二、set identities 集合恒等式

R1. 证明集合恒等式的的方法 { ①证明相互包含
②使用成员表进行证明
③运用已知集合恒等式证明

S1. 成员表(membership tables)

我们可以通过列成员表的方式证明集合恒等式. 我们考虑一个元素可能属于的集合的每一种组合,并证明在同样的集合组合中的元素属于恒等式两边的集合. 用1表示元素属于一个集合,用0表示元素不属于一个集合(与真值表有相似之处)

三、generalized unions and intersections 并集与交集的扩展

D1. 一系列集合的并集为~~[illegible]~~包含所有集合中所有元素的集合

即: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

D2. 一系列集合的交集为包含所有集合中共同元素的集合

即: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

2.3 function 函数

一、introduction 介绍

D1. 假设集合A、B均为非空集合. 从A到B的函数f是将A中的每一个元素映射到B中的某一个元素. 我们用$f(a)=b$表示A中的元素a经过函数f映射到B中的唯一元素b. 如果f为集合A到集合B的函数,我们可记为$f: A \to B$

R1. 函数有时也称作映射或者变换

S1. 映射(mappings), 变换(transformations)
函数的别称

R2. 函数也可被定义为集合A与集合B间的~~联~~关系. 这种由A到B的关系为$A \times B$的子集. 且对于集合A中任一元素a, 有且仅有一个有序对在此关系中. 对于$f(a)=b$, (a,b)为这一关系中以a为第一个元素的唯一有序对

D2. 如果f为一个从A到B的函数, 我们称集合A为定义域, 集合B为伴域. 如果$f(a)=b$, 我们称b是a的像, a是b的原像. 函数f的值域为A中所有元素的像的集合. 与此同时,如果f是从A到B的函数, 我们亦称f将集合A映射至集合B

R3. 当我们定义函数时, 我们需要指定函数的定义域, 伴域和两集合中元素的映射关系(最好也写上值域)

S2. 相等(equal)

两函数相等当且仅当两函数具有相同的定义域、~~值域、[illegible]~~伴域与两集合中元素的映射关系

R4. 注意此处函数相等是要求伴域相同, 而不是要求值域相同. 而伴定义域是包含值域的集合

D3. 假设f_1, f_2为从集合A到R的函数. 则f_1+f_2与f_1f_2同样都是从集合A到R的函数, 并且

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)$$
$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$$

D4. 假设f为从集合A到集合B的函数, 并假设S为集合A的子集. S在函数f作用下的所有的像所形成的集合为集合B的子集, 并将其记为$f(S)$, 其中:

$$f(S) = \{t \mid \exists s \in S\ (t=f(s))\}$$

有时也简写为 $\{f(s) \mid s \in S\}$

R5. 注意 $f(S)$ 不要认为是 $f(s)$ (即元素s的对应值), 而是集合的名字

二、一一映射与满射

S1. 一一映射(one-to-one)

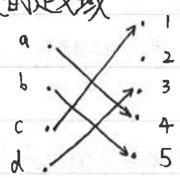
有一些函数不会将定义域内两个不同的值映射到伴域内的同一个值上, 这些函数是一一映射的

D1. 函数f是一一映射的当且仅当在函数f的定义域内的任意两个元素a、b, 只要$f(a)=f(b)$, 则$a=b$. 如果函数f是一一映射的, 我们也可称f是单射的

R1. 函数f是一一映射的当且仅当在函数f的定义域内的任意两个不同元素a、b在伴域上映射到的值不同. 即当$a \neq b$时, $f(a) \neq f(b)$

R2. 用量词表达一一映射即为 $\forall a \forall b\,(f(a)=f(b) \to a=b)$ 或者 $\forall a \forall b\,(a \neq b \to f(a) \neq f(b))$, 此时的论域为函数的定义域

R3. 图象:



