}MR_E^2\omega_S \quad (8.46)$$

$$= 2.7 \times 10^{40} \text{kgm}^2\text{s}^{-1} + 7.2 \times 10^{33} \text{kgm}^2\text{s}^{-1} \quad (8.47)$$

과 같고, 궤도 각운동량은 스핀 각운동량에 비해 약 380만배 크다. 이 비율은,

$$\frac{L_O}{L_S} = \frac{I_O\omega_O}{I_{\text{COM}}\omega_S} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{365} \times \left(\frac{R_O}{R_E}\right)^2 = 3.8 \times 10^6 \quad (8.48)$$

와 같이 계산할 수도 있다.

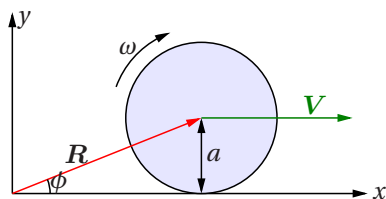


그림 8.2 굴러가는 원반

또다른 연습 문제로, 그림8.2와같이 지면에서 굴러가는 원반의 운동을 생각하자. 더 일반적으로, 원반의 질량 중심이  $y = h$ 인 직선을 따라서 속도  $\mathbf{R} = \mathbf{V} = (V, 0, 0)$ 로 병진 운동하고, 원반은 질량 중심에 수직인 축에 대해서 각속도  $\omega$ 로 회전하는 경우에 대해 원반의 각운동량을 구하기로 한다. 원반의 반경은  $a$ , 질량은  $M$ 이다. 원반의 질량 중심에 대한 관성 모멘트는,

$$I_{\text{COM}} = \frac{1}{2}Ma^2 \quad (8.49)$$

이다. 질량 중심의 위치를  $\mathbf{R}$ 이라 하면, 질량 중심의 궤도 각운동량은 다음과 같다.

$$L_O = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} = -MV \overbrace{[\mathbf{R}] \sin \phi}^{=R_y=h} \mathbf{e}_z = -hMV\mathbf{e}_z = ahM\omega\mathbf{e}_z \quad (8.50)$$

$$L_S = I_{\text{COM}}\omega\mathbf{e}_z = \frac{1}{2}Ma^2\omega\mathbf{e}_z \quad (8.51)$$

여기서  $V = -a\omega$ 임에 주의하라. 그림8.2처럼 시계 방향으로 회전할 경우에는  $\omega < 0$ 이고  $V > 0$ 이며, 궤도 각운동량과 스핀 각운동량은 모두  $-\mathbf{e}_z$ 방향이다. 이로부터 총 각운동량은,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_O + \mathbf{L}_S = Ma \left( h + \frac{1}{2}a \right) \omega \mathbf{e}_z \quad (8.52)$$

와 같다. 그림8.2처럼  $x$ 축 위를 굴러가는 원반의 경우에는  $h = a$ 이고

$$\mathbf{L} = \frac{3}{2}Ma^2\omega\mathbf{e}_z \quad (8.53)$$

가 된다. 만약 질량 중심이  $x$ 축을 따라 운동하는 경우에는  $h = 0$ 이고,

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}Ma^2\omega\mathbf{e}_z$$

가 되며, 질량 중심은 오로지 병진 운동만을 하므로 궤도 각운동량은 0이다. 한편으로  $h = -a/2$ 인 경우에는 궤도 각운동량과 스핀 각운동량이 정확히 상쇄하여,

$$\mathbf{L} = 0 \quad (8.54)$$

이 얻어진다.

## 8.3.2 토크

각운동량과 마찬가지로, 질점계의 운동에 대한 토크를 계산할 수 있다. 토크의 정의로부터,

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \right) \quad (8.55)$$

$$= \overbrace{\dot{\mathbf{R}} \times M\dot{\mathbf{R}}}^{=0} + \mathbf{R} \times M\ddot{\mathbf{R}} + \sum_i \left( \overbrace{\dot{\mathbf{r}}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i}^{=0} + \mathbf{r}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \right) \quad (8.56)$$

$$= \mathbf{R} \times M\ddot{\mathbf{R}} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \quad (8.57)$$

가 된다. 첫 번째 항은,

$$\mathbf{R} \times M\ddot{\mathbf{R}} = (\text{질량 중심}) \times (\text{질량 중심에 가해진 힘}) = (\text{질량 중심의 토크})$$

이고, 두 번째 항은,

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i &= \sum_i (\text{질량 중심에 대한 위치})_i \times (\text{질량 중심에 대한 가속도})_i \\ &= \sum_i (\text{질량 중심을 원점으로 한 토크})_i \end{aligned}$$

와 같다. 따라서 우리는 토크도 각운동량과 마찬가지로 질량 중심의 토크와 질량 중심에 대한 상대적인 토크로 나눌 수 있다.

## ■ 강체의 토크

$$\mathbf{L} = \overbrace{\mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}}^{\text{궤도 토크}} + \overbrace{\sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i}^{\text{스핀 토크}} \quad (8.58)$$

질량 중심에 대한 토크,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{COM}} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \quad (8.59)$$

는 원점에 전혀 의존하지 않는다. 따라서 우리는 질량 중심에 대한 상대적인 운동에만 관심이 있는 경우(예: 행성의 자전), 질량 중심의 운동을 무시하고 위 방정식을 풀기만 하면 된다. 특히 강체에 대해서는 회전 축에 평행하게  $z$ 축을 설정하면,

$$\tau_{\text{COM}z} = I_{\text{COM}} \dot{\omega} \quad (8.60)$$

과 같이 회전의 운동 방정식은 매우 단순하게 표현된다.

## 8.3.3 운동 에너지

질점계의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i \quad (8.61)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{V}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad (8.62)$$

여기서  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ 은 질량 중심의 속도를 나타내고,  $\mathbf{v}'_i = \dot{\mathbf{r}}'_i$ 는 질량 중심에 대한 질점의 상대 속도를 나타낸다. 따라서 우리는 질점계의 운동 에너지를 질량 중심의 운동 에너지와 질량 중심에 대한 상대 운동의 운동 에너지로 분리할 수 있다.

상대 운동의 운동 에너지는 질량 중심에 대한 스핀 각속도  $\omega_S$ 를 이용하여

$$T_{\text{COM}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega_S \times \rho'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \rho_i'^2 \omega_S^2 = \frac{1}{2} I_{\text{COM}} \omega_S^2 \quad (8.63)$$

와 같이 변형하여 질량 중심에 대한 회전 운동 에너지로 나타낼 수 있다. 따라서 총 운동 에너지는,

## ■ 강체의 운동 에너지

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{\text{궤도 운동 에너지}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{\text{COM}} \omega_S^2}_{\text{스핀 운동 에너지}} \quad (8.64)$$

가 되어, 질량 중심의 운동 에너지(궤도 운동 에너지)와 질량 중심에 대한 회전 운동 에너지(스핀 운동 에너지)로 분리할 수 있다.

## 8.3.4 복합 진자

그림 8.3처럼 강체의 한 점이 고정된 채로 매달려서 중력에 의해 흔들리는 진자를 복합 진자라 한다. 이하의 계산은 복합 진자의 구체적인 형태에 의존하지 않는다.

복합 진자에 작용하는 힘은 중력이다. 중력 가속도를  $\mathbf{g}$ 라고 할 때, 질량 중심에 대한 토크는  $\boldsymbol{\tau}_O = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}$ 와 같다. 한편, 질량 중심에 대한 토크는,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{COM}} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{g} = \sum_i \overbrace{m_i \mathbf{r}'_i}^0 \times \mathbf{g} = 0 \quad (8.65)$$

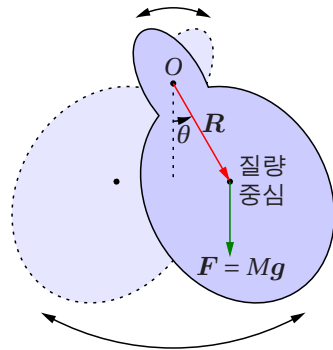


그림 8.3 복합 진자

와 같다. 따라서 복합 진자에 작용하는 토크는 질량 중심의 운동만으로 나타낼 수 있다. 지면을 뚫고 나오는 방향을  $+z$ 방향으로 하면,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g} = -RMg \sin \theta \mathbf{e}_z; \quad R = |\mathbf{R}|, \quad g = |\mathbf{g}| \quad (8.66)$$

가 된다.  $\theta$ 는 반시계 방향으로 증가할 때  $\theta > 0$ 임에 주의하라. 한편으로  $\tau = \dot{L}$ 로부터,

$$\tau_z = \dot{L}_z = I\ddot{\theta} \quad (8.67)$$

이다.  $I$ 는 원점 주변의 회전에 대한 관성 모멘트이다. 따라서, 운동 방정식은 다음과 같 이 나타낼 수 있다.

$$I\ddot{\theta} = -MgR\sin\theta \quad (8.68)$$

질량 중심에 대한 관성 모멘트를 2차 반경  $k$ 를 이용하여

$$I_{\text{COM}} = Mk^2 \quad (8.69)$$

이라 쓰면 평행축 정리로부터,

$$I = I_{\text{COM}} + MR^2 = M(k^2 + R^2) \quad (8.70)$$

이 얻어진다. 이를 이용하여 운동 방정식을 다시 쓰면,

$$\ddot{\theta} = -\frac{gR}{(k^2 + R^2)}\sin\theta \quad (8.71)$$

가 된다.  $\theta \ll 1$ 인 경우에는  $\sin\theta \approx \theta$ 로 근사할 수 있고, 이 때, 운동 방정식은,

$$\ddot{\theta} \approx -\omega^2\theta; \quad \omega = \sqrt{\frac{gR}{k^2 + R^2}} \quad (8.72)$$

가 되어  $\theta$ 는 각진동수  $\omega$ 로 조화 진동함을 알 수 있다.

### 8.3.5 비스듬히 회전하는 막대

그림 8.4와 같이 두 질점이 원점에 대해서 대칭으로 기울어진 막대끝에 고정되어 고정축에 대해 회전하는 운동을 생각하기로 한다. 질점의 질량은  $m$ 으로 같고, 막대의 길이는  $2l$ 이며,  $\omega$ 는 일정하다. 계의 각운동량은,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \quad (8.73)$$

이 된다. 두 질점은 원점에 대해서 대칭이므로,

$$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \Leftrightarrow \mathbf{L} = 2\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 \quad (8.74)$$

와 같이 총 각운동량은 한 질점의 각운동량의 2배가 된다.  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1$ 과 평행한 단위 벡터를  $\mathbf{e}$ 라고 쓰면,

$$\mathbf{L} = 2|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1|\mathbf{e} = 2lm|\dot{\mathbf{r}}_1|\mathbf{e} \quad (8.75)$$

$$= 2l^2m\omega\sin\psi\mathbf{e} = 2l^2m\omega\cos\phi\mathbf{e} \quad (8.76)$$

가 된다. 이 때  $\mathbf{L}$ 의 종점은  $\omega$ 와 수직인 원을 그리면서 회전한다.

토크  $\boldsymbol{\tau}$ 는,  $\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$ 이고,  $\mathbf{L}$ 의 종점은 등속 원운동을 하므로,  $\boldsymbol{\tau}$ 와  $\mathbf{L}$ 의 관계는 등속원운동하는 질점의 위치와 속도의 관계와 같다. 따라서,

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \omega L \sin\phi \mathbf{e}_\theta \quad (8.77)$$

가 얻어진다.  $\mathbf{e}_\theta$ 는 회전 단면의 단위 접선 벡터, 즉 질점의 속도와 평행한 단위 벡터이고,  $L = 2l^2m\omega\cos\phi$ 이다.  $\boldsymbol{\tau}$ 는 회전 단면안에서  $\mathbf{L}$ 의 종점을 따라서 회전한다.

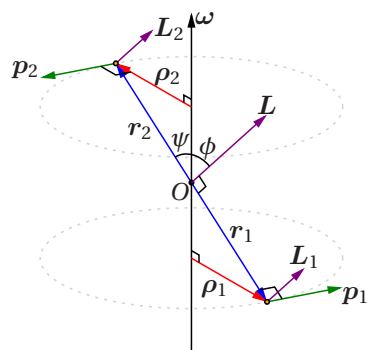


그림 8.4 원점 대칭인 두 질점의 회전 운동

## 8.3.6 자이로스코프

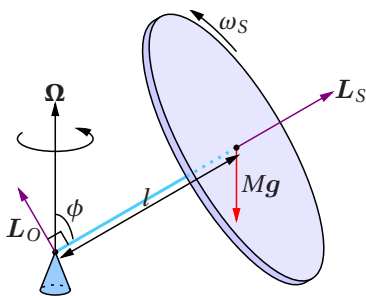


그림 8.5 자이로스코프

그림 8.5와 같이 막대의 한쪽 끝은 받침대에, 다른 한쪽 끝은 원반의 중심에 위치한 자이로스코프(gyroscope)의 운동을 생각하자. 막대는 받침대에 대해서  $\phi$  기울어진 채로 각속도  $\Omega$ 로 회전하고, 동시에 원반은 막대 끝에서 각속도  $\omega_S$ 로 회전하고 있다. 만약 회전 운동이 없다면 원반에 작용하는 중력으로 인해 떨어지겠지만,  $\Omega$ 가 크다면 일정한 각도  $\phi$ 를 이룬 채 계속 회전할 수 있다. 여기에서는 자이로스코프가  $\phi$ 의 각도를 이루고 회전하기 위한 각속도  $\Omega$ 를 구해보자.

자이로스코프의 각운동량은 질량 중심의 궤도 각운동량  $L_O$ 와 질량 중심에 대한 원반의 스핀 각운동량  $L_S$ 로 나눌 수 있다.

$$L = L_O + L_S \quad (8.78)$$

궤도 각운동량은 질량 중심에 위치한 질점의 각운동량과 같다.

$$L_O = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times M(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = M \overbrace{|\mathbf{R}|}^l \overbrace{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}|}^{\Omega l} \sin \phi \mathbf{e}_O = Ml^2 \Omega \sin \phi \mathbf{e}_O \quad (8.79)$$

여기서  $\mathbf{e}_O$ 는  $L_O$  방향의 단위 벡터로, 그림 8.5에 표시한 대로 막대에 수직이다. 한편, 원반의 질량 중심에 대한 운동은 고정축에 대한 회전이므로 볼 수 있고, 질량 중심에 대해 대칭이므로 스핀 각운동량  $L_S$ 는 원반에 수직인 성분, 즉  $\omega_S$ 와 평행한 성분만이 존재한다.

$$L_S = I_{\text{COM}} \omega_S \quad (8.80)$$

여기서  $\omega_S$ 는 막대와 평행하므로  $L_S$ 도 막대와 평행하다.

8.3.4절에서 보였듯이, 중력은 질량 중심에 대한 토크에 기여하지 못한다. 따라서 자이로스코프의 토크는,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g} \quad (8.81)$$

가 된다. 토크는 각운동량으로 나타내면 시간 미분에 대응된다. 이 때, 각운동량벡터도 각각  $\boldsymbol{\Omega}$ 의 각속도로 회전하므로,

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{L}_O + \mathbf{L}_S) \quad (8.82)$$

가 성립한다.

(8.81)로부터 구해지는 토크의 크기는,

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{R} \times M\mathbf{g}| = Mgl \sin \phi \quad (8.83)$$

이다. 한편, (8.82)의 크기는,

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{L}_O + \mathbf{L}_S)| = |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_S| \quad (8.84)$$

가 되는데, 여기서  $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}_O, \mathbf{L}_S$ 는 모두 하나의 평면안에 있으므로,  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_O$ 와  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_S$ 는 평행하다. 따라서,

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_O| + |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_S| \quad (8.85)$$



이고, 첫 번째 항은 (8.79)로부터,

$$|\mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}_O| = \Omega |\mathbf{L}_O| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = Ml^2 \Omega^2 \sin\phi \cos\phi \quad (8.86)$$

가 되고, 두 번째 항은 (8.80)으로부터,

$$|\mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}_S| = \Omega |\mathbf{L}_S| \sin\phi = I_{\text{COM}} \Omega \omega_S \sin\phi \quad (8.87)$$

가 된다. 이상으로부터 다음과 같은  $\Omega$ 에 대한 2차 방정식을 얻을 수 있다.

$$Mgl = Ml^2 \Omega^2 \cos\phi + I_{\text{COM}} \Omega \omega_S \quad (8.88)$$

이 방정식의 0보다 큰 해는,

$$\Omega = \frac{I_{\text{COM}} \omega_S}{2Ml^2 \cos\phi} \left( \sqrt{1 + \frac{4M^2 l^3 g \cos\phi}{I_{\text{COM}}^2 \omega_S^2}} - 1 \right) \quad (8.89)$$

이다. 특히  $\phi \sim \pi/2$  일 때,  $\cos\phi \ll 1$  이고,

$$\Omega \simeq \frac{Mlg}{I_{\text{COM}} \omega_S} = \frac{|\tau|}{|\mathbf{L}_S| \sin\phi} \quad (8.90)$$

가 된다.

이 결과는 자이로스코프의 형상에 의존하지 않는다. 따라서 자이로스코프 뿐만이 아니라 **기울어진 회전축을 가지는 모든 회전체**는 이처럼 **회전축이 회전**하는 운동을 한다고 할 수 있다. 이러한 회전축의 운동을 **세차 운동**(precession)이라 하며, 예를 들어 쉽게 접할 수 있는 팽이도 회전축이 기울어지면 회전축이 흔들리면서 회전하는 세차 운동을 하게 된다.

### 8.3.7 고립계의 각운동량 보존

외력이 존재하지 않는 고립계에서 상호 작용하는 질점계의 각운동량을 구해보자. 질점  $i$ 가 질점  $j$ 에게 받는 힘을  $\mathbf{F}_{ij}$ 라 했을 때, 질점  $i$ 가  $j$ 에게 받는 토크는,

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \quad (8.91)$$

이다. 반대로  $j$ 가  $i$ 에게 받는 토크는 작용 반작용의 법칙으로부터,

$$\mathbf{G}_{ji} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} \quad (8.92)$$

이고, 따라서, 두 토크의 합은,

$$\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} \quad (8.93)$$

가 된다.

만약  $\mathbf{F}_{ij}$ 가  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 와 평행하다면, 이는 곧 질점간의 상호 작용이 중심력임을 나타내고, 토크는 0이되어 각운동량이 보존된다. 이 논의는 임의의  $N$ 입자계로 확장될 수 있으므로, **중심력으로 상호 작용하는 질점계의 각운동량은 보존됨**을 알 수 있다.

한편, 상호 작용이 중심력이 아닌 경우에는 각운동량이 보존되지 않는다. 예를 들어 두 전자의 스핀에 의한 상호 작용은 중심력이 아니고, 각운동량이 보존되지 않는다. 그러나 전자기장의 각운동량을 도입하면 각운동량이 보존되게 정식화하는 것이 가능하다.

## 8.4 관성 텐서

### 8.4.1 임의의 회전에 대한 각운동량

임의의 축에 대해  $\omega$ 의 각속도로 회전하는 강체의 스핀 각운동량 또는 질량 중심에 대한 각운동량은 (8.42)로부터 다음과 같다.

$$\mathbf{L}_{\text{COM}} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{r}'_i = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i [\mathbf{r}'_i{}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}'_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}'_i] \quad (8.94)$$

여기에,

$$\mathbf{r}'_i = (x_i, y_i, z_i), \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad (8.95)$$

를 대입하면,

$$\mathbf{L}_{\text{COM}} = \sum_i m_i \begin{bmatrix} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_x \\ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_y \\ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_z \end{bmatrix} - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (8.96)$$

$$= \sum_i m_i \begin{pmatrix} (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - z_i x_i \omega_z \\ -x_i y_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z \\ -z_i x_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \end{pmatrix} \quad (8.97)$$

$$= \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -z_i x_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \equiv \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (8.98)$$

가 얻어진다. 여기서 행렬  $\mathbf{I}$ 는 관성 모멘트 텐서(moment of inertia tensor) 또는 관성 텐서(inertia tensor)라고 불리며, 다음과 같이 정의되어 있다.

#### ■ 관성 텐서

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (8.99)$$

$I_{ij} = I_{ji}$ 이므로  $\mathbf{I}$ 는 대각선에 대해 대칭인 **대칭 행렬**( $\mathbf{I}^t = \mathbf{I}$ )이므로, 독립적으로 지정될 수 있는 성분은 9개가 아니라 6개이다. 강체의  $\mathbf{I}$ 를 구하면 임의의 축에 대한 각운동량을 구하는 것이 가능하다.  $x_i, y_i, z_i$ 는 질량 중심에 대한 상대 좌표임에 주의하라.

$\mathbf{I}$ 의 성분  $I_{ij}$ 에 대해서, 열번호  $i$ 는 각운동량의  $i$ 방향 성분을, 열번호  $j$ 는 각속도의  $j$ 방향 성분을 나타낸다. 따라서,  $I_{ij}$ 는  $L_i$ 에 대한  $\omega_j$ 의 기여를 나타낸다. 예를 들어 **대각 성분**  $I_{xx}$ 를 보면,

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i (x\text{축으로부터의 거리})_i^2 = (x\text{축에 대한 관성 모멘트})$$

와 같다. 마찬가지로 다른 대각성분인  $I_{yy}$ 와  $I_{zz}$ 도 각각의 축에 대한 **관성 모멘트**를 나타낸다. 반면에, **비대각 성분**은 관성 모멘트의 형태로 나타낼 수 없는데, 이들을 **관성곱**(product of inertia)이라 부른다. 임의의 방향에 대한 회전의 각운동량을 구하기 위해서는 관성 텐서와 각운동량의 곱을 계산해야 되며, 예를 들어 각운동량의  $x$ 성분은  $I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y +$

$I_{xz}\omega_z$ 와 같이 각속도의 모든 방향 성분과 함께 하나의 관성 모멘트( $I_{xx}$ )와 두개의 관성 곱( $I_{xy}, I_{xz}$ )가 필요하다. 각속도 벡터가 특정 방향을 향하는 경우, 예를 들어  $\omega = (0, 0, \omega)$ 라고 하면,

$$\mathbf{L}_{\text{COM}} = \mathbf{I}\omega = (I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega) \quad (8.100)$$

이다. 각속도가  $z$ 축을 향하는 경우에도 일반적으로 각운동량은  $x, y, z$  축 성분을 모두가질 수 있다. 이로부터 관성 텐서의 비대각 성분(관성곱)은 축에서 벗어난 각운동량의 성분을 나타냄을 알 수 있다.

