Практическое занятие 1. Колесников И.А.
Методы Оптимизации №4 P3417

1. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}, \ x_0 = 2$

$y' = 2x - 2 - 2e^{x-2}$

$y'' = 2 - 2e^{x-2}$

$y''' = -2e^{x-2}$

$y(1) = 1 - 2 - 2e^{-1} = -1 - \frac{2}{e}$

$y'(1) = 2 - 2 - 2e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0$

$y''(1) = 2 - 2e^{-1} = 2 - \frac{2}{e} > 0$

$y'''(1) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0$

$y'(1) < 0 \Rightarrow$ Функция убывает в этой точке

$y''(1) > 0 \Rightarrow$ Функция выпукла вниз

$y'''(1) < 0 \Rightarrow$ Выпуклость вниз ослабевает при движении вправо

Экстремума нет.

2. $y = (x+1)^{\frac{1}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}, \ x \in [0; 1]$

$y' = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left((x+1)^{-\frac{2}{3}} - (x-1)^{-\frac{2}{3}}\right)$

2.1. При $x \in [0, 1)$: $(x+1)^{-\frac{2}{3}} > 0$ и $(x-1)^{-\frac{2}{3}} > 0$ при $x \neq 1$

$x+1 > x-1 \Rightarrow (x+1)^{-\frac{2}{3}} < (x-1)^{-\frac{2}{3}}$, следовательно $y' < 0$.

2.2. При $x = 0$: $y'(0) = \frac{1}{3}\left(1^{-\frac{2}{3}} - (-1)^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}(1-1) = 0$

2.3. При $x = 1$: $y'(1) = \frac{1}{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 0^{-\frac{2}{3}}\right) = -\infty$ (не существует)

Функция строго убывает, $\Rightarrow$

$y(0) = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{-1} = 2$ – максимум функции

$y(1) = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{2} \approx 1,259(9)$ – минимум функции

3. $l = 20$ см, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r^2 = l^2 - h^2 = 400 - h^2$,

$V = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(400h - h^3)$. $V' = \frac{\pi}{3}(400 - 3h^2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 400 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{400}{3} \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ см для наибольшего объема

4. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

4.1. $\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 3y^2 - 15$ $\quad \frac{dz}{dy} = 6xy - 12$

$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$

$xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$t = x^2$; $t^2 - 5t + 4 = 0$; $t = 1$; $t = 4$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; $y = \pm 2$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$; $y = \pm 1$

Стационарные точки: $\boxed{(1;2); (-1;-2); (2;1); (-2;-1)}$

4.2. $\frac{d^2z}{dx^2} = 6x$; $\frac{d^2z}{dy^2} = 6x$;

$\frac{d^2z}{dxy} = 6y$ $\quad D = \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 36x^2 - 36y^2 = 36(x-y)^2$

4.3. Точка $(1;2)$: $D = 36 \cdot (1-4) = -108 < 0 \rightarrow$ Седловая точка

Точка $(-1;-2)$: $D = 36 \cdot (1-4) = -108 < 0 \rightarrow$ седловая точка

Точка $(2;1)$: $D = 36 \cdot (4-1) = 108 > 0 \rightarrow \frac{d^2z}{dx^2} = 12 > 0$ Локальный минимум

Точка $(-2;-1)$: $D = 36\ (4-1) = 108 > 0 \rightarrow \frac{d^2z}{dx^2} = -12 < 0 \rightarrow$ Локальный максимум

5. $z = x^2 + y^2 + xy$; $|x| + |y| \le 1$.

5.1. $\frac{dz}{dx} = 2x + y$; $\frac{dz}{dy} = 2y + x$

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 2 \cdot (-2x) + x \Rightarrow -3x = 0 \end{cases}$

$x = 0$; $y = 0$

Точка $(0,0) \in (|0| + |0| = 0 \le 1$

$z(0,0) = 0$

5.2. Отрезок 1: $x + y = 1$, $x \ge 0$; $y \ge 0$

$y = 1 - x$;

$z = x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = x^2 - x + 1$

$z' = 2x - 1$; $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$ – Критическая точка: $z(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ – минимум, $z(0,1) = 1$; $z(1,0) = 1$ – максимум

Отрезок 2: $-x + y = 1$; $x \le 0$; $y \ge 0 \Rightarrow z' = 6x + 3$; $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ – минимум, 1 – максимум

Отрезок 3: $-x - y = 1$; $x \le 0$; $y \le 0$; $z' = 2x + 1$; $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $z(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$ – минимум, 1 – максимум

Отрезок 4: $x - y = 1$; $x \ge 0$; $y \le 0$; $z' = 6x - 3$; $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ – минимум; 1 – максимум

Наименьшее значение: 0; Наибольшее: $\underline{1}$