第4讲 集合恒等式

内容提要

- 1. 集合恒等式与对偶原理
- 2. 集合恒等式的证明
- 3. 集合列的极限
- 4. 集合论悖论与集合论公理

集合恒等式(关于∪与∩)

- 等幂律(idempotent laws)

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

- 交换律(commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

集合恒等式(关于∪与∩、续)

- 结合律(associative laws)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- 分配律(distributive laws)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

集合恒等式(关于∪与∩、续)

- 吸收律(absorption laws)

$$A\cup(A\cap B)=A$$

$$A\cap(A\cup B)=A$$

集合恒等式(关于~)

- 双重否定律(double complement law)

$$\sim\sim A=A$$

- 德●摩根律(DeMorgan's laws)

$$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$$

$$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$$

集合恒等式(关于$\varnothing$与E)

- 零律(dominance laws)

$$A\cup E=E$$

$$A\cap\varnothing=\varnothing$$

- 同一律(identity laws)

$$A\cup\varnothing=A$$

$$A\cap E=A$$

集合恒等式(关于$\varnothing$,E)

- 排中律(excluded middle)

$$A \cup {\sim}A = E$$

- 矛盾律(contradiction)

$$A \cap {\sim}A = \varnothing$$

- 全补律

$$\sim\varnothing = E$$

$$\sim E = \varnothing$$

集合恒等式(关于-)

- 补交转换律(difference as intersection)

$$A-B=A\cap\sim B$$

集合恒等式(推广到集族)

- 分配律

$$B \cup (\bigcap \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcap_{\alpha \in S} (B \cup A_\alpha)$$

$$B \cap (\bigcup \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S} (B \cap A_\alpha)$$

- 德●摩根律

$$\sim (\bigcup \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcap_{\alpha \in S} (\sim A_\alpha)$$

$$\sim (\bigcap \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S} (\sim A_\alpha)$$

$$B - (\bigcup \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcap_{\alpha \in S} (B - A_\alpha)$$

$$B - (\bigcap \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S} (B - A_\alpha)$$

对偶(dual)原理

- 对偶式(dual): 一个集合关系式, 如果只含有$\cap$, $\cup$,~,$\varnothing$, E,=, $\subseteq$, 那么, 同时把$\cup$与$\cap$互换, 把$\varnothing$与E互换, 把$\subseteq$与$\supseteq$互换, 得到的式子称为原式的对偶式.
- 对偶原理: 对偶式同真假. 或者说, 集合恒等式的对偶式还是恒等式.

对偶原理(举例)

- 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- 排中律

$$A \cup \sim A = E$$

- 矛盾律

$$A \cap \sim A = \varnothing$$

对偶原理(举例、续)

- 零律

$$A \cup E = E$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

- 同一律

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap E = A$$

对偶原理(举例、续)

- $$A \cap B \subseteq A$$
  $$A \cup B \supseteq A$$
- $$\varnothing \subseteq A$$
  $$E \supseteq A$$

集合恒等式证明(方法)

- 逻辑演算法:

  利用逻辑等值式和推理规则

- 集合演算法:

  利用集合恒等式和已知结论

逻辑演算法(格式)

题目: $A=B$.

证明: $\forall x$,

$x \in A$

$\Leftrightarrow$ … (????)

$\Leftrightarrow x \in B$

$\therefore A=B$. #

题目: $A \subseteq B$.

证明: $\forall x$,

$x \in A$

$\Rightarrow$ … (????)