예로 그림 8.6과 같이 양 끝에 질량  $m$ 의 질점이 하나씩 붙어있는 길이  $2l$ 의 막대의 관성 텐서를 계산해보자. 이 때 질량 중심은 막대의 한가운데이고,  $y$  축은 지면을 뚫고 나오는 방향이다. 두 질점은  $xz$  평면에 놓여 있으며, 막대와  $z$ 축 사이의 각을  $\theta$ 로 두면, 두 질점의 위치는 각각,

$$(x_1, y_1, z_1) = (l \cos \theta, 0, -l \sin \theta) \quad (8.101)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (-l \cos \theta, 0, l \sin \theta) \quad (8.102)$$

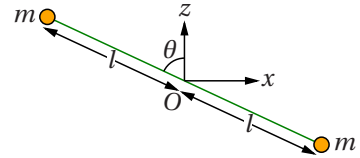


그림 8.6 기울어진 막대

이고, 관성 텐서의 성분은 다음과 같다.

$$I_{xx} = m(y_1^2 + z_1^2) + m(y_2^2 + z_2^2) = 2ml^2 \cos^2 \theta \quad (8.103)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -mx_1y_1 - mx_2y_2 = 0 \quad (8.104)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -mx_1z_1 - mx_2z_2 = ml^2 \sin 2\theta \quad (8.105)$$

$$I_{yy} = m(x_1^2 + z_1^2) + m(x_2^2 + z_2^2) = 2ml^2 \quad (8.106)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -my_1z_1 - my_2z_2 = 0 \quad (8.107)$$

$$I_{zz} = m(x_1^2 + y_1^2) + m(x_2^2 + y_2^2) = 2ml^2 \sin^2 \theta \quad (8.108)$$

따라서 막대의 관성 텐서는,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2ml^2 \cos^2 \theta & 0 & ml^2 \sin 2\theta \\ 0 & 2ml^2 & 0 \\ ml^2 \sin 2\theta & 0 & 2ml^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (8.109)$$

가 된다. 만약 이 막대가  $\omega = (0, 0, \omega)$ 의 각속도로 회전하면,

$$\mathbf{L}_{\text{COM}} = \mathbf{I}\omega = ml^2\omega (\sin 2\theta, 0, 2\sin^2 \theta) = 2ml^2\omega \sin \theta (\cos \theta, 0, \sin \theta) \quad (8.110)$$

가 얻어진다. 따라서  $\mathbf{L}_{\text{COM}}$ 은 크기가  $2ml^2\omega \sin \theta$ 이고  $x$ 축에 대해  $\theta$ 만큼 기울어진 방향을 향한다. 이 때  $z$ 축과 막대도  $\theta$ 만큼 기울어져 있으므로  $\mathbf{L}_{\text{COM}}$ 은 막대와 수직이다. 이 결과는 8.3.5절의 결과와 일치한다.

### 8.4.2 일반화된 평행축 정리

질량 중심의 위치가  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 이고, 질량 중심에 대한 질점의 상대 좌표가  $\mathbf{r}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$ , 원점으로부터의 질점의 위치가  $\mathbf{r}_i = (x, y, z)$ 일 때, 이들 사이에는,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \Leftrightarrow \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \quad (8.111)$$

이 성립한다. 이를 이용하여 원점에 대한 관성 텐서를  $\mathbf{r}_i$ 와  $\mathbf{R}$ 로 나타낼 수 있다. 예를 들어  $I_{xx}$ 는,

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) = \sum_i m_i \left[ (y_i' + Y)^2 + (z_i' + Z)^2 \right] \quad (8.112)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2)}_{I_{xx}^{\text{COM}}} + \underbrace{\sum_i m_i (Y^2 + Z^2)}_M + 2 \underbrace{\sum_i m_i y_i' Y}_{=0} + 2 \underbrace{\sum_i m_i z_i' Z}_{=0} \quad (8.113)$$

$$= I_{xx}^{\text{COM}} + M(Y^2 + Z^2) \quad (8.114)$$

가 얻어진다. 여기서  $I_{xx}^{\text{COM}}$ 는 질량 중심에 대한 관성 텐서  $\mathbf{I}_{\text{COM}}$ 의  $xx$ 성분을 나타낸다. 관성곱의 예로는,

$$I_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i = - \sum_i m_i (x_i' + X)(y_i' + Y) \quad (8.115)$$

$$= - \underbrace{\sum_i m_i x_i' y_i'}_{I_{xy}^{\text{COM}}} - \underbrace{\sum_i m_i XY}_M - \underbrace{\sum_i m_i x_i' Y}_{=0} - \underbrace{\sum_i m_i y_i' X}_{=0} \quad (8.116)$$

$$= I_{xy}^{\text{COM}} - MXY \quad (8.117)$$

가 된다. 마찬가지로 방법으로 계산을 반복하면, 원점에 대한 관성 텐서  $\mathbf{I}$ 는  $\mathbf{I}_{\text{COM}}$ 을 이용하여 다음과 같이 나타내어짐을 알 수 있다.

#### ■ 일반화된 평행축 정리

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\text{COM}} + M[\mathbf{R}]^2 \quad (8.118)$$

이 때,  $M[\mathbf{R}]^2$ 은 질량 중심의 좌표  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 를 관성 텐서의 성분처럼 표현한 행렬이다.

$$M[\mathbf{R}]^2 = \begin{pmatrix} M(Y^2 + Z^2) & -MXY & -MXZ \\ -MYX & M(Z^2 + X^2) & -MYZ \\ -MZX & -MZY & M(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} \quad (8.119)$$

(8.118)은 평행축 정리를 관성 텐서로 확장한 일반화된 평행축 정리이다. 이를 이용하여 우리는 질량 중심에 대한 관성 텐서로부터 임의의 좌표  $\mathbf{R}$ 만큼 이동된 축에 대한 관성 텐서를 계산할 수 있다.

#### 8.4.3 수직축 정리

얇고 평평한 강체(형태는 상관없다)의 경우, 평면을  $xy$ 평면에 놓고  $z$ 축을 강체의 평면과 수직이 되게 설정하면,

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i y_i^2 \quad (8.120)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 \quad (8.121)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \underbrace{\sum_i m_i x_i^2}_{I_{yy}} + \underbrace{\sum_i m_i y_i^2}_{I_{xx}} \quad (8.122)$$

이 된다. 따라서 수직축 정리라고 불리는 다음 등식을 얻을 수 있다.

#### ■ 수직축 정리

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \quad (8.123)$$

수직축 정리는 **평평한 강체의 관성 모멘트**를 계산할 때 편리하다. 예를 들어 원점에 중심을 둔 평평한 원반(질량  $M$ , 반경  $R$ )의 경우, 원반에 수직하고 중심을 지나는 축( $z$  축으로 놓는다)에 대한 관성 모멘트는,

$$I_{zz} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (8.124)$$

이다(절8.1.2 참고). 이 때,  $xy$ 평면에서 원반은 원대칭이므로  $x$ 축에 대한 관성 모멘트와  $y$ 축에 대한 관성 모멘트는 같다. 따라서,

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = 2I_{xx} \quad \Leftrightarrow \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}MR^2 \quad (8.125)$$

이 얻어진다.

#### 8.4.4 관성 텐서의 주축

관성 텐서가 대각 행렬, 즉 모든 비대각 성분이 0이 되는 경우가 있다.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (8.126)$$

이 때의 좌표축을  $\mathbf{I}$ 의 **주축(principal axis)**라 부른다. 이러한 결과를 얻을 수 있는 간단한 예가 다음의 부등식으로 정의되는 타원체(ellipsoid)의 관성 텐서이다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (8.127)$$

$a = b = c$ 의 경우는 강체는 구가 되고, 이 때는 전방위 대칭이므로 더 간단하게 하나의 독립 성분( $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ )만을 가진다. 일반적으로 원점을 강체의 질량 중심에 두고 좌표축을 관성 텐서의 주축이 되게 잡으면 관성 텐서의 대각 성분( $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ )은 0보다 큰 값이 된다. 이는 대각 성분들이 질량 중심으로부터의 거리의 제곱으로 나타내어지는 것 으로부터 자명하다. 이들이 0이 되는 경우는 질점에 대한 관성 모멘트를 계산하는 경우 뿐이다.

대칭성이 있는 강체의 경우, 좌표축을 관성 텐서의 대칭성이 높은 쪽으로 잡으면 주축을 찾을 수 있다. 예를 들어 그림8.6의 막대는, 막대방향이  $z$ 축과 일치하게 하면  $\theta = 0$  이 되고, 관성 텐서는 대각 성분만이 남게 할 수 있다. 또한 일반적으로 특별한 대칭성을 가지지 않는 강체에 대해서도 **언제나 관성 텐서의 주축을 찾는 것이 가능함**이 알려져 있다.

주축에 대해서 각운동량은,

$$\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xx}\omega_x, I_{yy}\omega_y, I_{zz}\omega_z) \quad (8.128)$$

와 같이 각속도 성분을 각 주축으로 분해하여 계산하는 것이 가능하다. 특히, 각속도 벡터가 주축의 하나와 평행한 경우 각속도 벡터와 각운동량은 항상 평행하다. 예를 들어  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ 인 경우, 각운동량은  $\mathbf{L} = (0, 0, I_{zz}\omega_z)$ 가 되어  $\boldsymbol{\omega}$ 와  $\mathbf{L}$  모두  $z$ 축에 평행하다.

## 8.4.5 관성 텐서의 시각화

관성 텐서에 대한 다음의 방정식을 생각해보자.

$$\mathbf{r}^t \mathbf{I} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \sum_{ij} r_i I_{ij} r_j = 1 \quad (8.129)$$

여기서  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 는 열 벡터이며,  $\mathbf{r}^t$ 는 그 전치 행렬, 즉 행 벡터를 나타낸다. 행렬 성분을 풀어써 나타내면,

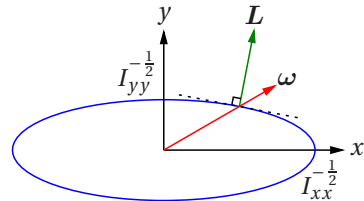
$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{yz}yz + 2I_{xz}zx = 1 \quad (8.130)$$

가 된다. 이 방정식을 이용하면 관성 텐서를 3차원 공간에서 위 방정식을 만족하는 표면으로 나타낼 수 있다. 위 방정식은 타원체의 일반형으로, 타원체는 임의의 점에서 중심을 가지고 임의의 방향으로 기울어져 있을 수 있다. 주축에 대해서는,

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 = 1 \quad (8.131)$$

이 되어, 원점이 중심에 있고 타원체의 세 축이 주축의 각 방향과 일치하며 길이가 각각  $1/\sqrt{I_{xx}}$ ,  $1/\sqrt{I_{yy}}$ ,  $1/\sqrt{I_{zz}}$ 인 타원체가 된다.

또한 일반적으로 각속도 벡터  $\boldsymbol{\omega}$ 가 타원체의 한 점을 지날 때, 그림 8.7처럼 각운동량  $\mathbf{L}$ 은 그 점에서 타원체 표면의 법선 방향이 됨을 보일 수 있다.<sup>2</sup>  $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ 로 나타내어 질 때 일반적으로  $\mathbf{L}$ 과  $\boldsymbol{\omega}$ 는 평행하지 않을 수 있음에 주의하라.



## 8.4.6 오일러 방정식

그림 8.7 관성 텐서 타원체  $xy$  단면

관성 텐서는 좌표축내에서 물체가 어떻게 놓여있는가에 따라서도 값이 달라진다. 따라서 강체가 회전하면 관성 텐서도 함께 변할 수 있다. 그러나 우리는 관성 텐서를 측정하는 기준틀을 강체에 대해 고정하면 관성 텐서가 변하는 것을 막을 수 있다. 이때 기준틀은 강체와 같은 각속도로 회전하게 된다. 회전계의 좌표축을  $x'y'z'$ 라 할 때, 회전계에서 바라본 각속도 벡터를

$$\boldsymbol{\omega}' = \omega'_x \mathbf{e}_{x'} + \omega'_y \mathbf{e}_{y'} + \omega'_z \mathbf{e}_{z'} \quad (8.132)$$

라 하면,

$$\mathbf{L}' = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}' \quad (8.133)$$

가 성립한다. 여기서  $\mathbf{L}'$ 은 회전계에 대한 각운동량을,  $\mathbf{I}$ 는 회전계에 대한 (변하지 않는) 관성 텐서를 나타낸다. 회전되는 기준틀에서 바라보면,  $\mathbf{I}$ 가 고정된 대신, 좌표가 회전하는 효과로 인해  $\boldsymbol{\omega}'$ 가 시간에 따라 변하게 된다. 이 때 회전하는 기준틀이  $\mathbf{I}$ 의 주축이 되게 잡으면,

$$\mathbf{L}' = I_{xx}\omega'_x \mathbf{e}_{x'} + I_{yy}\omega'_y \mathbf{e}_{y'} + I_{zz}\omega'_z \mathbf{e}_{z'} \quad (8.134)$$

가 된다. 한편 우리는 7.2.3절에서 설명한 회전계의 위치와 속도 관계를 그대로 각운동량과 토크에 적용할 수 있다. 이를 이용하면 토크는,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \dot{\mathbf{L}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' \quad (8.135)$$

<sup>2</sup>Physical Properties of Crystals, J. F. Nye, Oxford University Press 참조

가 얻어진다. 여기서  $d\mathbf{L}'/dt \neq \dot{\mathbf{L}}'$  임에 주의하라.  $\dot{\mathbf{L}}' = \dot{L}'_x \mathbf{e}_{x'} + \dot{L}'_y \mathbf{e}_{y'} + \dot{L}'_z \mathbf{e}_{z'}$ 는 회전계에서 바라본 각운동량의 변화량이다. 이 결과를  $x'y'z'$  기준틀(주축)에 대한 성분으로 나타내면,

$$\begin{pmatrix} \tau'_x \\ \tau'_y \\ \tau'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{\omega}'_x \\ I_{yy}\dot{\omega}'_y \\ I_{zz}\dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{x'} & \mathbf{e}_{y'} & \mathbf{e}_{z'} \\ \omega'_x & \omega'_y & \omega'_z \\ I_{xx}\omega'_x & I_{yy}\omega'_y & I_{zz}\omega'_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{\omega}'_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega'_y\omega'_z \\ I_{yy}\dot{\omega}'_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega'_z\omega'_x \\ I_{zz}\dot{\omega}'_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega'_x\omega'_y \end{pmatrix} \quad (8.136)$$

가 되어 다음의 오일러 방정식을 얻을 수 있다.

#### ■ 오일러 방정식

$$\begin{cases} \tau'_x = I_{xx}\dot{\omega}'_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega'_y\omega'_z \\ \tau'_y = I_{yy}\dot{\omega}'_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega'_z\omega'_x \\ \tau'_z = I_{zz}\dot{\omega}'_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega'_x\omega'_y \end{cases} \quad (8.137)$$

외력이 존재하지 않는 경우에는 각운동량이 보존되고 토크가 0이므로, 오일러 방정식은 다음과 같은 형태가 된다.

#### ■ 오일러 방정식(외력이 없을 때)

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{\omega}'_x = (I_{yy} - I_{zz})\omega'_y\omega'_z \\ I_{yy}\dot{\omega}'_y = (I_{zz} - I_{xx})\omega'_z\omega'_x \\ I_{zz}\dot{\omega}'_z = (I_{xx} - I_{yy})\omega'_x\omega'_y \end{cases} \quad (8.138)$$

### 8.4.7 회전 운동의 안정성

오일러 방정식을 응용하면 회전 운동의 안정성을 논할 수 있다. 한 강체가 세 주축 중에 하나의 축, 예를 들어 세번째 주축( $z'$ 축)에 대해서 회전하고 있다고 하자. 이 때, 각속도 벡터는  $\omega'_x = \omega'_y = 0$ 이고, 따라서 (8.138)의 우변은 모두 0이 된다. 이는 각속도 벡터가 시간에 의존하지 않고 항상  $z'$ 축 방향으로 일정한 크기임을 나타낸다. 반면에 두 주축에 대한 성분이 0이 아니라면, 예를 들어  $\omega'_x$ 와  $\omega'_y$ 이 0이 아니라면 (8.138)의 세 번째 식으로부터  $\dot{\omega}'_z \neq 0$ 이 되어 각속도는 시간에 따라 변하게 된다. 따라서, 오일러 방정식을 풀면 초기 조건으로부터 어떤 회전이 일어날지를 구할 수 있다.

오일러 방정식을 이용하여  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ 가 모두 다른 강체의 주축에 대한 회전이 안정한지 불안정한지를 살펴보자. 주축 기준틀의  $x$ 축에 대해서 일정한 각속도  $\omega'_x = \omega_0$ 로 회전하고 있다고 하자. 이 때,  $\omega'_y = \omega'_z = 0$ 이다. 이 상태에서 살짝 건드리거나 해서 강체의 운동을 조금만 변형시켰다고 하자. 그러면  $\omega'_y$ 와  $\omega'_z$ 은 더 이상 0이 아니지만, 운동의 변형이 작으므로  $|\omega'_y| \ll |\omega'_x|, |\omega'_z| \ll |\omega'_x|$ 이다. 이 조건에서 오일러 방정식을 풀어보자. 우선  $\omega'_x$ 에 대한 미분 방정식은,

$$I_{xx}\dot{\omega}'_x = (I_{yy} - I_{zz})\omega'_y\omega'_z \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega'_x \approx \text{const.} = \omega_0 \quad (8.139)$$

와 같다. 여기에서 우변은 미소량의 제곱( $\omega'_y$ 과  $\omega'_z$ 의 곱)이므로 매우 작아서 무시하면  $\omega'_x$

는 상수가 된다. 이를 이용하여  $\dot{\omega}'_y$ 을 계산하면,

$$I_{yy}\ddot{\omega}'_y \approx (I_{zz} - I_{xx})\dot{\omega}'_z\omega_0 \Leftrightarrow \dot{\omega}'_z \approx \frac{I_{yy}\ddot{\omega}'_y}{(I_{zz} - I_{xx})\omega_0} \quad (8.140)$$

가 되어  $\dot{\omega}'_z$ 을  $\ddot{\omega}'_y$ 으로 나타낼 수 있다. 이 결과를  $\omega'_z$ 에 대한 미분 방정식에 대입하면,

$$\frac{I_{zz}I_{yy}\ddot{\omega}'_y}{(I_{zz} - I_{xx})\omega_0} \approx (I_{xx} - I_{yy})\omega_0\omega'_y \Leftrightarrow \ddot{\omega}'_y \approx -\frac{(I_{xx} - I_{yy})(I_{xx} - I_{zz})}{I_{zz}I_{yy}}\omega_0^2\omega'_y \quad (8.141)$$

가 되어,  $\omega'_y$ 에 대한 2계 미분 방정식이 얻어진다.

$$\ddot{\omega}'_y = -k\omega'_y; \quad k = \frac{(I_{xx} - I_{yy})(I_{xx} - I_{zz})}{I_{zz}I_{yy}}\omega_0^2 \quad (8.142)$$

이 방정식은  $k > 0$ 일 때  $\omega_y$ 에 대한 조화 진동을 나타내며, 조화 진동은 잘 알려진대로  $\omega'_y = 0$  부근에서 안정된 평형점을 가진다. 이 회전 운동이 안정적인 운동이 되기 위해서는  $k > 0$ 이어야 하며, 따라서 주축의 관성 모멘트는 다음의 관계를 만족시켜야 한다.

#### ■ 안정한 회전 운동의 조건(주축 $x$ 축에 대한 회전)

$$I_{xx} > I_{yy}, I_{xx} > I_{zz} \text{ 또는 } I_{xx} < I_{yy}, I_{xx} < I_{zz} \quad (8.143)$$

이 때 주어진 작은 변화는 조화 진동하면서 본래의 주된 회전인  $x$ 축에 대한 회전은 크게 변하지 않은채 유지될 수 있다. 반면에  $k < 0$ 인 경우에는 주어진 변화는 점점 더 커져서 본래의 회전 운동으로부터 크게 벗어난 운동을 하게 된다.



# 라그랑지 역학

## 9.1 변분법

### 9.1.1 양함수와 음함수

뉴턴의 법칙을 이용한 운동의 기술은 구좌표와 같은 비데카르트 좌표계에서는 매우 번잡하고 때때로는 매우 어려기도 하다. 또한 운동에 제약조건이 있는 경우 조건을 만족하도록 방정식을 연립하여 풀어야 하므로 더 어려워지기도 한다. 따라서 역학 법칙을 더 일반적인 좌표계로 표현하여 제약 조건이 포함된 계에 적용하는 방법을 찾아야 한다. 그러한 방법으로 잘 알려진 것이 라그랑지 방정식으로, 이 방정식을 이해하기 위해서는 먼저 변분법을 알아야 한다.

변분법은 여러가지 변수에 대한 미분이 등장하는데, 여기서 양함수(explicit function)와 음함수(implicit function)의 개념이 중요하다. **양함수**는 변수가 명시된 함수이다. 예를 들어

$$y(x) = x^2 + 1 \quad (9.1)$$

로 정의된 함수  $y$ 는  $x$ 에 대한 양함수이다. 반면에, 변수에 대해 간접적으로 의존하는 함수를 **음함수**라 한다.

$$f(y) = \sqrt{y} = \sqrt{x^2 + 1} \quad (9.2)$$

로 정의된 함수  $f$ 는  $y$ 에 대해서는 양함수이지만  $x$ 에 대해서는 음함수이다. 더 일반적으로,

$$g(x, y) = x + y = x + x^2 + 1 \quad (9.3)$$

은  $y$ 에 대한 양함수이면서  $x$ 에 대해서는 음함수이다.

