Билет 5

1. Из парт в 25 деталей, среди которых 6 браков, выбр. 3 изд.

а) ЗР слвел числа брак деталей в выборке $(\xi = X)$

б) найти ф. распр. слвел

в) MX DX

а) 25 дет. всего есть   6 брак.   3 выбир $\Rightarrow$ хороших 19

Исход: $(x_1 x_2 x_3)$ x_i - детали

Всего способов выбрать 3 из 25: сочет. без повтор $C_{25}^3 = \dfrac{25!}{3! \, 22!} = \dfrac{24 \cdot 25 \cdot 23}{8} = 4 \cdot 25 \cdot 23 = 2300$
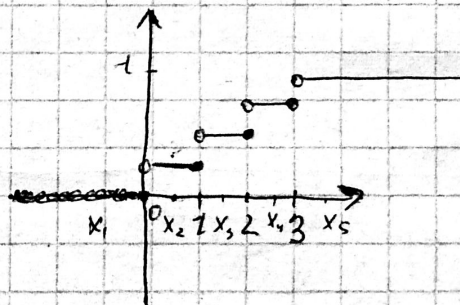
$m_0 = C_6^0 \cdot C_{19}^3 = 19 \cdot 3 \cdot 17 = 969$

$m_1 = C_6^1 \cdot C_{19}^2 = 6 \cdot 19 \cdot 9 = 1026$

$m_2 = C_6^2 \cdot C_{19}^1 = 15 \cdot 19 = 285$

$m_3 = C_6^3 \cdot C_{19}^0 = 20$

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{969}{2300}$	$\dfrac{1026}{2300}$	$\dfrac{285}{2300}$	$\dfrac{20}{2300}$

б) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{969}{2300}, & 0 < X \le 1 \\ \dfrac{1995}{2300}, & 1 < X \le 2 \\ \dfrac{2280}{2300}, & 2 < X \le 3 \\ 1, & 3 < X \le 4 \\ 0, & X \le 0 \end{cases}$

$x_1:$ $P(X = x_1) = P(X < 0) = 0$

x_2 $P(X = x_2) = P(X = 0) = 969/2300$

x_3 $P(X = x_3) = P((X = 0) + (X = 1)) = 1995/2300$

x_4 $P(X = x_4) = P((X = 0) + (X = 1) + (X = 2)) = 2280/2300$

x_5 $P(X = x_5) = P((X = 0) + (X = 1) + (X = 2) + (X = 3)) = 1$

в) $MX = \{$ восполь. опред мат ожидание для дискретной величины $\} =$

$= \sum_{i \in I} p_i x_i = 0 \cdot \dfrac{969}{2300} + 1 \cdot \dfrac{1026}{2300} + 2 \cdot \dfrac{285}{2300} + 3 \cdot \dfrac{20}{2300} = 0,72$
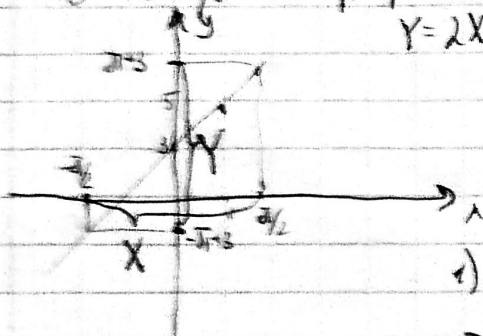
$DX = \{$ в сл. дискрет сл величины $\} = \sum_{i \in P} p_i (x_i - m)^2$, где $m = MX$

либо: $DX = M[x^2] - (MX)^2$, $M[x^2] = \sum_{i \in I} x_i^2 p_i$

№2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x \in (-\pi/2 \,;\, \pi/2) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

а) Плотн. распр. $y = 2x+3$

б) $P(Y < MY)$

а) Построим график:

$Y = 2X+3$

Функ. монот. возр. поэт. восп. формы
$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|$$

где $\psi(y)$ обрат. к $\varphi(x) = 2x+3$

1) $y < -\pi+3$: $\varphi(x) = 2x+3$ — имеет решен. $\psi(y) = \dfrac{y-3}{2}$

$\psi(y) < -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow f_X(\psi(y)) = 0 \Rightarrow f_Y(y) = 0$

2) $y \in (\text{—})$: $\psi(y) = \dfrac{y-3}{2} \Rightarrow f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)| = \dfrac{2}{\pi}\cos^2\left(\dfrac{y-3}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{8}$,

$$= \dfrac{\cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right)}{\pi}$$

3) $y > \dfrac{\pi+3}{}$: $\psi(y) > \pi/2 \Rightarrow f_Y(y) = 0$.

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right)}{\pi}, & y \in (-\pi+3 \,;\, \pi+3) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

б) $MY = \{$ восп. опр. мат. ожид. непрер. величины $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \} =$

$$= \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+3}^{\pi+3} y\cdot\cos^2(y-3/2)\,dy = \{\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x + 1)\} = \tfrac{1}{2}\int y\cos(y-3)\,dy + \tfrac{1}{2}\int y\,dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = y \\ dv = \cos(y-3)\,dy \Rightarrow v = \sin(y-3) \end{cases} \Rightarrow \tfrac{1}{2}\left(\sin(y-3)\,y - \int \sin(y-3)\,dy\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\sin(y-3)\,y + \cos(y-3)\right) + \tfrac{1}{2}\int y\,dy = \tfrac{1}{2}\left(\sin(y-3)y + \cos(y-3)\right) + \tfrac{1}{4}y^2 =$$

$$= \dfrac{y^2 + (\sin(y-3)y + \cos(y-3))}{4\pi}\bigg|_{-\pi+3}^{\pi+3} = \dfrac{(\pi+3)^2 + (\sin(\pi+3-3)y + \cos(\pi+3-3))}{4\pi}$$

$$-\frac{\left[(\pi-3)^2 + \left((\sin(\pi-3\cdot3))y + \cos(\pi-3\cdot3)\right)\right]^2}{4\pi} = \frac{(\pi+3)^2 + (-1)2 - (\pi-3)^2 + 2}{4\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2 + 6\pi + 9 + (-2) - \pi^2 - 8\pi^2 + 6\pi - 9 + 2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot 8\pi^3 \cdot 2 = 3$$

$\Rightarrow MY = 3$

$P(Y<3) = \{$ по определению: $P(X<\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx \}$

$$P(Y<3) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi+3}^{3} \cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right) dy = \{\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi+6}^{3} \cos(y-3)\,dy + \int\limits_{-\pi+3}^{3} \frac{1}{2\pi} dy = \frac{1}{2\pi} \sin(y-3)\Big|_{-\pi+3}^{3} + \frac{1}{2\pi}y\Big|_{-\pi+3}^{3} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(0-0) + \frac{1}{2\pi}(3 + \pi - 3) = \frac{\pi}{2\pi} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$-\pi+3$