R4. 要使函数能成为一一映射的, 必须规定定义域的基数小于等于伴域的基数

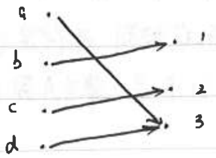
D2. 假设一个函数f的定义域与伴域均为实数集的子集, 且任意两个在函数f定义域上的元素x, y均满足当$x<y$时, $f(x) \le f(y)$则称函数f是递增的, $f(x)<f(y)$则称函数f是严格递增的. 相似的, 任意两个在函数f定义域上的元素x、y均满足当$x>y$时, $f(x) \le f(y)$则称函数是递减的, $f(x)<f(y)$则称函数是严格递减的

R5. 当函数是严格递增的或是严格递减的一定是一一映射的, 但递增、递减并不保证一一映射

D3. 函数f是映成函数, 当且仅当伴域中任一元素b都存在定义域内的一元素a与之对应. 映成函数是满射的.

R6. 函数f是满射的当且仅当 $\forall y \exists x\,(f(x)=y)$, 此时x的论域为函数的定义域, y的论域为函数的伴域

R7. 图象：

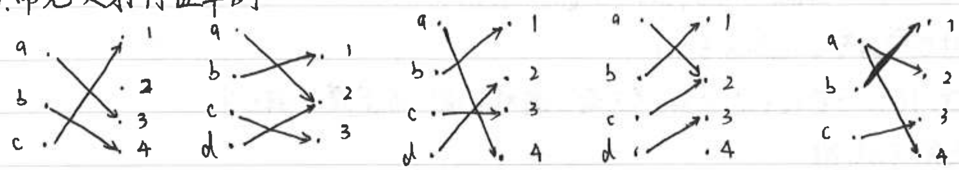


R8. 要使函数f能成为满射的，必须规定定义域的基数大于等于伴域的基数

D4. 如果函数f既是一一~~对~~映射的，又是满射的，则f是一一对应的，是双射的.

R9. 要使函数f能成为双射的，必须规定定义域的基数与伴域的基数相等

R10. 常见映射特征举例



一一映射(单射)　满射　双射　既非单射又非满射　非函数

R11. 假设函数f为从集合A到它本身的函数. 如果A是有限集，f是一一映射的当且仅当f是满射的. 但对于无限集A，则不成立(即存在f是一一映射的但不是满射的，比如 ~~f: A→A~~，$f: Z^+\to Z^+, f(x)=x^2$)

R12. 函数 $f: A\to A$ ~~亦称为~~，$f(x)=x$ 亦称为恒等函数(此时对于A中任一元素x均有此性质). 恒等函数是双射的

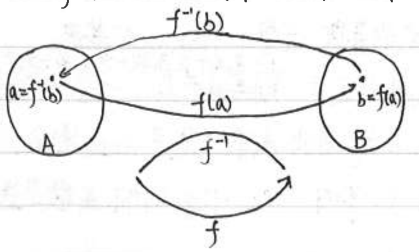
三、inverse functions and compositions of functions 反函数与复合函数

D1. 假设函数f为从集合A到集合B的一一对应. 函数f的反函数为将集合B中的元素b映射至集合A中独一无二的元素a且$f(a)=b$. f的反函数记f^{-1}. 因此，当$f(a)=b$时，$f^{-1}(b)=a$.

R1、注意不要混淆函数f^{-1}与函数$1/f$. 函数$1/f$将定义域内的元素x映射至$1/f(x)$且它的定义域不包括$f(x)=0$的情况

R2、注意当函数f为从集合A到集合B的一一对应时才能定义从集合B到集合A的~~反函~~f的反函数f^{-1}

R3、图象



~~R4、我们认为一一对应是可逆的，因为我们可以定义反函数~~

S1、可逆(invertible)

一一对应是可逆的，因为我们可以定义反函数.

