第四章部分课后习题参考答案

3. 在一阶逻辑中将下面将下面命题符号化，并分别讨论个体域限制为(a)，(b)条件时命题的真值：

(1) 对于任意 x，均有$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

(2) 存在 x，使得 x+5=9.

其中(a)个体域为自然数集合.

(b)个体域为实数集合.

解：

F(x)：$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

G(x)：x+5=9.

(1)在两个个体域中都解释为$\forall xF(x)$，在(a)中为假命题，在(b)中为真命题。

(2)在两个个体域中都解释为$\exists xG(x)$，在(a)(b)中均为真命题。

4. 在一阶逻辑中将下列命题符号化：

(1) 没有不能表示成分数的有理数.

(2) 在北京卖菜的人不全是外地人.

解：

(1)F(x)：x 能表示成分数

H(x)：x 是有理数

命题符号化为：$\neg\exists x(\neg F(x)\wedge H(x))$

(2)F(x)：x 是北京卖菜的人

H(x)：x 是外地人

命题符号化为：$\neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$

5. 在一阶逻辑将下列命题符号化：

(1) 火车都比轮船快.

(3) 不存在比所有火车都快的汽车.

解：

(1)F(x)：x 是火车；G(x)：x 是轮船；H(x,y)：x 比 y 快

命题符号化为：$\forall x\forall y((F(x)\wedge G(y))\rightarrow H(x,y))$

(2) (1)F(x)：x 是火车；G(x)：x 是汽车；H(x,y)：x 比 y 快

命题符号化为: $\neg\exists y(G(y)\wedge\forall x(F(x)\to H(x,y)))$

9.给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D 为实数集合 R.

(b) D 中特定元素$\bar{a}$=0.

(c) 特定函数$\bar{f}$(x, y)=x−y, x, y$\in D$.

(d) 特定谓词$\bar{F}$(x, y):x=y, $\bar{G}$(x, y):x<y, x, y$\in D$.

说明下列公式在 I 下的含义,并指出各公式的真值:

(1) $\forall x\forall y(G(x,y)\to\neg F(x,y))$

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),a)\to G(x,y))$

答:(1) 对于任意两个实数 x, y, 如果 x<y, 那么 x$\neq$y. 真值 1.

(2) 对于任意两个实数 x, y, 如果 x-y=0, 那么 x<y. 真值 0.

10. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D=N(N 为自然数集合).

(b) D 中特定元素$\bar{a}$=2.

(c) D 上函数$\bar{f}$(x,y) =x+y, $\bar{g}$(x, y)=xy.

(d) D 上谓词$\bar{F}$(x, y):x=y.

说明下列各式在 I 下的含义, 并讨论其真值.

(1) $\forall x F(g(x,a),x)$

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\to F(f(y,a),x)$

答:(1) 对于任意自然数 x, 都有 2x=x, 真值 0.

(2) 对于任意两个自然数 x, y, 使得如果 x+2=y, 那么 y+2=x. 真值 0.

11. 判断下列各式的类型:

(1) $F(x,y)\to(G(x,y)\to F(x,y))$.

(3) $\forall x\exists y F(x,y)\to\exists x\forall y F(x,y)$.

解:(1)因为 $p\to(q\to p)\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee p)\Leftrightarrow 1$ 为永真式;

所以 $F(x,y)\to(G(x,y)\to F(x,y))$.为永真式;

(3)取解释 I 个体域为全体实数

F(x, y): x+y=5

所以,前件为任意实数 x 存在实数 y 使 x+y=5, 前件真;

后件为存在实数 x 对任意实数 y 都有 x+y=5, 后件假,]

此时为假命题

再取解释 I 个体域为自然数 N,

F(x, y): :x+y=5

所以,前件为任意自然数 x 存在自然数 y 使 x+y=5,前件假。此时为假命题。
此公式为非永真式的可满足式。

13. 给定下列各公式一个成真的解释,一个成假的解释。

(1) $\forall x(F(x)\vee G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge H(x))$

解:(1)个体域:本班同学

F(x): x 会吃饭, G(x): x 会睡觉.成真解释

F(x): x 是泰安人,G(x): x 是济南人.(2)成假解释

(2)个体域:泰山学院的学生

F(x): x 出生在山东,G(x):x 出生在北京,H(x):x 出生在江苏,成假解释.