### 9.1.2 범함수

두 점  $(x_1, y_1)$ 과  $(x_2, y_2)$ 를 잇는 임의의 곡선  $y = y(x)$ 에 대해서 두 점사이의 곡선길이  $L$ 을  $x$ 와  $y$ 로 나타내어 보자. 이 때,  $x$ 와  $y$ 가 각각  $dx, dy$ 만큼 변했을 때의 미소 길이는,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (9.4)$$

와 같다. 여기서  $y' = dy/dx$ 는 1계 도함수를 나타낸다. 따라서 총 길이는,

$$L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (x_1 < x_2) \quad (9.5)$$

와 같다. 이 식은 임의의 함수  $y(x)$ 에 대해 성립하며,  $L$ 의 값은 함수  $y$ 의 형태에 따라서 바뀐다. 즉,  $L$ 은 함수  $y$ 에 대한 함수이다. 이러한 함수를 일반적인 함수와 구분하여 **범함수(functional)**라 부르며,  $L[y]$ 와 같이 나타낸다. 이 표기를 이용하면 곡선의 길이는

다음과 같이 표현할 수 있다.

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (9.6)$$

범함수는 **함수의 형태에만 의존한다**는 점에서 음함수 또는 매개변수를 취하는 함수와는 구분된다. 예를 들어 (9.2)로 정의된 함수  $f$ 는  $y$ 가 독립변수인 함수이며,  $y$ 를 매개변수로 하여  $x$ 에 의존한다. 이 때 함수  $f$ 의 값은 한점에서의  $y$ 가 구해지면 결정된다. 예를 들어,  $f(1)$ 의 값은  $y=1$ 이 되게 하는  $x$ 의 값( $x=0$ )이 주어지면 결정된다.

$$f(y=1) = f(y(x=0)=1) = \sqrt{0^2 + 1} = 1 \quad (9.7)$$

반면에 곡선의 길이  $L[y]$ 는 구간  $[x_1, x_2]$  사이의 모든 점에서의  $y$ 의 값, 즉 함수의 형태가 결정되어야 구할 수 있다. 예를 들어,  $y=x$ 라면,

$$L[y=x] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}x\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2} dx = \sqrt{2}(x_2 - x_1) \quad (9.8)$$

이 얻어진다.  $y=x^2/2$ 이라면 결과는 또 달라진다.

$$L\left[y = \frac{1}{2}x^2\right] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{2}x^2\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + x^2} dx \quad (9.9)$$

위 적분은 삼각 치환으로 간단하게 계산할 수 있다(생략).

$L[y]$ 처럼 함수의 적분으로 정의되는 범함수를 **적분 범함수**라 부른다. 일반적으로  $y=y(x)$ 에 대한 적분 범함수  $I[y]$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

■ **적분 범함수** 다음의 적분으로 정의된  $I$ 를 적분 범함수라 한다.

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'', \dots) dx \quad (9.10)$$

여기서  $f(x, y, y', y'', \dots)$ 는  $x$ 에 대한 음함수이면서  $y$ 와  $y$ 의 도함수들( $y', y'', \dots$ )의 양함수이다.

곡선의 길이를 구하는 문제는,

$$f(y') = \sqrt{1 + y'^2} \quad (9.11)$$

인 적분 범함수를 계산한 경우에 해당한다.

물리학에서 범함수가 가장 많이 등장하는 것은 적분값을 최소가 되게 하는 문제이다. 예를 들어, 페르마의 원리(Fermat's principle)는 빛이 두 점 사이를 이동하는 경로를 구하는 방법에 대한 것으로 그 내용은 다음과 같다.

- 빛은 최단 시간 경로를 이동한다.

여기서 최단 시간 경로란 경로를 이동하는 소요되는 시간이 가장 짧은 경로를 나타낸다. 즉, 빛이 두 점 사이를 이동할 때는 가장 빠르게 도달할 수 있는 길을 취한다는 뜻이다. 진공에서의 광속을  $c$ 라 했을 때 굴절률이  $n$ 인 매질 속에서 빛의 속도는  $c/n$ 으로 주어진다. 따라서  $xy$ 평면에서 빛이 미소 거리  $ds$ 만큼 이동했을 때 소요되는 시간은  $dt = \frac{n}{c} ds$

이고, 위치에 따라서 굴절률이 다른 경우, 한 점 1부터 다른 한 점 2로 이동하는 데 걸리는 시간은,

$$T[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_1^2 \frac{n}{c} ds = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (9.12)$$

가 되어, 이동 경로를 나타내는 곡선  $y$ 에 대한 범함수로 나타내어진다(굴절률  $n$ 은 매질에 의해서 결정되는 함수이다). 페르마의 원리에 의하면 빛은 최단 시간 경로를 이동하므로, 빛의 이동 경로  $y$ 를 구하는 것은, (적분) 범함수  $T[y]$ 를 최소로 하는 함수  $y$ 를 구하는 문제로 귀결된다. 이처럼 적분 범함수가 최소값을 포함하여 극값(또는 변곡점)이 되게 하는 함수를 찾는 문제를 **변분 문제(variational problem)**이라 부른다.

### 9.1.3 오일러 방정식

다음과 같은 적분 범함수에 대한 변분 문제를 풀어보기로 하자.

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (9.13)$$

이 때,  $y = y(x)$ 는 두 고정점  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지난다. 즉, 임의의  $y$ 에 대해서

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (9.14)$$

이다.

우리의 목표는  $xy$ 평면에서  $I[y]$ 를 극값(또는 변곡점)이 되게 하는 경로를 찾는 것이다.  $I$ 를 극값이 되게 하는 경로를  $y$ 라하라. 그리고,  $y$ 로부터 조금 경로를 바꾼

$$Y(x) = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (9.15)$$

로 범함수를 계산해보자. 이 때  $Y(x)$ 도 두 고정점을 지나가야 하므로,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (9.16)$$

이다.  $\alpha \eta(x)$ 는 최소 경로로부터 얼마나 멀어졌는지를 나타낸다. 한편,  $\alpha = 0$ 일 때  $Y = y$ 이므로 최소 경로가 얻어진다. 이 때,  $\alpha$ 는 함수가 아닌 하나의 값이므로 범함수  $I$ 는  $\alpha$ 에 대한 함수로 볼 수 있다.

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y') dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \alpha \eta, y' + \alpha \eta') dx \quad (9.17)$$

그리고  $I$ 가 최소가 될 때  $I$ 의 도함수는 0이 된다.

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (9.18)$$

(9.17)을  $\alpha$ 로 미분하면,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{d\alpha} f(x, Y, Y') \right] dx \quad (9.19)$$

이고, 합성 함수의 미분법을 이용하여  $df/d\alpha$ 를 계산하면,

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{dY}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{dY'}{d\alpha} = \eta \frac{\partial f}{\partial Y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial Y'} \xrightarrow{\alpha=0} \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \quad (9.20)$$

가 된다. 따라서  $I$ 가 최소가 될 조건은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0 \quad (9.21)$$

이 결과는 임의의  $\eta$ 에 대해서 성립한다. 이 때, 두 번째 항을 부분 적분하면,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \overbrace{\left[ \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2}}^{\eta(x_1)=\eta(x_2)=0} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (9.22)$$

이므로, (9.21)은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \overbrace{\eta \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right)}^{(*)} dx = 0 \quad (9.23)$$

이 결과가 임의의  $\eta$ 에 대해서 성립하기 위해서는 (\*) 부분이 0이 되어야 한다. 따라서 우리는 다음의 오일러 방정식<sup>1</sup>을 얻는다.

#### ■ 오일러 방정식 적분 범함수

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (9.24)$$

에 대한 변분 문제의 해  $y$ 는 다음의 방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (9.25)$$

이 방정식을 오일러 방정식이라 한다.

앞에서 도입한  $\alpha\eta(x)$ 는 본래 취해야 할 궤도  $y(x)$ 로부터 얼마나 떨어졌는가를 나타내는 함수로, 이를  $y$ 의 변분(variation)이라 부르고  $\delta y$ 로 나타낸다. 즉,

$$\delta y(x) = \alpha\eta(x) \Leftrightarrow Y(x) = y(x) + \delta y(x) \quad (9.26)$$

이다. 한편, 범함수  $I$ 가 의존하는 함수의 변화로 인한  $I$ 의 변화량을  $\delta I$ 라 쓰고  $I$ 의 변분이라 부른다.

$$\delta I = I[Y] - I[y] = I[y + \delta y] - I[y] \quad (9.27)$$

변분을 적분으로 나타내면,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} [f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')] dx \quad (9.28)$$

<sup>1</sup>관성 텐서에 대한 오일러 방정식과 별개의 방정식이다.

와 같고,  $\delta y$ 가 작으면, 위 식의 피적분함수는  $f$ 의 전미분  $df$ 와 같다(또는 첫번째항을 테일러 전개하여 변분의 1차항만으로 근사한다). 따라서,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left( \delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \delta y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (9.29)$$

가 된다. 이 식을 (9.21)과 마찬가지로 부분적분하고 양끝에서 변분이 0임을 이용하면,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (9.30)$$

가 된다. 이처럼 적분 범함수의 변분이

$$\delta I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \delta y F(x, y, y') dx \quad (9.31)$$

와 같은 형태로 나타내어 질때  $F$ 를 이것을  $I$ 에 대한  $y$ 의 변분이라 부르고  $\delta I/\delta y$ 로 쓴다. 이 경우에 변분은 다음과 같다.

#### ■ 적분 범함수의 변분

$$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \quad (9.32)$$

와 같다. 이를 오일러 방정식 (9.25)와 비교해보면,

$$\frac{\delta I}{\delta y} = 0 \quad (9.33)$$

임을 알 수 있다. 따라서 변분 문제(범함수의 극값을 찾는 문제)는 범함수의 변분이 0이 되게 하는 함수를 찾는 것과 같음을 알 수 있다.  $\delta I/\delta y = 0$ 일 때  $\delta I = 0$ 임도 자명하다. 이로부터 변분 문제는 종종 다음과 같이 표현된다.

$$\delta I = 0 \quad (9.34)$$

변분의 성질은 미분의 성질과 매우 닮아 있기 때문에  $\delta$ 를 이용한 변분 표기법이 편리한 경우가 많다.

### 9.1.4 함수가 여러개인 경우

범함수가 여러개의 함수에 의존할 수도 있다. 예를 들어  $x$ 의 함수  $y_1 = y_1(x)$ 과  $y_2 = y_2(x)$ 에 대하여 다음과 같은 범함수를 정의할 수 있다.

$$I[y_1, y_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx \quad (9.35)$$

독립변수는  $x$ 하나이나 종속 변수가  $y_1, y_2$ 로 두개인 경우이다. 이 때 변분 문제는  $I$ 를 최소가 되게 하는 두개의 함수  $y_1, y_2$ 를 모두 구하는 것이다. 이 때, 전절과 마찬가지로 방법으

로  $I$ 의 변분을 계산하면,

$$\delta I = I[y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2] - I[y_1, y_2] \quad (9.36)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [f(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, y'_1 + \delta y'_1, y'_2 + \delta y'_2) - f(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2)] dx \quad (9.37)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \delta y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \delta y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \delta y'_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1} + \delta y'_2 \frac{\partial f}{\partial y'_2} \right) dx \quad (9.38)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \delta y_1 \left( \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_1} \right) + \delta y_2 \left( \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_2} \right) \right] dx \quad (9.39)$$

와 같다. 따라서,  $\delta I = 0$ 이 기위해서는,

$$\frac{\delta I}{\delta y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_1} = 0, \quad \frac{\delta I}{\delta y_2} = \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_2} = 0 \quad (9.40)$$

이어야 한다.

이 결과는 쉽게 일반화가능하다. 일반적으로  $n$ 개의 종속 변수  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 에 의존하는 범함수

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

가 극값(또는 변곡점)이 되기 위한 필요 충분 조건은 다음과 같다.

#### ■ 오일러 방정식(종속 변수가 여러개인 경우)

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.41)$$

따라서 범함수가 여러개의 함수에 의존할 때에는 각각의 함수에 대한 오일러 방정식을 따로 풀면 된다.

### 9.1.5 응용: 페르마의 원리와 스넬의 법칙

오일러 방정식은 범함수가 극값 또는 변곡점이 되기 위한 조건이다. 그러나 많은 경우 오일러 방정식만으로 원하는 결과를 얻을 수 있다. 앞의 절에서 언급한 페르마의 원리에 의한 빛의 이동 경로에 대한 문제를 오일러 방정식을 이용하여 풀어보자. 이 때

$$T[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_1^2 \frac{n}{c} ds = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (9.42)$$

를 최소가 되게 하는  $y$ 를 구해야 한다. 여기서  $x_1 < 0, x_2 > 0$ 이라 하고,

$$n(x, y) = n_i = \begin{cases} n_1 & (x < 0) \\ n_2 & (x > 0) \end{cases} \quad (9.43)$$

이라 하자. 이 때,

$$f(x, y, y') = \frac{n_i}{c} \sqrt{1 + y'^2} = f(y') \quad (9.44)$$

이라 하면,  $f$ 는  $y$ 에 대해서는 양함수가 아니므로  $\partial f / \partial y = 0$ 이고, 따라서 오일러 방정식은,

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{n_i}{c} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = A \quad (9.45)$$

와 같다. 이를 정리하면,

$$y' = \frac{cA}{\sqrt{n_i^2 - c^2 A^2}} \Leftrightarrow y = \frac{cA}{\sqrt{n_i^2 - c^2 A^2}} x + B \quad (9.46)$$

가 얻어진다. 여기서  $A, B$ 는 임의 상수이며,  $i = 1$ 은  $x < 0$ 인 영역의 해가 되고,  $i = 2$ 는  $x > 0$ 인 영역의 해가 된다.  $x_1 < 0, x_2 > 0$ 이므로 빛은 중간에 반드시  $x = 0$ 인 한 점을 통과한다. 이 점을 원점이 되게 좌표계를 잡기로 하자. 그러면  $B_i = 0$ 이라고 놓을 수 있으며, 빛의 경로는

$$y = \frac{cA_i}{\sqrt{n_i^2 - c^2 A_i^2}} x \quad (9.47)$$

가 된다. 굴절률이 일정한 구간에서는 속도가 변하지 않으므로 직선으로 이동하는 것이 시간이 가장 적게 걸린다. 단,  $i = 1$ 인 영역과  $i = 2$ 인 영역에서 두 직선의 기울기는 다를 수 있다. 여기에  $y_i = y(x_i)$ 를 대입하면,

$$y_i = \frac{cA}{\sqrt{n_i^2 - c^2 A^2}} x_i \Leftrightarrow \frac{n_i^2 y_i^2}{x_i^2 + y_i^2} = c^2 A^2 = \text{const.} \quad (9.48)$$

가 되고,  $x_i^2 + y_i^2$ 은 원점으로부터  $(x_i, y_i)$ 까지의 거리를 나타내므로, 원점과  $(x_i, y_i)$ 을 잇는 선분과  $x$ 축이 이루는 각을  $\theta_i$ 라하면,

$$n_i^2 \sin^2 \theta_i = \text{const.} \Leftrightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (9.49)$$

가 되어 스넬의 법칙(Snell's law)이 얻어진다. 굴절에 대한 스넬의 법칙은 빛의 최소 시간 경로를 이동한 결과라고 할 수 있다.

## 9.2 라그랑지안

### 9.2.1 변분 원리

3차원에서의 뉴턴의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x}_i(t) = F_i \Leftrightarrow m\ddot{x}_i(t) - F_i = 0 \quad (9.50)$$

여기서  $i$ 는  $x, y, z$  세 좌표축에 대한 성분을 나타낸다.

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z), \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (F_x, F_y, F_z) \quad (9.51)$$

운동 방정식은 힘  $\mathbf{F}$ 를 받으며 질점이 운동하는 경로  $\mathbf{r}(t)$ 에 대한 방정식이다. 단, 이때 경로는 3차원 공간뿐만 아니라 시간  $t$ 에도 의존하는 **4차원 경로**임에 주의하라. 질점이 운동 방정식을 만족한다면,  $x_i(t)$ 의 변분  $\delta x_i(t)$ 에 대해서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$(F_i - m\ddot{x}_i) \delta x_i(t) = 0$$

또는,

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = F_i - m\ddot{x}_i = 0 \quad (9.52)$$

가 성립하는 범함수  $S$ 를 정의할 수 있을 것이다. 이처럼 범함수에 대한 **변분 문제로 물체의 운동을 기술**하는 것을 **변분 원리(variational principle)**라 부른다. 이제  $S$ 가 어떤 형태가 되는지 찾아보자.

범함수  $S$ 는 세개의 함수  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 에 의존하며, 독립변수는 시간  $t$ 이다. 따라서  $S$ 는 어떤 함수  $L$ 의 시간 적분으로 나타낼 수 있다.

$$S[x_1, x_2, x_3] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) dt \quad (9.53)$$

$S$ 의 변분은 (9.52)와 같고, 이를 오일러 방정식과 연립하면  $L$ 에 대한 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = F_i - m\ddot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (9.54)$$

$L$ 이 만족해야할 조건은 위의 식이 전부이다. 위 식은 미분 방정식이므로  $L$ 의 일반해는 임의 상수를 여러개 포함하게 되고, 어떠한 해를 선택해도 모두 변분 원리를 만족할 것이다. 따라서 우리는 구하기 쉬운 특수해만을 취할 수 있다. 가장 쉬운 것은 각각의 항을 비교하여

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad m\ddot{x}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (9.55)$$

를 만족하는  $L$ 을 찾는 것이다. 우리는 일반해를 구할 필요가 없으므로 적분 상수는 최대 한 식이 간단해지게 고르기로 한다. 대부분의 경우 0으로 놓을 것이다. 먼저 첫 번째 식으로부터,

$$L = \int F_i dx_i + f_i \quad (9.56)$$

가 얻어진다. 여기서  $f_i$ 는  $x_i$ 에 의존하지 않는 임의의 함수이다. 두 번째 식으로부터는

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \int m \frac{d\dot{x}_i}{dt} dt = \int m d\dot{x}_i = m\dot{x}_i \Leftrightarrow L = \int m\dot{x}_i d\dot{x}_i + g_i = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + g_i \quad (9.57)$$

가 얻어진다.  $g_i$ 는  $\dot{x}_i$ 에 의존하지 않는 임의의 함수이다. 이상으로부터  $L$ 은 다음과 같은 형태이면 된다.

$$L = \sum_i \left( \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + \int F_i dx_i \right) \quad (9.58)$$

이  $L$ 이 (9.54)를 만족함은 대입해보면 쉽게 확인할 수 있다. 이 때,  $L$ 의 첫 번째 항은 운동 에너지

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \quad (9.59)$$

과 같고, 두 번째 항은 힘  $\mathbf{F}$ 에 의한 일과 같다.

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int F_1 dx_1 + \int F_2 dx_2 + \int F_3 dx_3 \quad (9.60)$$



따라서  $L$ 은 질점의 운동 에너지와 외력에 의한 일의 합으로 나타낼 수 있다.

$$L = T + W \quad (9.61)$$

여기서 운동에너지는 속도에만 의존하지만 일  $W$ 는 힘에 특별한 제한이 없으므로 모든 변수에 의존할 수 있다.

### 9.2.2 라그랑지 방정식

(9.61)로 정의된  $L$ 을 **라그랑지안(Lagrangian)**이라 부른다.

#### ■ 라그랑지안

$$L = T + W = \sum_i \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + \int F_i dx_i \right) \quad (9.62)$$

그리고 이 라그랑지안의 시간 적분으로 정의되는 범함수  $S$ 를 작용 적분(action integral) 또는 단순히 작용(action)이라고 한다.

#### ■ 작용

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (9.63)$$

그리고 작용 적분이 극값을 취하게, 즉 작용 적분의 변분이 0이 되게 운동이 실현된다는 변분 원리를 **해밀턴의 원리(Hamilton's principle)** 또는 최소 작용의 원리(principle of least action)이라 부른다.

■ **해밀턴의 원리/최소 작용의 원리** 물체의 운동은 작용이 최소가 되게하는 경로를 따라 운동한다.

$$\delta S = 0 \quad (9.64)$$

해밀턴의 원리를 이용하여 물체의 운동을 계산할 때에는 먼저 계의 라그랑지안  $L$ 을 구한다. 다음으로  $L$ 에 대한 작용 적분의 변분이 0이 되기 위한 필요 충분 조건인 오일러 방정식을 풀면 된다. 특히 역학문제의 위치와 시간에 대한 라그랑지안의 오일러 방정식을 오일러-라그랑지안 방정식 또는 라그랑지 방정식이라 부른다.

#### ■ (오일러-)라그랑지 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (9.65)$$

해밀턴의 원리는 라그랑지 방정식과 동치이다. 이처럼 해밀턴의 원리로부터 라그랑지 방정식을 풀어서 물체의 운동을 기술하는 방법을 라그랑지 역학이라 부른다.

가장 일반적인 형태의 라그랑지안은 운동 에너지와 일의 합으로 정의된다. 여기서 외력이 보존력인 경우 보존력에 대한 포텐셜 에너지  $V(\mathbf{r})$ 를 정의할 수 있다,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (9.66)$$

여기에 포텐셜 에너지와 일의 관계  $W = -V$ 를 대입하면 그랑지안은 운동 에너지와 포텐셜 에너지의 차로 나타내어 진다.

## ■ 라그랑지안(보존력의 경우)

$$L = T - V \quad (9.67)$$

이 때, 일과 달리 **포텐셜 에너지는 위치에만 의존**한다는 점에 주의하라. 마찰력과 같은 비보존력이 존재하는 경우에는 (9.61)로 돌아가야 하지만, 본 강의에서는 보존력에 의한 운동만 다루기로 한다.