S2、不可逆(not invertible)

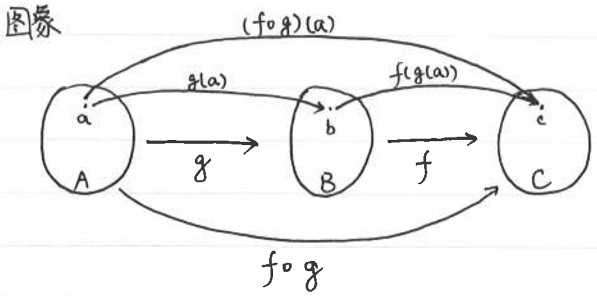
如果一个函数不是一一对应的，则它的反函数不存在，这个函数是不可逆的.

D2. 假设g是一个从集合A到集合B的函数. f是一个从集合B到集合C的函数. 函数f、g的复合，记为$f\circ g$，定义为

$$(f\circ g)(a)=f(g(a))$$

R1、要使$f\circ g$可被定义必须保证g的值域是f定义域的子集

R2、图象



R3、$f\circ g$ 与 $g\circ f$ 并不等价. 交换律对函数复合并不适用.

R4、假设f是从集合A到集合B的一一对应，则$(f^{-1})^{-1}=f$

四、the graphs of functions 函数图象

S1、图象(graph)

从A到B的每个函数都对应着由一个有序对所构成的集合，此集合是$A\times B$的子集. 这一集合可以用图象描述出来帮助我们理解这个函数

D1、假设f为从集合A到集合B的函数. 函数f的图象为有序对所构成的集合 $\{(a,b)\mid a\in A,\ f(a)=b\}$

R1、从定义中可以看出，从集合A到集合B的函数f的图象为$A\times B$的子集. 其包括的有序对中第二个元素为第一个元素经过函数f所映射到的集合B中的值

五、some important functions 某些重要函数

D1、向下取整函数将实数x映射到小于等于它的最大整数上，并将其记为$\lfloor x\rfloor$. 向上取整函数将实数x映射到大于等于它的最小整数上，并将其记为$\lceil x\rceil$.

R1、向下取整函数有时也称取整函数，记为$[x]$

R2、取整函数与向上取整函数的一些有用的性质(n为整数)

① $\lfloor x\rfloor=n$ 当且仅当 $n\le x<n+1$

② $\lceil x\rceil=n$ 当且仅当 $n-1<x\le n$

③ $\lfloor x\rfloor=n$ 当且仅当 $x-1<n\le x$

④ $\lceil x\rceil=n$ 当且仅当 $x\le n<x+1$

⑤ $x-1<\lfloor x\rfloor\le x\le\lceil x\rceil<x+1$

⑥ $\lfloor -x\rfloor=-\lceil x\rceil$

⑦ $\lceil -x\rceil=-\lfloor x\rfloor$

⑧ $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$

⑨ $\lceil x+n\rceil=\lceil x\rceil+n$

R3、在证明时考虑向下取整函数可令 $x=n+\varepsilon$，其中 $n=\lfloor x\rfloor$，ε 为 x 的小数部分 $(0\le\varepsilon<1)$

类似地在考虑向上取整函数可令 $x=n-\varepsilon$，其中 $n=\lceil x\rceil$，ε 为 1 减 x 的小数部分 $(0\le\varepsilon<1)$

S1、阶乘函数 (factorial function)

$f: N\to Z^+$，$f(n)=n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$

且 $f(0)=0!=1$

第八章：关系

Chapter 8. ~~rela~~ relations

8.1 relations and their properties 关系及其性质

一、introduction 介绍

R1、用于表达两集合元素间关系的最直接的方式是用两相关元素的有序对进行表示

R2、由有序对构成的集合称为二元关系

D1、假设集合A、B，从A到B的二元关系为A×B的子集

R3、从集合A到集合B的二元关系是一个由有序对所组成的集合R。在这些有序对中，第一个元素来自集合A，第二个元素来自集合B

S1、与…有关系 (related to)

我们用记号 aRb 表示 $(a,b)\in R$，用记号 $a\not R b$ 表示 $(a,b)\notin R$。而且当 $(a,b)\in R$ 时，a与b存在关系R。

