

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

**Домашнее задание №2
по дисциплине «Методы оптимизации»**

Вариант: 4

Преподаватель:
Селина Елена Георгиевна

Выполнил:
Колесников Никита Алексеевич
Группа: Р3417

Санкт-Петербург, 2025

Текст задания:

Решить задачу четырьмя методами: методом половинного деления, методом золотого сечения, методом хорд и методом Ньютона. По 5 шагов каждого метода выполнить вручную + написать программу по каждому методу на одном из языков программирования.

Исходная функция:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x, [a, b] = [0, 1], \varepsilon = 0.03$$

Решение вручную:

Метод половинного деления:

Начальный интервал: [0,00, 1,00], точность: 0,03

ШАГ 1:

$a = 0,00000, f(a) = 0,00000$

$b = 1,00000, f(b) = -0,34147$

$c = (0,00000 + 1,00000)/2 = 0,50000$

$f(c) = 0.5*0,50000^2 - \sin(0,50000) = -0,35443$

$f(c-\varepsilon/2) \geq f(c+\varepsilon/2) \rightarrow$ минимум в [c, b]

Новый интервал: [0,50000, 1,00000]

ШАГ 2:

$a = 0,50000, f(a) = -0,35443$

$b = 1,00000, f(b) = -0,34147$

$c = (0,50000 + 1,00000)/2 = 0,75000$

$f(c) = 0.5*0,75000^2 - \sin(0,75000) = -0,40039$

$f(c-\varepsilon/2) < f(c+\varepsilon/2) \rightarrow$ минимум в [a, c]

Новый интервал: [0,50000, 0,75000]

ШАГ 3:

$a = 0,50000, f(a) = -0,35443$

$b = 0,75000, f(b) = -0,40039$

$c = (0,50000 + 0,75000)/2 = 0,62500$

$f(c) = 0.5*0,62500^2 - \sin(0,62500) = -0,38978$

$f(c-\varepsilon/2) \geq f(c+\varepsilon/2) \rightarrow$ минимум в [c, b]

Новый интервал: [0,62500, 0,75000]

ШАГ 4:

$$a = 0,62500, f(a) = -0,38978$$

$$b = 0,75000, f(b) = -0,40039$$

$$c = (0,62500 + 0,75000)/2 = 0,68750$$

$$f(c) = 0.5*0,68750^2 - \sin(0,68750) = -0,39828$$

$f(c-\varepsilon/2) \geq f(c+\varepsilon/2)$ -> минимум в $[c, b]$

Новый интервал: $[0,68750, 0,75000]$

ШАГ 5:

$$a = 0,68750, f(a) = -0,39828$$

$$b = 0,75000, f(b) = -0,40039$$

$$c = (0,68750 + 0,75000)/2 = 0,71875$$

$$f(c) = 0.5*0,71875^2 - \sin(0,71875) = -0,40014$$

$f(c-\varepsilon/2) \geq f(c+\varepsilon/2)$ -> минимум в $[c, b]$

Новый интервал: $[0,71875, 0,75000]$

Финальный результат: $x_{\min} = 0,74219, f(x_{\min}) = -0,40048$

Метод золотого сечения

Начальный интервал: $[0,00, 1,00]$, точность: 0,030

ШАГ 1:

Текущий интервал: $[0,00000, 1,00000]$

$$x_1 = b - (b-a)/\phi = 1,00000 - 1,00000/1,61803 = 0,38197$$

$$x_2 = a + (b-a)/\phi = 0,00000 + 1,00000/1,61803 = 0,61803$$

$$f(x_1) = 0.5*0,38197^2 - \sin(0,38197) = -0,29980$$

$$f(x_2) = 0.5*0,61803^2 - \sin(0,61803) = -0,38845$$

$f(x_1) \geq f(x_2)$ -> минимум в $[x_1, b]$

Новый интервал: $[0,38197, 1,00000]$

ШАГ 2:

