R₂. 从有向图中看出~~集合~~关系的性质

①有向图中每个顶点均成环，则此有向图表示的关系是自反的

②有向图中不同顶点间的每一条边都存在一条方向相反的边，则此有向图表示的关系是对称的

③有向图中~~不同顶点间~~任意不同两顶点间不存在两条方向相反的边，则此有向图表示的关系是反对称的

④有向图中~~如果~~任意不同三顶点A, B, C，若存在顶点A到顶点B的边，顶点B到顶点C的边，则有顶点A到顶点C的边(即：形成一个类似于""的三角形)，则此有向图表示的关系是具有传递性的

R₃. 具有对称性的关系的对应图象可用无向图表示

## 8.4 closures of relations 关系的闭包

### 一. introduction 介绍

S₁. 传递闭包(transitive closure)

包含某一关系R的最小传递关系称为关系R的传递闭包

S₂. 闭包(closure)

假设存在一个包含关系R且具有P性质的关系S，且关系S为包含关系R且具有P性质的任一关系的子集，则关系S称为R上P性质的闭包

R₁. 换言之，闭包就是包含某一关系R的具有P性质的最小关系

R₂. 有些情况下闭包可能并不存在(例如：求关系R={(1,1)}的反自反闭包)

### 二. closures 闭包

S₁. 自反闭包(reflexive closure)

包含关系R且具有自反性质且为任一包含R的自反关系的子集的关系称为R上的自反闭包

R₁. 换言之，自反闭包就是包含~~某~~某一关系R的具有自反性的最小关系

R₂. 给定一个集合A上的关系R，R的自反闭包可以通过往R中加入未在R中出现过的形如(a, a)的有序对(其中a∈A)得到，这样得到的新关系既是自反的，又是包含关系R的，同时还是包含关系R的任一自反关系的子集(即新关系为R上的自反闭包)

S₂. 对角关系(diagonal ~~relation~~ relation)

A上的对角关系为A上所有形如(a, a)的有序对所构成的集合(也就是关系A的恒等函数)，我们将A上的对角关系记作Δ，其中Δ = {(a, a) | a∈A}

S₃. 对称闭包(symetric closure)

包含关系R且~~具有~~具有对称性质且为任一包含R的对称关系的子集的关系称为R上的对称闭包

R₃. 换言之，对称闭包就是包含某一关系R的具有对称性的最小关系

No.

Date

$R_4$. 给定一个集合A上的关系R，R的对称闭包可以通过在R中加入所有形如(b,a)的有序对（前提是有序对(a,b)属于关系R，(b,a)不属于关系R）得到. 这样得到的新关系既是对称的，又是包含关系R的，同时还是包含关系R的任一对称关系的子集（即新关系为R上的对称闭包）

$R_5$. 自反闭包用谓词进行表示为 $R\cup\Delta$，$\Delta=\{(a,a)\mid, a\in A\}$

对称闭包用谓词进行表示为 $R\cup R^{-1}$，$R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$

$R_6$. 给定一个集合A上的关系R，要找到R的传递闭包是比较复杂的. 其中一种方法是不断往R中加入能使其具有传递性的必要的有序对直至新形成的关系具有传递性为止

三、paths in directed graphs 有向图中的路径

$D_1$. 在有向图G中的一条从a到b的路径为有向图G中一连串的边 $(x_0,x_1)$，$(x_1,x_2)$，$(x_2,x_3)$，…，$(x_{n-1},x_n)$. 其中n是一个非负整数，$x_0$点即为a点，$x_n$点即为b点，$(x_0,x_1)$为始于$x_0$点终于$x_1$点的有向线段. 此时在这一连串的边中，下一边的起点即为上一边的终点. 这一连串的边就是从点a到点b的一条路径. 我们将此路径记为 $x_0$，$x_1$，$x_2$，…，$x_{n-1}$，$x_n$，路径长度为n. 与此同时，我们将空集视作一条从点a到点a的路径（这里空集指边的空集，即在关系R中有元素但元素相互间没有关系）. 一条长度大于等于1的~~路径~~起点与终点为同一点的路径亦称为回路或循环