二、functions as relations 函数关系

R1、由于函数f的图象为A×B的子集，因此它也是一种从集合A到集合B的关系。而且，函数的图象还拥有对于集合A中的每一个元素有且仅有一个在集合B中的元素与之对应这一性质。因此对于集合A中的每一个元素仅存在着一个有序对，这一有序对以该元素作为第一个元素。

R2、由于在集合A到集合B中~~存在~~可能存在一种"一对多"的关系（集合A的某一元素与集合B的多个元素有关系），但这种关系并不是函数。由此，关系是比函数更大的概念，函数是一种关系，但关系可以表示集合间更多的联系。

三、relations on a set 集合上的关系

D1、集合A上的关系为从集合A到集合A的关系，即集合A上的关系为A×A的子集 $(R\subseteq A\times A)$

R1、由于 $\varnothing\subseteq A\times A$，因此称 $\varnothing$ 为空关系

R2、由于 $A\times A\subseteq A\times A$，因此称 A×A 为全关系

R3、~~由于~~集合A到集合B的关系数为 $|2^{A\times B}|=2^{|A\times B|}=2^{|A||B|}$

四、properties of relations 关系的性质

D1、~~若~~当集合A上的任意元素a都满足 $(a,a)\in R$（R为集合A上的关系）时，我们称关系R是自反的

R1、用量词表示自反性为 $\forall a((a,a)\in R)$，其中R为A上的关系，a的论域为A上的所有元素所构成的集合

D2、对于集合A上的任意元素a、b 均满足 ~~如果~~ 当 $(a,b)\in R$（R为集合A上的关系）同时有 $(b,a)\in R$，那么我们称关系R是对称的。~~如果在 (a,b)∈R，(b,a)∈R 的前提下仍能保证 a=b~~

D3、对于集合A上的任意元素a、b均满足当集合A上的关系R 如果 包含有 (a,b) 与 (b,a) 时，则 此时 $a=b$ 时，关系R是反对称的。

R2、用量词表示对称性为 $\forall a\forall b((a,b)\in R\to(b,a)\in R)$，其中R为A上的关系，a、b的论域为A

R3、用量词表示反对称性为 $\forall a\forall b(((a,b)\in R\wedge(b,a)\in R)\to(a=b))$，其中R为A上的关系，a、b论域为A

R4. 一个关系是对称的当且仅当 a与b存在关系说明 b与a存在关系。一个关系是反对称的当且仅当关系中没有相异的元素a、b，使得a与b存在关系且b与a存在关系。即如果关系中存在a、b两者间的相互关系，那么a、b必为同一元素。术语对称性与反对称性并不是相对立的，因为一个关系可以同时具备两种性质，也可以同时不具备两种性质

D4. 对于集合A上任意~~元素a, b~~有序对 $(a,b)\in R$（R为集合A上的关系），$(b,c)\in R$，在R上均存在另一有序对~~(b, c)~~ $(a,c)\in R$，那么关系R是具有传递性的

R5. 用量词表示传递性为 $\forall a\forall b\forall c(((a,b)\in R\land(b,c)\in R)\to(a,c)\in R)$

R6. 对于一个拥有n个元素的集合中，自反的关系数量为 $2^{n(n-1)}$ 个

证明：集合A上关系R为 $A\times A$ 的子集

由于A中包含n个元素，因而在 $A\times A$ 中存在n个有序对 (a,a)

在 $A\times A$ 中存在 $n(n-1)$ 个有序对 (a,b)，$a\neq b$

由于关系具有自反性，因而有序对 (a,a) 必须出现在关系中 $\Rightarrow$ 1种情况

有序对 (a,b) 可出现可不出现 $\Rightarrow 2^{n(n-1)}$ 种情况

由乘法原理：自反的关系数量为 $2^{n(n-1)}$ 个

R7. 对于一个拥有n个元素的集合中，对称的关系数量为：（资料来源：math.stackexchange.com/questions/15108/）

解：集合A上的关系R为 $A\times A$ 的子集

由于A中包含n个元素，因而在 $A\times A$ 中存在n个有序对 (a,a)

