Билет 3

MX

№1 (2) длина распред по нормальному закону, и имеет ср зн 20 см
$DX = 0{,}04 \text{ см}^2$

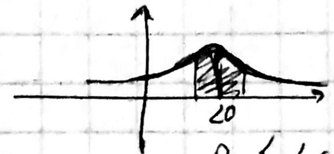
1) Вероятность того, что длина заключена между 19,7 см и 20,3 см.
2) какую точность длины изделия можно гарант. с вероят 0,95!

Решение. сл вел распр по закону нормальному $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

где $m = 20$; $\sigma^2 = 0{,}04$

1) Перепишем в привычном виде $P\{19{,}7 < X < 20{,}3\} =$

$=$ { ~~по опред~~ вероятн. того, что норм сл вел примет значение из заданн промежутка равна площади под графиком нормальн. кривой и осью Ox



Поэтому можно воспольз. формулой $P\{\alpha < X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha)$

Т.к сл. вел задана нормальным распред, то вычисл $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$

можно провести замену: $x = \sigma y + m \Rightarrow dx = d(\sigma y + m) = \sigma\, dy$

$\Rightarrow \Phi_0(x) = \{\text{обознач}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \Rightarrow$ из замены, что $y = \frac{x-m}{\sigma}$

Т.к. это переход от X к Y станд распред. $\Rightarrow$

Можно воспол формулой (и в подсчете таблиц станд распред)

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$ (с учетом того, что $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ в силу четности) $\} =$

$= \Phi_0\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-0{,}3}{0{,}2}\right) = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right) = 0{,}866\ldots$

2) Какую точность можно гарантировать:

$P(m - \Delta x < X < m + \Delta x) = 0{,}95 = \Phi_0\left(\frac{m + \Delta x - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - \Delta x - m}{\sigma}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\sigma} = 1{,}96 \Rightarrow \Delta x = 0{,}392$ Ответ 0,392

№2 (3)

а) Найти ф. распр X

б) мат ожид, диспер, плотность распр. $Y = e^{-X}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \ (\lambda>0) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

а) Функцию распред сл. вел X

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

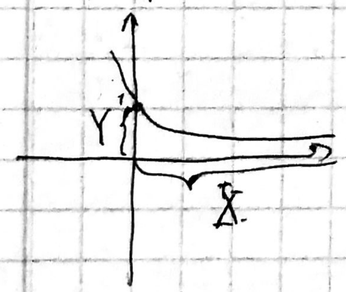
По определению $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Подставим наши значения: $F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt, & x>0 \\ \int_{-\infty}^0 0\,dt, & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = \lambda\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}\Big|_0^x = \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

$$= -1\left(e^{-\lambda x} - 1\right) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x>0$$

б) $Y = e^{-X}$



Функц монотон. убывает:

$\Rightarrow$ Воспол. формулой $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$

где $\psi(y)$ – обратная функц и $\varphi(x) = e^{-x}$

$\Rightarrow$ Рассмотрим участки:

1) $y<0$; $\varphi(x) = e^{-x}$ не имеет корней $\Rightarrow f_Y(y) = 0$

2) $0<y<1$; $\varphi(x) = e^{-x}$ имеет корень: $\psi(y) = -\ln y$ $\quad \psi'(y) = -\frac{1}{y}$

на участке $0<y<1$ $\psi(y)>0$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\underbrace{\psi(y)}_{-\ln y})|\psi'(y)| =$$

$$= \lambda e^{+\lambda \ln y}\cdot\frac{1}{y} = \lambda\cdot y^{\lambda}\cdot\frac{1}{y} = \lambda y^{\lambda-1}$$

3) $y>1$; $\varphi(x) = e^{-x}$ имеет корень $\psi(y) = -\ln y$; при $y>1$: $\psi(y)<0$ $\Rightarrow f_X(\psi(y)) = 0$

$\Rightarrow f_Y(y)=0 \quad \Rightarrow \quad f_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ \lambda y^{\lambda-1}, & y\in(0;1) \\ 0, & y>1 \end{cases}$

$MX=\{$по определению для непр сл вел$\}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

подст. наши значения: $MY=\int\limits_0^1 y\,\lambda y^{\lambda-1}\,dy=\lambda\int\limits_0^1 y^{\lambda}\,dy=\frac{\lambda y^{\lambda+1}}{\lambda+1}\Big|_0^1=$

$=\frac{\lambda}{\lambda+1}$

$DX=\{$по опред$\}$ для непрерывн сл велич $\}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 f(x)\,dx$

где $m=MX$; либо $DX=M[X^2]-(MX)^2 \Rightarrow \{$

$\Rightarrow M[Y^2]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\,dy=\int\limits_0^1 y^2\lambda y^{\lambda-1}\,dy=\lambda\int\limits_0^1 y^{\lambda+1}\,dy=\frac{\lambda y^{\lambda+2}}{\lambda+2}\Big|_0^1=$

$=\frac{\lambda}{\lambda+2}$

$\Rightarrow DY=\frac{\lambda}{\lambda+2}-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2=\frac{\lambda}{\lambda+2}-\frac{\lambda^2}{\lambda^2+2\lambda+1}$