$\Rightarrow x \in B$

$\therefore A \subseteq B$. #

分配律(证明)

- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明: $\forall x$, $x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in(B\cap C)$ (∪定义)

$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)$ (∩定义)

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$ (命题逻辑分配律)

$\Leftrightarrow (x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$ (∪定义)

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (∩定义)

$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

零律(证明)

- $A \cap \varnothing = \varnothing$

证明: $\forall x, \quad x \in A \cap \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing$ (∩定义)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge 0$ (∅定义)

$\Leftrightarrow 0$ (命题逻辑零律)

$\therefore A \cap \varnothing = \varnothing$

排中律(证明)

- $A \cup \sim A = E$

证明: $\forall x,\ \ x \in A \cup \sim A$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \sim A$ ($\cup$定义)

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$ ($\sim$定义)

$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg x \in A$ ($\notin$定义)

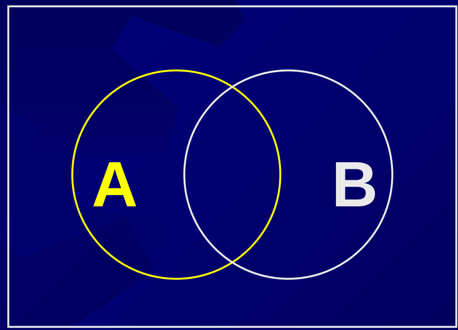
$\Leftrightarrow 1$ (命题逻辑排中律)

$\therefore A \cup \sim A = E$

集合演算法(格式)

题目: A=B.	题目: A⊆B.
证明: A	证明: A
=…(????)	⊆ …(????)
=B	⊆ B
∴ A=B. #	∴ A⊆B. #

吸收律(证明)



- $A\cup(A\cap B)=A$

证明: $A\cup(A\cap B)$

$= (A\cap E)\cup(A\cap B)$ (同一律)

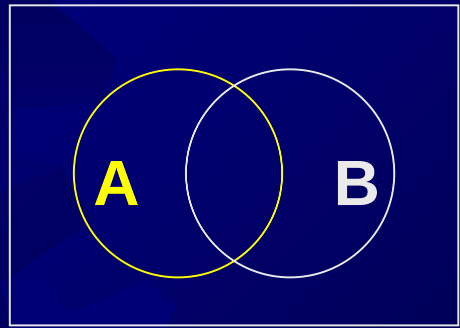
$= A\cap(E\cup B)$ (分配律)

$= A\cap E$ (零律)

$= A$ (同一律)

$\therefore\ A\cup(A\cap B)=A$

吸收律(证明、续)



- $A \cap (A \cup B) = A$

证明: $A \cap (A \cup B)$

$= (A \cap A) \cup (A \cap B)$ (分配律)

$= A \cup (A \cap B)$ (等幂律)

$= A$ (吸收律第一式)

$\therefore A \cap (A \cup B) = A$

集合演算法(格式,续)

题目: A=B.

证明: (⊆) …

$\therefore A \subseteq B$

(⊇) …

$\therefore A \supseteq B$

$\therefore A = B.$ #

说明: 分=成⊆与⊇

题目: A⊆B.

证明: $A \cap B$ (或$A \cup B$)

= …(????)

= A (或B)

$\therefore A \subseteq B.$ #

说明: 化⊆成=

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

集合恒等式证明(举例)

- 基本集合恒等式
- 对称差($\oplus$)的性质
- 集族($\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$)的性质
- 幂集(P( ))的性质

补交转换律

- $A-B = A\cap\sim B$

证明: $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x\in A-B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A \wedge x\notin B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A \wedge x\in\sim B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\cap\sim B
\end{aligned}
$$

$\therefore A-B = A\cap\sim B$. #

德•摩根律的相对形式

- $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
- $A-(B\cap C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明: $A-(B\cup C)$

$= A\cap\sim(B\cup C)$ (补交转换律)

$= A\cap(\sim B\cap\sim C)$ (德•摩根律)

$= (A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$ (等幂律)

$= (A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$ (交换律,结合律)

$= (A-B)\cap(A-C)$ (补交转换律). #

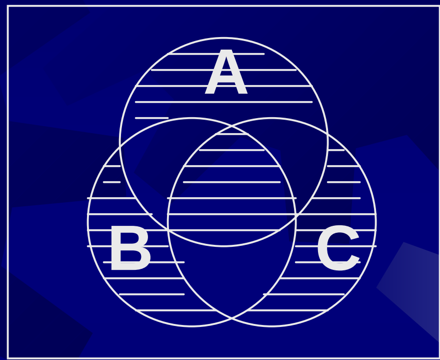
对称差的性质

1. 交换律: $A\oplus B=B\oplus A$
2. 结合律: $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$
3. 分配律: $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
4. $A\oplus\varnothing=A$, $A\oplus E=\sim A$
5. $A\oplus A=\varnothing$, $A\oplus\sim A=E$