F(x): x 会吃饭,G(x): x 会睡觉,H(x): x 会呼吸. 成真解释.

第五章部分课后习题参考答案

5.给定解释 I 如下:

(a)个体域 D={3,4};

(b) $\overline{f}(x)$ 为 $\overline{f}(3)=4, \overline{f}(4)=3$

(c) $\overline{F}(x,y)$为$\overline{F}(3,3)=\overline{F}(4,4)=0,\ \overline{F}(3,4)=\overline{F}(4,3)=1$.

试求下列公式在 I 下的真值.

(1) $\forall x\exists yF(x,y)$

(3) $\forall x\forall y(F(x,y)\to F(f(x),f(y)))$

解:(1) $\forall x\exists yF(x,y)\Leftrightarrow\forall x(F(x,3)\vee F(x,4))$

$$\Leftrightarrow\ (F(3,3)\vee F(3,4))\wedge(F(4,3)\vee F(4,4))$$
$$\Leftrightarrow(0\vee 1)\wedge(1\vee 0)\Leftrightarrow 1$$

(2) $\forall x\forall y(F(x,y)\to F(f(x),f(y)))$

$$\Leftrightarrow\forall x((F(x,3)\to F(f(x),f(3)))\wedge(F(x,4)\to F(f(x),f(4))))$$

$$\Leftrightarrow\forall x((F(x,3)\to F(f(x),4))\wedge(F(x,4)\to F(f(x),3)))$$

$$\Leftrightarrow((F(3,3)\to F(f(3),4))\wedge(F(3,4)\to F(f(3),3)))$$

$\wedge((F(4,3)\to F(f(4),4))\wedge(F(4,4)\to F(f(4),3)))$

$\Leftrightarrow((0\to F(4,4))\wedge(F(3,4)\to F(4,3)))\wedge((1\to F(3,4))\wedge(0\to F(3,3)))$

$\Leftrightarrow(0\to 0)\wedge(1\to 1)\wedge(1\to 1)\wedge(0\to 0)\Leftrightarrow 1$

12. 求下列各式的前束范式。

(1) $\forall xF(x)\to\forall yG(x,y)$

(5) $\exists x_1F(x_1,x_2)\to(H(x_1)\to\neg\exists x_2G(x_1,x_2))$　　（本题课本上有错误）

解：(1) $\forall xF(x)\to\forall yG(x,y)\Leftrightarrow\forall xF(x)\to\forall yG(t,y)\Leftrightarrow\exists x\forall y(F(x)\to G(t,y))$

(5) $\exists x_1F(x_1,x_2)\to(H(x_1)\to\neg\exists x_2G(x_1,x_2))$

$\Leftrightarrow\exists x_1F(x_1,x_2)\to(H(x_3)\to\forall x_2\neg G(x_3,x_2))$

$\Leftrightarrow\exists x_1F(x_1,x_4)\to\forall x_2(H(x_3)\to\neg G(x_3,x_2))$

$\Leftrightarrow\forall x_1\forall x_2(F(x_1,x_4)\to(H(x_3)\to\neg G(x_3,x_2)))$

15. 在自然数推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

(1) 前提：$\exists xF(x)\to\forall y((F(y)\vee G(y))\to R(y))$，$\exists xF(x)$

结论：∃xR(x)

(2) 前提：∀x(F(x)→(G(a)∧R(x)))，∃xF(x)

结论:∃x(F(x)∧R(x))

证明(1)

①$\exists xF(x)$　　前提引入

②F(c)　　①EI

③$\exists xF(x)\to\forall y((F(y)\vee G(y))\to R(y))$　　前提引入

④$\forall y((F(y)\vee G(y))\to R(y))$　　①③假言推理

⑤(F(c)∨G(c))→R(c))　　④UI

⑥F(c)∨G(c)　　②附加

⑦R(c)　　⑤⑥假言推理

⑧∃xR(x)　　⑦EG

(2)

①∃xF(x)　　前提引入

②F(c)　　①EI

③∀x(F(x)→(G(a)∧R(x)))　　前提引入

④$F(c) \rightarrow (G(a) \wedge R(c))$	③UI
⑤$G(a) \wedge R(c)$	②④假言推理
⑥$R(c)$	⑤化简
⑦$F(c) \wedge R(c)$	②⑥合取引入
⑧$\exists x(F(x) \wedge R(x))$	