Билет 4

№1. Плотн. распр. сл. вел. ξ имеет вид $f(x) = Axe^{-\lambda x}$ $x \geq 0$, $\lambda > 0$

а) найти коэфф. A б) функц распр $F(x)$ в) вероят. ξ в $(0; 1/\lambda)$

а)
$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Воспольз. условием нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow$ Подст. наши значения: $\int_{0}^{+\infty} Axe^{-\lambda x}dx =$

$= A\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = \{$по частям $\int fg' = fg - \int f'g\} = \begin{cases} f = x & g' = e^{-\lambda x} \\ f' = 1 & g = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \end{cases}$

$= \frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} - \int -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx = \frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} =$

$= \{$подст. границы$\} = \left(\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{A}{\lambda^2} = 1$

$\Rightarrow A = \lambda^2$

б) $F(x)$

по определ. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda^2 \cdot te^{-\lambda t}dt, & x \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2\int_0^x te^{-\lambda t}dt \; ⊖ \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$⊖ \; -\lambda xe^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 \; x \geq 0$

⊖ Воспольз. вычислениями выше: $\} = \lambda^2\left(\frac{-te^{-\lambda t}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\right)\Big|_0^x =$

$= \lambda^2\left(\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} + 0 + \frac{e^{-\lambda 0}}{\lambda^2}\right) = \lambda^2\left(\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = -\lambda xe^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1$

в) Вер попадание $\xi = (x)$ в $(0; \frac{1}{2})$: $P(0 < X < \frac{1}{2}) = \{$по определению

$F(b) - F(a) = P(a < x < b)\} = F(\frac{1}{2}) - F(0) = -\frac{\lambda}{2} \cdot e^{\frac{+\lambda}{\lambda}} - e^{\frac{+\lambda}{\lambda}} + 1 -$

$-(0 - e^0 + 1) = -\frac{\lambda}{\lambda} e - e + 1 =$

$= -e - e + 1 = -2e + 1$

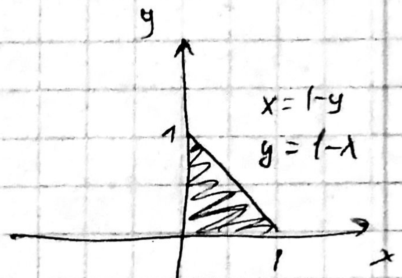
не очень уверена в $F(x)$, а следственно и в В

№2

$$f(x,y) = \begin{cases} Axy : \in D \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$ D – треугольник, огран. прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$ $y = 0$

а) Найти величину A б) найти маргин. плотн. распред величин ξ и η (x y)
в) выяснить, явл ли x и y независимыми

а) воспольз условием нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$



$$\iint_D f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} Axy\,dy = A\int_0^1 dx \cdot \left(\frac{xy^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right) =$$

$$= A\int_0^1 dx \cdot \frac{x(1-x)^2}{2} = \frac{A}{2}\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \frac{A}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{A}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{A}{2}\left(\frac{3 - 8 + 6}{12}\right) = \frac{A}{24} = 1 \qquad A = 24$$

б) $$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, \in D \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \qquad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} 24xy\,dy, & x \in (0;1) \\ 0, \text{ иначе} & x \notin (0;1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{24xy^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} = \frac{24x(1-x)^2}{2} = 12(x^3 - 2x^2 + x), & x \in (0;1) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

В силу симметричности: $$f_Y(y) = \begin{cases} 12(y^3 - 2y^2 + y), & y \in (0;1) \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

в) $f_Y(y) \cdot f_X(x) = f(x,y)$ – если выпол. это равенство, то тогда X и Y независ.
$f_Y(y) \cdot f_X(x) = 144(x^3 - 2x^2 + x)(y^3 - 2y^2 + y) \neq f(x,y) \Rightarrow$ зависимы