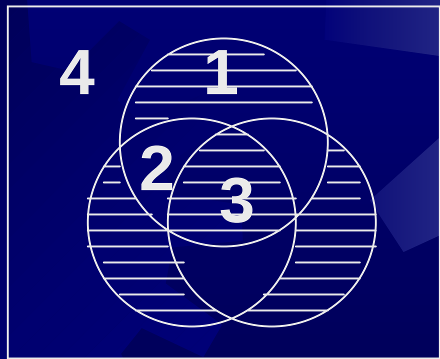
对称差的性质(证明2)

- 结合律: $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$
- 证明思路: 分解成 "基本单位", 例如:

1. $A\cap\sim B\cap\sim C$
2. $A\cap B\cap\sim C$
3. $A\cap B\cap C$
4. $\sim A\cap\sim B\cap\sim C$



$A\oplus B\oplus C$



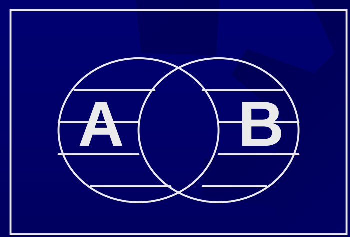
对称差的性质(证明2、续1)

- 结合律: $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$
- 证明: 首先,

$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$ (⊕定义)

$= (A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$ (补交转换律)

$= (A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B)$ (∩交换律) (*)



$A\oplus B$

对称差的性质(证明2、续2)

其次, $A\oplus(B\oplus C)$

$= (A\cap\sim(B\oplus C))\cup(\sim A\cap(B\oplus C))$ (*)

$= (A\cap\sim((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$ (*)

$= (A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap\sim(\sim B\cap C)))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$ (德•摩根律)

对称差的性质(证明2、续3)

$= (A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap\sim(\sim B\cap C)))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$

$= (A\cap(\sim B\cup C)\cap(B\cup\sim C)))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$ (德•摩根律)

$= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\sim B\cap\sim C)$

$(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$ (分配律…)

对称差的性质(证明2、续4)

同理，$(A\oplus B)\oplus C$

$= (A\oplus B)\cap\sim C)\cup(\sim(A\oplus B)\cap C)$ (*)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$(\sim((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\mathbf{C})$ (*)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim(A\cap\sim B)\cap\sim(\sim A\cap B))\cap\mathbf{C})$ (德•摩根律)

对称差的性质(证明2、续5)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim(A\cap\sim B)\cap\sim(\sim A\cap B))\cap \mathbf{C})$

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim A\cup B)\cap(A\cup\sim B))\cap \mathbf{C})$ (德•摩根律)

$= (A\cap\sim B\cap\sim \mathbf{C})\cup(\sim A\cap B\cap\sim \mathbf{C})\cup$

$(\sim A\cap\sim B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ (分配律...)

$\therefore\ A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C.$ #

对称差的性质(讨论)

- 有些作者用△表示对称差: $A\oplus B=A\triangle B$
- 消去律: $A\oplus B=A\oplus C \Leftrightarrow B=C$ (习题一,23)

  $A=B\oplus C \Leftrightarrow B=A\oplus C \Leftrightarrow C=A\oplus B$
- 对称差与补: $\sim(A\oplus B) = \sim A\oplus B = A\oplus\sim B$

  $A\oplus B = \sim A\oplus\sim B$
- 问题: $A\oplus B\oplus C=\sim A\oplus\sim B\oplus\sim C$？

对称差的性质(讨论、续)

- 如何把对称差推广到n个集合:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n = ?$$

- $\forall x,\quad x \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n$

  $\Leftrightarrow$ x恰好属于$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$中的奇数个