## 9.2.3 일반화 좌표

라그랑지 방정식은 작용 적분의 변분이 0이 된다는 조건으로 정의된다. 작용 적분은

$$S[x_1, x_2, x_3] = \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) dt$$

과 같다. 앞의 절에서 작용 적분은 데카르트 좌표계에 대한 뉴턴의 운동 방정식으로부터 유도되었기 때문에 위 식의 작용 적분은 데카르트 좌표에 대한 범함수이다. 여기서 임의의 좌표 변환

$$q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3), \quad q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3), \quad q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3) \quad (9.68)$$

을 생각한다. 이러한 변환을 통해서  $L$ 의 모든  $x_1, x_2, x_3$ 에 의존하는 부분을 소거하여  $q_1, q_2, q_3$ 만으로 나타낼 수 있다.

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \quad (9.69)$$

이렇게 변환된 좌표로 작용 적분을 나타내면,

$$S[q_1, q_2, q_3] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) dt \quad (9.70)$$

가 된다. 이렇게 좌표가 변환되면  $L$ 의 형태는 달라질 수 있지만,  $L$ 에 의한  $S$ 의 표현에는 변수를 나타내는 문자가 바뀌었다는 점 이외에는 변화가 없다. 따라서 변분을 나타내는 식도, 변환된 좌표에서의 라그랑지 방정식도 변화가 없다.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (9.71)$$

이는 뉴턴의 운동 방정식이 데카르트 좌표 표현에 의존하는 것과 대조된다. 라그랑지 방정식은 좌표 변환에 대해서 변하지 않기 때문에 특정 좌표계를 가정하지 않고 라그랑지안이 정의될 수 있는 임의의 좌표계에서 계산이 가능하며, 특정 좌표계에 국한되지 않는 라그랑지안의 좌표를 **일반화 좌표**(generalized coordinate)라 부른다. **라그랑지 방정식은 좌표 변환에 대해서 불변**이지만 라그랑지안은 좌표가 바뀌면 표현이 달라진다. 그러나 라그랑지안은 스칼라량만을 포함하기 때문에 좌표가 바뀌었을 때의 뉴턴 방정식을 푸는 것보다 훨씬 구하기 쉽다.

9.2.1절에서 라그랑지안을 도입할 때, 데카르트 좌표계의 힘과 운동량은 라그랑지안을 이용해 다음과 같이 나타내어졌다((9.55), (9.57) 참고).

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad p_i = m\dot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (9.72)$$

따라서 우리는 일반화 좌표  $q_i$ 에 대한 일반화 힘(generalized force)과 일반화 운동량(generalized momentum)을 다음과 같이 정의할 수 있다.

■ **일반화 힘과 일반화 운동량** 라그랑지안  $L$ 이 일반화 좌표  $q_i$ 로 나타내어질 때, 일반화 힘  $F_i$ 와 일반화 운동량  $p_i$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.73)$$

라그랑지 방정식을 일반화 힘과 일반화 운동량으로 나타내면,

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i \quad (9.74)$$

가 되어, 뉴턴의 운동 방정식과 같은 형태가 된다.

예를 들어 다음으로 정의되는 2차원 극좌표  $(r, \theta)$ 에서 라그랑지 방정식을 구해보자.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \quad (9.75)$$

운동 에너지는,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (9.76)$$

이고, 따라서 라그랑지안은,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r, \theta) \quad (9.77)$$

와 같다. 라그랑지 방정식은 다음의 2개이다.

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} (m\dot{r}) = \dot{p}_r = F_r \quad (9.78)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = \dot{L} = \tau \quad (9.79)$$

여기서  $p_r$ 과  $F_r$ 은 동경 방향의 운동량과 힘을 나타내며,  $L$ 과  $\tau$ 는 각운동량과 토크를 나타낸다.  $r$ 에 대한 일반화 운동량과 일반화 힘은 동경 방향에 대한 뉴턴의 운동 방정식을 나타낸다. 한편  $\theta$ 에 대한 일반화 운동량은 각운동량이고, 일반화 힘은 토크이다. 이처럼 일반화 좌표, 운동량, 힘은 본래의 물리량과 다른 차원이 양이 될 수 있지만 운동에서의 역할은 동일하다. 특히 포텐셜 에너지가 없는 자유 입자의 경우, 일반화 힘은 모두 0이 된다. 이로부터 동경 방향의 운동량과 각운동량이 각각 보존됨을 알 수 있다. 일반적으로 **라그랑지안이 특정 좌표에 의존하지 않을 때, 거기에 상응하는 보존 법칙이 존재한다.**

운동하는 질점이 여러개인 경우에는, 질점의 갯수만큼 일반화 좌표를 늘릴 수 있다. 하나의 질점에 대해서 3개의 라그랑지 방정식을 풀어야 하므로  $N$ 개의 질점에 대해서는  $3N$ 개의 라그랑지 방정식을 풀어야 하며, 이는 곧 라그랑지안이  $3N$ 개의 일반화 좌표와 그 시간 미분으로 나타내어짐을 의미한다.

### 9.3 제약 조건이 있는 운동

#### 9.3.1 자유도

**자유도(degree of freedom)**란 작은 변위에 대해서 독립적으로 변화할 수 있는 좌표의 갯수를 의미한다. 이는 독립 좌표의 갯수와는 구분된다.

하나의 입자는 3차원 공간에서 3개의 운동 방향을 가질 수 있으므로  $N$ 입자계의 자유도는  $3N$ 이다. 그러나 운동에 **제약 조건(constraint)**이 존재하면 자유도의 수는 줄어든다. 예를 들어 여러 입자들의 집합으로 볼 수 있는 강체는 입자들의 상대 좌표가 고정되어 있다는 조건으로 인해 자유도가 6개(3방향 운동+3방향 회전)로 줄어든다.

제약 조건이 있는 운동의 예로, 천장에 길이  $l$ 의 가느다란 막대를 매달아 끝에 질량  $m$ 의 질점을 붙인 진자의 운동 방정식을 유도해보자. 진자에 매달린 질점의 운동은 2차원이지만, 고정점으로부터 질점까지의 거리가  $l$ 로 고정되어 있다. 이러한 제약 조건은 운동의 자유도를 줄인다. 이 경우 진자의 운동의 자유도는 1이며, 따라서 하나의 좌표만으로 운동을 기술할 수 있다. 천장의 고정점을 원점으로 삼고, 연직 방향과 막대가 이루는 각을  $\theta$ 라 하면 운동 에너지와 포텐셜 에너지는,

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \quad V = -mgl \cos \theta \quad (9.80)$$

이고, 라그랑지안은,

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (9.81)$$

가 된다. 이 때 라그랑지 방정식은  $\theta$ 에 대한 하나의 방정식만이 존재한다.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -mgl \sin \theta - ml^2 \ddot{\theta} = 0 \quad (9.82)$$

따라서  $\theta$ 의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (9.83)$$

우리는  $\theta$ 에 대한 방정식 하나만을 풀어서 진자의 2차원적 운동을 기술할 수 있다.

#### 9.3.2 홀로노믹

$n$ 개의 일반화 좌표로 나타내어지는 계에 대해 다음과 같은 형태로  $m$ 개의 제약 조건이 주어졌다고 하자.

##### ■ 홀로노믹 제약 조건

$$f_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (9.84)$$

이처럼 제약 조건이 일반화 좌표와 시간에만 의존하는 경우, **홀로노믹(holonomic)** 제약 조건이라 부르고, 계는 홀로노믹하다고 한다. 홀로노믹 제약 조건의 경우 적당한 연립 방정식을 통해서 **일반화 좌표를 소거하는 것이 가능하다**. 따라서 이 경우 계의 자유도는  $n - m$ 이 된다. 이처럼 홀로노믹 계에서는 운동을 기술하는 일반화 좌표의 갯수와 계의 자유도가 일치한다. 앞에서 예로 든 길이가 고정된 진자의 운동은 자유도가 1이고 운동을 나타내는 일반화 좌표도  $\theta$  하나 뿐이므로 홀로노믹한 운동이다.

한편,

$$g_k(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = 0 \quad (9.85)$$

과 같이 제약 조건이 일반화 속도(일반화 좌표의 시간 미분)를 포함하는 경우, 비홀로노믹(non-holonomic) 제약 조건이라 부르고, 비홀로노믹 계라 한다. 비홀로노믹 계에서는 제약 조건이 있어도 일반화 좌표를 소거하는 것이 불가능하기 때문에 계의 자유도는 줄어들지만 일반화 좌표의 갯수는 줄어들지 않는다.

### 9.3.3 라그랑지 승수법

롤러 코스터를 디자인하기 위해서는 롤러 코스터가 트랙에서 떨어지지 않게 하기 위한 힘이 얼마나 필요한지를 알아야 한다. 물론 뉴턴 역학을 이용하여 계산하는 것도 가능하지만, 이것을 라그랑지 역학으로 계산하고 싶다고 하자. 이 때 단순히 제약 조건을 이용하여 일반화 좌표를 소거해버리면 제약 조건에 대한 힘까지 방정식에서 사라지게 된다. 제약 조건에 대한 힘을 알 필요가 없을 때라도, 제약 조건의 형태에 따라서는 일반화 좌표의 소거가 어려울 수도 있다. 라그랑지 승수법을 이용하면 임의의 제약 조건에 대한 일반적인 처방을 알 수 있다.

일반화 좌표  $q_1, q_2$ 를 가진 계에 대한 작용 적분의 변분은,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta q_1 \left( \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) + \delta q_2 \left( \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) \right] dt \quad (9.86)$$

이다. 제약 조건이 없을 때에는  $q_1$ 과  $q_2$ 는 서로 독립이므로  $\delta q_1$ 과  $\delta q_2$ 도 각각 임의의 미소량이 될 수 있고, 따라서  $\delta S = 0$ 이기 위해서는 두 일반화 좌표에 대한 변분이 0이 되어야 한다. 그러나 여기에 홀로노믹 제약 조건

$$f(t, q_1, q_2) = c \quad (c: \text{상수}) \quad (9.87)$$

가 부가된 경우에는

$$\overbrace{f(t, q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2)}^c - \overbrace{f(t, q_1, q_2)}^c = \frac{\partial f}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \delta q_2 = 0 \quad (9.88)$$

의 관계가 성립하므로  $\delta q_1$ 과  $\delta q_2$ 는 다음의 관계에 있다.

$$\delta q_2 = - \frac{\partial f / \partial q_1}{\partial f / \partial q_2} \delta q_1 \quad (9.89)$$

이를 (9.86)에 대입하여  $\delta q_2$ 를 소거하면,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q_1 \left[ \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \left( \frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) \frac{\partial f}{\partial q_1} \right] dt \quad (9.90)$$

가 된다. 여기서,

$$\lambda = \left( \frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) \quad (9.91)$$

라 하면,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q_1 \left( \frac{\partial L}{\partial q_1} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) dt \quad (9.92)$$

가 되고, 이로부터  $\delta S = 0$ 이 되기 위한 조건은,

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad (9.93)$$

과 같다. 한편, (9.91)을 정리하면

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 0 \quad (9.94)$$

가 얻어진다. 이상으로부터 제약 조건  $f$ 이 있을 때  $\delta S = 0$ 이기 위한 조건은,

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 0 \quad (9.95)$$

이다. 따라서 우리는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

■ **라그랑지 승수법** 계의 라그랑지안  $L$ 에 대해서,  $f(t, q_1, q_2) = c$ 의 (홀로노믹) 제약 조건이 가해졌을 때, 다음과 같이 상수  $\lambda$ 를 이용하여 라그랑지안을 재정의 한다.

$$\tilde{L} = L - \lambda f \quad (9.96)$$

계의 운동 방정식은  $\tilde{L}$ 에 대한 라그랑지 방정식으로 주어진다.

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_2} = 0 \quad (9.97)$$

여기서  $\lambda$ 를 **라그랑지 승수**(Lagrange's multiplier)라 부른다.

위 식은 계의 라그랑지안들과 같이 두고,  $\lambda$ 를 **상수로 간주**하였을 때의 라그랑지 방정식과 같다. 이 때  $f$ 는  $\dot{q}_1$ 과  $\dot{q}_2$ 에 의존하지 않으므로  $\partial f / \partial \dot{q}_i = 0$ 임에 주의하라. 라그랑지 승수법을 이용하여 정의한 라그랑지안 (9.96)에 대한 라그랑지 방정식 (9.97)은 각각의 변수  $q_1$ 과  $q_2$ 에 대한 방정식이므로,  $q_1$ 과  $q_2$ 가  $f(t, q_1, q_2) = c$ 로 연결되어 있다는 제약 조건은 계산에 어떤 제한도 가하지 않는다. 따라서 우리는 계의 운동을 구하기 위해서 라그랑지안을 (9.96)과 같이 정의한 후 제약 조건이 없을 때와 마찬가지로 라그랑지 방정식을 세우고 풀면 된다. 여기서 미지수는 두개의 일반화 좌표와 하나의 라그랑지 승수로 총 세 개이다. 방정식의 갯수도 일반화 좌표에 대한 두개의 라그랑지 방정식과 제약 조건의 방정식까지 포함하여 세 개이므로, 원리적으로 모든 미지수를 결정할 수 있다.

라그랑지 승수를 이용하여 라그랑지안을 변환하여도 운동을 기술하는 방정식이 불변인 것은 다음과 같이 이해할 수 있다. 본래의 라그랑지안을  $L$ 이라 할 때, 다음과 같은 라그랑지안을 생각해보자.

$$L' = L + \frac{d}{dt} F(t, q_1, q_2) \quad (9.98)$$

여기서 두번째항은 시간에 대한 편미분이 아니라 전미분이므로 만약  $F$ 가  $t$ 에 명시적으로 의존하지 않더라도  $q_1$ 과  $q_2$ 는  $t$ 에 대한 함수이므로 두번째항은 0이 아닐 수 있다.  $L'$ 에 대한 작용 적분을 계산하면,

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = S + \Delta F \quad (9.99)$$

가 된다. 여기서  $S$ 는  $L$ 에 대한 작용 적분이며,  $\Delta F$ 는

$$\Delta F = F(t_2, q_1(t_2), q_2(t_2)) - F(t_1, q_1(t_1), q_2(t_1)) \quad (9.100)$$

이다.  $S'$ 의 변분을 계산하면,

$$\delta S' = \delta S + \delta \Delta F \quad (9.101)$$

이다. 변분을 계산할 때 적분 구간의 양단에서 함수는 변하지 않으므로

$$\delta q_1(t_1) = \delta q_2(t_1) = \delta q_1(t_2) = \delta q_2(t_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \Delta F = 0 \quad (9.102)$$

이다. 따라서,

$$\delta S' = \delta S = 0 \quad (9.103)$$

이 되어  $L$ 에 대한 해밀턴 원리와  $L'$ 에 대한 해밀턴 원리는 등가이고,  $L$ 대신  $L'$ 을 이용하여 운동 방정식을 계산할 수 있다. 이때,

$$\frac{d}{dt}F(t, q_1, q_2) = \lambda f(t, q_1, q_2) \quad (9.104)$$

가 되는  $F$ 를 반드시 찾을 수 있으므로(사실  $f = c$ 이다) 라그랑지 승수법을 이용하여 라그랑지안을 변환하여도 동일한 역학 법칙을 따르는 것이 보장된다.

이 결과를 일반화하는 것은 간단하다. (9.84)와 같은 홀로노믹 제약 조건이 주어지면 제약 조건의 갯수만큼 라그랑지 승수를 도입하면 된다. 이때 라그랑지안은,

$$L' = L - \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(t, q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (9.105)$$

가 되고, 라그랑지 방정식은,

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.106)$$

가 되어  $n$ 개가 얻어진다. 여기에  $m$ 개의 제약 조건 방정식을 더하면 총  $n+m$ 개의 방정식이 존재하고, 미지수는  $q_1, q_2, \dots, q_n$ 과  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 의  $n+m$ 개이므로 모든 해를 구할 수 있다. 라그랑지 승수법을 제약 조건을 다루는 일반적인 방법이지만, 종종 승수를 도입하지 않고 제약 조건을 이용하여 변수를 줄이는 것이 더 간편한 경우도 있으므로 때에 따라 적절하게 사용해야 한다.

### 9.3.4 응용: 곡선위의 운동

예를 들어 그림 9.1처럼  $x$ 축을 지면에 평행하게 잡고  $y$ 축을 연직 방향으로 잡았을 때, 임의의 곡선  $f(x, y) = 0$ 을 따라 운동하는 질점  $m$ 의 라그랑지 방정식을 구해보자. 계의 포텐셜 에너지를  $V(x, y)$ 라 하면 제약 조건이 없을 때의 라그랑지안은,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - V(x, y) \quad (9.107)$$

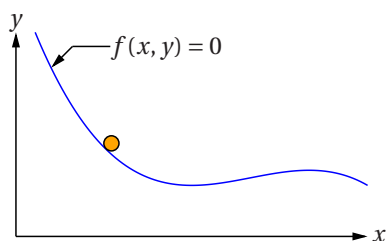


그림 9.1 곡선위의 질점

이고, 여기에 제약 조건을 포함시켜서 새롭게 라그랑지안을 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{L} = L - \lambda f(x, y) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - V(x, y) - \lambda f(x, y) \quad (9.108)$$

$\lambda$ 는 라그랑지 승수이다. 이에 대한 라그랑지 방정식을 계산하면 다음과 같다.

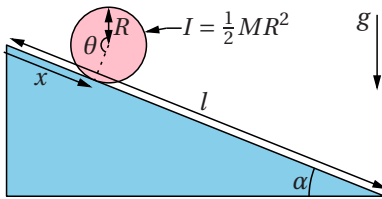
$$0 = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - m\ddot{x} \quad (9.109)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}} = -\frac{\partial V}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - m\ddot{y} \quad (9.110)$$

또는,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V - \lambda \nabla f \quad (9.111)$$

가 된다. 위식에서  $-\nabla V$ 는 계의 보존력을 나타내고  $-\lambda \nabla f$ 는 제약 조건에 의한 추가적인 힘을 나타낸다.  $\lambda$ 의 값은 구체적인  $f$ 가 주어져야 구할 수 있지만, 원리적으로 방정식이 3개(2개의 라그랑지 방정식과 하나의 제약 조건)이고 미지수가 셋( $x, y, \lambda$ )이므로 해가 구해진다.



이번에는 그림 9.2와 같이 빗면을 굴러가는 원반의 운동을 계산해보자. 원반이 빗면을 미끄러지지 않고 굴러가기 위한 제약 조건은  $x = R\theta$ 이다. 빗면의 꼭대기에서의 포텐셜 에너지를 기준으로 하면 원반의 포텐셜 에너지는,

$$V = -Mgx \sin \alpha \quad (9.112)$$

그림 9.2 빗면을 구르는 원반 이고, 운동 에너지는 질량 중심의 병진 운동 에너지와 원반의 회전 운동 에너지로 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 \quad (9.113)$$

여기에 제약 조건

$$f(x, \theta) = x - R\theta = 0 \quad (9.114)$$

을 고려한 라그랑지안은,

$$L(x, \theta) = T - V - \lambda f = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mgx \sin \alpha - \lambda(x - R\theta) \quad (9.115)$$

이다.  $\lambda$ 는 라그랑지 승수이다. 라그랑지 방정식은,

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = Mg \sin \alpha - \lambda - M\ddot{x} \quad (9.116)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \lambda R - \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} \quad (9.117)$$

이다. 위의 두 방정식을 연립하여  $\lambda$ 를 소거하면,

$$g \sin \alpha - \ddot{x} - \frac{1}{2}R\ddot{\theta} = 0 \quad (9.118)$$



이 얻어지고, 여기에 제약 조건으로부터,

$$x = R\theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = R\ddot{\theta} \quad (9.119)$$

를 대입하면,

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \sin \alpha}{3R} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{g \sin \alpha}{3R} t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (9.120)$$

가 얻어진다. 여기서  $\omega_0 = \dot{\theta}(t=0)$ 은 초기 각속도이고  $\theta_0 = \theta(t=0)$ 은 회전각의 기준각 ( $t=0$ 일 때의 회전각)이다.  $\theta_0 = 0, \omega_0 = 0$ 이라고 하면,  $x = R\theta$ 로부터,

$$\theta = \frac{g \sin \alpha}{3R} t^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{g \sin \alpha}{3} t^2 \quad (9.121)$$

이 된다. 한편,  $\lambda$ 는 (9.117)로부터,

$$\lambda = \frac{1}{2} MR \ddot{\theta} = \frac{1}{3} Mg \sin \alpha \quad (9.122)$$

가 얻어진다. 따라서 원반이 미끄러지지 않고 빗면을 굴러가기 위해서 필요한  $x$ 축 방향의 힘은,

$$F_x = -\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{3} Mg \sin \alpha \quad (9.123)$$

와 같다.  $F_x < 0$ 이므로  $F_x$ 는 질량 중심의 이동과 반대 방향으로 작용하며, 이는 원반과 빗면사이의 마찰력에 해당한다. 만약 빗면의 정지 마찰 계수가  $g \sin \alpha / 3$ 보다 작다면 마찰력은 제약 조건의 힘을 만족시킬수 없기 때문에 원반은 빗면에서 미끄러지게 된다. 한편, 이 힘은 원반을 굴리는 토크를 제공한다. 원반의 반경은  $R$ 이므로 토크의 크기는  $F_x R$ 이고, 이는  $\theta$ 에 대한 일반화 힘과 일치한다.

$$F_\theta = \tau = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{3} Mg R \sin \alpha = -F_x R \quad (9.124)$$

## 9.4 보존 법칙

### 9.4.1 뇌터의 정리

일반화 좌표  $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 에 대한 라그랑지 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.125)$$

9.2.3절에서 (9.73)처럼 일반화 힘과 일반화 운동량을 정의하면 라그랑지 방정식은 다음과 같은 뉴턴 방정식의 형태가 됨을 설명하였다.

$$F_i = \frac{d}{dt} p_i; \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.126)$$

9.2.3절에서는 일반화 힘과 일반화 운동량이 반드시 실제 힘과 실제 운동량과 일치하지는 않음을 설명하였다. 예를 들어 회전각  $\theta$ 에 대한 일반화 힘과 일반화 운동량은 토크와 각운동량에 해당한다.