$R_1$. 在有向图中，一条路径可以多次通过图中的某一节点，也可以多次经过图中的某一边

$S_1$. 路径(path)

在有向图G中的一条从a到b的路径为G中一连串首尾相接的边 $(x_0,x_1)$，$(x_1,x_2)$，$(x_2,x_3)$，…，$(x_{n-1},x_n)$的集合（其中$x_0$为a点，$x_n$为b点）

$R_2$. 当关系R ~~上有~~ 包含一连串元素 $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ 构成的有序对 $(a,x_1)$，$(x_1,x_2)$，$(x_2,x_3)$…$(x_{n-1},b)$ 时，关系R中存在一条从a到b的路径

$T_1$. 假设R是集合A上的关系. R上存在一条长度为n的从a到b的~~关系~~路径（n为正整数）当且仅当 $(a,b)\in R^n$

四、transitive closures 传递闭包

$D_1$. 假设R是集合A上的关系. 连通性关系 $R^*$ 包含有序对(a,b)，其中(a,b)满足R上存在一条长度至少为1的~~路径~~从a到b的路径.

$R_1$. 由于 $R^n$ 包含了有序对(a,b)（有向图中存在一条从a到b长度为n的路径），连通性关系 $R^*$ 为 $R^n$ 的并集 $(n=1,2,\ldots)$，即：

$$R^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$$

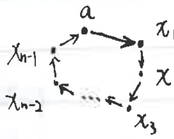
$T_1$ 关系R的传递闭包等价于连通性关系$R^*$

$L_1$ 假设A是一个有n个元素的集合，R是A上的关系，如果关系R上从a到b存在一条长度至少为1的路径，则可断定此路径的长度不超过n（也就是从a点到b点经过的最短路径的边数不超过n）。如果a与b是不同的点，则可进一步断定此路径的长度不超过n-1（也就是从a点到与其相异的b点经过的最短路径的边数不超过n-1）

$R_2$ 当a点与b点相同时：

可断定a点到b点经过的最短路径长度不超过n

如果最短路径长度为n时，有向图G中所有点均包含在此路径上




此时 $R=\{(a,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),\dots,(x_{n-2},x_{n-1}),(x_{n-1},a)\}$

$R^2=\{(a,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_4),\dots,(x_{n-2},a),(x_{n-1},x_1)\}$

$R^3=\{(a,x_3),(x_1,x_4),(x_2,x_5),\dots,(x_{n-2},x_1),(x_{n-1},x_2)\}$

、、、、、、

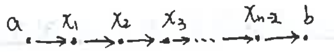
$R^n=\{(a,a),(x_1,x_1),(x_2,x_2),\dots,(x_{n-2},x_{n-2}),(x_{n-1},x_{n-1})\}$

可以很明显看出对于此有向图来说，路径长度不超过n，$R^*=R\cup R^2\cup R^3\cup\dots\cup R^n$

当a点与b点不同时：

可断定a点到b点经过的最短路径长度不超过n-1

如果最短路径长度为n-1时，有向图G中所有点均包含在此路径上




此时 $R=\{(a,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),\dots,(x_{n-3},x_{n-2}),(x_{n-2},b)\}\Rightarrow$ 有n-1项

$R^2=\{(a,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_4),\dots,(x_{n-4},x_{n-2}),(x_{n-3},b)\}\Rightarrow$ 有n-2项

$R^3=\{(a,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_5),\dots,(x_{n-5},x_{n-2}),(x_{n-4},b)\}\Rightarrow$ 有n-3项

、、、、、、

$R^{n-1}=\{(a,b)\}$ 有一项

可以很明显看出对于此有向图来说路径长度不超过n-1，$R^*=R\cup R^2\cup R^3\cup\dots\cup R^{n-1}$

由此有求解R上的传递闭包的第一种算法：

原理：$R^*=R\cup R^2\cup R^3\cup\dots\cup R^n$（$R^*$的两个节点间存在路径当且仅当此两节点在$R^i(i\le n)$中存在一边）

方法：$M_{R^*}=M_R\vee M_R^{[2]}\vee M_R^{[3]}\vee\dots\vee M_R^{[n]}$

T2 假设$M_R$为关系R的0-1矩阵，且此矩阵为n阶方阵，则连通性关系$R^*$对应的0-1矩阵为

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \dots \vee M_R^{[n]}$$

A1 传递闭包算法1：

输入：$n\times n$方阵$M_R$　输出：$n\times n$方阵$M_{R^*}$.

