

## 第一章部分课后习题参考答案

16 设  $p$ 、 $q$  的真值为 **0**； $r$ 、 $s$  的真值为 **1**，求下列各命题公式的真值。

$$(1) p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow 0 \vee (0 \wedge 1) \Leftrightarrow 0$$

$$(2) (p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s) \Leftrightarrow (0 \leftrightarrow 1) \wedge (1 \vee 1) \Leftrightarrow 0 \wedge 1 \Leftrightarrow 0.$$

$$(3) (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \Leftrightarrow (1 \wedge 1 \wedge 1) \leftrightarrow (0 \wedge 0 \wedge 0) \Leftrightarrow 0$$

$$(4) (\neg r \wedge s) \rightarrow (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (0 \wedge 1) \rightarrow (1 \wedge 0) \Leftrightarrow 0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow 1$$

17. 判断下面一段论述是否为真：“ $\pi$  是无理数。并且，如果 3 是无理数，则  $\sqrt{2}$  也是无理数。另外 6 能被 2 整除，6 才能被 4 整除。”

答： $p$ :  $\pi$  是无理数    1

$q$ : 3 是无理数    0

$r$ :  $\sqrt{2}$  是无理数    1

$s$ : 6 能被 2 整除    1

$t$ : 6 能被 4 整除    0

命题符号化为： $p \wedge (q \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow s)$  的真值为 1，所以这一段的论述为真。

19. 用真值表判断下列公式的类型：

$$(4) (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$(5) (p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(6) ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

答：(4)

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

所以公式类型为永真式

(5) 公式类型为可满足式（方法如上例）

(6) 公式类型为永真式（方法如上例）

## 第二章部分课后习题参考答案

3. 用等值演算法判断下列公式的类型，对不是重言式的可满足式，再用真值表法求出成真赋值。

$$(1) \neg(p \wedge q \rightarrow q)$$

$$(2)(p \rightarrow (p \vee q)) \vee (p \rightarrow r)$$

$$(3)(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$$

答: (2)  $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p \vee (p \vee q)) \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee p \vee q \vee r \Leftrightarrow 1$

所以公式类型为永真式

(3) P	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

所以公式类型为可满足式

4. 用等值演算法证明下面等值式:

$$(2) (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$$

$$(4) (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

证明 (2)  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$(4) (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee (\neg p \wedge q)) \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)$$

$$\Leftrightarrow 1 \wedge (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge 1$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

5. 求下列公式的主析取范式与主合取范式, 并求成真赋值

$$(1) (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$$

$$(2) \neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$$

$$(3) (p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$$

解:

(1) 主析取范式

$$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(0, 2, 3)
\end{aligned}$$

主合取范式:

$$\begin{aligned}
&(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee (\neg q \vee p)) \wedge (\neg q \vee (\neg q \vee p)) \\
&\Leftrightarrow 1 \wedge (p \vee \neg q) \\
&\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \Leftrightarrow M_1 \\
&\Leftrightarrow \Pi(1)
\end{aligned}$$

(2) 主合取范式为:

$$\begin{aligned}
&\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \wedge r \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \wedge r \Leftrightarrow 0
\end{aligned}$$

所以该式为矛盾式.

主合取范式为  $\Pi(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

矛盾式的主析取范式为 0

(3) 主合取范式为:

$$\begin{aligned}
&(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r) \\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (p \vee q \vee r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee (p \vee q \vee r)) \wedge ((\neg q \vee \neg r) \vee (p \vee q \vee r)) \\
&\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

所以该式为永真式.

永真式的主合取范式为 1

主析取范式为  $\Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

### 第三章部分课后习题参考答案

14. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

(2) 前提:  $p \rightarrow q, \neg(q \wedge r), r$

结论:  $\neg p$

(4) 前提:  $q \rightarrow p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$

结论:  $p \wedge q$

证明: (2)

- |                          |         |
|--------------------------|---------|
| ① $\neg(q \wedge r)$     | 前提引入    |
| ② $\neg q \vee \neg r$   | ① 置换    |
| ③ $q \rightarrow \neg r$ | ② 蕴含等值式 |
| ④ $r$                    | 前提引入    |
| ⑤ $\neg q$               | ③④ 拒取式  |
| ⑥ $p \rightarrow q$      | 前提引入    |
| ⑦ $\neg p$ (3)           | ⑤⑥ 拒取式  |

证明 (4):

- |  |          |
|--|----------|
| ① $t \wedge r$                                 | 前提引入     |
| ② $t$  | ① 化简律    |
| ③ $q \leftrightarrow s$                        | 前提引入     |
| ④ $s \leftrightarrow t$                        | 前提引入     |
| ⑤ $q \leftrightarrow t$                        | ③④ 等价三段论 |
| ⑥ $(q \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow q)$ | ⑤ 置换     |
| ⑦ $(q \rightarrow t)$                          | ⑥ 化简     |
| ⑧ $q$  | ②⑦ 假言推理  |
| ⑨ $q \rightarrow p$                            | 前提引入     |
| ⑩ $p$  | ⑧⑨ 假言推理  |
| (11) $p \wedge q$                              | ⑧⑩ 合取    |

15 在自然推理系统 P 中用附加前提法证明下面各推理:

(1) 前提:  $p \rightarrow (q \rightarrow r), s \rightarrow p, q$

结论:  $s \rightarrow r$

证明

- |                                     |        |
|-------------------------------------|--------|
| ①s                                  | 附加前提引入 |
| ② $s \rightarrow p$                 | 前提引入   |
| ③p                                  | ①②假言推理 |
| ④ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | 前提引入   |
| ⑤ $q \rightarrow r$                 | ③④假言推理 |
| ⑥q                                  | 前提引入   |
| ⑦r                                  | ⑤⑥假言推理 |

16 在自然推理系统 P 中用归谬法证明下面各推理:

(1) 前提:  $p \rightarrow \neg q, \neg r \vee q, r \wedge \neg s$

结论:  $\neg p$

证明:

- |                          |         |
|--------------------------|---------|
| ①p                       | 结论的否定引入 |
| ② $p \rightarrow \neg q$ | 前提引入    |
| ③ $\neg q$               | ①②假言推理  |
| ④ $\neg r \vee q$        | 前提引入    |
| ⑤ $\neg r$               | ④化简律    |
| ⑥ $r \wedge \neg s$      | 前提引入    |
| ⑦r                       | ⑥化简律    |
| ⑧ $r \wedge \neg r$      | ⑤⑦ 合取   |

由于最后一步  $r \wedge \neg r$  是矛盾式, 所以推理正确.