# 第十章部分课后习题参考答案

4．判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

（1） 整数集合 Z 和普通的减法运算。

**封闭,不满足交换律和结合律，无零元和单位元**

（2） 非零整数集合$Z^*$和普通的除法运算。不封闭

（3） 全体 $n\times n$ 实矩阵集合$M_n$（R）和矩阵加法及乘法运算，其中 n≥2。

封闭 均满足交换律，结合律，乘法对加法满足分配律；

加法单位元是零矩阵，无零元；

乘法单位元是单位矩阵，零元是零矩阵；

（4）全体 $n\times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法及乘法运算，其中 n≥2。不封闭

（5）正实数集合$R^+$和$\circ$运算，其中$\circ$运算定义为：

$$\forall a, b \in R^+, a\circ b = ab - a - b$$

不封闭 因为 $1\circ 1 = 1\times 1 - 1 - 1 = -1 \notin R^+$

（6） $n \in Z^+, nZ = \{nz \mid z \in Z\}$. nZ关于普通的加法和乘法运算。

封闭，均满足交换律，结合律，乘法对加法满足分配律

加法单位元是 **0**，无零元；

乘法无单位元（$n>1$），零元是 **0**； $n=1$单位元是 **1**

（7）$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ n≥ 2.$\circ$运算定义如下：

$$\forall a, b \in A, a\circ b = b$$

封闭 不满足交换律，满足结合律，

（8）$S = \{2x - 1 | x \in Z^+\}$关于普通的加法和乘法运算。

封闭 均满足交换律，结合律，乘法对加法满足分配律

（9）S = {0,1},S 是关于普通的加法和乘法运算。

加法不封闭，乘法封闭；乘法满足交换律，结合律

（10）$S = \{x \mid x = 2^n, n \in Z^+\}$ ,S 关于普通的加法和乘法运算。

加法不封闭，乘法封闭，乘法满足交换律，结合律

5．对于上题中封闭的二元运算判断是否适合交换律，结合律，分配律。

见上题

7. 设 * 为 $Z^+$ 上的二元运算 $\forall x,y \in Z^+$，

X * Y = min ( x，y ),即 x 和 y 之中较小的数.

(1)求 4 * 6，7 * 3。

**4, 3**

(2)* 在 $Z^+$ 上是否适合交换律，结合律，和幂等律？

满足交换律，结合律，和幂等律

(3)求*运算的单位元，零元及 $Z^+$ 中所有可逆元素的逆元。

单位元无，零元 **1**， 所有元素无逆元

8. $S=Q\times Q$ $Q$为有理数集，*为 S 上的二元运算，$\forall$<a, b>, <x, y > $\in$ S 有

**< a，b >*<x，y> = <ax，ay + b>**

（1）*运算在 S 上是否可交换，可结合？是否为幂等的？

不可交换：**<x,y>*<a,b >= <xa，xb +y>** $\neq$ **< a，b >*<x，y>**

可结合：**(<a,b >*<x,y>)*<c,d>=<ax，ay + b>*<c,d>=<axc，axd +(ay+b) >**

**<a,b >*(<x,y>*<c,d>)=<a, b>*<xc,xd+y>=<axc，a(xd +y)+b >**

**(<a,b >*<x,y>)*<c,d>=<a,b >*(<x,y>*<c,d>)**

不是幂等的

（2）*运算是否有单位元，零元？ 如果有请指出，并求 S 中所有可逆元素的逆元。

设**<a,b>**是单位元，$\forall$**<x,y >** $\in$ **S** ，**<a,b >*<x,y>= <x,y>*<a,b >=<x,y>**

则**<ax,ay+b>=<xa,xb+y>=<x,y>**，解的**<a,b>=<1,0>**，即为单位。

设**<a,b>**是零元，$\forall$**<x,y >** $\in$ **S** ，**<a,b >*<x,y>= <x,y>*<a,b >=<a,b>**

则**<ax,ay+b>=<xa,xb+y>=<a,b>**，无解。即无零元。

$\forall$**<x,y >** $\in$ **S**，设**<a,b>**是它的逆元**<a,b >*<x,y>= <x,y>*<a,b >=<1,0>**

**<ax,ay+b>=<xa,xb+y>=<1,0>**

**a=1/x,b=-y/x**

所以当 $x\neq 0$ 时，$<x,y>^{-1}=\left\langle \frac{1}{x},-\frac{y}{x}\right\rangle$

10. 令 S={a，b}，S 上有四个运算：*，°，·和□分别有表 10.8 确定。

| * | a | b |
|---|---|---|
| a | a | a |
| b | a | a |

(a)

| ∘ | a | b |
|---|---|---|
| a | a | b |
| b | b | a |

(b)

| · | a | b |
|---|---|---|
| a | b | a |
| b | a | a |

(c)

| □ | a | b |
|---|---|---|
| a | a | b |
| b | a | b |

(d)

