拉格朗日群定理: 设H是有限群G的子群，则H的阶整除G的阶。

证明：思路是构造一个等价关系，使得H的每个左陪集都是其中的等价类。

1、构造一个二元关系R={aRb|a-1\*b∈H}。下面证明它是一个等价关系。

1. 自反性：∀x∈G, x-1\*x=e∈H, => xRx.
2. 对称性：∀x,y∈G, xRy => x-1\*y∈H, so y-1\*x=(x-1\*y)-1 ∈H, yRx.
3. 传递性：∀x,y,z∈G, (xRy and yRz)=>x-1\*y∈H and y-1\*z∈H.

x-1\*z=x-1\*y\*y-1\*z ∈H, xRz.

2、证明R的等价类是H的左陪集。

(1)定理1：b∈aH,当且仅当 a-1\*b∈H.

证：b∈aH,当且仅当存在h∈H,使得b=a\*h; =>a-1\*b=h∈H,因此当且仅当 a-1\*b∈H.

因此，R的[a]=aH.

3、证明H的所有左陪集，或者aH=bH,或者aH∩bH=∅.

(2)定理2：a-1\*b∈H,当且仅当 aH∩bH≠∅且aH=bH.

证：已知a-1\*b∈H, 由定理1知,b∈aH.

因b=b\*e, e∈H, => b∈bH.

因此，b∈aH∩bH, aH∩bH≠∅.

设∀x∈aH∩bH，∃h1,h2∈H, 使得x=a\*h1=b\*h2,

=> a=b\*h2\*h1-1

=> b=a\*h1\*h2-1

∀a'∈aH，存在h'∈H,使得a'=a\*h'=b\*h2\*h1-1\*h'。

因为h2\*h1-1\*h'∈H，因此a'∈bH.

反之，∀b'∈bH，存在h'使得b'=b\*h'=a\*h1\*h2-1\*h'。

因为h1\*h2-1\*h'∈H，因此b'∈aH.

所以，aH=bH。

因此，等价关系R构成G的一个划分。

因为每个等价类是一个左陪集，可定理知每个陪集的元素数目=|H|，|G|=等价类的数量\*|H|。

定理得证。