

二. representing relations using matrices 用矩阵表示关系

R1. 假设 R 是从集合 $A (A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\})$ 到集合 $B (B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\})$ 的关系, 我们可以用矩阵 M_R (M_R 为 m 行 n 列矩阵) 表示关系 R , 而且矩阵 M_R 中的元素的值有如下定义:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

即在用 0-1 矩阵表示关系 R 时, 如果矩阵中第 i 行第 j 列元素为 1, 则 a_i 与 b_j 有关系; 如果为 0, 则 a_i 与 b_j 无关系

R2. 用矩阵表示某个集合上的关系时会得到一个方阵.

① 如果这一方阵的主对角线上的所有元素均为 1, 则这一方阵表示的关系是自反的

② 如果这一方阵上第 i 行第 j 列元素的值都等于第 j 行第 i 列的值 (即 $m_{ij} = m_{ji}, i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n$) 时, 则这一方阵表示的关系是对称的 (有时这一性质亦可写作 $M_R = M_R^T$)

③ 如果这一方阵上第 i 行第 j 列元素与第 j 行第 i 列元素不全为 1, 则这一方阵表示的关系是反对称的

R3. 布尔运算上的交与并可以用来找出集合运算的交与并对应的矩阵. 并有如下性质:

$$\begin{cases} M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} & (\text{当 } M_{R_1}, M_{R_2} \text{ 对应位上的值全为 0 时, } M_{R_1 \cup R_2} \text{ 对应位上的值才是 0, 否则是 1}) \\ M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} & (\text{当 } M_{R_1}, M_{R_2} \text{ 对应位上的值全为 1 时, } M_{R_1 \cap R_2} \text{ 对应位上的值才是 1, 否则是 0}) \end{cases}$$

R4. 用矩阵表示关系的复合就是令其做布尔乘法. 即:

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

R5. 布尔乘法的定义: 假设矩阵 A 是一个 m 行 k 列的 0-1 矩阵, 矩阵 B 是一个 k 行 n 列的 0-1 矩阵. 则矩阵

A, B 的布尔乘积, 记为 $A \odot B$, 为一个 m 行 n 列矩阵. 此矩阵上的元素值定义如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

R6. 运用矩阵表示关系的复合的性质, 我们可以通过 $M_{R^n} = M_R^{[n]}$ 求得 M_{R^n} , 即 R^n 的矩阵表示.

三. representing relations using digraphs 用有向图表示关系

S1. 有向图 (directed graphs / digraphs)

是关系的一种图象表达形式. 每个元素 (集合中的) 用点表示, 每个有序对用有向线段进行表示

D1. 有向图包含顶点 (或节点) 集 V 和边 (弧) 集 E . 其中边集 E 是 V 中元素在关系 R 中的有序对的集合. 假设边集中有一边为 (a, b) , 顶点 a 称为边 (a, b) 的始点, 顶点 b 称为边 (a, b) 的终点.

R1. 如果边集中有一边表示为 (a, a) 的形式, 则它的图象表示为一个起于顶点 a 终于顶点 a 的弧

S2. 环 (loop)


对于同一起始点终点均为一点的边来说, 它的图象称为环

R₂. 从有向图中看出^{关系}~~集合~~的性质

① 有向图中每个~~点~~点均成环, 则此有向图表示的关系是自反的

② 有向图中不同顶点间的每一条边都存在一条方向相反的边, 则此有向图表示的关系是对称的

③ 有向图中~~不同顶点间~~任意不同两顶点间不存在两条方向相反的边, 则此有向图表示的关系是反对称的

④ 有向图中~~如果~~任意不同三顶点 A, B, C, 若存在顶点 A 到顶点 B 的边, 顶点 B 到顶点 C 的边, 则有顶点 A 到顶点 C 的边 (即: 形成一个类似于 "" 的三角形), 则此有向图表示的关系是具有传递性的

R₃. 具有对称性的关系的对应图家可用无向图表示