(1)这 4 个运算中哪些运算满足交换律，结合律，幂等律？

**(a)** 交换律，结合律，幂等律都满足， 零元为 **a,**没有单位元；

**(b)**满足交换律和结合律，不满足幂等律，单位元为 **a,**没有零元

$$a^{-1}=a,\ b^{-1}=b$$

**(c)**满足交换律**,**不满足幂等律**,**不满足结合律

$$a\circ(b\circ b)=a\circ a=b,\quad (a\circ b)\circ b=a\circ b=a$$

$$a\circ(b\circ b)\neq(a\circ b)\circ b$$

没有单位元**,** 没有零元

**(d)** 不满足交换律，满足结合律和幂等律

没有单位元**,** 没有零元

(2)求每个运算的单位元，零元以及每一个可逆元素的逆元。

见上

16. 设 V=〈 N，+ ，·〉，其中+ ，·分别代表普通加法与乘法，对下面给定的每个集合确定它是否构成 V 的子代数，为什么？

（1）$S_1=\{2n\mid n\in Z\}$ 是

（2）$S_2=\{2n+1\mid n\in Z\}$ 不是 加法不封闭

（3）$S_3=\{-1,0,1\}$ 不是，加法不封闭

# 第十一章部分课后习题参考答案

8. 设 S={0，1，2，3}，$\otimes$为模 4 乘法，即

$$\forall x,y\in S,\quad x\otimes y=(xy)\bmod 4$$

问〈S，$\otimes$〉是否构成群？为什么？

解：(1) $\forall x,y\in S$, $x\otimes y=(xy)\bmod 4\in S$，$\otimes$是 S 上的代数运算。

(2) $\forall x,y,z\in S$，设 $xy=4k+r$ $\quad 0\le r\le 3$

$(x\otimes y)\otimes z=((xy)\bmod 4)\otimes z=r\otimes z=(rz)\bmod 4$

$=(4kz+rz)\bmod 4=((4k+r)z)\bmod 4=(xyz)\bmod 4$

同理 $x\otimes(y\otimes z)$ =(xyz)mod 4

所以，$(x\otimes y)\otimes z = x\otimes(y\otimes z)$，结合律成立。

(3) $\forall x\in S$, $(x\otimes 1)=(1\otimes x)=x$,，所以 1 是单位元。

(4) $1^{-1}=1,\ 3^{-1}=3,$ 0 和 2 没有逆元

所以，〈S，$\otimes$〉不构成群

9. 设 Z 为整数集合，在 Z 上定义二元运算。如下：

$$\forall x,y\in Z,\ xoy = x+y-2$$

问 Z 关于 o 运算能否构成群？为什么？

**解**：(1) $\forall x,y\in Z$, $xoy = x+y-2\in Z$, o 是 Z 上的代数运算。

(2) $\forall x,y,z\in Z$,

$(xoy)\ oz = (x+y-2)oz=(x+y-2)+z-2=x+y+z-4$

同理 $(xoy)oz = xo(yoz)$，结合律成立。

(3) 设 $e$ 是单位元，$\forall x\in Z$, $xoe = eox=x$, 即 $x+e-2= e+x-2=x$, $e=2$

(4) $\forall x\in Z$，设 x 的逆元是 y，$xoy= yox=e$，即 $x+y-2=y+x-2=2$,

所以，$x^{-1}=y=4-x$

所以〈Z，o〉构成群

11. 设 G=$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$，证明 G 关于矩阵乘法构成一个群.

**解**：(1) $\forall x,y\in G$, 易知 $xy\in G$, 乘法是 Z 上的代数运算。

(2) 矩阵乘法满足结合律

(3) 设 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 是单位元，

(4) 每个矩阵的逆元都是自己。

所以 G 关于矩阵乘法构成一个群.

14. 设 G 为群，且存在 $a\in G$, 使得

$$G=\{a^k \mid k\in Z\}$$

**证明**：G 是交换群。

证明: ∀x, y∈G，设 $x=a^k$， $y=a^l$，则

$$xy=a^k a^l=a^{k+l}==a^{l+k}=a^l a^k=yx$$

所以，G 是交换群

17. 设 G 为群，证明 e 为 G 中唯一的幂等元。

证明: 设 $e_0 \in G$ 也是幂等元，则 $e_0^2=e_0$，即 $e_0^2=e_0 e$，由消去律知 $e_0=e$

18. 设 G 为群，a, b, c∈G, 证明

| abc | = | bca | = | cab |

证明：先证设 $(abc)^k=e \Leftrightarrow (bca)^k=e$

设 $(abc)^k=e$, 则 $(abc)(abc)(abc)\cdots(abc)=e$,

即 $a(bca)(bca)(bca)\cdots(bca)a^{-1}=e$

左边同乘 $a^{-1}$，右边同乘 $a$ 得

$$(bca)(bca)(bca)\cdots(bca)=(bac)^k=a^{-1}ea=e$$

反过来，设 $(bac)^k=e$, 则 $(abc)^k=e.$

由元素阶的定义知，| abc | = | bca |，同理 | bca | = | cab |

19. 证明：偶数阶群 G 必含 2 阶元。

证明：设群 G 不含 2 阶元，$\forall a \in G$，当 $a=e$ 时，$a$ 是一阶元，当 $a \neq e$ 时，$a$ 至少是 3 阶元, 因为群 G 时有限阶的，所以 $a$ 是有限阶的，设 $a$ 是 k 阶的, 则 $a^{-1}$ 也是 k 阶的，所以高于 3 阶的元成对出现的，G 不含 2 阶元，G 含唯一的 1 阶元 $e$, 这与群 G 是偶数阶的矛盾。所以，偶数阶群 G 必含 2 阶元

20. 设 G 为非 Abel 群，证明 G 中存在非单位元 a 和 b, a≠b, 且 ab=ba.