이 때 일반화 힘이 0인 일반화 좌표를 무시 가능(ignorable)하다고 한다. 무시 가능한 좌표가 많을 수록 라그랑지 방정식은 매우 단순해지기 때문에 더 풀기 쉬워진다. 구체적으로는,

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.} \quad (9.127)$$

가 성립한다. 즉, 특정 일반화 좌표에 대한 일반화 힘이 0이면, 그에 대항하는 일반화 운동량은 상수가 된다. 이에 대한 정리가 다음의 뇌터 정리(Noether's theorem)이다.

■ **뇌터의 정리** 라그랑지안이 특정 좌표의 변화에 대해서 불변일 때( $\partial L / \partial q_i = 0$ ), 그와 관련된 보존량을 찾을 수 있다.

이는 뉴턴 역학의 운동량 보존 법칙(힘과 (선)운동량의 관계)과 각운동량 보존 법칙(토크와 각운동량의 관계)을 포함하는 더 일반적인 보존 법칙을 나타낸다.

#### 9.4.2 일반화 운동량 보존 법칙

$N$ 입자계에서 모든 입자에 대해 일반화 좌표  $q$ 를 미소량  $\varepsilon$ 만큼 변화시키는 조작을  $T$ 라 하자.  $i$ -번째 입자의  $q$ 좌표를  $q_i$ 라고 나타내면, 조작  $T$ 에 대해서

$$dq_1 = dq_2 = \dots = dq_N = \varepsilon \quad (9.128)$$

이고, 이 때 라그랑지안의 변화량은,

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1} \varepsilon + \frac{\partial L}{\partial q_2} \varepsilon + \dots + \frac{\partial L}{\partial q_N} \varepsilon = \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \varepsilon \quad (9.129)$$

와 같다. 이와 같은 조작에 대해서 라그랑지안이 불변이라면,

$$dL = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (9.130)$$

가 되어 입자들에 대한 일반화 힘의 총합은 0이 된다. 여기서 0이 되는 것은 총 합이고 개개의 입자에 대한 일반화 힘  $\partial L / \partial q_i$ 가 0일 필요는 없다.

한편 라그랑지 방정식으로부터,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_q^{(i)} \quad (9.131)$$

이다. 여기서  $p_q^{(i)}$ 는  $i$ 번째 입자의 일반화 좌표  $q$ 에 대한 일반화 운동량을 나타낸다. 위 식을  $i=1$ 부터  $N$ 까지 더하면,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N p_q^{(i)} = \frac{d}{dt} p_q \quad (9.132)$$

가 얻어진다.  $p_q$ 는 일반화 좌표  $q$ 에 대한 일반화 운동량의 총합을 나타낸다.

임의의 조작에 대해서 계의 라그랑지안이 불변일 때, 계는 그 조작에 대한 대칭성(symmetry)을 가진다<sup>2</sup>고 한다. 라그랑지안이 조작  $T$ 에 대해 불변이라면, 즉  $T$ 에 대한 대칭성을 가진다면

$$dL = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} p_q = 0 \quad (9.133)$$

<sup>2</sup>또는 계는 그 조작에 대해서 대칭

이 되어  $p_q$ 는 보존량이 된다.

예를 들어 일반화 좌표로  $x$ 좌표를 선택하면 조작  $T$ 는 계를  $\varepsilon$ 만큼 평행 이동시키는 병진 조작이 되고 일반화 운동량은 (선)운동량(linear momentum)의  $x$ 성분이 된다. 따라서 계가  $x$ 축에 대한 병진 대칭성(translational symmetry)을 가지면 운동량의  $x$ 축 성분이 보존되며,  $y, z$ 축의 병진에 대해서도 같은 결론을 내릴 수 있다. 특별한 방향으로 작용하는 외력이 존재하지 않는 한 계는 병진 대칭성을 가지므로 운동량이 보존되며, 이것은 **운동량 보존 법칙**을 나타낸다.

마찬가지로 일반화 좌표로 회전각  $\theta$ 를 택하면 조작  $T$ 는 계를 원점에 대해서 각도  $\varepsilon$ 만큼 회전시키는 조작이 되고 일반화 운동량은 각운동량이 된다. 토크가 없을 때 계는 어느 방향에서 바라보아도 대칭적이므로 회전 대칭성(rotational symmetry)을 가지며, 따라서 각운동량이 보존된다. 이는 **각운동량 보존 법칙**을 나타낸다.

### 9.4.3 시간 대칭성과 해밀토니안

라그랑지안이  $n$ 개의 일반화 좌표에 의존할 때, 각각의 일반화 좌표는 시간  $t$ 에 대한 함수이다.

$$L = L(t, q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)) \quad (9.134)$$

라그랑지안의 시간에 대한 전미분은 매개 변수의 미분 공식을 이용하여,

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \quad (9.135)$$

가 된다. 여기에 라그랑지 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \quad (9.136)$$

를 대입하면,

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \quad (9.137)$$

가 얻어진다. 따라서,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( L - \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) \quad (9.138)$$

가 된다. 여기서 해밀토니안(Hamiltonian)이라는 양을 다음과 같이 정의한다.

#### ■ 해밀토니안

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (9.139)$$

라그랑지안의 시간 미분은 밀토니안을 이용하여

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{dH}{dt} \quad (9.140)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

만약  $L$ 이,

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (9.141)$$

과 같이 시간  $t$ 에 대해 직접 의존하지 않는 경우,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad (9.142)$$

이 되어  $H$ 는 보존량이 된다.  $t$ 를 시간에 대한 일반화 좌표라고 보면,  $\partial L / \partial t = 0$  시간에 대한 평행 이동에 대해  $L$ 이 불변임을 나타낸다. 따라서 계가 시간에 대해 대칭일 때 해밀토니안은 보존된다.

#### 9.4.4 역학적 에너지 보존 법칙

다음과 같은 조건에서 해밀토니안의 형태를 구해보자.

1.  $N$ 입자계에서 한 입자의 위치가  $n$ 개의 일반화 좌표로 나타내어 진다.

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (9.143)$$

예를 들어  $N$ 개의 자유 입자계에서는  $n = 3N$ 이 될 것이고,

$$\mathbf{r}_1 = q_1 \mathbf{e}_x + q_2 \mathbf{e}_y + q_3 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_2 = q_4 \mathbf{e}_x + q_5 \mathbf{e}_y + q_6 \mathbf{e}_z, \quad \dots \quad (9.144)$$

와 같이 나타낼 수 있을 것이다.

2. 운동 에너지외에는 보존력에 의한 포텐셜 에너지만이 존재한다.

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (9.145)$$

이 조건에서 라그랑지안은 운동 에너지와 포텐셜 에너지의 차로 나타내어 지고,

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n) = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (9.146)$$

$L$ 은 시간에 대해 명시적으로 의존하지 않는다. 따라서  $\partial L / \partial t = 0$ 이고, 해밀토니안은 보존량이 된다.

여기서 일반화 운동량을 운동 에너지로 나타내면,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.147)$$

와 같다.<sup>3</sup> 여기서 운동 에너지를  $\dot{q}_i$ 로 나타내어 보자. 입자의 속도는 매개 변수의 미분 공식으로부터,

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (9.148)$$

이고, 따라서 운동 에너지는,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \quad (9.149)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \overbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right)}^{A_{jk}} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (9.150)$$

<sup>3</sup>  $V$ 는  $\dot{q}_i$ 에 의존하지 않는다.

와 같이 쓸 수 있다. 여기서  $A_{jk}$ 는 다음의 식으로 정의되어 있다.

$$A_{jk} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) = A_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (9.151)$$

내적은 교환 법칙이 성립하므로  $A_{jk} = A_{kj}$ 임에 주의하라. (9.147)에 (9.150)을 대입하면,

$$p_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j,k} A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[ A_{ii} \dot{q}_i^2 + \left( \sum_{j \neq i} A_{ji} \dot{q}_j \dot{q}_i + \sum_{k \neq i} A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \right) \right] \quad (9.152)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 2A_{ii} \dot{q}_i + \sum_{j \neq i} A_{ji} \dot{q}_j + \sum_{k \neq i} A_{ik} \dot{q}_k \right) = A_{ii} \dot{q}_i + \sum_{j \neq i} A_{ij} \dot{q}_j = \sum_j A_{ij} \dot{q}_j \quad (9.153)$$

위 식에서  $A_{ik} = A_{ki}$ 임을 이용하였다. 따라서,

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \left( \sum_j A_{ij} \dot{q}_j \right) \dot{q}_i = \sum_{i,j} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T \quad (9.154)$$

이다. 이 결과를 해밀토니안의 정의에 대입하면,

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V = (\text{계의 총 역학적 에너지}) \quad (9.155)$$

가 되어 이 경우 해밀토니안은 계의 총 에너지와 같음을 알 수 있다.

여기서 우리가 처음에 가정한 것은 입자들의 위치와 포텐셜 에너지가 일반화 좌표로만 나타내어져야 한다(시간이나 속도에는 의존하지 않을 것)는 것이다. 이러한 계에서 해밀토니안은 계의 총 역학적 에너지와 일치한다. 동시에 이 가정은 라그랑지안이 시간에(명시적으로) 의존하지 않게 한다(계가 시간 대칭성을 가짐). 따라서 해밀토니안은 보존량이므로 계의 총 역학적 에너지도 보존되어야 한다. 즉, 계의 시간 대칭성에 대응되는 보존 법칙이 역학적 에너지 보존 법칙인 것이다.



# 해밀턴 역학

## 10.1 해밀턴 방정식

### 10.1.1 해밀토니안의 변수

해밀토니안은 라그랑지안으로부터 다음과 같이 정의된다.

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (10.1)$$

여기서 벡터  $\mathbf{q}$ 와  $\dot{\mathbf{q}}$ 는, 모든 일반화 좌표와 그 시간 미분에 대한 축약 표현이다.

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (10.2)$$

이 때 해밀토니안은 라그랑지안의 변수  $\dot{q}_i$ 를 일반화 운동량

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (10.3)$$

을 변수로 가진다. 간단하게  $dH$ 를 계산하여 이를 증명할 수 있다.<sup>1</sup>

$$dH = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \left( \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) \quad (10.4)$$

$$= \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \left( \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i \right) \quad (10.5)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (10.6)$$

이로부터  $dH$ 의 전미분은 시간과 일반화 좌표, 일반화 운동량에 의존한다. 따라서  $H$ 는 이들에 대한 함수로 나타내어진다.

$$H = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(t, q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (10.7)$$

(9.155)로부터, 외력으로 보존력만이 존재할 경우,

$$L = T - V \quad \Leftrightarrow \quad H = T + V \quad (10.8)$$

와 같이 해밀토니안은 계의 역학적 에너지의 합으로 나타내어진다.

<sup>1</sup>또는, 르장드르 변환(Legendre transformation)에 익숙하다면 해밀토니안의 정의 (10.1)은  $\dot{q}_i \rightarrow p_i$ 로의 르장드르 변환임을 알 수 있을 것이다.

## 10.1.2 해밀턴 방정식

해밀토니안이 라그랑지안의 변수를 변환한 것이라면, 라그랑지안 대신 해밀토니안을 이용하여 운동을 기술할 수도 있을 것이다.  $H$ 의 전미분식으로부터  $H$ 의 편도함수는 각각 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (10.9)$$

첫번째 식은 해밀토니안의 시간 편미분을 나타낸다. 9.4.3절에서 유도한 해밀토니안과 라그랑지안의 시간의존성 관계 (9.140)을 대입하면,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} \quad (10.10)$$

가 얻어진다. 따라서 해밀토니안의 시간 전미분은 시간 편미분과 일치한다.

두 번째 식의 우변은 일반화 힘에 해당하며, 라그랑지 방정식 (9.136)을 대입하면  $-\dot{p}_i$ 가 된다. 이 식과 세번째 식을 묶어서 **해밀턴 방정식**(Hamilton's equation)이라 부른다.

## ■ 해밀턴 방정식

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (10.11)$$

해밀턴 방정식은 해밀토니안의 변수인  $p_i$ 와  $q_i$ 가 만족해야 할 방정식을 나타낸다. 이와 같이 해밀토니안을 구하여 그에 대한 해밀턴 방정식을 풀어 운동을 기술하는 방법을 해밀턴 역학이라 한다.

해밀턴 방정식은 하나의 일반화 좌표 성분에 대해 두개의 **1계** 미분 방정식이 나타난다. 라그랑지 방정식은 하나의 일반화 좌표 성분에 대해 하나의 **2계** 미분 방정식으로 나타내어 지므로, 겉보기에 방정식의 수는 늘어났지만 풀어야 하는 변수의 수에는 변화가 없다. 예를 들어 용수철 상수  $k$ 의 용수철에 매달려 진동하는 질점  $m$ 의 1차원 조화 진동자에 대해, 라그랑지 역학과 해밀턴 역학을 이용하여 운동 방정식을 구해보자. 먼저 라그랑지안은,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (10.12)$$

이다. 따라서 라그랑지 방정식은,

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -kx - m\ddot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = -kx \quad (10.13)$$

가 되어 훅(Hooke)의 법칙이 구해진다. 한편 일반화 운동량은,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (10.14)$$

이므로 해밀토니안은,

$$H = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad (10.15)$$



이다. 해밀토니안의 변수는 일반화 좌표와 일반화 운동량이기 때문에 반드시  $\dot{x}$ 를  $p$ 로 나타내야 한다. 해밀턴 방정식은,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \quad (10.16)$$

이다. 두개의 1계 미분 방정식에서, 첫번째 식으로부터  $\dot{x} = \dot{p}/m$ 이고, 이를 두 번째 식에 대입하여  $\dot{p}$ 를 소거하면,

$$m\ddot{x} = -kx \quad (10.17)$$

가 되어 하나의 2계 미분 방정식이 얻어지며, 라그랑지 방정식과 마찬가지로 운동 방정식은 훅의 법칙을 따른다.

### 10.1.3 해밀턴 방정식을 이용한 풀이

해밀턴 방정식을 이용한 일반적인 풀이법은 다음과 같다.

1. 적당한 일반화 좌표  $q_1, q_2, \dots, q_n$ 을 선택한다
2. 계의 운동 에너지  $T$ 와 포텐셜 에너지  $V$ 를  $q_i$ 와  $\dot{q}_i$ 로 나타낸다.
3. 라그랑지안  $L = T - V$ 로부터 일반화 운동량  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ 를 구한다.
4.  $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 로부터 해밀토니안을 구한다.
5. 해밀턴 방정식을 세우고 푼다.

만약 계의 에너지가 보존되는 경우에는  $H = T + V$ 라고 쓸 수 있으며,  $\partial V / \partial \dot{q}_i = 0$ 이므로 라그랑지안을 구하지 않고 다음과 같이 풀 수 있다.

1. 적당한 일반화 좌표  $q_1, q_2, \dots, q_n$ 을 선택한다.
2. 계의 운동 에너지  $T$ 와 포텐셜 에너지  $V$ 를  $q_i$ 와  $\dot{q}_i$ 로 나타낸다.
3.  $p_i = \partial T / \partial \dot{q}_i$ 로부터 일반화 운동량을 구하여  $T$ 를  $p_i$ 로 나타낸다.
4.  $H = T + V$ 로부터 해밀토니안을 구한다.
5. 해밀턴 방정식을 세우고 푼다.

몇가지 예제를 풀어보기로 한다.

그림 10.1과 같이 하나의 줄이 도르래에 걸려있고, 줄의 양끝에 두 질점  $m, M$ 이 매달려있을 때 질점의 운동을 계산해보자. (1단계) 일반화 좌표로  $x, y$  두 개를 생각할 수 있으나, 줄의 길이는 일정하므로,  $x + y = l$  ( $l$ 은 상수)이라는 조건이 붙는다. 따라서 우

리는  $y$ 를 소거하고  $x$ 만을 일반화 좌표로 택하기로 한다. (2단계) 계의 운동 에너지와 포텐셜 에너지를 일반화 좌표  $x$ 로 나타낸다. 일단은 포텐셜 에너지는  $x = y = 0$ 인 지점을 기준으로 삼아서 계산해보자.

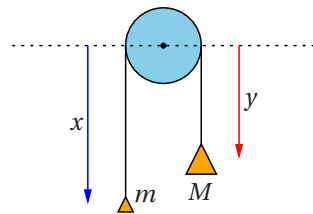


그림 10.1 도르래에 걸린 추의 운동

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left[\frac{d}{dt}(l-x)\right]^2 = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 \quad (10.18)$$

$$V = -mgx - Mgy = -mgx - Mg(l-x) = (M-m)gx - Mgl \quad (10.19)$$

여기서 포텐셜 에너지의 두 번째 항  $-Mgl$ 은 상수이다. 따라서 우리는 포텐셜 에너지의 기준점을 변경하여  $V + Mgl \rightarrow V$ 로 잡을 수 있다. 이렇게 하면,

$$V = (M - m)gx \quad (10.20)$$

가 된다. (3단계)  $V$ 는 속도에 의존하지 않으므로 일반화 운동량은

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x} \quad (10.21)$$

이고,  $T$ 를  $p$ 로 나타내면,

$$T = \frac{p^2}{2(m + M)} \quad (10.22)$$

이 된다. (4단계) 보존력에 의한 운동이므로 역학적 에너지는 보존되고, 따라서 해밀토니안은 역학적 에너지와 동일하다.

$$H = T + V = \frac{p^2}{2(m + M)} + (M - m)gx \quad (10.23)$$

(5단계) 해밀턴 방정식을 다음과 같다.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m + M}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(M - m)g \quad (10.24)$$

첫번째 식으로부터  $\dot{p} = (m + M)\ddot{x}$ 이고, 이를 두번째 식에 대입하면,

$$(m + M)\ddot{x} = -(M - m)g \Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{m - M}{m + M}g \quad (10.25)$$

가 얻어진다. 만약  $m > M$ 이라면  $\ddot{x} > 0$ 이되어  $x$ 가 증가하게 되고, 반대의 경우는  $x$ 가 감소하게 된다.

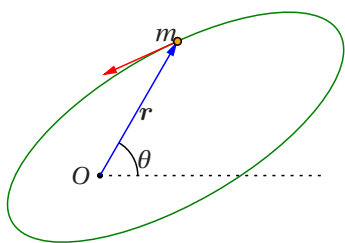


그림 10.2 중심력에 의한 운동

중심력에 의한 2차원 운동을 계산해보자. (1단계) 일반화 좌표로 원점으로부터 거리(동경 길이)  $r$ 과 회전각  $\theta$ 를 취한다. (2단계) 계의 운동에너지는,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (10.26)$$

이고, 포텐셜 에너지  $V = V(r)$ 은 중심력에 의한 운동이므로 동경 길이  $r$ 에만 의존한다. (3단계) 일반화 운동량은,

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (10.27)$$

이고, 이를 이용하여 운동 에너지를 일반화 운동량으로 나타내면,

$$T = \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{p_r}{m} \right)^2 + r^2 \left( \frac{p_\theta}{mr^2} \right)^2 \right] = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} \quad (10.28)$$

가 된다.(4단계) 중심력은 보존력이므로 역학적 에너지는 보존되고 해밀토니안은,

$$H = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \quad (10.29)$$

이다. (5단계) 해밀턴 방정식은,

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (10.30)$$

가 된다.  $\dot{r}$ 과  $\dot{\theta}$ 에 대한 방정식으로부터,

$$m\ddot{r} = \dot{p}_r, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (10.31)$$

이고, 이를  $\dot{p}_r$ 의 방정식에 대입하면

$$m\ddot{r} = \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr} \Leftrightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr} \quad (10.32)$$

가 얻어진다. 좌변은 동경 가속도를, 우변은 중심력의 동경 성분을 나타낸다. 한편  $\dot{p}_\theta = 0$ 으로부터  $\theta$ 는 무시 가능(ignorable)한 변수이고  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ , 즉 각운동량은 보존량이 된다.

## 10.2 정준 변환

### 10.2.1 해밀턴 역학의 변환

계의 해밀토니안이  $H = H(t, q, p)$ 일 때, '적당한 변환'을 통해서 정의된

$$Q_i = Q_i(t, q, p), \quad P_i = P_i(t, q, p) \quad (10.33)$$

와 새로운 해밀토니안  $H' = H'(t, Q, P)$ 사이에

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (10.34)$$

가 성립한다고 하자. 이러한 변환을 **정준 변환**(canonical transformation)이라 부른다.

■ **정준 변환** 새롭게 정의된 좌표와 운동량, 그리고 해밀토니안 사이에서 해밀턴 방정식이 성립하는 변환으로, **해밀턴 방정식은 정준 변환에 대해서 불변**이다.

■ **정준 켤레 변수** 정준 변환을 통해 정의된 새로운 좌표와 운동량을 정준 좌표(canonical coordinate)와 정준 운동량(canonical momentum)이라 부르고, 이 두 변수를 **정준 켤레 변수**(canonical conjugate variable)라 한다.

정준 변환에 대해서 해밀턴 방정식은 변하지 않기 때문에, 해밀턴 방정식은 정준 방정식(canonical equation)이라고도 불린다.  $H$ 와  $H'$  모두 해밀턴 방정식을 만족하기 때문에 어느쪽을 택해도 같은 계의 운동을 기술할 수 있다.

예를 들어, 1차원 운동의 해밀턴 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (10.35)$$

이 때  $(q, p)$ 와  $(Q, P)$ 사이에 다음과 같은 관계가 있다고 하자.

$$q = -P, \quad p = Q \quad (10.36)$$

운동량과 좌표의 역할이 뒤바뀌었음에 주의하라. 정준 변환은 정준 방정식을 만족하지만 하면 실공간의 좌표나 운동량의 역할과는 무관하게 정의될 수 있다. (10.36)으로부터,

$$\dot{q} = -\dot{P}, \quad \dot{p} = \dot{Q}, \quad \frac{\partial}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial P}, \quad \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial Q} \quad (10.37)$$

이고, 이를 해밀턴 방정식에 대입하면,

$$-\dot{P} = \frac{\partial H}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = -\left(-\frac{\partial H}{\partial P}\right) = \frac{\partial H}{\partial P} \quad (10.38)$$

가 얻어진다. 새로운 해밀토니안을  $H' = H$ 라고 정의하면 다음의 정준 방정식이 성립함을 알 수 있다.