过程：
```
A = M_R
B = A          // 此时矩阵A，矩阵B，矩阵M_R均相同
for(i=2; i<=n; i++){   //用循环求解出M_R^[2], M_R^[3], ... M_R^[n]
    A = A ⊙ M_R
    B = B ∨ A
}
return B;
```

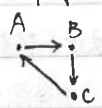
效率：$O(n^4)$

五、Warshall's algorithm 沃舍尔算法

S1. 内部顶点(interior vertices)

在一条路径中除起点及终点外的所有顶点均为内部顶点。假如$a, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, b$为一条路径，则$x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$为内部顶点，简称内点

R1. 一条路径的起点可能也是内点：这条路径至少两次通过该点，且至少有一次通过时既不将其作为起点，也不将其作为终点

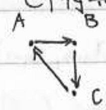



$A\to B\to C$　内点为B

$A\to B\to C\to A$　内点为B, C

$A\to B\to C\to A\to B$　内点为A, B, C

一条路径的终点可能也是内点：这条路径至少两次通过该点，且至少有一次通过时既不将其作为起点，也不将其作为终点




$B\to C\to A$　内点为C

$A\to B\to C\to A$　内点为B, C

$C\to A\to B\to C\to A$　内点为A, B, C

R2. 沃舍尔算法基于构造一系列的0-1矩阵，并将这些矩阵命名为$W_0, W_1, W_2, \dots, W_n$，其中$W_0 = M_R$，为关系R的0-1矩阵，$W_k = [w_{ij}^{(k)}]$，且将$w_{ij}^{(k)}$的数值定义为：如果存在一条从$v_i$到$v_j$的路径且路径中的内点都在集合$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$中(此时我们假定关系R中~~所有元素~~所有元素的集合为$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$，集合$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$就是R中前k个元素的集合)，则$w_{ij}^{(k)}$的值为1，否则$w_{ij}^{(k)}$的值为0.

注一：$w_{ij}^{(k)}$的意思是在第k个~~矩~~$n\times n$方阵中所有i行j列的数值

注二：在这里，我们只用看内点是否都属于R中前k个元素的集合，而不需考虑起点、终点是否属于这个集合

$R_3$. 在沃舍尔算法中 $W_n = W_{R^*}$，这是因为当 $W_n$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列为1时，说明从节点 $i$ 到节点 $j$ 间存在一条路径，且这条路径中的内点全部都在集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 中（即在关系R的所有元素的集合中）. 这很显然等价于连通性关系 $R^*$ 中的所有情况

注一：节点 $i$ 到节点 $j$ 间可能没有内点，如下图

$i \longrightarrow j$

此时内点为 $\phi$，由于 $\phi \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

因此 $W_n$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列的元素为1

注二：节点 $i$ 到节点 $j$ 间可能有多个内点，如下图

$i \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to j$

此时内点为 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$，只要 $\{v_1, v_2, \dots v_k\} \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$，$W_n$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列元素即为1

$R_4$. 我们可以直接通过 $W_{k-1}$ 得出 $W_k$

理论依据：$W_k$ 指从节点 $i$ 到节点 $j$ 间存在一条路径，且这条路径的内点全部在集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 中

$W_{k-1}$ 指从节点 $i$ 到节点 $j$ 间存在一条路径，且这条路径的内点全部在集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ 中

