Билет 6

1 Сл.вел X распр по эксп закону а) $F(x)$ б) MX, DX в) $P(X<MX)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \lambda>0 \quad x\geq 0\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

а) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ — по определению.

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt & x\geq 0\\ \int_{-\infty}^{x} 0\,dt & x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda\cdot\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -1\,e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -1\left(e^{-\lambda x}-1\right)=1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

б) MX по определению $=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

в нашем случае: $MX=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{по частям}\\ \int uv'=uv-\int u'v\end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{ll} u=x & v'=e^{-\lambda x}\\ u'=1 & v=\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\end{array}\right\} = \lambda\left(\frac{x\cdot e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right)=\lambda\left(\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty}+\left(\frac{-1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}\right)=$$

$$=\lambda\left((0-0)+\left(\frac{-1}{\lambda^2}\right)(0-1)\right)=\frac{1}{\lambda}$$

$$DX=M[X^2]-(MX)^2$$

$$M[X^2]=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^{+\infty}x^2e^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{по частям}\\ \int uv'=uv-\int u'v\end{array}\right\}=$$

$u=x^2$ $u'=2x$

$v'=e^{-\lambda x}$ $v=\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$

$$=\lambda\left(\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx\right)=\lambda\left(\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty}+2\underbrace{\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx}_{\frac{MX}{\lambda}}\right)=$$

$$=\lambda\left((0-0)+\frac{2}{\lambda^2}\right)=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$DX=M[X^2]-(MX)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

б) $P(X<MX) = \{$по определению$\} = F(\underset{\frac{1}{\lambda}}{MX}) = \cancel{\ldots} =$

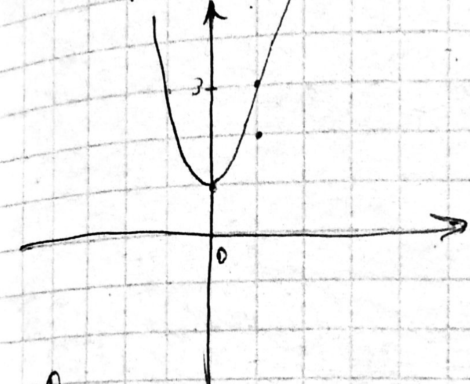
$= 1 - e^{-\lambda/\lambda} = 1 - \frac{1}{e}$

№2 Сл вел X имеет плотн распр $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2), & x\in[2;4] \\ 0, & x \in [2;4] \end{cases}$

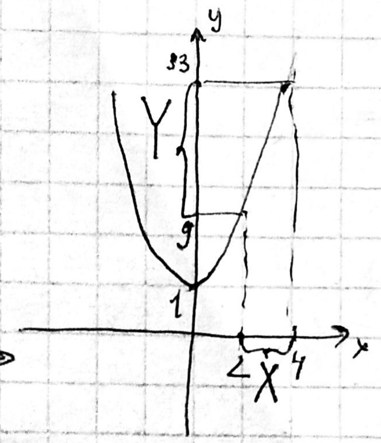
Найти $f_Y(y)$ и MY $\quad Y = 2X^2+1$

а) Изобр график:

$Y = 2X^2+1$



$\Rightarrow$



Фун. кусочно монот $\Rightarrow$ будем использ формулу $f_Y(y) = \sum\limits_{i\in I} f_X(\psi_i(y))|\psi_i'(y)|$

$\Rightarrow$ 1) $y<1$: $\varphi(x) = 2x^2+1$ не имеет корней $\Rightarrow f_Y(y)=0$

2) $y\in[1;9)$: $\varphi(x) = 2x^2+1$ имеет 2 корня $\psi_1(y) = -\sqrt{\frac{y-1}{2}}$

$\psi_2(y) = +\sqrt{\frac{y-1}{2}}$

$y = 2x^2+1$
$y-1 = 2x^2$
$\frac{y-1}{2} = x^2$
$x = \pm\sqrt{\frac{y-1}{2}}$

$\Rightarrow \psi_1(y)<0$ и $\psi_2(y)\in[0;2)$ $\Rightarrow f_X(\psi_1(y))=0$

$f_X(\psi_2(y))=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$

3) $y\in[9;33]$: $\varphi(x) = 2x^2+1$ имеет 2 корня $\psi_1(y)<0 \Rightarrow f_X(\psi_1(y))=0$

$\psi_2(y) = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$; $\psi_2(y)\in[2;4]$ $\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\psi_2(y))|\psi_2'(y)| =$

$\Rightarrow \psi_2'(y) = \left(\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y-1}} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{2}}-2\right)\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y-1}} =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{y-1}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y-1}} = \frac{\sqrt{y-1}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\,2\sqrt{2}\sqrt{y-1}} = \frac{\sqrt{y-1}-2\sqrt{2}}{8\sqrt{y-1}}$

3) $y > 33$: $\varphi(x)$ – имеет 2 корня , но при этих корнях $f_X(x) = 0$

$\Rightarrow f_Y(y) = 0$

Таким образом: $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y-1} - 2\sqrt{2}}{8\sqrt{y-1}}, & y \in [9;33] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

$MY = \left\{ \text{по опред } \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \right\} \Rightarrow \int_9^{33} \frac{y(\sqrt{y-1} - 2\sqrt{2})}{8\sqrt{y-1}}\,dy =$

$= \frac{1}{8}\int_9^{33} \frac{y\sqrt{y-1} - 2y\sqrt{2}}{\cancel{8}\sqrt{y-1}}\,dy = \int_9^{33}\left(y - \frac{2y\sqrt{2}}{\sqrt{y-1}}\right)dy = \frac{y^2}{2}\Big|_9^{33} - 2\sqrt{2}\int_9^{33}\frac{y}{\sqrt{y-1}}\,dy =$

$\int \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,dy = \left\{ \begin{array}{l} a = y-1 \\ da = dy \end{array} \right\} = \int \frac{a+1}{\sqrt{a}}\,da = \int\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)da =$

$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{a} \Rightarrow \{\text{возврат}\} = \frac{2(y-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{y-1}$

$= \frac{y^2}{2} - 2\sqrt{2}\left(\frac{2(y-1)\sqrt{y-1}}{3} + 2\sqrt{y-1}\right)\Big|_9^{33} = \frac{33^2}{2} - 2\sqrt{2}\left(\frac{2\cdot 32\cdot\sqrt{32}}{3} + 2\sqrt{32}\right) -$

$- \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}\left(\frac{2\cdot 8\sqrt{8}}{3} + 2\sqrt{8}\right)\right) = \frac{33^2}{2} - 2\sqrt{2}\left(\frac{2\cdot 32\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{3} + 2\cdot 4\sqrt{2}\right) - \frac{9}{2} + 2\sqrt{2}\left(\frac{2\cdot 8\cdot 2\sqrt{2}}{3} + 2\cdot 4\sqrt{2}\right) =$

$= \frac{33^2}{2} - \frac{9^2}{2} - \frac{16\cdot 2\cdot 32}{3} - \cancel{16\cdot 2} + \frac{64\cdot 2}{3} + \cancel{16\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{33^2 - 9^2}{2} - \frac{16\cdot 2\cdot 32 + 64\cdot 2}{3} - 16\cdot 2 = 504 - 384 - 32 = 88$