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} \quad (10.39)$$

따라서 (10.36)은 정준 변환이다.

## 10.2.2 모함수에 의한 정준 변환

본래 해밀토니안은 라그랑지안에 대한 변수 변환으로 정의되었으며, 해밀턴 방정식은 라그랑지 방정식과 마찬가지로 해밀턴 원리(최소 작용의 원리)를 만족하도록 구성된 방정식이다. 따라서 정준 변환에 의한 새로운 정준 방정식이 의미를 가지기 위해서는 정준 변환이 해밀턴 원리를 만족시켜야 한다. 이를 보이기 위해서 다음의 사실에 주목하기로 한다. 라그랑지안  $L$ 과 시간에 대한 임의의 함수  $F(t)$ 에 대해서,

$$L' = L - \frac{dF}{dt} \quad (10.40)$$

라고 하면  $L'$ 도 최소 작용의 원리를 따른다.<sup>2</sup> 라그랑지 방정식은 일반화 좌표의 선택에 의존하지 않으므로,<sup>3</sup>  $L'$ 의 일반화 좌표로  $Q$ 를 택하면

$$L'(t, Q, \dot{Q}) = L(t, q, \dot{q}) - \frac{dF}{dt} \quad (10.41)$$

와 같이 쓸 수 있다.  $L'$ 과  $L$ 은 모두 같은 해밀턴 원리를 만족한다. 이 때  $L$ 과  $L'$ 을 이용하여 해밀토니안을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$H(t, q, p) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(t, q, \dot{q}) \quad (10.42)$$

$$H'(t, Q, P) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - L'(t, Q, \dot{Q}) \quad (10.43)$$

<sup>2</sup>9.3.3절 참고.

<sup>3</sup>9.2.3절 참고.

(10.43)의  $H'$ 은  $H$ 와 마찬가지로 다음의 정준 방정식을 만족한다.<sup>4</sup>

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (10.44)$$

임의의 함수  $F$ 에 대해서 (10.41)의 변환을 정의할 수 있으므로 정준 변환을 만족시키는  $F$ 는 반드시 하나 이상 존재한다. 또한 (10.41)에 의해 정의된 라그랑지안은 최소 작용의 원리를 만족하므로  $F$ 를 이용하여 정의된  $H'$ 의 해밀턴 방정식도 최소 작용의 원리를 만족한다. 따라서 우리는 정준 변환을 이용하여 계의 운동을 올바르게 기술할 수 있다. 정준 변환은  $F$ 에 의해서 정의될 수 있기 때문에  $F$ 를 정준 변환의 **생성 함수**(generating function) 또는 **모함수**라 부른다.

모함수  $F$ 로부터 정준 변환을 구하기 위해서 (10.41-10.43)를 연립하여  $L$ 을 소거하면,

$$L = \sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} - H = \sum_i P_i \frac{dQ_i}{dt} - H' + \frac{dF}{dt} \quad (10.45)$$

가 되어 다음과 같은  $F$ 의 전미분을 얻을 수 있다.

$$dF = (H' - H)dt + \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) \quad (10.46)$$

따라서,  $F$ 는  $t, \mathbf{q}, \mathbf{Q}$ 의 함수  $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{Q})$ 임을 알 수 있다. 또한 정준 변환  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \leftrightarrow H'(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 의 변수들은 모함수  $F$ 의 편도함수를 이용하여,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (10.47)$$

와 같이 나타내어 진다. 만약  $F$ 가 시간에 명시적으로 의존하지 않는다면,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H' = H \quad (10.48)$$

가 되어, 정준 변환 전후의 해밀토니안은 일치한다.

일반적으로 접하게 되는 문제는 다음의 두가지이다.

1.  $H$ 와  $q_i = q_i(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ,  $p_i = p_i(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 가 주어졌을 때,  $H'$ 과  $F$  구하기
2.  $H$ 와  $F$ 가 주어졌을 때,  $H'$ 과  $q_i = q_i(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ,  $p_i = p_i(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$  구하기

10.2.1절에서 예로 든  $H(t, q, p)$ 의 정준 변환

$$q = -P, \quad p = Q, \quad H = H' \quad (10.49)$$

에 대한 모함수를 구해보자. 이 때  $F$ 의 편도함수는,

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (10.50)$$

이다. 이를 만족하는  $F$ 는 여러가지가 존재할 수 있다. 적분 상수를 제외하고 가장 간단한 모함수는

$$F(t, q, Q) = qp - QP \quad (10.51)$$

와 같다.

<sup>4</sup>두 해밀토니안은 서로 다른 라그랑지안으로부터 정의되었지만 모두 해밀턴의 원리를 만족시킨다.

## 10.2.3 모함수의 일반화

우리가 앞의 절에서 찾은 모함수는  $t, q, Q$ 에 의존하는 함수였다. 그러나 애초에 모함수는 (10.41)의 라그랑지안의 변환에서 도입된 함수로, 이식은  $F$ 의 시간에 대한 전미분에만 의존하므로  $F$ 가 매개변수를 통해서  $t$ 에 의존하던( $q(t)$  등) 직접 의존하던 결과는 변하지 않는다. 따라서 우리는 다른 변수 의존성을 가지는 모함수를 찾을 수 있을 것이다.

앞의 절에서 찾은 모함수를

$$F_1 = F_1(t, q, Q) \quad (10.52)$$

이라 하자. 이 때  $F_1$ 의 전미분은 (10.46)으로부터,

$$dF_1 = (H' - H)dt + \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) \quad (10.53)$$

이고,  $F_1$ 에 의한 정준 변환은 다음과 같다.

■ 정준 변환의 모함수  $F_1(t, q, Q)$

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (10.54)$$

한 편, 다음의 함수를 생각하자.

$$F_2(t, q, P) = F_1(t, q, Q) + Q \cdot P = F_1(t, q, Q) + \sum_i Q_i P_i \quad (10.55)$$

이 함수의 명시적인 변수가  $t, q, P$ 가 되는 것은 이 함수의 전미분을 계산해보면 알 수 있다.

$$dF_2 = dF_1 + \sum_i (P_i dQ_i + Q_i dP_i) = (H' - H)dt + \sum_i (p_i dq_i + Q_i dP_i) \quad (10.56)$$

따라서  $F_2$ 를 이용하여 정준 변환의 변수들을 나타내면 다음과 같다.

■ 정준 변환의 모함수  $F_2(t, q, P)$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (10.57)$$

$F_1 \rightarrow F_2$ 로의 변환은  $Q \rightarrow P$ 로의 변환이므로  $Q$ 를 제외한  $p$ 와  $t$ 에 대한 의존성은 (당연히) 변하지 않는다.

마찬가지로,

$$F_3(t, p, Q) = F_1(t, q, Q) - q \cdot p = F_1(t, q, Q) - \sum_i q_i p_i \quad (10.58)$$

로 정의된 함수  $F_3$ 는  $t, p, Q$ 의 함수이며, 전미분은,

$$dF_3 = dF_1 - \sum_i (p_i dq_i + q_i dp_i) = (H' - H)dt - \sum_i (q_i dp_i + P_i dQ_i) \quad (10.59)$$

가 된다. 따라서  $F_3$ 에 의한 정준 변환은 다음과 같다.

■ 정준 변환의 모함수  $F_3(t, p, Q)$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (10.60)$$

같은 방법으로,

$$F_4(t, p, P) = F_1(t, q, Q) - q \cdot p + Q \cdot P = F_3(t, p, Q) - \sum_i q_i p_i + \sum_i Q_i P_i \quad (10.61)$$

를 정의하면,  $F_4$ 의 전미분은

$$dF_4 = dF_1 - \sum_i (p_i dq_i + q_i dp_i - P_i dQ_i - Q_i dP_i) \quad (10.62)$$

$$= (H' - H) dt + \sum_i (Q_i dP_i - q_i dp_i) \quad (10.63)$$

이고, 정준 변환은

■ 정준 변환의 모함수  $F_4(t, p, P)$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (10.64)$$

의 관계식을 만족시킨다.

앞에서 정의한 네 개의 함수는 모두 정준 변환을 만드는 모함수가 될 수 있으며, 이들은 모두 르장드르 변환이다. 모든 변환에 대해서 시간은 변화하지 않으므로 시간에 대한 관계식은 동일하다. 여기에서 정의한 변환은 모두 일률적인 변환, 예를 들어  $F_2$ 는  $F_1$ 의 모든  $Q_i$ 를  $P_i$ 로 변환한 것이다.<sup>5</sup> 그러나 르장드르 변환에 익숙하다면, 개개의 변수에 대해서도 얼마든지 변환이 가능하다는 것을 알 수 있을 것이다. 예를 들어  $F_1$ 에서  $Q_1$ 만을  $P_1$ 로 변환한 모함수  $F'$ 을 만들고 싶다면,

$$F'(t, q, P_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n) = F_1(t, q, Q) + Q_1 P_1 \quad (10.65)$$

와 같이 정의할 수 있다.  $F'$ 의 전미분은,

$$dF' = dF_1 + P_1 dQ_1 + Q_1 dP_1 \quad (10.66)$$

$$= (H' - H) dt + \sum_i p_i dq_i - \sum_{i \neq 1} P_i dQ_i + Q_1 dP_1 \quad (10.67)$$

가 되어 정준 변환과 모함수의 관계는 다음과 같다.

$$p_i = \frac{\partial F'}{\partial q_i}, \quad P_{i \neq 1} = -\frac{\partial F'}{\partial Q_{i \neq 1}}, \quad Q_1 = \frac{\partial F'}{\partial P_1}, \quad H = H' + \frac{\partial F'}{\partial t} \quad (10.68)$$

이처럼 하나의 정준 변환을 나타내는 모함수는 무수히 많이 정의될 수 있다.

<sup>5</sup>여기서 변환은 르장드르 변환에 의해 정의된 변수 변환을 가리킨다. 정준 변환을 의미하지 않는다.

## 10.3 푸아송 괄호식

### 10.3.1 푸아송 괄호식의 정의와 성질

푸아송 괄호식(Poisson bracket)은 해밀턴 역학에서 자주 등장하는 식의 축약 표현이다. 정준 켈레 변수와 시간에 의존하는 임의의 두 함수  $f_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), f_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ 에 대해, 푸아송 괄호식이란 다음으로 정의되는  $\{f_1, f_2\}$ 와 같은 표기법을 가리킨다.

#### ■ 푸아송 괄호식

$$\{f_1, f_2\} = \sum_i \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right) \quad (10.69)$$

정준 좌표와 정준 운동량, 그리고 시간에 의존하는 임의의 함수  $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ 에 대해서 시간 전미분은,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (10.70)$$

와 같다. 여기에 해밀턴 방정식

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (10.71)$$

을 대입하면,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (10.72)$$

가 된다. 이 결과를 푸아송 괄호식을 이용하여 나타내면, (10.69)에서  $f_1 \rightarrow f, f_2 \rightarrow H$ 라고 두고 다음을 얻을 수 있다.

#### ■ 함수의 시간 의존성

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad (10.73)$$

$f = H$ 인 경우,  $\{H, H\} = 0$ 이고

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (10.74)$$

임을 재확인((10.10) 참고)할 수 있다.

푸아송 괄호식은 순서를 교환하면 -부호가 붙는다.

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (10.75)$$

같은 함수에 대한 푸아송 괄호식은 0이며, 상수와 괄호식도 0이다.

$$\{f, f\} = 0, \quad \{f, C\} = \{C, f\} = 0 \quad (C \text{는 상수}) \quad (10.76)$$

이외에도 다음과 같은 공식들이 성립한다.



$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}, \quad \{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \quad (10.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}, \quad \frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} \quad (10.78)$$

특히, 다음의 관계식은 야코비 항등식(Jacobi's identity)이라고 불린다.

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (10.79)$$

또한, 임의의 정준 좌표  $q_i$ 와 정준 운동량  $p_i$ 에 대해서,

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (10.80)$$

가 성립하며,  $q_i$ 와  $p_j$ 사이에는,

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (10.81)$$

의 관계식이 존재한다. 모든 식은 단순히 정의에 대입하면 확인할 수 있으므로 증명을 생략한다.

### 10.3.2 운동의 제약 조건

만약 어떤 함수  $f$ 의 시간 전미분이 0이라면,  $f$ 를 **운동 상수**(constant of motion) 또는 **운동의 적분**(integral of motion)이라 부른다.

$$\frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow f \text{는 운동 상수} \quad (10.82)$$

지금까지 소개했던 모든 보존량들은 모두 운동 상수이다. 예를 들어 회전대칭성이 있는 계의 각운동량은 운동 상수이다. 여기서 시간에 대한 전미분  $df/dt$ 와 편미분  $\partial f/\partial t$ 의 차이에 주의해야 한다. 전미분은 모든 좌표와 운동량의 시간 의존성까지 고려하여 계산된  $f$ 의 변화량이다. 반면에 편미분은 좌표와 운동량을 고정된 상태에서 측정되는  $f$ 의 시간 의존성을 나타낸다. 예를 들어 진동하는 전기장에 의한 전자의 포텐셜 에너지  $V$ 는 시간에 대해서도 명시적으로 의존하며, 이 경우  $\partial V/\partial t \neq 0$ 이며, 이러한 계에서는 다른 물리량들도 시간에 명시적으로 의존할 수 있다.

(10.73)으로부터,

$$\frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow \{f, H\} = -\frac{\partial f}{\partial t} \quad (10.83)$$

이다. 이 때  $f$ 가 시간에 명시적으로 의존하지 않는다면  $\partial f/\partial t = 0$ 이며, 이 경우 푸아송 괄호식은 0이 된다.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \{f, H\} = 0 \quad (10.84)$$

따라서 우리는 임의의 함수에 대해  $\partial f / \partial t = 0$  일 때, 푸아송 괄호식을 계산하여  $f$ 가 운동 상수인지를 판단할 수 있다. 즉,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = \{f, H\} \quad (10.85)$$

이고, 여기서 괄호식이 0이라면 시간 전미분도 0이 되어  $f$ 는 운동 상수임을 알 수 있다.

두 함수가 운동 상수일 때, 이들의 푸아송 괄호식도 역시 운동 상수가 되며, 이를 푸아송의 정리(Poisson's theorem)라 한다.

#### ■ 푸아송의 정리

$$\frac{df}{dt} = 0, \frac{dg}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \{f, g\} = 0 \quad (10.86)$$

증명은 (10.78)로부터 자명하다. 이 정리는 새로운 운동 상수를 찾아내는데 유용하다. 단, 역은 성립하지 않는다.

1차원 자유 입자의 경우 해밀토니안은

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (10.87)$$

이고, 이 때  $p$ 가 운동 상수인지 판단하기 위해서 푸아송 괄호식을 계산하면,

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H\} = \overbrace{\frac{\partial p}{\partial q}}^0 \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \overbrace{\frac{\partial H}{\partial q}}^0 = 0 \quad (10.88)$$

가 되어  $p$ 는 운동 상수이다.

여기에 시간에 의존하지 않는 임의의 포텐셜 에너지  $V(q)$ 가 존재할 경우, 해밀토니안은,

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (10.89)$$

이고, 이 때  $p$ 의 시간 전미분은,

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H\} = \overbrace{\frac{\partial p}{\partial q}}^0 \frac{\partial H}{\partial p} - \overbrace{\frac{\partial p}{\partial p}}^1 \overbrace{\frac{\partial H}{\partial q}}^{dV/dq} = -\frac{dV}{dq} \quad (10.90)$$

가 된다. 따라서 일반적으로  $dp/dt \neq 0$ 이며 이는 결국 보존력  $F = -dV/dq$ 에 의한 뉴턴의 운동 법칙을 나타낸다. 그러나

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (10.91)$$

이므로  $H$ 는 여전히 운동 상수이고 역학적 에너지는 보존된다.

### 10.3.3 정준 변환에 대한 푸아송 괄호식의 불변성

푸아송 괄호식은  $q, p$ 에 대한 편도함수로 정의했다. 그러나 정준 변환에 의해 정의된 해밀토니안은 정준 좌표와 정준 운동량에 의존하므로, 푸아송 괄호식은 정준 좌표와 정준

운동량을 이용하여 정의할 수 있다. 이 때 변수를 명확히 하기 위해서 다음과 같이 표기하기로 한다.

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (10.92)$$

정준 변환된  $Q, P$ 에 대한 푸아송 괄호식은,

$$\{f, g\}_{Q,P} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \right) \quad (10.93)$$

와 같이 쓸 수 있다. 단, 정준 좌표와 정준 운동량이 명확한 경우에는 앞으로 의준 변수를 생략하기로 한다.

정준 변환된 켈레 정준 변수의 푸아송 괄호식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \sum_i \left( \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial P_\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial P_\beta}{\partial q_i} \right) \quad (10.94)$$

(10.54)와 (10.60)으로부터,

$$\frac{\partial P_\beta}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\beta} \right) = -\frac{\partial}{\partial Q_\beta} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial p_i}{\partial Q_\beta} \quad (10.95)$$

$$\frac{\partial P_\beta}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial Q_\beta} \left( -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial q_i}{\partial Q_\beta} \quad (10.96)$$

이고, 이를 대입하면,

$$\{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \sum_i \left( \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_\beta} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_\beta} \right) = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial Q_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (10.97)$$

가 얻어진다. 마찬가지로

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{q,p} = 0, \quad \{P_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = 0 \quad (10.98)$$

임을 보일 수 있다(증명 생략).

임의의 두 함수

$$f(t, q, p), \quad g(t, q, p) \quad (10.99)$$

에 대해서,

$$q_i = q_i(t, Q, P), \quad p_i = p_i(t, Q, P) \quad (10.100)$$

의 변환이 정준 변환일 때 푸아송 괄호식

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (10.101)$$

가  $Q$ 와  $P$ 로 어떻게 나타내어 지는지 살펴보기로 한다.  $f, g$ 에 대해서 매개 변수의 편미분 공식을 적용하면,

$$\begin{aligned}
 \{f, g\}_{q,p} &= \sum_i \sum_j \overbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right)}^{\partial f / \partial q_i} \overbrace{\sum_k \left( \frac{\partial g}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right)}^{\partial g / \partial p_i} \\
 &\quad - \sum_i \sum_j \overbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right)}^{\partial f / \partial p_i} \overbrace{\sum_k \left( \frac{\partial g}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)}^{\partial g / \partial q_i} \\
 &= \sum_{j,k} \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial Q_k} \left[ \overbrace{\sum_i \left( \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right)}^{\{Q_j, Q_k\}_{q,p}=0} + \overbrace{\sum_i \left( \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)}^{\{Q_j, P_k\}_{q,p}=\delta_{jk}} \right] \\
 &\quad + \sum_{j,k} \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_k} \left[ \overbrace{\sum_i \left( \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right)}^{\{P_j, Q_k\}_{q,p}=-\delta_{kj}} + \overbrace{\sum_i \left( \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)}^{\{P_j, P_k\}_{q,p}=0} \right] \\
 &= \sum_{j,k} \left( \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial Q_k} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_k} \right) \delta_{kj} = \sum_j \left( \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial Q_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \right)
 \end{aligned}$$

가 되어,

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \quad (10.102)$$

가 얻어진다. 따라서 푸아송 괄호식은 정준 변환에 대해서 불변이며, 10.3.1절의 모든 공식은  $\{\dots\}_{Q,P}$ 에 대해서도 성립한다. 특히, 임의의  $q_i, p_i$ 에 대한 푸아송 괄호식 (10.81)도 그대로 임의의 정준 켈레 좌표에 대해서 성립한다.

$$\{Q_i, Q_j\}_{Q,P} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{Q,P} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{Q,P} = \delta_{ij} \quad (10.103)$$

### 10.3.4 푸아송 괄호식에 의한 정준 변환의 표현

한편, 우리는 푸아송 괄호식이 불변이 되게하는 정준 켈레 변수의 변환은 정준 변환임을 보일 수 있다. 즉, 임의의 두 함수  $f, g$ 에 대해서,

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$$

라면  $(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$ 의 관계는 정준 변환임을 증명할 수 있다.

푸아송 괄호식이 불변일 때, 우리는 10.3.1절의 공식을 그대로 이용할 수 있다. (10.73)과 (10.80)으로부터,

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \{Q_i, H\} = \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad (10.104)$$

가 성립한다.  $(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$ 의 변환이 정준 변환이라면 적당한 모함수  $F$ 에 대해서,

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (10.105)$$

로 새로운 해밀토니안을 정의할 수 있을 것이다. 이를 대입하면,

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial P_i} \left( H' - \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( Q_i - \frac{\partial F}{\partial P_i} \right) + \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad (10.106)$$

가 되고, 우리는 언제나  $Q_i = \partial F / \partial P_i$ 가 되는 모함수를 찾을 수 있으므로,

$$\dot{Q}_i = \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad (10.107)$$

가 성립한다. 마찬가지로 방법으로  $\dot{P}_i$ 에 대해서 계산하면,

$$\dot{P}_i = \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial P_i}{\partial t} + \{P_i, H\} = \frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial Q_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left( P_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) - \frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (10.108)$$

가 되고,  $P_i = -\partial F / \partial Q_i$ 가 되게 적당히 모함수를 선택하면,

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (10.109)$$

를 만족시킬 수 있다. 따라서  $Q$ 와  $P$ 는 정준 방정식을 만족하는 정준 켈레 변수이고,  $(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$ 의 변환은 정준 변환이다.

위 결과와 전절의 결과는 역의 관계에 있다. 따라서 푸아송 괄호식이 불변이 되는 변환은 정준 변환과 같다. 특히,

$$\text{정준 변환} \Rightarrow \begin{cases} \{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 \\ \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \\ \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \Rightarrow \text{정준 변환}$$

의 관계에 있음에 주목하라. 위 관계는 순환 관계에 있으므로 결국 세 가지 조건은 모두 동치이다. 따라서 우리는  $(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$ 의 변환이 정준 변환인지 또는 푸아송 괄호식이 불변인지 알아보려면,

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad (10.110)$$

가 성립하는지만 확인해보면 된다.

