Билет 7

№1. Вер тому, что сл величина подчиняется нормальному закону распред, в серии из 3х испытаний хотя бы один раз примет значен в инт $(1{,}2;\ 2)$ $M[\xi]=1{,}2$ $\sqrt{D[\xi]}=0{,}4$

Решение $M[\xi]=1{,}2$ $D[\xi]=0{,}4\cdot 0{,}4=0{,}16$

Норм распр $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$; где $\sigma=0{,}4$, $m=M\xi=1{,}2$

$P\{1{,}2<\xi<2\}=\{$по определение $P(a<X<b)=F(b)-F(a)\}=$

$=\{$так же $P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)\,dx\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx=$

$=\{$сделаем замену $t=(x-m)/\sigma$, $dx=\sigma\,dx$; $x=a\Rightarrow t=\frac{a-m}{\sigma}$, $x=b\Rightarrow t=\frac{b-m}{\sigma}\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\sigma\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=$

$\{$т.к. $\Phi(t)$ - первообр $f_{0,1}(t)$ - плотность станд. норм. распред$\}\Rightarrow\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)=$

$=\{$по св-ву $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$: $\Phi(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0(x)\}=\cancel{\frac{1}{2}}+\Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\cancel{\frac{1}{2}}-\Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)=$

$=\Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)=\Phi_0\left(\frac{2-1{,}2}{0{,}4}\right)-\Phi_0\left(\frac{1{,}2-1{,}2}{0{,}4}\right)=\Phi_0(2)$

$P\{1{,}2 < X < 2\} = \Phi_0(2) = p$ - успех.

$\Rightarrow$ неудача - это $q = 1 - p = 1 - \Phi_0(2)$

$\Rightarrow$ По схеме Бернулли: один успех из трех: $P = C_3^1 \cdot p^1 q^2 = \frac{3!}{2!1!}\Phi_0(2)(1-\Phi_0(2))^2$

$\Rightarrow 3\Phi_0(2)(1-\Phi_0(2)) = 3\Phi_0(2) - 3(\Phi_0(2))^2$

$C_3^2 = \frac{3!}{2}$

Хотя бы в одном: $P_3(k \geq 1) = \cancel{1-q^3}\ P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) =$

$= \cancel{3\Phi_0(2) - 3(\Phi_0(2))^2 + 3(\Phi_0(2))^2 - 3(\Phi_0(2))^3 + (\Phi_0(2))^3 - (\Phi_0(2))^3}$

$C_3^1 p^1 q^2 + C_3^2 p^2 q^1 + C_3^3 p^3 = \frac{3!}{2!1!} p^1 q^2 + \frac{3}{2!1!} p^2 q^1 + p^3 = 3p^1q^2 + 3p^2q^1 + p^3 =$

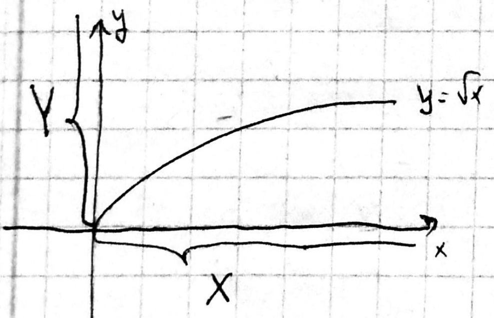
$= 3pq(q+p) + p^3 = 3\Phi_0(2)(1-\Phi_0(2))(1-\Phi_0(2)+\Phi_0(2)) + (\Phi_0(2))^3 = (\Phi_0(2))^3 - 3(\Phi_0(2))^2 + 3\Phi_0(2)$

№2 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \quad \lambda > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

а) Найти MX б) $f_Y(y)$, MY, $Y = \sqrt{X}$

а) $MX = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\right\} = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$

б) $f_Y(y) = ?$



1) $y \leq 0$: $\varphi(x) = \sqrt{x}$ - не имеет корней

2) $y \geq 0$: $\varphi(x) = \sqrt{x}$ имеет корень

$y = \sqrt{x}$ $\quad x = y^2 \Rightarrow \psi(y) = y^2$

$\psi'(y) = 2y$

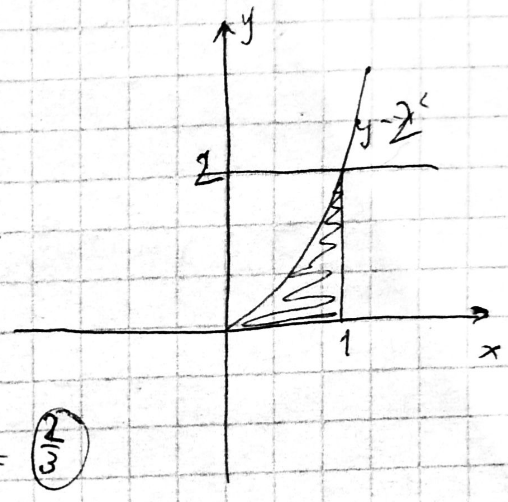
$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)| = \lambda e^{-\lambda y^2} \cdot 2y$