- 特征函数表达: $\chi_{A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n}(x)$

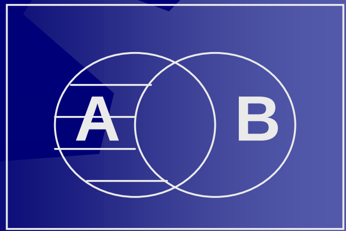
$= \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x) + \ldots + \chi_{A_n}(x) \pmod 2$

$= \chi_{A_1}(x) \oplus \chi_{A_2}(x) \oplus \ldots \oplus \chi_{A_n}(x)$

((mod 2),⊕,都表示模2加法,即相加除以2取余数)

特征函数与集合运算:

- $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\bullet\chi_B(x)$
- $\chi_{\sim A}(x) = 1-\chi_A(x)$
- $\chi_{A-B}(x) = \chi_{A\cap\sim B}(x)=\chi_A(x)\bullet(1-\chi_B(x))$
- $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_{(A-B)\cup B}(x)$
  $= \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\bullet\chi_B(x)$



- $\chi_{A\oplus B}(x) = \chi_A(x)+\chi_B(x) \pmod 2$
  $= \chi_A(x)\oplus\chi_B(x)$

对称差的性质(讨论、续)

- 问题: ~~$A\oplus B\oplus C = \sim A\oplus\sim B\oplus\sim C$?~~

  答案: $A\oplus B\oplus C = \sim(\sim A\oplus\sim B\oplus\sim C)$

  $= \sim(A\oplus B\oplus\sim C) = A\oplus\sim B\oplus\sim C$

- $A\oplus B\oplus C\oplus D = \sim A\oplus\sim B\oplus\sim C\oplus\sim D$

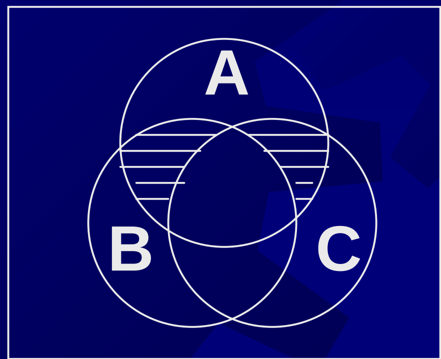
  $= A\oplus\sim B\oplus C\oplus\sim D = \sim(\sim A\oplus\sim B\oplus C\oplus\sim D)$

  $=\ldots$

- $A = \sim(\sim A)$

对称差的性质(证明3)

- 分配律: $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
- 证明



$A\cap(B\oplus C)$

$$
\begin{aligned}
&A\cap(B\oplus C)\\
&= A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C))\\
&= (A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)
\end{aligned}
$$

对称差分配律(证明3、续)

(续) $(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$= ((A\cap B)\cap\sim(A\cap C))\cup(\sim(A\cap B)\cap(A\cap C))$

$=((A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C))\cup((\sim A\cup\sim B)\cap(A\cap C))$

$=(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)$

$\therefore A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C).$ #

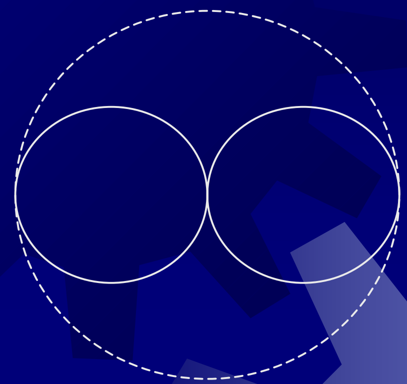
对称差分配律(讨论)

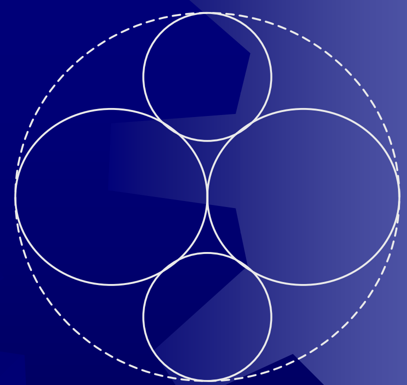
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ √
- $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$?
- $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$?
- $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$?