分析：$W_k$ 中有两种情况

① 原本节点 $i$ 到节点 $j$ 间就存在一条路径，而且这条路径的内点全部在集合 $\{v_1, v_2, \dots v_{k-1}\}$ 中

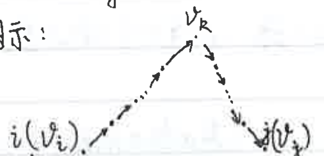
原理：$W_k$ 包含了 $W_{k-1}$ 的情况，即 $w_{ij}^{[k-1]} = 1$ 就一定有 $w_{ij}^{[k]} = 1$

图示 $i(v_i) \to \cdot \to \cdot \to \cdot \to \cdots \to j(v_j)$（这条路径并不通过节点 $v_k$）

② 节点 $i$ 到节点 $j$ 间存在一条新的路径，这条路径有内点 $v_k$ 且其余内点均在集合 $\{v_1, \dots v_{k-1}\}$ 中

原理：$W_k$ 比 $W_{k-1}$ 增加的情况在于允许出现内点包含 $v_k$ 的路径，即以节点 $i$ 作为起点，节点 $k$ 作为终点不仅存在一条路径，而且路径的内点全部在集合 $\{v_1, \dots v_{k-1}\}$ 中；同样地以节点 $k$ 作为起点，节点 $j$ 作为终点不仅存在一条路径，而且路径的内点全部在集合 $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ 中，即当 $w_{ik}^{[k-1]} = w_{kj}^{[k-1]} = 1$ 就一定有 $w_{ij}^{[k]} = 1$

图示：




（形成一条通过节点 $v_k$ 的路径）

结论：$w_{ij}^{[k]} = w_{ij}^{[k-1]} \vee (w_{ik}^{[k-1]} \wedge w_{kj}^{[k-1]})$

$L_2$. 假设 $W_k = [w_{ij}^{[k]}]$ 为0-1矩阵，$w_{ij}^{[k]}$ 的值为1当且仅当从节点 $i$ 到节点 $j$ 间存在一条路径，而且这条路径的内点全部在集合 $\{v_1, v_2, \dots v_k\}$ 中，即

$$w_{ij}^{[k]} = w_{ij}^{[k-1]} \vee (w_{ik}^{[k-1]} \wedge w_{kj}^{[k-1]})$$ 其中 $i, j, k$ 为不超过 $n$ 的正整数

No.

Date

$A_2$ 传递闭包算法2：沃舍尔算法

输入：$n \times n$ 方阵 $M_R$ 输出：$n \times n$ 方阵 $M_{R^*}$

过程：$W = M_R$

```
for(k=1; k≤n; k++){    // 从W₁开始算至 Wn
    for(i=1; i≤n; i++)    // 从第一行开始至第n行
        for(j=1; j≤n; j++)    // 从第一列开始至第n列
            Wij = Wij V (Wik ∧ Wkj)    // 得出Wk中的所有元素
}
return W;
```

效率：$O(n^3)$

## 8.5 equivalence relations 等价关系

### 一、introduction 介绍

$R_1$. 等价关系将集合划分为由等价元素构成的不相交的类

$R_2$. 当我们仅关心集合中的某一元素是否在一个特定的元素类中，而不关心元素特性时就出现了等价关系

### 二、equivalence relations 等价关系

$D_1$. 若集合A上的关系既是自反的，又是对称的，同时还是传递的，则此关系称为等价关系

$R_1$. 在等价关系中，如果两个元素相互联系，则可以称他们是等价的

$D_2$. 在等价关系中相互之间有关系的两个元素是等价的，我们可以用记号 $a \sim b$ 说明 a, b 是某个特定的等价关系下的等价元素

$R_2$. 由于等价关系具有自反性，因而每个元素都与其自身等价

由于等价关系具有对称性，因而我们可以说元素a与元素b是相互联系"的"

由于等价关系具有传递性，如果元素a与元素b等价，元素b与元素c等价，那么元素a与元素c等价

$S_1$. ~~congruence~~ 模m同余(congruence modulo)

模m同余是一种很常见的等价关系(m为大于1的正整数)