$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y^2} 2y, & y > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

~~$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x}$~~

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,2y\,e^{-\lambda y^2}\,dy = \sqrt{\pi/a}$$

3) $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x^2\}$



~~…~~ равномерно распред. в D

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$S = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x^2} dy = \int_0^1 dx\, 2x^2 = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$ — совместная плотность распр. вектора (X,Y)

б) маргинальные плотности: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

Т.к. $f(x,y) = 0$ при $(x;y) \notin D$, то $f_X(x) = 0$ при $x \notin [0;1]$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_0^{2x^2} \frac{3}{2}\,dy = \frac{3}{2}y\Big|_0^{2x^2} = \frac{3 \cdot 2x^2}{2} = 3x^2$$

$$f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}/\sqrt{2}}^{1} \frac{3}{2}\,dx = \frac{3x}{2}\Big|_{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{y}}{2\sqrt{2}} \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{y}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{y}, & y \in [0;2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

в) MX и MY − ?

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2\,dx = \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\,dy = \int_0^2 \left(\frac{3}{2}y - \frac{3y\sqrt{y}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{3y^2}{4} - \frac{3 \cdot 2y^2\sqrt{y}}{2 \cdot 5\sqrt{2}}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{3 \cdot 4}{4} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cancel{\operatorname{cov}(X,Y) = \iint_D \left(x-\frac{3}{8}\right)\left(y-\frac{12-9\sqrt{2}}{4}\right)\cdot 3\,dx\,dy =}$$

$$\cancel{= 3\iint_D \left(xy - \frac{3}{8}y - \frac{12-9\sqrt{2}}{4}x + \frac{3(12-9\sqrt{2})}{8\cdot 4}\right)dx\,dy =}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \iint_D (x-m_x)(y-m_y)f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D (x-0{,}75)(y-0{,}6)\frac{3}{2}\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 dx\int_0^{2x^2}\left(xy - 0{,}75y - 0{,}6x + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\right)dy =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 dx\left(\frac{xy^2}{2} - \frac{3y^2}{4\cdot 2} - \frac{3}{5}xy + \frac{9}{20}y\right)\Bigg|_0^{2x^2} = \frac{3}{2}\int_0^1\left(\frac{x\cdot 4\cdot x^4}{2} - \frac{3}{8}4x^4 - \frac{3}{5}2x^3 + \frac{9}{20}2x^2\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{4}{2}\frac{x^5}{5} - \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} - \frac{6}{5}\frac{x^4}{4} + \frac{9\cdot 2}{20}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8\cdot 5} - \frac{\cancel{6}^{3}}{5\cdot\cancel{4}_2} + \frac{\cancel{9}^{3}\,8}{\cancel{20\cdot 3}_{10}} =$$

$$= \frac{16}{40} - \frac{3}{40} - \cancel{\frac{12}{40}} + \cancel{\frac{12}{40}} =$$

$$\frac{3}{2}\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)dx\int_0^{2x^2}\left(y-\frac{3}{5}\right)dy = \frac{3}{2}\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)dx\left(\left(\frac{y^2}{2}-\frac{3y}{5}\right)\Bigg|_0^{2x^2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4x^4}{2} - \frac{6x^2}{5}\right)dx = \frac{3}{2}\int_0^1\left(\frac{4x^5}{2} - \frac{6x^3}{5} - \frac{3\cdot\cancel{4}x^4}{\cancel{4}\cdot 2} + \frac{3\cdot 6x^2}{4\cdot 5}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1\left(\frac{4x^5}{2} - \frac{6x^3}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{18x^2}{20}\right)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{4x^6}{2\cdot 6} - \frac{6x^4}{5\cdot 4} - \frac{3x^5}{2\cdot 5} + \frac{18\cdot x^3}{20\cdot 3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{2\cdot 6}\,3} - \frac{\cancel{6}^{3}}{5\cdot\cancel{4}_2} - \frac{3}{2\cdot 5} + \frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{20\cdot 3}_{10}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10} - \cancel{\frac{3}{10}} + \cancel{\frac{3}{10}}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{3}\,1}{2\cdot\cancel{3}} - \frac{9}{20} = \frac{1}{20}$$