集族的性质

设$\mathcal{A},\mathcal{B}$为集族, 则

- 1. $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \Rightarrow \bigcup\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$
- 2. $\mathcal{A}\in\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$
- 3. $\mathcal{A}\neq\emptyset \wedge \mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \Rightarrow \bigcap\mathcal{B}\subseteq\bigcap\mathcal{A}$
- 4. $\mathcal{A}\in\mathcal{B} \Rightarrow \bigcap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$
- 5. $\mathcal{A}\neq\emptyset \Rightarrow \bigcap\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{A}$





集族的性质(证明1)

- $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \Rightarrow \bigcup\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$

证明: $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x\in\bigcup\mathcal{A} \\
\Leftrightarrow\ & \exists A(A\in\mathcal{A}\wedge x\in A) && (\bigcup\mathcal{A}\text{定义}) \\
\Rightarrow\ & \exists A(A\in\mathcal{B}\wedge x\in A) && (\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}) \\
\Leftrightarrow\ & x\in\bigcup\mathcal{B} && (\bigcup\mathcal{B}\text{定义})
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \bigcup\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}.$ #

集族的性质(证明2)

- $\mathcal{A}\in\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$

证明: $\forall x$,

$$x\in\mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{A}\in\mathcal{B}\wedge x\in\mathcal{A} \qquad (\mathcal{A}\in\mathcal{B}, \text{合取})$$

$$\Rightarrow \exists A(A\in\mathcal{B}\wedge x\in A) \qquad (EG)$$

$$\Leftrightarrow x\in\bigcup\mathcal{B}$$

$$\therefore \mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}. \qquad \#$$

集族的性质(证明3)

- $\mathcal{A}\neq\varnothing \wedge \mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \Rightarrow \bigcap\mathcal{B}\subseteq\bigcap\mathcal{A}$

说明: 若约定$\bigcap\varnothing=E$, 则$\mathcal{A}\neq\varnothing$的条件可去掉.

证明: $\forall x$,

$$x\in\bigcap\mathcal{B} \Leftrightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{B}\rightarrow x\in y\,)$$

$$\Rightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{A}\rightarrow x\in y\,) \qquad (\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x\in\bigcap\mathcal{A}$$

$$\therefore \bigcap\mathcal{B}\subseteq\bigcap\mathcal{A}.$$ #

集族的性质(证明4)

- $\mathcal{A}\in\mathcal{B} \Rightarrow \cap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$

证明: $\forall x$,

$$x\in\cap\mathcal{B} \Leftrightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{B}\rightarrow x\in y\,)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}\in\mathcal{B}\rightarrow x\in\mathcal{A} \qquad \text{(UI)}$$

$$\Rightarrow x\in\mathcal{A} \qquad (\mathcal{A}\in\mathcal{B})$$

$\therefore\ \cap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$. #

集族的性质(证明5)

- $\mathcal{A}\neq\varnothing \Rightarrow \cap\mathcal{A}\subseteq \cup\mathcal{A}$

说明：$\mathcal{A}\neq\varnothing$的条件不可去掉!

证明：$\mathcal{A}\neq\varnothing \Rightarrow \exists y(y\in\mathcal{A})$, 设 $A\in\mathcal{A}$.

$\forall x,\quad x\in\cap\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{A}\to x\in y\,)$

$\Rightarrow A\in\mathcal{A}\to x\in A \Rightarrow x\in A \qquad (A\in\mathcal{A})$

$\Rightarrow A\in\mathcal{A}\wedge x\in A \Rightarrow \exists y(\, y\in\mathcal{A}\wedge x\in y)$

$\Leftrightarrow x\in \cup\mathcal{A}$

$\therefore \cap\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{A}$. #

幂集的性质

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$
2. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
3. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
4. $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

幂集的性质(证明1)

