No.

Date

二、lexicographic order 字典序

S1. 字典序（lexicographic ordering）

在集合 $A_1 \times A_2$（$A_1 \times A_2$ 为两个预先定义的偏序集的笛卡儿积）上的字典序 $\preceq$ 定义为如果第一个有序对中的第一个元素 a_1 小于第二个有序对中的第一个元素 b_1；或者第一个有序对中的第一个元素 a_1 等于第二个有序对中第一个元素 b_1，但第一个有序对中的第二个元素 a_2 小于第二个有序对中第二个元素 b_2，则我们可指出第一个有序对小于第二个有序对，即符合字典序

R1. 换句话说，(a_1, a_2) 小于 (b_1, b_2)，即 $(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2)$ 当且仅当 $a_1 \prec_1 b_1$ 或者 $a_1 = b_1$ 且 $a_2 \prec_2 b_2$（$\prec_1$ ~~指~~ 指 A_1 上的关系，$\prec_2$ 指 A_2 上的关系）

R2. 字典序同样可以在 n 个偏序集的笛卡儿积上被定义（这 n 个偏序集分别为 $(A_1, \preceq_1)$, $(A_2, \preceq_2)$, …, $(A_n, \preceq_n)$）。我们定义 ~~偏序~~ 在 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 上的偏序 $\preceq$ 为：

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

当且仅当 $a_1 \prec_1 b_1$ 或者存在一个正整数 i 使 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_i = b_i$ 且 $a_{i+1} \prec_{i+1} b_{i+1}$

R3. 换句话说，一个 n 位数比第二个 n 位数要小当且仅当它们从左边数起第一次在某一位上出现不同数字（或字符）时，第一个数的数字（或字符）比第二个数的数字（或字符）小

R4. 对于字符串而言，假设在某一特定偏序集 S 上有两字符串 $a_1a_2\ldots a_m$ 和 $b_1b_2\ldots b_n$，并且这两个串并不相同。与此同时，我们假设 t 为 m、n 的最小值，字典序在其上的定义为：字符串 $a_1a_2\ldots a_m$ 小于字符串 $b_1b_2\ldots b_n$ 当且仅当

$$(a_1, a_2, \ldots, a_t) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_t)，或者$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_t) = (b_1, b_2, \ldots, b_t) 且 m < n$$

其中 $\prec$ 表示 S^t 的字典序

R5. 换句话说，决定两个字符串的字典序的步骤

① 较长的字符串被截短为较短字符串的长度

② 用 S^t（t 为较短字符串的长度）上的字典序比较两串字符串

③ 如果 ② 中两串相等，则 ~~较长~~ 原先较长串大于原先较短串

三、Hasse diagrams 哈塞图

R1. 我们可以通过以下步骤来表达一个有限集上的偏序

① 画出有向图

② 去除有向图中的回路（循环）

③ 去除那些由于其他边与传递性所带来的边

④ 重新整理排列剩余所有的边，使得箭头指向的顶点在发出该箭头的顶点上方，并去除所有箭头

S1. 哈塞图(Hasse diagram)

通过以上方法来表达一个有限集上的偏序会得到一个新图，称为哈塞图. 在哈塞图中仅包含了偏序当中的有效信息.

四. maximal and minimal elements 极大元素与极小元素

S1. 极大的(maximal)

一个偏序集上的元素是极大的当且仅当它不小于该偏序集上任一元素. 即a是偏序集$(S, \preccurlyeq)$上的极大元素当且仅当不存在$b \in S$且$a \prec b$

S2. 极小的(minimal)

一个偏序集上的元素是极小的当且仅当它不大于该偏序集上任一元素，即a是偏序集$(S, \preccurlyeq)$上的极小元素当且仅当不存在$b \in S$且$b \prec a$

R1. 使用哈塞图可很方便地找出极大元素与极小元素

$\begin{cases} \text{极大元素没有连向上方元素的边} \\ \text{极小元素没有连向下方元素的边} \end{cases}$

S3. 最大元素(greatest element)

一个偏序集上的元素是最大元素当且仅当它大于该偏序集上的其他任一元素. 即a是偏序集$(S, \preccurlyeq)$上的最大元素当且仅当对于所有的$b \in S$, $b \preccurlyeq a$

S4. 最小元素(least element)

一个偏序集上的元素是最小元素当且仅当它小于该偏序集上的其他任一元素. 即a是偏序集$(S, \preccurlyeq)$上的最小元素当且仅当对于所有的$b \in S$, $a \preccurlyeq b$

R2. 最大最小元素如果存在就是唯一的

S5. 上界(upper bound)

一个偏序集上的子集A的上界为该偏序集上大于等于集合A中任一元素的元素，即A为偏序集$(S, \preccurlyeq)$的子集，u为偏序集S上的元素，u为A的上界当且仅当对于所有的元素$a \in A$，都有$a \preccurlyeq u$

S6. 下界(lower bound)

一个偏序集上的子集A的下界为该偏序集上小于等于集合A中任一元素的元素，即A为偏序集$(S, \preccurlyeq)$的子集，u为偏序集S上的元素，u为A的下界当且仅当对于所有的元素$a \in A$，都有$u \preccurlyeq a$

S7. 最小上界(least upper bound)

元素x为偏序集上子集A的最小上界当且仅当x小于A的上界的其他任一元素. 即x是A的最小上界当且仅当对于A上任一元素a均有$a \preccurlyeq x$，对于A的上界上任一元素z均有$x \preccurlyeq z$

No.

Date

S_8. 最大下界 (greatest lower bound)

元素 y 为偏序集上子集 A 的最大下界当且仅当 x 大于 A 的下界的其他任一元素. 即 y 是 A 的最大下界当且仅当对于 A 上任一元素 a 均有 $y \preccurlyeq a$, 对于 A 的下界上任一元素 z 均有 $z \preccurlyeq y$

R_3. ~~最~~对于给定的一个偏序集上的子集 A, 最小上界与最大下界是唯一的.

R_4. 子集 A 的最大下界记为 glb(A), 最小上界记为 lub(A)

五、lattices 格

S_1. 格 (lattices)

如果一个偏序集的每对元素都有最小上界和最大下界, 则称这个偏序集为格

六、topological sorting 拓扑排序

S_1. 相容 (compatible)

只要 aRb 就有 $a \preccurlyeq b$, 则称一个全序 $\preccurlyeq$ 与偏序 R 是相容的

S_2. 拓扑排序 (topological sorting)

从一个偏序中构建一个相容的全序称为拓扑排序

L_1. 对于每一个有限的非空偏序集 $(S, \preccurlyeq)$ 都有至少一个极小元素

R_1. 拓扑排序过程分析:

目的: 从有限的非空偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 中构造出相容的全序

步骤: ① 找到这一偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 的极小元素 a_1

② 将 a_1 从偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 中删除

③ 找到这一新偏序集 $(A-\{a_1\}, \preccurlyeq)$ 的极小元素 a_2

④ 将 a_2 从偏序集 $A-\{a_1\}$ 中删除

…… (不断重复直至排完)

结果: 从偏序中构建出的相容全序

A_1. 拓扑排序算法

输入: 偏序集有限集 $(S, \preccurlyeq)$ 输出: 全序有限集 $(S, \preccurlyeq)$

过程:
```
k = 1          // k 用于记录是第几个元素
while S ≠ φ {  // 判断 S 是否空集
    a_k = 集合 S 的极小元素
    S = S - {a_k}
    k = k + 1
}
return {a_1, a_2, ... a_{k-1}}
```