또한, (10.104), (10.107), (10.108), (10.109)로부터,

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial Q_i} = \frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (10.111)$$

이다. 따라서 정준 변환이 시간에 명시적으로 의존하지 않을 때,  $H = H'$ 이라고 둘 수 있다.

## 10.4 위상 공간

## 10.4.1 위상 궤적

모든 정준 좌표와 정준 운동량을 성분으로 갖는 벡터를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (10.112)$$

이 벡터를 위상 벡터(phase vector)라 부르며, 위상 벡터의 벡터 공간을 위상 공간(phase space)이라 한다.  $\mathbf{z}$ 의 위상 공간은  $2n$ 차원의 벡터 공간이며 위상 공간의 각 축은  $n$ 개의 정준 좌표축과  $n$ 개의 정준 운동량축이 된다. 위상 공간의 하나의 벡터는 계의 운동 상태를 나타낸다. 계의 운동 상태는 해밀턴 방정식으로 주어진다.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (10.113)$$

이 방정식을 풀면 모든 정준 좌표와 정준 운동량의 시간 의존성이 결정된다.

$$\mathbf{z}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)) \quad (10.114)$$

따라서 초기 조건  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t=0)$ 이 주어지면 이후의 각 시각의 운동 상태를 예측하는 것이 가능하다. 이 때,  $\mathbf{z}(t)$ 의 종점이 위상 공간에서 그리는 궤도를 위상 궤적(phase trajectory)라 부른다.

일반적으로 위상 궤적은 교차점을 가지지 않는다. 이는 해밀턴 방정식에 의해서 모든 시간에 대한 운동 상태가 1대1로 결정되기 때문이다. 만약 위상 공간에서 궤도가 교차하게 되면 교차점 이후의 운동 상태가 어느쪽의 위상 궤적을 따르게 될지 예측할 수 없게 되며, 이것은 해밀턴 방정식에 모순된다.

10.1.2절에서 계산한 1차원 조화 진동자의 위상 궤적을 구해보자. 조화 진동의 각진동수를  $\omega = \sqrt{k/m}$ 이라고 하면  $x$ 는,

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \Leftrightarrow \quad x = A \cos(\omega t - \phi) \quad (10.115)$$

와 같다. 일반화 운동량은,

$$p = m\dot{x} = -m\omega A \sin(\omega t - \phi) \quad (10.116)$$

이다. 위상 궤적은,

$$\mathbf{z}(t) = (x(t), p(t)) = A(\cos(\omega t - \phi), -m\omega \sin(\omega t - \phi)) \quad (10.117)$$

로 주어지며, 위상 궤적의 한점  $\mathbf{z}(t) = (x, p)$ 는 시각  $t$ 에서의 조화 진동자의 운동 상태(변위와 운동량)를 나타낸다. 이 때,

$$1 = \cos^2(\omega t - \phi) + \sin^2(\omega t - \phi) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{m^2 \omega^2 A^2} \quad (10.118)$$

로부터  $\mathbf{z}(t)$ 가 그리는 위상 궤적은 두 축의 길이가 각각  $A$ 와  $m\omega A$ 인 타원이 됨을 알 수 있다. 따라서 조화 진동자의 운동 상태는 위상 공간에서 타원위의 한점에서 출발하여 시간이 지남에 따라서 타원위를 따라 돌아가게 된다. 여기서 양변에  $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ 을 곱하면,

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = H = \text{const.} \quad (10.119)$$

가 얻어져 계의 역학적 에너지 보존 법칙을 확인할 수 있다. 즉, 조화 진동자의 위상 궤도는 에너지가 같은 등에너지면(이 경우는 등에너지선)이다.

## 10.4.2 리우빌 정리

시간에 명시적으로 의존하지 않는 정준 변환을 생각하자. 즉,

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (10.120)$$

처럼 나타내어 진다. 두 정준 켈레 변수에 대한 위상 벡터를 각각

$$\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (10.121)$$

라 하면, 이들의 성분은 각각,

$$z_i = \begin{cases} q_i & (i \leq n) \\ p_{i-n} & (i > n) \end{cases}, \quad Z_i = \begin{cases} Q_i & (i \leq n) \\ P_{i-n} & (i > n) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n) \quad (10.122)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 위상 벡터의 시간 미분은

$$\dot{Z}_i = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \dot{z}_j = \begin{cases} \dot{Q}_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) & (i \leq n) \\ \dot{P}_{i-n} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial P_{i-n}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial P_{i-n}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) & (i > n) \end{cases} \quad (10.123)$$

와 같고, 위상 벡터를 열벡터로,  $\partial Z_i / \partial z_j$ 를  $2n \times 2n$ 의 행렬  $\mathbf{J}$ 로 나타내면,

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{z}} \quad (10.124)$$

가 된다. 여기서  $\mathbf{J}$ 는  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{Z}$ 로의 변수 변환에 대한 야코비 행렬(Jacobi's matrix)에 해당한다.<sup>6</sup> 야코비 행렬은 형식적으로

$$\mathbf{J} = \left( \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \right)_{ij} = \frac{\partial (Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n})}{\partial (z_1, z_2, \dots, z_{2n})} = \frac{\partial (Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n)}{\partial (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)} \quad (10.125)$$

와 같이 쓰이며, 그 행렬식의 절대값

$$J = |\det \mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial q_n} & \frac{\partial P_2}{\partial p_1} & \frac{\partial P_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \frac{\partial P_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \frac{\partial P_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \quad (10.126)$$

은 야코비 행렬식 또는 야코비안(Jacobian)이라 불린다. 야코비안은 중적분의 미소 부피를 나타낼 때 좌표 변환에 이용된다. 이 경우에는  $2n$ 차원의 위상 공간의 미소부피  $d^{2n}z$ 와  $d^{2n}Z$ 의 변환을 나타낸다.

$$d^{2n}Z = J d^{2n}z \quad (10.127)$$

<sup>6</sup> 자세한 것은 미적분학 교과서를 참고.

정준 방정식으로부터,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (10.128)$$

이고, 이를 이용하여  $\dot{z}$ 을 행렬로 나타내면,

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_q H \\ -\nabla_p H \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix}}^U \overbrace{\begin{pmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{pmatrix}}^{\nabla_z H} \quad (10.129)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서  $I$ 는  $n \times n$ 의 단위 행렬이고,  $\nabla_q$ 와  $\nabla_p$ 는 각각 다음식으로 정의된 벡터 미분 연산자이다(3차원 실공간의 델 연산자  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}e_x + \frac{\partial}{\partial y}e_y + \frac{\partial}{\partial z}e_z$ 와 같은 역할을 한다).

$$\nabla_q = \frac{\partial}{\partial q_1}e_{q_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_n}e_{q_n}, \quad \nabla_p = \frac{\partial}{\partial p_1}e_{p_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial p_n}e_{p_n} \quad (10.130)$$

$\nabla_z = (\nabla_q, \nabla_p)$ 라 하고 변환 행렬을  $U$ 라 하면,

$$\dot{z} = U \nabla_z H \quad (10.131)$$

이다. 이 때,  $\nabla_z H$ 의 성분은

$$(\nabla_z H)_i = \frac{\partial H}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{2n} J_{ji} (\nabla_z H)_j = \sum_{j=1}^{2n} (J^t)_{ij} (\nabla_z H)_j \quad (10.132)$$

과 같이 변형할 수 있으며, (10.124)로부터  $\nabla_z H = \nabla_z H'$ 이다. 따라서,

$$\dot{Z} = J \dot{z} = J U \nabla_z H = J U J^t \nabla_z H' \quad (10.133)$$

가 성립한다. 한편 (10.131)과 같은 관계식을  $Z$ 에 대해서도 성립한다.

$$\dot{Z} = U \nabla_z H' \quad (10.134)$$

위의 두 식을 연립하면

$$J U J^t = U \quad (10.135)$$

을 얻을 수 있다. (10.135)의 양변의 행렬식을 계산하면

$$\det J \det U \det J^t = \det U = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \det J = \pm 1 \quad (10.136)$$

이 되어, 야코비안은

$$J = |\det J| = 1 \quad (10.137)$$

이 얻어진다.

이상으로부터 정준 변환에 대한 야코비안은 1임이 증명되었다. 이를 리우빌 정리(Liouville's theorem)라 한다. 야코비안이 1이므로, 정준 변환에 의한 두 위상 공간( $z$ 와  $Z$ )의 미소 부피는 같다.

$$d^{2n}Z = d^{2n}z \quad \Leftrightarrow \quad dQ_1 \cdots dQ_n dP_1 \cdots dP_n = dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n \quad (10.138)$$

즉, 리우빌 정리는 정준 변환이 위상 공간에서의 부피를 보존하는 변환임을 나타낸다.



### 10.4.3 위상 공간의 시간 발전

다음과 같은 정준 변환을 생각하자.

$$Q_i = q_i(t+dt) = q_i(t) + \dot{q}_i(t)dt, \quad P_i = p_i(t+dt) = p_i(t) + \dot{p}_i(t)dt \quad (10.139)$$

즉, 새로운 정준 켈레 변수는, 본래의 정준 켈레 변수가 미소 시간  $dt$ 만큼 지났을 때의 변수이다. 이 변환이 정준 변환임은 다음의 푸아송 괄호식을 계산해보면 알 수 있다.

$$\{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \{q_\alpha, p_\beta\}_{q,p} + (\{\dot{q}_\alpha, p_\beta\}_{q,p} + \{q_\alpha, \dot{p}_\beta\}_{q,p})dt + \{\dot{q}_i, \dot{p}_i\}_{q,p}(dt)^2 \quad (10.140)$$

여기서 네 번째 항은 미소량에 대한 2차항이므로 무시할 수 있고,  $dt$ 에 비례하는 두 번째와 세 번째 항은,

$$(\{\dot{q}_\alpha, p_\beta\} + \{q_\alpha, \dot{p}_\beta\})dt = \sum_i \left( \overbrace{\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial p_\beta}{\partial p_i}}^{\delta_{\beta i}} - \overbrace{\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial p_\beta}{\partial q_i}}^0 + \overbrace{\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{p}_\beta}{\partial p_i}}^{\delta_{\alpha i}} - \overbrace{\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \dot{p}_\beta}{\partial q_i}}^0 \right) dt \quad (10.141)$$

$$= \left( \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \dot{p}_\beta}{\partial p_\alpha} \right) dt = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_\beta \partial p_\alpha} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q_\beta} \right) dt = 0 \quad (10.142)$$

으로부터 0이 된다. 따라서,

$$\{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \{q_\alpha, p_\beta\}_{q,p} = \delta_{\alpha\beta} \quad (10.143)$$

이다. 마찬가지로 방법으로  $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{P_\alpha, P_\beta\} = 0$ 임을 보일 수 있고, 이 때 푸아송 괄호식은 불변이므로(10.3.4절 참고) (10.139)는 정준 변환이다.

이 때  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 는  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 가 시간  $dt$ 가 경과했을 때의 벡터를 나타낸다. 따라서  $\mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{z}(t+dt)$ 의 변환은 하나의 위상 궤적에 대해서  $dt$  만큼 시간이 흘렀을 때 벡터가 어떻게 움직이는 가를 나타낸다. 이 변환이 정준 변환이므로, 우리는 위상 궤적을 이동하는 운동 상태는 매 순간 짧은 시간 간격의 정준 변환을 반복하여 기술됨을 알 수 있다. 특히, 리우빌 정리로부터 정준 변환의 야코비안은 1이므로, 임의의 시각  $t$ 에 대해서,

$$d^{2n} \mathbf{Z} = d^{2n} \mathbf{z}(t+dt) = d^{2n} \mathbf{z}(t) \quad (10.144)$$

또는,

$$\begin{aligned} dq_1(t+dt) dq_2(t+dt) \cdots dq_n(t+dt) dp_1(t+dt) dp_2(t+dt) \cdots dp_n(t+dt) \\ = dq_1(t) dq_2(t) \cdots dq_n(t) dp_1(t) dp_2(t) \cdots dp_n(t) \end{aligned} \quad (10.145)$$

가 된다. 이로부터 하나의 위상 공간의 시간 발전에 대해서 위상 공간의 부피는 불변임을 알 수 있다.

## 10.5 양자 역학으로의 전개

### 10.5.1 해밀턴 야코비 방정식

정준 변환은 한 가지가 아니다. 여기에서는 정준 변환의 결과, 새로운 해밀토니안이 0이 되는 경우를 생각해보기로 한다. 즉, 이 정준 변환의 모함수를  $W$ 라 했을 때, 다음의

등식이 성립하는 모함수  $W$ 를 찾으면 된다.<sup>7</sup>

$$H' = H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (10.146)$$

이 경우 정준 변환에 의한 정준 방정식은,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \quad (10.147)$$

이 되므로 변환된 정준 켈레 변수  $Q_i, P_i$ 는 모두 시간에 의존하지 않는 상수가 된다.

(10.146)으로부터 의미있는 방정식을 이끌어 보기로 한다. 예를 들어, 1차원 운동의 경우 정준 변환 전의 정준 켈레 변수를  $q, p$ 라 하면  $H(t, q, p)$ 와 같이 나타낼 수 있다. (10.54) 타입의 모함수를 이용하여 (10.146)에서  $p$ 를 소거하면 다음의 해밀턴-야코비 방정식(Hamilton-Jacobi's equation)을 얻는다.

#### ■ 해밀턴-야코비 방정식

$$H\left(t, q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (10.148)$$

여기서  $W$ 는 본래  $W = W(t, q, Q)$ 와 같이  $Q$ 에도 의존하지만  $Q$ 에 대한 의존성은 편미분 방정식을 푸는 과정에서 나타나는 임의 상수(또는  $t, q$ 에 의존하지 않는 임의 함수)에 포함시킬 수 있으므로  $W = W(t, q)$ 의 함수로 간주할 수 있다.<sup>8</sup> 더 일반적으로  $N$ 개의 정준 좌표  $q = (q_1, \dots, q_N)$ 에 대해서 해밀턴-야코비 방정식은,

$$H\left(t, q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial q} = \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_N}\right) \quad (10.149)$$

와 같은 형태가 된다.

해밀턴-야코비 방정식은 라그랑지 방정식, 해밀턴 방정식과 등가인 편미분 방정식이다. 편미분 방정식의 풀이는 다양한 수치해석법이 발달해 있으므로 일반적으로는 수치 계산을 통해서 풀게 된다. 여기에서는 해인 모함수  $W$ 가 가지는 특징을 설명하기로 한다. 정준 변환된 해밀토니안  $H'(t, Q, P)$ 에 대응하는 라그랑지안을  $L'(t, Q, \dot{Q})$ 라 할 때, 이들 사이에는 다음의 관계가 존재한다.

$$H'(t, Q, P) = P \cdot \dot{Q} - L'(t, Q, \dot{Q}) \quad (10.150)$$

여기에  $H' = 0, \dot{Q}_i = 0$ 을 대입하면  $L' = 0$ 임을 알 수 있다. 한편으로 모함수와 라그랑지안의 관계는 (10.41)로부터,

$$L'(t, Q, \dot{Q}) = L(t, q, \dot{q}) - \frac{dW}{dt} \quad (10.151)$$

로 주어진다. 여기에  $L' = 0$ 을 대입하면,

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{dW}{dt} \quad (10.152)$$

<sup>7</sup>모함수의 종류는 다양하지만 시간에 대한 의존성은 모두 동일하다.

<sup>8</sup>모함수는 유일하지 않기 때문에 해밀턴-야코비 방정식의 해가 임의성을 가지는 것은 당연하다.

가 되어  $W$ 의 시간 미분이 라그랑지안과 일치함을 알 수 있다. 위 식의 양변을  $t_1 \rightarrow t_2$ 의 구간에서 적분하면,

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt = W(t_2, \mathbf{q}_2) - W(t_1, \mathbf{q}_1) \quad (10.153)$$

이 얻어진다. 여기서  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$ ,  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$ 이다. 위 식의 피적분 함수에 포함된  $\mathbf{q}$ 는  $t$ 에 대한 함수이며,  $\mathbf{q}(t)$ 는 최소 작용의 원리를 만족시키도록 선택된다. 한편 좌변은 작용 적분과 일치한다. 단,  $\mathbf{q}$ 는 이미 해밀턴의 원리를 만족시키는 함수로 결정되어 있기 때문에 여기서의 작용 적분은 더이상 적분 범함수가 아니다.  $t_2$ 를 임의의 시각  $t$ 로 쓰고  $t_1$ 을 운동을 시작한 시간  $t_0$ 으로 하면, 좌변은  $t$ 에 대한 함수,

$$S(t, \mathbf{q}) = \int_{t_0}^t L(t', \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt' \quad (10.154)$$

로 볼 수 있고, 이는 곧 우변의  $W(t, \mathbf{q}(t))$ 와 상수분( $W_0 \equiv W(t_0, \mathbf{q}(t_0))$ )만큼만 차이가 난다. 즉, 상수를 제외하면 해밀턴-야코비 방정식의 해를 계의 임의의 시각  $t$ 에서 실현되는 작용 적분<sup>9</sup>  $S(t, \mathbf{q})$ 와 같다.

특히, 해밀토니안이 시간에 명시적으로 의존하지 않는 경우, 해밀토니안은 계의 역학적 에너지  $E$ 와 일치한다. 이 때 해밀턴-야코비 방정식의 해는,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = -E \quad (10.155)$$

와 같이 쓸 수 있다. 이 결과는  $W$ , 즉 작용 적분  $S$ 에서 시간에 의존하는 부분은  $-Et$ 의 형태로 분리할 수 있음을 의미한다.

$$W(t, \mathbf{q}) = S(t, \mathbf{q}) = S(\mathbf{q}) - Et \quad (10.156)$$

여기서  $S(\mathbf{q})$ 는 시간에 명시적으로 의존하지 않음을 나타낸다. 또한, 다음의 두 관계식,

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -E \quad (10.157)$$

를 비교해보면, 시간  $t$ 와 에너지  $-E$ 가 정준 켈레 변수의 관계에 있음을 알 수 있다.

### 10.5.2 슈뢰딩거 방정식

슈뢰딩거 방정식(Schrödinger's equation)은 양자역학의 기본 방정식으로 예를 들어 1차원에서 운동하는 질량  $m$ 의 입자의 파동함수  $\psi(x, t)$ 는 다음과 같은 형태의 슈뢰딩거 방정식의 해로 주어진다.

#### ■ 슈뢰딩거 방정식

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (10.158)$$

<sup>9</sup> 값이 최소인 작용 적분

이 방정식이 나타내는 의미는 양자역학에서 구체적으로 다루지므로 여기에서는 이 방정식과 해석역학이 어떻게 연관되어 있는지만을 설명하기로 한다.

양자역학에서는 입자도 파동의 성질을 가지며, 슈뢰딩거 방정식의 파동함수는 물질의 이러한 성질을 기술한다. 고전 역학에서 입자의 운동은 해석 역학의 방정식을 통해서 기술된다. 뉴턴의 운동 방정식과 함께, 라그랑지 방정식과 해밀턴 방정식은 입자의 위치와 운동량에 대한 방정식인 반면에, 해밀턴-야코비 방정식은 계의 작용  $S(t, x)$ 에 대한 방정식이다. 파동에 대해서는 위치와 운동량을 지정하기가 곤란하므로, 다른 방정식보다 해밀턴-야코비 방정식을 출발점으로 삼아 입자의 파동성을 기술하는 방정식을 수립하는 것이 좋을 것이다. 해밀턴-야코비 방정식을 풀면 임의의 시각  $t$ 에서의  $S(t, x)$ 의 등위곡면이 결정된다. 이 등위곡면은 시간이 지나면 해밀턴-야코비 방정식에 따라서 변화한다. 이것은 마치 파동의 운동이 임의의 시각  $t$ 에서의 위상  $\phi(t)$ 로부터 결정되는 것과 유사하다. 따라서 우리는 작용  $S$ 를 마치 위상으로 갖는 다음과 같은 복소수 양을 정의하기로 한다.

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{iS(t, x)/\hbar} \quad (10.159)$$

$\psi_0$ 는 실수로 복소수  $\psi(x, t)$ 의 진폭(amplitude)를 나타내며  $\psi$ 의 편각, 즉 위상은  $S/\hbar$ 이다. 여기서  $\hbar$ 는  $S$ 와 같은 차원(에너지와 시간의 곱)을 가지는 상수로 작용을 무차원화하여 위상으로 쓰기 위해 도입되었다. 이를 작용  $S$ 에 대해서 풀면,

$$S(t, x) = -i\hbar [\ln \psi(x, t) - \ln \psi_0] \quad (10.160)$$

가 되고, 작용의 편미분은,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{i\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.161)$$

와 같다. 이 결과를 해밀턴-야코비 방정식,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(t, x, p) = -\left[ \frac{p^2}{2m} + V(x, t) \right] \quad (10.162)$$

에 대입하여 정리하면,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(q, t)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi(q, t) \right)^2 + V(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (10.163)$$

가 되어 (10.158)와 닮은 결과가 얻어진다.

비록 (10.163)이 (10.158)의 슈뢰딩거 방정식과 비슷한 형태를 가지나 일치하지는 않는다. 이는 (10.163)이 단순히 해밀턴-야코비 방정식을 변형시킨 결과이므로 본질적으로 해밀턴-야코비 방정식과 동가이며 양자 역학의 요청을 포함하고 있지 않기 때문이다. 슈뢰딩거 방정식이 발표된 이후로, 해밀턴-야코비 방정식과 슈뢰딩거 방정식 사이의 유사성이 여러번 지적되었으며, 해밀턴-야코비 방정식으로부터 슈뢰딩거 방정식을 유도하는 방법은 몇 가지가 알려져 있다. 여기에서는 양자 역학의 기본적인 수법인, 물리량을 연산자로 표현하는 방법을 이용하기로 한다.