- $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

证明: $(\Rightarrow)$ $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x \in P(A) \\
\Leftrightarrow\ & x \subseteq A \\
\Rightarrow\ & x \subseteq B \qquad (A \subseteq B) \\
\Leftrightarrow\ & x \in P(B) \\
\therefore\ & P(A) \subseteq P(B)
\end{aligned}
$$

幂集的性质(证明1、续)

- $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

证明(续): $(\Leftarrow)$ $\forall x$,

$x \in A$

$\Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{x\} \in P(B)$ $\quad (P(A) \subseteq P(B))$

$\Leftrightarrow x \in B$

$\therefore \quad A \subseteq B.$ #

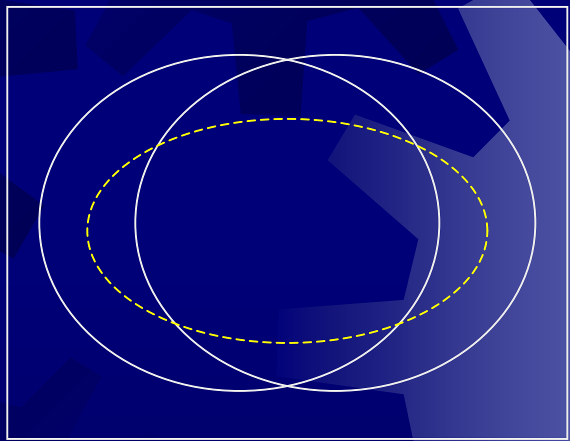
幂集的性质(证明2)

- $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

证明: $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x \in P(A) \cup P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x \in P(A) \vee x \in P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x \subseteq A \vee x \subseteq B \\
\Rightarrow\ & x \subseteq A \cup B \\
\Leftrightarrow\ & x \in P(A \cup B)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$



幂集的性质(证明2、续)

- $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

讨论：给出反例，说明等号不成立：

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $A \cup B=\{1,2\}$,

$P(A)=\{\varnothing,\{1\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{2\}\}$,

$P(A \cup B)= \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(A) \cup P(B) \subseteq \{\varnothing,\{1\},\{2\}\}$

此时，$P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$. #

幂集的性质(证明3)

- $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

证明: $\forall x$,

$x \in P(A) \cap P(B)$

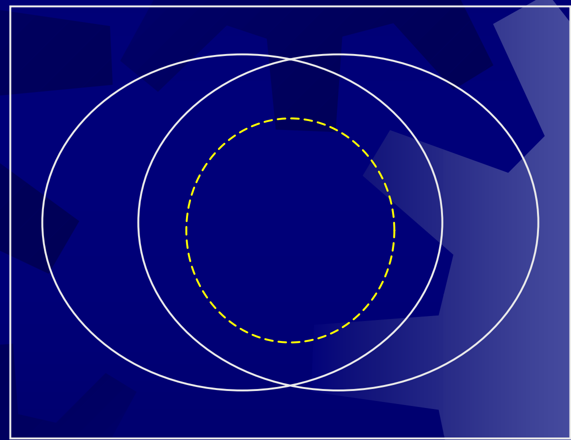
$\Leftrightarrow x \in P(A) \land x \in P(B)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A \land x \subseteq B$

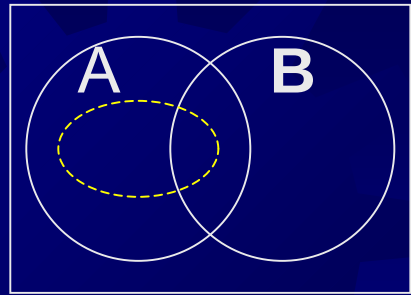
$\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in P(A \cap B)$

$\therefore P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$. #



幂集的性质(证明4)



- $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

证明: $\forall x$，分两种情况，(1) $x=\varnothing$，这时

$x \in P(A-B)$ 并且 $x \in (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

(2) $x \neq \varnothing$，这时

$x \in P(A-B) \Leftrightarrow x \subseteq A-B \Rightarrow x \subseteq A \wedge x \not\subseteq B$