证明：先证明 G 含至少含 3 阶元。

若 G 只含 1 阶元, 则 G={e}, G 为 Abel 群矛盾；

若 G 除了 1 阶元 e 外, 其余元 $a$ 均为 2 阶元，则 $a^2=e$， $a^{-1}=a$

$\forall a,b \in G,\ a^{-1}=a, b^{-1}=b, (ab)^{-1}=ab,$ 所以 $ab=a^{-1}b^{-1}=(ba)^{-1}=ba$，

与 G 为 Abel 群矛盾；

所以，G 含至少含一个 3 阶元，设为 $a$，则 $a \neq a^2$，且 $a^2 a=aa^2$。

令 $b=a^2$ 的证。

21. 设 G 是 $M_n(R)$ 上的加法群，n≥2，判断下述子集是否构成子群。

（1）全体对称矩阵　　　是子群

（2）全体对角矩阵　　　是子群

（3）全体行列式大于等于 0 的矩阵.　不是子群

（4）全体上（下）三角矩阵。　　是子群

22. 设 G 为群，a 是 G 中给定元素，a 的正规化子 N（a）表示 G 中与 a 可交换的元素构成的集合，即

$$N(a)=\{x \mid x\in G\wedge xa=ax\}$$

证明 N（a）构成 G 的子群。

证明：ea=ae, $e\in N(a)\neq\phi$

$\forall x,y\in N(a)$,　则　$ax=xa, ay=ya$

$a(xy)=(ax)y=(xa)y=x(ay)=x(ya)=(xy)a$，所以 $xy\in N(a)$

由 $ax=xa$，得 $x^{-1}axx^{-1}=x^{-1}xax^{-1}, x^{-1}ae=eax^{-1}$，即 $x^{-1}a=ax^{-1}$，所以 $x^{-1}\in N(a)$

所以 N（a）构成 G 的子群

31. 设 $\varphi_1$ 是群 $G_1$ 到 $G_2$ 的同态，$\varphi_2$ 是 $G_2$ 到 $G_3$ 的同态，证明 $\varphi_1\circ\varphi_2$ 是 $G_1$ 到 $G_3$ 的同态。

证明：有已知 $\varphi_1$ 是 $G_1$ 到 $G_2$ 的函数，$\varphi_2$ 是 $G_2$ 到 $G_3$ 的函数，则 $\varphi_1\cdot\varphi_2$ 是 $G_1$ 到 $G_3$ 的函数。

$\forall a,b\in G_1$，$(\varphi_1\circ\varphi_2)(ab)=\varphi_2(\varphi_1(ab))=\varphi_2(\varphi_1(a)\varphi_1(b))$

$=(\varphi_2(\varphi_1(a)))(\varphi_2(\varphi_1(b)))=(\varphi_1\circ\varphi_2)(a)(\varphi_1\circ\varphi_2)(b)$

所以：$\varphi_1\cdot\varphi_2$ 是 $G_1$ 到 $G_3$ 的同态。

33. 证明循环群一定是阿贝尔群，说明阿贝尔群是否一定为循环群，并证明你的结论。

证明：设 G 是循环群，令 G=<a>，$\forall x,y\in G$，令 $x=a^k, y=a^l$，那么

$xy=a^k a^l=a^{k+l}=a^{l+k}=a^l a^k=yx$，G 是阿贝尔群

克莱因四元群，$G=\{e,a,b,c\}$

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

是交换群，但不是循环群，因为 e 是一阶元，a,b,c 是二阶元。

36. 设$\sigma,\tau$是 5 元置换，且

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}$$

(1)计算$\sigma\tau$，$\tau\sigma$，$\tau^{-1}$，$\sigma^{-1}$,$\sigma^{-1}\tau\sigma$；

(2)将$\tau\sigma$，$\tau^{-1}$,$\sigma^{-1}\tau\sigma$表成不交的轮换之积。

(3)将（2）中的置换表示成对换之积，并说明哪些为奇置换，哪些为偶置换。

**解：**（1） $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&2&1\end{pmatrix}$ $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&2&5\end{pmatrix}$ $\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}$

$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&3&4\end{pmatrix}$ $\sigma^{-1}\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&3&2\end{pmatrix}$

（2） $\tau\sigma=(1425)$ $\tau^{-1}=(14253)$ $\sigma^{-1}\tau\sigma=(143)(25)$

（3） $\tau\sigma=(14)(12)(15)$ 奇置换，

$\tau^{-1}=(14)(12)(15)(13)$ 偶置换

$\sigma^{-1}\tau\sigma=(14)(13)(25)$ 奇置换