Билет -1

№1 (для удобства $\xi = x \quad \eta = y$)

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$$

Найти: а) постоянную a б) функцию распределения $\xi$
в) вероятность того, что в двух независимых испытаниях $\xi$ примет значение меньше 1

а) Для поиска постоянной a воспользуемся условием нормировки:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ; подставим функцию из задания:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{e^x+e^{-x}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ae^x}{e^{2x}+1}dx = a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \left\{ e^x = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = e^{-x}du \right\} =$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cancel{u}}{u^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{u}}du = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du = a\cdot \operatorname{arctg}(u)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \{\text{переход к начальным переменным}\} =$$

$$= a\cdot\operatorname{arctg}(e^x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{по условию нормировки } \frac{a\pi}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{\pi}}$$

б) По определению функция распределения: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Подставим нашу функцию $f(x)$ : $F(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^t+e^{-t}}dt =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{e^t+e^{-t}}dt = \{\text{воспольз. вычислениями ранее}\} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e^t)\Big|_{-\infty}^{x} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e^x) \text{ — функция распределения.}$$

в) Вероятность того, что $\xi$ примет значение меньше 1:

$P(X<1)$ ; по определению $P(X<x) = F(x) \Rightarrow$

Подст. значение $x=1$: $P(X<1) = F(1) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e^1) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e)$

Т.к. испытания независимы, то можно воспол.: $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$, где A и B это наше испытание: $\Rightarrow$ $P = P(X<1)\cdot P(X<1) =$

? {или лучше написать $C=\{$что сл. $\xi<1\}$, и $P\{C\}=P(X \ldots)\}$

$= \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e)\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}\operatorname{arctg}^2(e)$

Ответ а) $a=\frac{2}{\pi}$ б) $F(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e^x)$ в) $\frac{4}{\pi^2}\operatorname{arctg}^2(e)$

№2 (опять $\xi = x$ $\eta = y$)

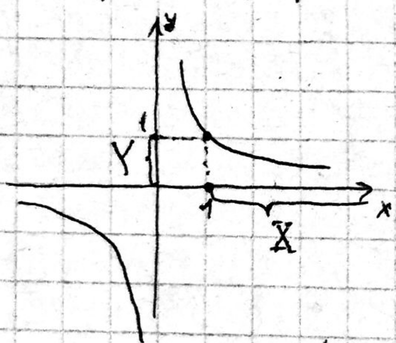
понятно, что условие переписывать полностью буду.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^{-3/2}, & \text{при } x\geq 1\\ 0, & \text{при } x<1\end{cases}$$

а) функ. плотности распред. вероятн. сл. вел. $\eta=\frac{1}{\xi}$
б) $P(0{,}01<\eta<0{,}04)$ в) мат ожид. сл. вел. $\eta$

а) Запишем в привычном виде $Y=\frac{1}{X}$

Изобразим график данной функции




Функция $Y=\frac{1}{X}$ монотонно убывает поэтому для нахождения функции плотности распредел. сл. вел $Y$ можно воспольз. данной формулой: $f_Y(y)=f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|$ (1)
где $\psi(y)$ - обратная функция к функции $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ (в нашем случае). Исходная функция $\varphi(x)=\frac{1}{x}$; обратная $\psi(y)=\frac{1}{x}$

Рассмотрим следующие участки:

1) $y<0$; Функция $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ имеет корни и принимает значение $\psi(y)<0$ $\Rightarrow$ $f_X(\psi(y))=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$

2) $y \in (0;1)$

$\psi(y) = \frac{1}{y}$ ; ~~[illegible]~~ $\psi(y) \geq 1 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$f_X(\psi(y)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-3/2} \Rightarrow$ по формуле (1)

$f_Y(y) = f_X(\psi(y)) \, |\psi'(y)| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-3/2} \frac{1}{y^2} =$

$= \frac{1}{2} \frac{y\sqrt{y}}{y^2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

3) $y > 1$

$\psi(y) < 1 \Rightarrow f_X(\psi(y)) = 0 \Rightarrow f_Y(y) = 0$

$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}; & y \in (0;1) \\ 0, & y > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}; & y \in (0;1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

б) $P(0{,}01 < \eta < 0{,}04) = \{$ воспользуемся формулой $P(a < X < b) = F(b) - F(a) \}$

$= F(0{,}04) - F(0{,}01) =$

Найдем $F(\eta)$ – функцию распред. По определ. $F(y) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$F(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{y} 0\,dt \\ \int_{0}^{y} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ \int_{0}^{1} 0\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \sqrt{y} & y \in (0;1) \\ 1, & y > 1 \end{cases}$

$= F(0{,}04) - F(0{,}01) = \sqrt{0{,}04} - \sqrt{0{,}01} = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1$

в) мат ожидание:

по опред: $M[X] = MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ ; подставим нашу функцию

$$\cancel{MY = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{y}\Big|_0^1 = 1}$$

$$MY = \int_0^1 \frac{y}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}y\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

<u>Ответ</u> а) {переписато} б) 0,1 в) $\frac{1}{3}$