在 $A\times A$ 中存在 $n(n-1)$ 个有序对 (a,b)，$a\neq b$

由于关系具有对称性，因而有序对 (a,a) 可出现可不出现 $\Rightarrow 2^n$ 种情况

有序对 (a,b) 与有序对 (b,a) 捆绑，这一组合可出现可不出现 $\Rightarrow 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 种情况

由乘法原理：对称的关系数量为 $2^n\cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{C_{n+1}^2}$ 种情况

R8. 对于一个拥有n个元素的集合中，反对称的关系数量为：（资料来源：www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/dm/2004/dm_20041101.pdf）

解：集合A上的关系R为 $A\times A$ 的子集

由于A中包含n个元素，因而在 $A\times A$ 中存在n个有序对 (a,a)

在 $A\times A$ 中存在 $n(n-1)$ 个有序对 (a,b)，$a\neq b$

由于关系具有反对称性，因而有序对 (a,a) 可出现可不出现 $\Rightarrow 2^n$ 种情况

有序对 (a,b) 与有序对 (b,a) 捆绑，有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个组合

$$\left\{\begin{array}{l}(a,b)\in R \text{ 且 } (b,a)\notin R\\ (a,b)\notin R \text{ 且 } (b,a)\in R\\ (a,b)\notin R \text{ 且 } (b,a)\notin R\end{array}\right. \Rightarrow \text{有 } 3^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ 种情况}$$

由乘法原理：反对称的关系数量为 $2^n\cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 种情况

R9. 总结：四个性质的判断及计数

	自反性	对称性	反对称性	传递性
量词表达	$\forall a((a,a)\in R)$	$\forall a\forall b((a,b)\in R\to(b,a)\in R)$	$\forall a\forall b(((a,b)\in R\land(b,a)\in R)\to(a=b))$	$\forall a\forall b\forall c(((a,b)\in R\land(b,c)\in R)\to(a,c)\in R)$
判定正确	R中包含由所有相同元素构成的有序对	只要在R中出现有序对(a,b)，亦能在R中找到有序对(b,a)	R中只出现有序对(a,a)与有序对(a,b)而不出现有序对(b,a)	只要R中出现有序对(a,b)与(b,c)，亦能在R中找到有序对(a,c)
正确示例 A={1,2}	{(1,1),(2,2)} {(1,1),(2,2),(1,2)}	{(1,2),(2,1)} {(1,1)}	{(1,2)} {(1,1)}	{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)} {(1,2)}
判定错误	R中存在一组合(a,a)不在R中	R中出现有序对(a,b)但(b,a)不在R中	R中出现有序对(a,b)与有序对(b,a)	R中出现有序对(a,b)与(b,c)，但不出现有序对(a,c)
错误示例 A={1,2}	{(1,1)}	{(1,2)}	{(1,2),(2,1)}	{(1,2),(2,1)}

五、combining relations 关系组合

D1. 假设R为从集合A到集合B的关系，S为从集合B到集合C的关系。关系R与S的复合为由有序对(a,c)，$a\in A$，$c\in C$ 所构成的关系，而且存在一个元素 $b\in B$ 使得 $(a,b)\in R$，$(b,c)\in S$。我们将关系R、S的复合记为 $S\circ R$

R1. 为得到两个关系的复合需要我们在第一个关系中找出每个有序对的第二个元素，并在第二个关系中找出与其相同的有序对中的第一个元素。

D2. 假设R是某个集合的关系，关系的幂 R^n，$n=1,2,3,\dots$ 定义为

$$R^1=R \qquad R^{n+1}=R^n\circ R$$

即 $R^2=R\circ R$　$R^3=R^2\circ R=(R\circ R)\circ R$

T1. 集合A上的关系R具有传递性当且仅当 $R^n\subseteq R$ $(n=1,2,3,\dots)$