Билет 2

№1 4 изделия исп. при пост. режиме. $p = 0,75$

а) ряд распред сл вел $\xi$ - числа изделий, прош испытание.

б) функцию распред сл вел. и ее график

в) мат ожид и дисперсию сл вел. $\xi$

г) вероятность того, что число изделий, прош. испыт, будет не меньше 3

а) Ряд распределения сл велич. можно получить с помощью схемы Бернулли

$\xi = (0, 1, 2, 3, 4)$ - возможные значения сл вел. По схеме Бернулли

можно посчитать вероятность.

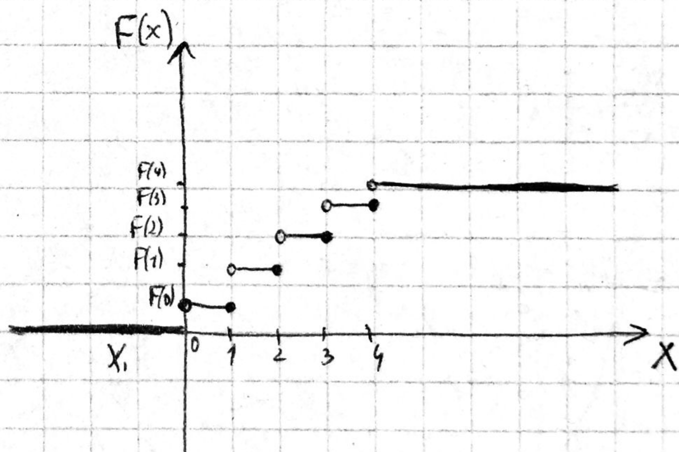
$$P_4(0) = 0,75^0 \cdot 0,25^4 \cdot C_4^0 = 0,00390625$$
$$P_4(1) = 0,75^1 \cdot 0,25^3 \cdot C_4^1 = 0,046875$$
$$P_4(2) = 0,75^2 \cdot 0,25^2 \cdot C_4^2 = 0,2109375$$
$$P_4(3) = 0,75^3 \cdot 0,25^1 \cdot C_4^3 = 0,421875$$
$$P_4(4) = 0,75^4 \cdot C_4^4 = 0,31640625$$

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $P_4(0)$ | $P_4(1)$ | $P_4(2)$ | $P_4(3)$ | $P_4(4)$ |

Ряд распределения

б) Функция сл вел.

$$F(\xi) = \begin{cases} 0,00390625 & \text{при } \xi < 1 \\ 0,05078125, & 1 < \xi < 2 \\ 0,26171875, & 2 < \xi < 3 \\ 0,68359375, & 3 < \xi < 4 \\ 1, & \xi > 4 \end{cases}$$




в) $M\xi = \sum_{i \in I} p_i \xi_i = 0 \cdot P_4(0) + 1 \cdot P_4(1) + 2 \cdot P_4(2) + 3 \cdot P_4(3) + 4 \cdot P_4(4) = 3$

Воспользуемся опред мат ожид для дискретной величины:

$MX = \sum_{i \in I} p_i x_i$ ; где $x_i$ - все возможные знач. мно-ва, $p_i = P(X = x_i)$

По опред. дисперсии для дискр велич: $D[\xi] = \sum_{i\in I} (x_i - m)^2 p_i$

где $m = MX$

$\Rightarrow$ Т.к. $MX$ нашли ранее, воспольз получ. значением

$DX = P_4(0)\cdot(0-3)^2 + P_4(1)(1-3)^2 + P_4(2)(2-3)^2 + P_4(3)(3-3)^2 + P_4(4)(4-3)^2 =$

$= 9\cdot p_0 + 4\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 0 + 1\cdot p_4 = 0{,}75$

в) Вероят, что изд будет не меньше 3.

$A = \{$изд прошли испыт, изделий не меньше 3$\}$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - F(3) = 0{,}7328125$

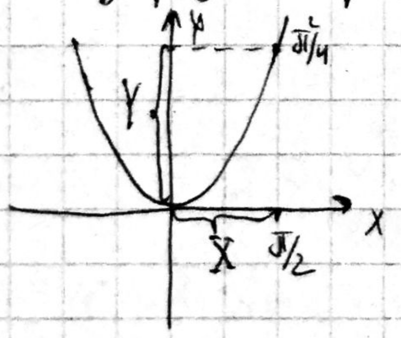
$P(\bar{A}) = P(\xi < 3) = F(3)$

№2 Распр равном на $\pi/2$

а) плотность распредел вероят сл вел. $Y = X^2$
б) мат ожид. $Y$

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi/2}, & x\in(0;\frac{\pi}{2}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Изобразим график $Y = X^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^2$




Функция кусочно ~~монот~~ монотонна, поэтому воспольз формулой

$f_Y(y) = \sum_i f_X(\psi_i(y))\,|\psi_i'(y)|$ ; $i$ – все решение

$\psi(y)$ – обратная к $\varphi(x)$ ; В нашем

случае: $\varphi(x) = x^2$

Рассмотрим участки:

1) $y<0$ : на данном участке нет корней у $y=x^2 \Rightarrow f_Y(y)=0$

2) $y \in (0; \frac{\pi^2}{4})$ : $\varphi(x)=x^2$ имеет 2 корня

$\Rightarrow \psi_1(y)=-\sqrt{y} \quad \psi_2(y)=\sqrt{y}$

$\Rightarrow$ По формуле: $f_Y(y)=f_X(\psi_1(y))|\psi_1'(y)|+f_X(\psi_2(y))|\psi_2'(y)|$

Т.к. $\psi_1(y)=-\sqrt{y}<0 \Rightarrow f_X(\psi_1(y))=0$

$\Rightarrow$ можно упростить: $f_Y(y)=f_X(\psi_2(y))\,|\psi_2'(y)|=$

$$=\frac{\cancel{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}=\frac{1}{\pi\sqrt{y}}$$

3) $y>\frac{\pi^2}{4}$ : $\varphi(x)$ принимает значение $>\frac{\pi^2}{4}$

$\Rightarrow f_X(\psi(y))=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{y}}, & y\in(0;\frac{\pi^2}{4})\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

б) Мат ожидание:

Мат ожидание для непрерывной сл. вел. можно посчит по формуле $m_x=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,dx$. Подставим наши значение.

$$MY=\int_0^{\pi^2/4} y\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{y}}\,dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi^2/4}\sqrt{y}\,dy=\frac{1}{\pi}\,\frac{2y^{3/2}}{3}\Big|_0^{\pi^2/4}=\frac{1}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{8}}=\frac{\pi^2}{12}$$