### 三、equivalence classes 等价类

$D_1$. 假设R是集合A上的等价关系。与集合A中某一元素a相关的在此集合中的所有元素集合称为a的等价类。元素a在关系R上的等价类记为 $[a]_R$。当我们只需考虑一个关系时，可将记号中的下标R略去，用 $[a]$ 表示等价类

$R_1$. 如果R是集合A上的等价关系，元素a的等价类为

$$[a]_R = \{s \mid (a, s) \in R\}$$

$S_1$. 代表元 (representative)

如果集合A上的元素 $b \in [a]_R$ (R为集合A上的关系，a为集合A中的元素)，则b称为这个等价类的代表元。

$R_2$. 在等价类中的任一元素均可作为该类的代表元. 即在等价类中对代表元的选取并无特殊要求.

$S_2$. 模m同余类 (congruence classes modulo m)

模m同余关系的等价类称为模m同余类，整数a的模m同余类记作 $[a]_m$，因此

$[a]_m = \{\ldots, a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, \ldots\}$

$S_3$. 标识符 (indentifier)

在C语言中，标识符为可为变量名、函数名、或其它类型的实体名

四、~~等价类与划分~~ equivalence classes and partitions 等价类与划分

$R_1$. 等价关系中引申出多个等价类，这些等价类将原集合分成若干个互不相交的非空子集

$T_1$. 假设R是集合A上的等价关系，以下三种有关集合A中元素a、b的说法是等价的(即要么全为真，要么全为假)

(i) $aRb$ a与b有关系

(ii) $[a]=[b]$ a在关系R上的等价类与b在关系R上的等价类相同

(iii) $[a] \cap [b] \neq \phi$ a在关系R上的等价类与b在关系R上的等价类有非空交集

$R_2$. 假设R是集合A上的等价关系，R上所有的等价类的并集就是集合A

$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$

$R_3$. 等价类之间要么就是互不相交的，要么就是相同的

$[a]_R \cap [b]_R = \phi \Leftrightarrow [a]_R \neq [b]_R$

$S_1$. 划分 (partition)

集合S的划分为S的互不相交的子集所构成的集合，并且要求这些互不相交的子集的并就是集合S

$R_4$. 划分的概念还可进行如下表示：

一组子集 $A_i$ ($i \in I$, I为下标的集合) 构成集合S的划分当且仅当

$A_i \neq \phi$ 说明 $A_i$ 非空

$A_i \cap A_j = \phi$ ($i \neq j$) 说明 $A_i$ 与其它等价类并不相交

$\bigcup_{i \in I} A_i = S$ 说明 $A_i$ 的并集为集合S ($i \in I$)

$R_5$. 在某一等价关系中的等价类可形成集合的划分. 也就是说划分的每一小部分均代表着一种等价类

~~相反~~ 反过来看，集合中的每一个划分都可形成对应的等价类

$R_6$. ~~集合~~关系中两个元素是等价的当且仅当这两个元素在同一划分块中

$T_2$. 假设R是集合S上的等价关系，R的等价类形成了集合S的划分。反过来讲，给定一个集合S上的划分$\{A_i, i\in I\}$，集合$A_i, i\in I$对应着一种等价关系R的相关的等价类

$R_7$. 总结：等价类与划分

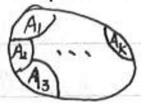
假设有一个集合S


S中有元素 $s_1, s_2, \ldots, s_n$

现在存在一个等价关系R

R将S中的某些元素联系在一起形成不同的等价类 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k\le n)$

每个等价类都对应着一个分块，即：




## 8.6 partial orderings 偏序

### 一、introduction 介绍

$D_1$. 如果集合S上的关系R具有自反性，反对称性，传递性，则关系R称为偏序，集合S称为偏序集，并记为$(S,R)$。集合S的成员称为偏序集元素。

$R_1$. 在不同的偏序集中，我们需要用到例如"$\le$"、"$\subseteq$"、"$|$"的符号来表达偏序。然而，我们还需要一个符号用来方便我们讨论任意偏序集中的有序关系。因此，在一个偏序集$(S,R)$中我们可以用记号 $a\preccurlyeq b$ 表明$(a,b)\in R$（R为偏序）