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{i\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.164)$$

를 다음과 같이 변형한다.

$$p\psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) \quad (10.165)$$

여기서 좌표 연산자와 운동량 연산자를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\hat{x} \equiv x, \quad \hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (10.166)$$

여기서 연산자는 연산자의 오른쪽에 오는 함수를 다른 함수로 대응시키는 역할을 한다. 즉, 어떤 임의의 함수  $f(x)$ 에 대해서,

$$\hat{x}f(x) = xf(x), \quad \hat{p}f(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x) \quad (10.167)$$

이다. 이 때, 좌표 연산자는 단순히 해당 좌표를 곱한 결과를 나타내며, 운동량은 공간 미분을 나타내는 연산자이다. 여기서  $\hbar$  이 양이 고전 역학의 운동량이 아닌 양자 역학의 연산자임을 의미한다. 이를 이용하면,

$$p^2 \rightarrow \hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (10.168)$$

이 얻어지며, 이를 이용하여 해밀토니안을 나타내면

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \quad (10.169)$$

와 같이 해밀토니안도 연산자로 표현된다. 이 해밀토니안을 해밀턴-야코비 방정식 (10.162)에 대입하여  $S$ 를  $\psi$ 로 나타내면,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (10.170)$$

또는,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (10.171)$$

가 되어 (10.158)과 일치하는 결과를 얻을 수 있다. 슈뢰딩거 방정식의  $\hbar$ 는 실험을 통해서 결정되며 플랑크 상수(Planck constant)라 알려진  $h$ 를 이용하여 다음과 같이 나타내어진다.

$$h \approx 6.626068 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \quad (10.172)$$

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1.054572 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \quad (10.173)$$

### 10.5.3 불확정성 원리와 푸아송 괄호식

양자 역학에서 물리량을 연산자로 표현하는 이유는, 양자 역학에서 물리량은 확정된 값을 가질 수 없기 때문이다. 양자 역학에서는 다음과 같이 두 물리량의 연산자  $\hat{A}$ 와  $\hat{B}$ 에 대해서 정준 교환자(canonical commutator)  $[\hat{A}, \hat{B}]$ 를 정의한다.

#### ■ 정준 교환자

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (10.174)$$

만약  $\hat{A}$ 와  $\hat{B}$ 가 고전 역학적인 물리량이면  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ 이므로 정준 교환자는 반드시 0이 된다. 그러나 양자 역학에서는 물리량이 연산자로 취급되기 때문에 반드시 교환관계가 성립하지 않을 수 있다. 실제로 앞의 절에서 구한 운동량과 위치에 대해서 계산해보면,<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] \varphi(x) &= (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \varphi(x) = \hat{x}\hat{p}\varphi(x) - \hat{p}\hat{x}\varphi(x) \\ &= \hat{x}\hat{p}\varphi(x) + \overbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}^{-\hat{p}} \left( \underbrace{\hat{x}}_x \varphi(x) \right) = \hat{x}\hat{p}\varphi(x) + i\hbar\varphi(x) + \underbrace{\hat{x}}_x \overbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}^{-\hat{p}} \varphi(x) \\ &= i\hbar\varphi(x) \end{aligned}$$

가 되어, 연산자  $[\hat{x}, \hat{p}]$ 는 우변의  $i\hbar$ 에 대응한다.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (10.175)$$

더 일반적으로, 정준 좌표  $\hat{q}_i$ 에 대응되는 정준 운동량  $\hat{p}_i$ 간에는,

#### ■ 정준 교환 관계

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (10.176)$$

의 관계가 성립하며, 이결과를 정준 교환 관계(canonical commutation relation)라 한다. 특히  $i = j$ 인 경우, 위 식으로부터 다음의 부등식을 유도할 수 있다.<sup>11</sup>

#### ■ 최소 불확정성 원리

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2} \quad (10.177)$$

여기서  $\Delta q_i$ 와  $\Delta p_i$ 는  $q_i$ 와  $p_i$ 의 표준 편차를 나타내며, 양자역학에서는 종종 불확정성이라 칭하고, 위 부등식을 (최소) 불확정성 원리(minimal uncertainty principle)라 부른다. 두 표준 편차의 곱이 0보다 커야 하므로  $\Delta q_i > 0, \Delta p_i > 0$ 이어야 하며, 이는 곧 두 물리량이 확정된 값을 가지지 못함을 나타내기 때문이다.

여기서 주목해야할 것은 정준 교환자와 푸아송 괄호식의 유사성이다. 정준 켈레 변수에 대한 푸아송 괄호식은 (10.81)로부터,

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (10.178)$$

이다. 이 때 정준 교환자와 푸아송 괄호식의 대응 관계는,

$$\{ , \} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [ , ] \quad (10.179)$$

와 같다. 우리는 앞의 절에서 운동량을  $x$ 에 대한 연산자<sup>12</sup>로 간주하여 해밀턴-야코비 방정식으로부터 슈뢰딩거 방정식을 유도하였다. 그리고 그렇게 정의된 운동량을 이용하여 정준 교환 관계 (10.176)을 이끌어 냈다. 따라서 슈뢰딩거 방정식은 푸아송 괄호식을

<sup>10</sup>여기서 두 물리량  $\hat{x}, \hat{p}$ 는 모두 함수에 작용하는 연산자이기 때문에  $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$ 만을 따로 계산하는 것은 의미가 없다.

<sup>11</sup>구체적인 계산 과정은 본 과정을 크게 벗어나므로 증명을 생략한다. 간단하게 요약하면, 연산자의 기대값과 분산에 대해서 코시-슈바르츠 부등식을 적용한다.

<sup>12</sup>더 일반적으로, 정준 좌표  $q_i$ 의 켈레 운동량은  $p_i = \partial/\partial q_i$ 이다.

정준 교환자로 교체한 것에 대응한다고 생각할 수 있다. 실제로 푸아송 괄호식에 대해서 대응되는 정준 교환 관계를 가정하면, 슈뢰딩거 방정식을 유도하는 것도 가능하다.<sup>13</sup>

어떤 물리량  $A$ 에 대한 시간 발전을 푸아송 괄호식으로 나타내면 (10.73)로부터,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \quad (10.180)$$

와 같다. 여기에 (10.179)의 대응 관계를 적용하면, 대응하는 연산자의 시간 발전 방정식

#### ■ 하이젠베르크의 운동 방정식

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = i\hbar \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + [\hat{A}, \hat{H}] \quad (10.181)$$

을 얻을 수 있으며, 이 식을 **하이젠베르크의 운동 방정식**(Heisenberg's equation of motion)이라 한다. 예를 들어, 정준 좌표  $x$ 에 대해서는,

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\} \quad (10.182)$$

이다.<sup>14</sup> 이에 대응되는 하이젠베르크의 운동 방정식은,

$$i\hbar \frac{d\hat{x}}{dt} = [\hat{x}, \hat{H}] \quad (10.183)$$

이며, 우변의 정준 교환자는 다음과 같이 계산된다.

$$[\hat{x}, \hat{H}] \varphi(x) = \hat{x} \hat{H} \varphi(x) - \hat{H} \hat{x} \varphi(x) \quad (10.184)$$

$$= \hat{x} \hat{H} \varphi(x) - \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] [x \varphi(x)] \quad (10.185)$$

$$= \hat{x} \hat{H} \varphi(x) - x \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \varphi(x) + \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (10.186)$$

$$= \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{i\hbar}{m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) = \frac{i\hbar}{m} \hat{p} \varphi(x) \quad (10.187)$$

이로부터  $[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m} \hat{p}$ 임을 알 수 있고, 따라서,

$$i\hbar \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i\hbar}{m} \hat{p} \Leftrightarrow m \dot{\hat{x}} = \hat{p} \quad (10.188)$$

가 되어, 고전 역학에서 질량  $m$ 인 물체의 운동량과 속도의 관계식이 나타난다. 운동 방정식 뿐만 아니라, **푸아송 괄호식에 대한 모든 공식들은 정준 교환자에 대해서도 대응관계**만 잘 지켜주면 그대로 성립한다. 예를 들어, (10.79)의 야코비 항등식을 정준 교환자로 나타내면

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (10.189)$$

가 되는데, 전부 전개하여 더하고 빼면 좌변이 0이 됨을 간단히 보일 수 있다.

<sup>13</sup> 본 과정을 벗어나므로 증명은 생략한다.

<sup>14</sup>  $x$ 는 독립 변수이므로  $\partial x / \partial t = 0$ 이다.

슈뢰딩거 방정식과 함께 하이젠베르크의 운동 방정식은 양자 역학을 이끄는 양대 산맥이며, 두 방정식이 각각 발표된 초기에는 논란이 많았지만, 결국 나중에 이 둘은 겉모습만 다를 뿐 같은 운동을 기술함이 밝혀졌다.<sup>15</sup> 푸아송 괄호식에 의한 양자화와 하이젠베르크의 운동 방정식과 슈뢰딩거 방정식의 관계에 대해서는 대부분의 양자역학 교과서에서 자세히 다루어진다.

### 10.5.4 고전 역학으로의 회귀

고전 역학에서 우리는 물리량을 연산자로 간주하여 양자 역학의 방정식(슈뢰딩거 방정식과 하이젠베르크의 운동 방정식)을 이끌어 냈다. 따라서 만약 우리가 양자 역학의 고전 역학적인 측면을 바라보고 싶다면 반대로 연산자였던 물리량을 하나의 숫자로 보면 된다. 정준 켈레 변수의 정준 교환 관계식,

$$[q_i, p_j] = q_i p_j - p_j q_i = i\hbar \delta_{ij} \quad (10.190)$$

은  $q_i$ 와  $p_j$ 가 연산자이기 때문에 교환 법칙이 성립하지 않기 때문에 이끌어 지는 관계식이다. 만약  $q_i$ 와  $p_j$ 가 단순한 숫자라면, 정준 교환자의 결과는 반드시 0이 될 것이다.

$$[q_i, p_j] \xrightarrow{\text{고전 역학}} 0 \quad (10.191)$$

이는 곧, 정준 교환 관계식에서

#### ■ 고전 극한

$$\hbar \rightarrow 0$$

의 극한을 취하는 것을 의미한다. 이러한 극한을 종종 고전 극한(classical limit)이라 칭한다.

$\hbar \rightarrow 0$ 의 극한이 고전 역학에 해당한다는 것에 대한 직관적인 이해는 파동 함수로부터 알 수 있다. 슈뢰딩거 방정식에서 파동 함수는 입자의 파동적인 성질을 나타내기 위해서 도입된 물리량이다. 파동 함수는 작용 적분을 이용하여 (10.159)와 같이 정의하였다.

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{iS(t, x)/\hbar} \quad (10.192)$$

만약  $\hbar \rightarrow 0$ 이라면 지수함수는 매우 빠르게 진동하는(파장이 0에 가까운) 파동을 나타내게 되고, 이는 곧 파동의 대표적인 성질인 회절과 간섭이 일어나기 힘들어진다는 것을 의미한다. 따라서  $\hbar \rightarrow 0$ 의 극한에서 양자 역학적인 효과는 사라지고 고전적인 입자에 대한 운동으로 대체된다.

<sup>15</sup> (10.179)를 가정하면 등가임을 증명할 수 있다.



# 찾아보기

## 【 A 】

acceleration	8
action	8, 97
action integral	97
angular frequency	12
angular momentum	41
angular velocity	11
antiphase	37
area velocity	55

## 【 B 】

beat	24
------	----

## 【 C 】

canonical commutation relation	134
canonical commutator	133
canonical conjugate variable	115
canonical coordinate	115
canonical equation	115
canonical momentum	115
canonical transformation	115
Cartesian coordinate system	2
center of mass	10
central force	44
centrifugal force	66
centripetal acceleration	11
centripetal force	66
Charles's theorem	74
classical limit	136
column vector	2
conservative force	14
constant of motion	121
constraint	100
Coriolis force	66
coupled vibration	23
critical damping	29

## 【 D 】

damped oscillation	28
decrement	33

degree of freedom	100
del operator	15
driven oscillation	33
driving force	33

## 【 E 】

equation of motion	8
escape velocity	59
Euler's equation for rotation	87
Euler's equation for variation problem	92
Euler's theorem	74
explicit function	89
external force	9

## 【 F 】

Fermat's principle	90
force field	14
forced oscillation	33
frame of reference	7
functional	89

## 【 G 】

generalized coordinate	98
generalized force	99
generalized momentum	99
generating function	117
gradient	15
gravity	50
gyradius	70
gyroscope	80

## 【 H 】

Hamilton's equation	112
Hamilton's principle	97
Hamilton-Jacobi's equation	130
Hamiltonian	107, 111
harmonic oscillation	12
heavy damping	30
Heisenberg's equation of motion	135
holonomic	100
Hooke's law	12

## 【 I 】

ignorable .....	106
impact parameter .....	58
implicit function .....	89
in-phase .....	37
inertia tensor .....	82
inertial force .....	61
inertial frame of reference .....	7
inertial mass .....	8
inner product .....	3
integral of motion .....	121
internal force .....	9
isochronous .....	22

## 【 J 】

Jacobi's identity .....	121
Jacobi's matrix .....	127
Jacobian .....	127

## 【 K 】

Kepler's laws of planetary motion .....	53
kinetic energy .....	17
Kronecker delta .....	4

## 【 L 】

Lagrange's multiplier .....	102
Lagrangian .....	97
law of conservation of angular momentum .....	44
law of conservation of momentum .....	9
lightly-damped oscillation .....	29
Liouville's theorem .....	128

## 【 M 】

mass .....	8
mechanical energy .....	18
modulation angular frequency .....	24
moment arm .....	63
moment of inertia tensor .....	82
momentum .....	8

## 【 N 】

nabla operator .....	15
neutral stability .....	20
Newton's laws of motion .....	7
Noether's theorem .....	106
normal coordinate .....	23

normal mode .....	23
-------------------	----

## 【 O 】

orbital angular momentum .....	75
outer product .....	4
over damping .....	30

## 【 P 】

parallel axis theorem .....	71
phase space .....	126
phase trajectory .....	126
Planck constant .....	133
Poisson bracket .....	120
Poisson's theorem .....	122
potential barrier .....	19
potential energy .....	15
power .....	14
precession .....	81
principal axis .....	85
principle of least action .....	97
principle of superposition .....	24
product of inertia .....	82
pseudo force .....	62

## 【 Q 】

Q factor .....	32
----------------	----

## 【 R 】

radius of gyration .....	70
reacti .....	8
reduced mass .....	50
response .....	34
response function .....	35
rotational symmetry .....	107
row vector .....	2

## 【 S 】

scalar .....	1
scalar product .....	3
scalar triple product .....	5
Schrödinger's equation .....	131
Snell's law .....	95
spin angular momentum .....	75
steady state .....	33

## 【 T 】

torque .....	43
--------------	----

transient state .....	35
translational symmetry .....	107

## 【 U 】

uncertainty principle .....	134
under-damping .....	29

## 【 V 】

variation .....	92
variational principle .....	96
variational problem .....	91
vector .....	1
vector product .....	4
vector triple product .....	6
velocity .....	7

## 【 W 】

work .....	13
work-energy theorem .....	18

## 【 ㄱ 】

가벼운 감쇠 진동 .....	29
가상의 힘 .....	62
가속도 .....	8
가속도의 법칙 .....	8
각속도 .....	11
각속도 벡터 .....	62
각운동량 .....	41
각운동량 보존 법칙 .....	44, 107
각진동수 .....	12
감쇠 진동 .....	28
에너지 손실 .....	31
감쇠율 .....	33
강제 진동 .....	33
강체의 각운동량 .....	75
강체의 운동 에너지 .....	78
강체의 토크 .....	77
고유 진동수 .....	23
고전 극한 .....	136
고정축에 대한 회전 .....	69
과도 감쇠 .....	30
과도 상태 .....	35
관성 .....	8
관성 모멘트 .....	69
관성 모멘트 텐서 .....	82
관성 질량 .....	8

관성 텐서 .....	82
시각화 .....	86
관성계 .....	7
관성곱 .....	82
관성력 .....	61
관성의 법칙 .....	7
구동력 .....	33
구심 가속도 .....	11
구심력 .....	66
궤도 각운동량 .....	75
그래디언트 .....	15
근일점 .....	54
기본 단위 벡터 .....	2
기저 벡터 .....	1
기준 모드 .....	23, 27
기준 자리표 .....	23
기준 진동 .....	23
기준틀 .....	7

## 【 ㄴ 】

나블라 연산자 .....	15
내력 .....	9
내적 .....	3
뉴턴의 운동 법칙 .....	7
제1법칙 .....	7
제2법칙 .....	8
제3법칙 .....	8

## 【 ㄷ 】

단면 2차 반경 .....	70
단면 회전 반경 .....	70
단위 벡터 .....	1, 3
단진동 .....	12
대칭성 .....	106
데카르트 좌표계 .....	2
델 연산자 .....	15
동경 벡터 .....	41
동위상 .....	24, 37
등속 원운동 .....	10
등시적 진동 .....	22

## 【 ㄹ 】

라그랑지 방정식 .....	97
라그랑지 승수 .....	102
라그랑지 승수법 .....	102
일반화 .....	103

라그랑지 역학 .....	97
라그랑지안 .....	97
보존력의 경우 .....	98
리우빌 정리 .....	128

## 【 ㄹ 】

만유 인력 법칙 .....	50
맥놀이 .....	24
면속도 .....	55
면속도 일정의 법칙 .....	54
모멘트 팔 .....	63
모함수 .....	117
무거운 감쇠 .....	30
무시 가능 .....	106
미급 감쇠 .....	28

## 【 ㅁ 】

반작용 .....	8
범함수 .....	89
벡터 .....	1
크기 .....	3, 4
벡터 미분 연산자 .....	15
벡터 삼중곱 .....	6
벡터곱 .....	4
변분 .....	92
변분 문제 .....	91
변분 원리 .....	96
변조 각진동수 .....	24
병진 대칭성 .....	107
보존력 .....	14
일 .....	15
보존력장 .....	14
복합 진자 .....	78
불안정한 평형점 .....	20
불확정성 원리 .....	134
비관성계 .....	7, 61
운동 방정식 .....	62

## 【 ㄴ 】

상대 변위 .....	23
상대 좌표 .....	49
생성 함수 .....	117
샤슬레의 정리 .....	74
세차 운동 .....	56, 81
속도 .....	7
슈뢰딩거 방정식 .....	131

스넬의 법칙 .....	95
스칼라 .....	1
스칼라 곱 .....	3
스칼라 삼중곱 .....	5
스핀 각운동량 .....	75
시간 대칭성 .....	107

## 【 ㄷ 】

안정한 평형점 .....	20
알짜힘 .....	8
야코비 항등식 .....	121
야코비 행렬 .....	127
야코비안 .....	127
양함수 .....	89
역위상 .....	24, 37
역장 .....	14
역학적 에너지 .....	18
역학적 에너지 보존 법칙 .....	18, 109
연성 진동 .....	23
열벡터 .....	2
오른손 좌표계 .....	5
오일러 방정식(변분 문제) .....	92
오일러-라그랑지 방정식 .....	97
중속 변수가 여러개인 경우 .....	94
오일러 방정식(회전) .....	87
오일러의 정리 .....	74
외력 .....	9
외적 .....	4
운동 마찰력 .....	13
운동 방정식 .....	8
운동 상수 .....	121
운동 에너지 .....	17
운동량 .....	8
운동량 보존 법칙 .....	9, 107
일반화 운동량 보존 법칙 .....	106
운동의 적분 .....	121
원심력 .....	66
원일점 .....	54
위상 .....	12
위상 공간 .....	126
위상 궤적 .....	126
유효 중력 .....	67
음함수 .....	89
응답 .....	34
응답 함수 .....	35
허수부 .....	39

이심률.....	54
2차 반경.....	70
일.....	13
일-에너지 정리.....	18
일률.....	14
일반화 운동량.....	99
일반화 운동량 보존 법칙.....	106
일반화 좌표.....	98
일반화 힘.....	99
일반화된 평행축 정리.....	84
임계 감쇠.....	29

【ㄴ】

자유도.....	100
자이로스코프.....	80
자전 각운동량.....	75
작용.....	8, 97
작용 적분.....	97
작용-반작용의 법칙.....	8
적분 범함수.....	90
접선 벡터.....	41
정상 상태.....	33
정준 교환 관계.....	134
정준 교환자.....	133
정준 방정식.....	115
정준 변환.....	115
정준 운동량.....	115
정준 좌표.....	115
정준 켈레 변수.....	115
정지 궤도.....	58
정지 위성.....	58
제1우주 속도.....	58
제2우주 속도.....	59
제약 조건.....	100
조화 진동.....	12
조화 포텐셜 에너지.....	16
조화의 법칙.....	55
주축.....	85
중력.....	50
궤도 에너지.....	53
쌍곡선 궤도.....	57
타원 궤도.....	53
포물선 궤도.....	57
포텐셜 에너지.....	51
중력 포텐셜 에너지.....	16
중립.....	20

중심력.....	44
궤도 방정식.....	47
유효 보존력.....	47
유효 운동 방정식.....	47
유효 포텐셜 에너지.....	46
중첩의 원리.....	24
질량 중심.....	10, 23, 49

【ㄷ】

최소 작용의 원리.....	97
충돌 인자.....	58

【ㄹ】

케플러의 행성 운동 법칙.....	53
제1법칙.....	53
제2법칙.....	54
제3법칙.....	55
코리올리 힘.....	66
Q 인자.....	32
크로네커 델타.....	4

【ㄴ】

타원 궤도의 법칙.....	53
탈출 속도.....	59
토크.....	43

【ㄷ】

페르마의 원리.....	90
평행축 정리.....	71
일반화된 평행축 정리.....	84
평형점.....	19
안정성.....	20
포텐셜 에너지.....	15
포텐셜 장벽.....	19
푸아송 괄호식.....	120, 134
푸아송의 정리.....	122
품질 인자.....	32
플랑크 상수.....	133

【ㅎ】

하이젠베르크의 운동 방정식.....	135
해밀턴 방정식.....	112
해밀턴 역학.....	112
해밀턴-야코비 방정식.....	130
해밀턴의 원리.....	97
해밀토니안.....	107, 111
행벡터.....	2

홀로노믹.....100

환산 질량.....50

회전 대칭성.....107

회전 반경.....70

흑의 법칙.....12

힘.....8