Билет 10

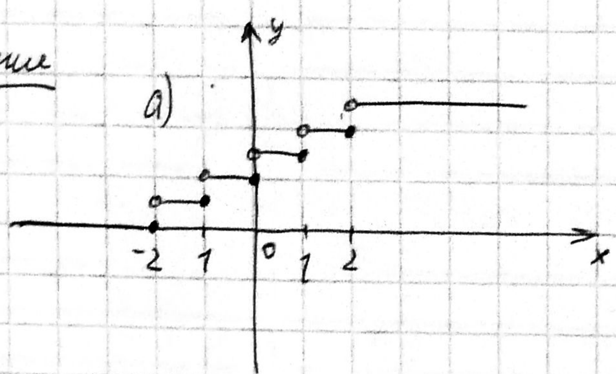
№1 Дано

x	-2	-1	0	1	2
p	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

Найти
а) $F(x)$
б) MX $\quad DX$
в) $P\{|X|<1\}$

Решение

а)



$$F(x)=\begin{cases} 0 & -1 \le x \\ 0{,}1 & -2<x\le -1 \\ 0{,}3 & -1<x\le 0 \\ 0{,}5 & 0<x\le 1 \\ 0{,}9 & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

б) $MX = -2\cdot 0{,}1 - 1\cdot 0{,}2 + 0 + 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}1 =$

$= \cancel{-0{,}2}\ \cancel{-0{,}2} + 0 + \cancel{0}{,}4 + 0{,}2 = 0{,}2$

$DX = M[X^2] - (MX)^2 =$

$M[X^2] = 4\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0 + 1\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}1 =$
$0{,}4 + 0{,}2 + 0 + 0{,}4 + 0{,}4 = 1{,}2 + 0{,}2 = 1{,}4$

$DX = 1{,}4 - 0{,}04 = 1{,}36$

в) $P\{|X|<1\} = P\{-1<X<1\} = \{$ по формуле $P(a\le X<b) = F(b) - F(a)\} =$

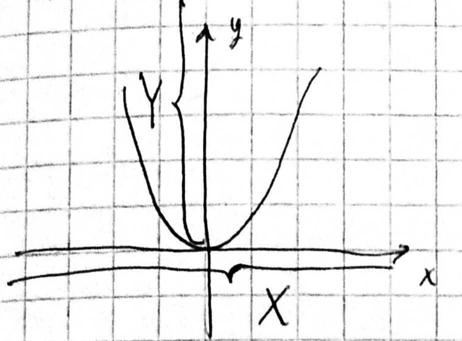
$= \{$ т.к. неважно какой знак стоит, т.к. $P(a<X<b) = P(a\le X\le b) =$

$= P(a\le X<b) = P(a<X\le b)\} \Rightarrow P(-1<X<1) = F(1) - F(-1) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

№2 Найти плотн распр $Y=X^2$, если X распр по нормальн станд. закону.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$

Нарисуем $y = x^2 = \varphi(x)$



Функция кусочно монотонна, поэтому воспольз формулой:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} f_X(\psi_i(y)) \, |\psi_i'(y)|$$

n – кол-во корней

Рассмотрим сл. участки:

1) $y<0$: $\varphi(x)=x^2$ не имеет корней $\Rightarrow$ $f_Y(y)=0$

2) $y \geq 0$ $\varphi(x)=x^2$ имеет корни: $x=\pm\sqrt{y}$

$$\psi_1(y) = -\sqrt{y} \qquad \psi_2(y) = \sqrt{y} \qquad \psi_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \psi_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\psi_1(y))\,|\psi_1'(y)| + f_X(\psi_2(y))\,|\psi_2'(y)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\sqrt{y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

Таким образом: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}, & y \in R \end{cases}$

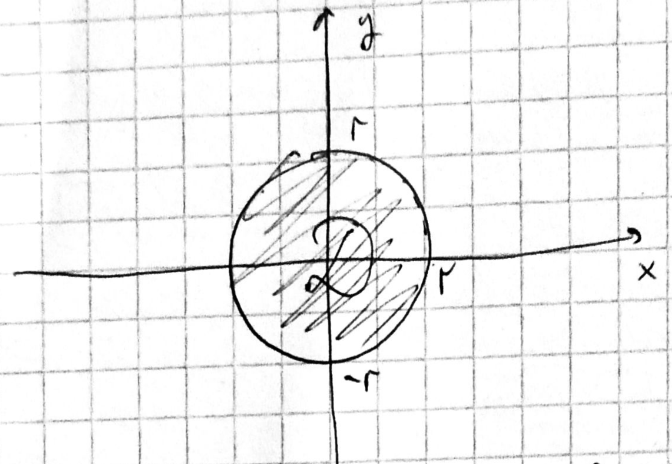
№3 Сл. вектор (X,Y) равн. распр $x^2+y^2\le r^2$

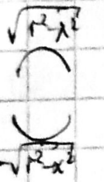
Найти а) совм плотность $f(x,y)$

б) маргин плотности

в) условн. плот.

г) зависимы ли X,Y ?





а) Найдем площадь круга: $S=\pi r^2$

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

б) маргин. плотности:

$$f_X(x)=\begin{cases}\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1/\pi r^2\,dy & y\in[r;r]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 1/\pi r^2\,dx, & x\in[-r;r]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}\,dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\qquad \int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{1}{\pi r^2}\,dx=\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}$$

в) условные вероятн.

по опр $f_X(x\,|\,Y=y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$f_X(x\,|\,Y=y)=\begin{cases}\text{неопр}, & y\notin[-r;r]\\ 0, & y\in[r;r]\ \ x\notin[-\sqrt{r^2-y^2};\sqrt{r^2-y^2}]\\ \frac{1\cdot\cancel{\pi r^2}}{\cancel{\pi r^2}\cdot 2\sqrt{r^2-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}; & y\in[-r;r]\ \ x\in[-\sqrt{r^2-y^2};\sqrt{r^2-y^2}]\end{cases}$$

$f_Y(y \mid X=x)$ = аналогично; $\begin{cases} \text{неопр}, & x \notin [-r;r] \\ 0, \; x \in [-r;r] & y \notin [-\sqrt{r^2-x^2}; \sqrt{r^2-x^2}] \\ \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} \quad x \in [-r;r] & y \in [-\sqrt{r^2-x^2}; \sqrt{r^2-x^2}] \end{cases}$

г) зависимы ли?

по услов завис.   если X и Y незав, то $f_X(x \mid Y=y) = f_X(x)$

и $f_Y(y \mid X=x) = f_Y(y)$

это услов не выполн. $\Rightarrow$ зависимы!