$R_2$. 注意，记号$\preccurlyeq$不仅仅可以用来表示小于等于的关系，还可以用来表示任何偏序集中的关系（比如：大于等于，从属关系，整除）。使用这个记号只是为了突出有序对$(a,b)$是属于偏序R的，而不只是属于一个普通关系的

$R_3$. 记号 $a\prec b$ 的含意是 $a\preccurlyeq b$，但 $a\ne b$。即"a比b小"或"a比b大"

$D_2$ 在偏序集$(S,\preccurlyeq)$中任意两元素a, b。当$a\preccurlyeq b$或$b\preccurlyeq a$时，元素a、b称作是可比较的（即当$(a,b)$为偏序中有序对或$(b,a)$为偏序中有序对时，元素a、b称作是可比较的）。当既没有$a\preccurlyeq b$，也没有$b\preccurlyeq a$时，元素a、b称作是不可比较的（即当$(a,b)$、$(b,a)$均不为偏序中有序对时，元素a、b称作是不可比较的

注一：偏序已经要求了反对称性，因而偏序中绝不可能出现$(a,b)$, $(b,a)$同时存在的情况$(a\ne b)$

S1. 全序(total ordering)

如果一个集合上的关系具有自反性，反对称性与传递性，且此关系所在集合的任意两个元素都是可比较的，那么这一关系称为全序

D3. 如果(S, ≼)为一个偏序集，且S中任意两个元素都是可比较的，则S称作全序集或线性有序集。与此同时≼称作全序或线性有序。一个全序集(线性有序集)亦称为链

D4. 对于偏序集(S, ≼)，若≼是全序且集合S的任一非空子集都有一个最小元素，那么我们称(S, ≼)为良序集(注意：这里的最小并不是指数值上的最小，而是指关系中最低层)

T1. 良序归纳原理(principle of well-ordered induction)

前提：S为良序集(大前提)

归纳步骤：对于任一的 $y \in S$，如果 $P(x)$ 对于所有 $x \in S$ 且 $x \prec y$，$P(x)$ 均为真，则可推出 $P(y)$ 为真(小前提)

结论：$P(x)$ 对于所有 $x \in S$ 均为真(结论)

应用：用良序归纳原理进行证明时需进行以下步骤

① 证明集合S为良序集

<1> 证明 $\begin{cases} \text{自反性，反对称性，传递性} \to \text{保证顺序是单向的} \\ \text{任意两个元素间具有可比性} \to \text{保证链的形成} \\ \text{非空且具有最小元素} \to \text{保证递推基存在} \end{cases}$

② 证明集合S中最小元素 $x'$ 的 $P(x')$ 为真 → 保证基的正确

③ 证明对于任一的 $y \in S$，对于所有的 $x \in S$ 且 $x \prec y$ 的情况下 $P(x)$ 为真即可推 $P(y)$ 为真 → 保证递推的正确

注释：这种证明方法有点类似于数学归纳法(其实本质上并无太大差别)

数学归纳法进行证明时需进行以下步骤

① 证明第一项 $x'$ 有 $P(x')$ 为真 → 保证基的正确

② 假设 $P(m)$ 为真，证明 $P(m+1)$ 为真 → 保证递推的正确

证明：假设 $P(x)$ 对于某些 $x \in S$ 为假，即存在 $x'' \in S$，$P(x'')$ 为假(由前提 $x''$ 不能是集合S中最小元素 $x'$)

则集合 $A = \{x \in S \mid P(x) \text{为假}\}$ 非空

由于S为良序集，集合A为集合S的一个非空子集(大前提)

因此集合A中有一最小元素a，~~使得~~ 即 $P(a)$ 为假

但由于 $P(x)$ 对于所有 $x \in S$ 且 $x \prec a$，$P(x)$ 均为真则可推出 $P(a)$ 为真(小前提)

因此又要求 $P(a)$ 为真

产生矛盾，假设不成立