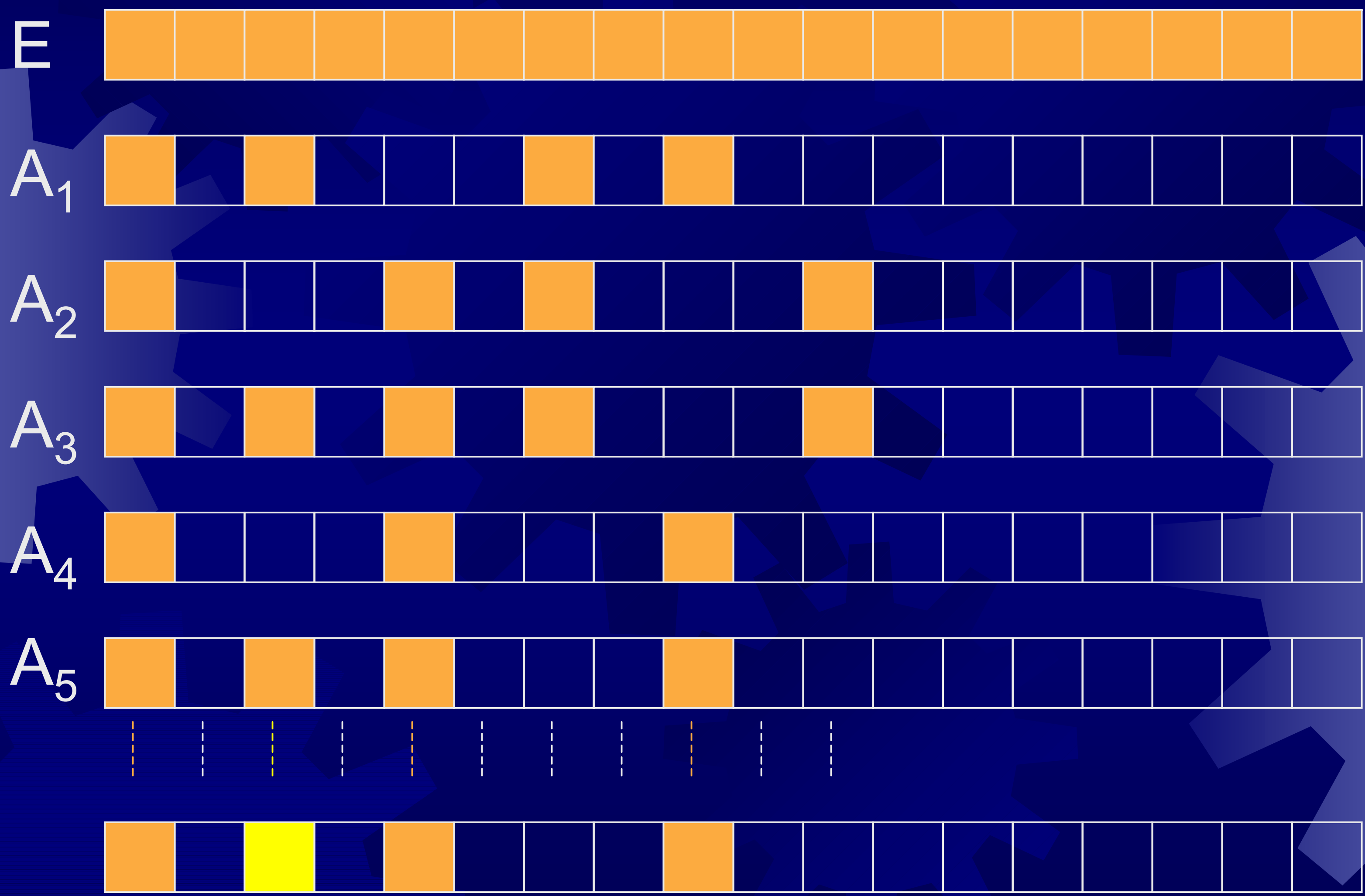
$\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \notin P(B) \Leftrightarrow x \in P(A)-P(B)$

$\therefore P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$.　　#

集合运算的优先级

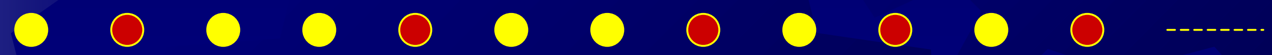
- 分三级：第一级最高，依次降低
- 第一级：补~，幂P()
- 第二级：广义并∪，广义交∩
- 第三级：并∪，交∩，相对补-，对称差⊕
- 同一级：用括号表示先后顺序

集合列的极限



集合列的极限

- Infinite often(i.o.):无穷多次



- Almost everywhere(a.e.):几乎处处

集合列的极限

- 上极限:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x \mid x \in A_k \, i.o.\}$$

- 下极限:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x \mid x \in A_k \, a.e.\}$$

集合列的极限

- 性质:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

集合论悖论

- 罗素悖论(Russell's paradox)：

$$S = \{ x \mid x \notin x \}$$

$$S \in S \ ?$$

$$S \in S \Rightarrow S \notin S$$

$$S \notin S \Rightarrow S \in S$$

集合论公理

- 外延公理: 所含元素相同的两个集合是相等的
- 空集存在公理: 空集合∅存在
- 无序对公理: 对任意集合a,b, {a,b}存在
- 并集公理: 对任意集合a,b, a∪b存在
- 幂集公理: 对任意集合A, P(A)存在
- 联集公理: 对任意集合$\mathcal{A}$, $\cup\mathcal{A}$存在

集合论公理(续)

- 子集公理模式(分离公理): 对任意集合A, B不在P(x)中出现,

  $$B = \{ x \in A \mid P(x) \}\text{存在}$$

- 正则公理: 若$S \neq \varnothing$,则

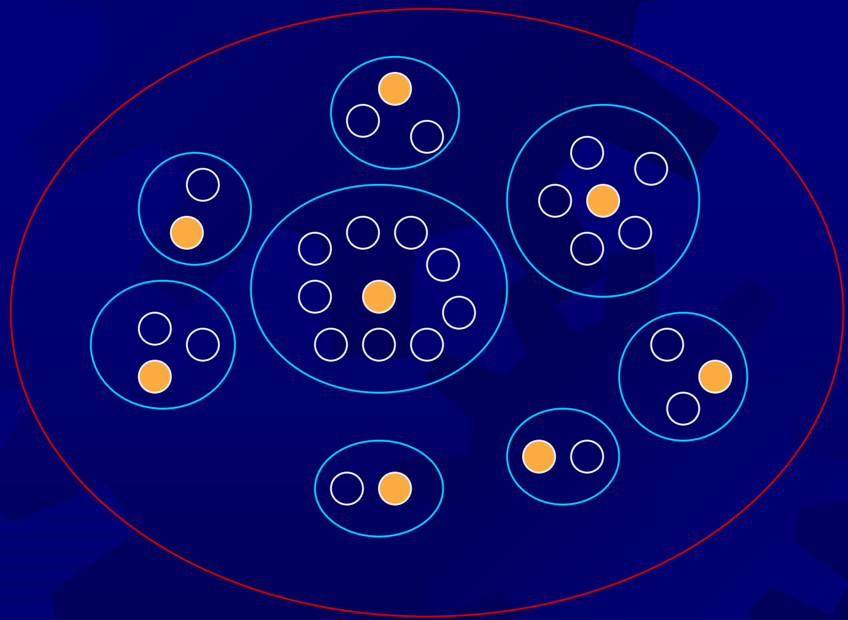
  $$\exists x(x \in S \wedge \forall y(y \in S \rightarrow x \notin y))$$

- 无穷公理: 无穷集存在
- 替换公理: f是定义域为集合A的函数,

  $$\{ f(a) \mid a \in A \}\text{存在}$$

集合论公理(续)

- 选择公理(Zorn引理, 良序原理): A是元素互不相交的集合,则可以从A的每个元素中恰好选择一个元素, 构成一个集合



总结

- 集合恒等式
- 集合恒等式的证明
- 集合论悖论

作业(#2)

- p27,习题一,11,13,14,20