Текущий интервал: $[0,38197, 1,00000]$

$$x_1 = b - (b-a)/\phi = 1,00000 - 0,61803/1,61803 = 0,61803$$

$$x_2 = a + (b-a)/\phi = 0,38197 + 0,61803/1,61803 = 0,76393$$

$$f(x_1) = 0.5*0,61803^2 - \sin(0,61803) = -0,38845$$

$$f(x_2) = 0.5*0,76393^2 - \sin(0,76393) = -0,39997$$

$f(x_1) \geq f(x_2)$ -> минимум в $[x_1, b]$

Новый интервал: $[0,61803, 1,00000]$

ШАГ 3:

Текущий интервал: [0,61803, 1,00000]

$$x_1 = b - (b-a)/\phi = 1,00000 - 0,38197/1,61803 = 0,76393$$

$$x_2 = a + (b-a)/\phi = 0,61803 + 0,38197/1,61803 = 0,85410$$

$$f(x_1) = 0,5 * 0,76393^2 - \sin(0,76393) = -0,39997$$

$$f(x_2) = 0,5 * 0,85410^2 - \sin(0,85410) = -0,38924$$

$f(x_1) < f(x_2)$ -> минимум в $[a, x_2]$

Новый интервал: [0,61803, 0,85410]

ШАГ 4:

Текущий интервал: [0,61803, 0,85410]

$$x_1 = b - (b-a)/\phi = 0,85410 - 0,23607/1,61803 = 0,70820$$

$$x_2 = a + (b-a)/\phi = 0,61803 + 0,23607/1,61803 = 0,76393$$

$$f(x_1) = 0,5 * 0,70820^2 - \sin(0,70820) = -0,39969$$

$$f(x_2) = 0,5 * 0,76393^2 - \sin(0,76393) = -0,39997$$

$f(x_1) \geq f(x_2)$ -> минимум в $[x_1, b]$

Новый интервал: [0,70820, 0,85410]

ШАГ 5:

Текущий интервал: [0,70820, 0,85410]

$$x_1 = b - (b-a)/\phi = 0,85410 - 0,14590/1,61803 = 0,76393$$

$$x_2 = a + (b-a)/\phi = 0,70820 + 0,14590/1,61803 = 0,79837$$

$$f(x_1) = 0,5 * 0,76393^2 - \sin(0,76393) = -0,39997$$

$$f(x_2) = 0,5 * 0,79837^2 - \sin(0,79837) = -0,39752$$

$f(x_1) < f(x_2)$ -> минимум в $[a, x_2]$

Новый интервал: [0,70820, 0,79837]

Финальный результат: $x_{min} = 0,74013, f(x_{min}) = -0,40049$

Метод Хорд

ШАГ 1:

$$a = 0,00000, f'(a) = -1,00000$$

$$b = 1,00000, f'(b) = 0,45970$$

$$x = a - f'(a)*(b-a)/(f'(b)-f'(a)) = 0,00000 - -1,00000 * 1,00000 / 1,45970 = 0,68507$$

$$f'(x) = 0,68507 - \cos(0,68507) = -0,08930$$

$f'(a)*f'(x) \geq 0$ -> корень $f'(x)$ в $[x, b]$

Новый интервал: [0,68507, 1,00000]

ШАГ 2:

$$a = 0,68507, f'(a) = -0,08930$$

$$b = 1,00000, f'(b) = 0,45970$$

$$x = a - f'(a)*(b-a)/(f'(b)-f'(a)) = 0,68507 - -0,08930*0,31493/0,54900 = 0,73630$$

$$f'(x) = 0,73630 - \cos(0,73630) = -0,00466$$

Достигнута заданная точность!

Финальный результат: $x_{min} = 0,73630, f(x_{min}) = -0,40048$

Метод Ньютона

$$f'(x) = x - \cos(x)$$

$$f''(x) = 1 + \sin(x)$$

Начальное приближение: 0,50, точность: 0,030

ШАГ 1:

$$x_0 = 0,50000$$

$$f'(x_0) = 0,50000 - \cos(0,50000) = -0,37758$$

$$f''(x_0) = 1 + \sin(0,50000) = 1,47943$$

$$\Delta x = f'(x_0)/f''(x_0) = -0,37758/1,47943 = -0,25522$$

$$x_1 = x_0 - \Delta x = 0,50000 - -0,25522 = 0,75522$$

ШАГ 2:

$$x_1 = 0,75522$$

$$f'(x_1) = 0,75522 - \cos(0,75522) = 0,02710$$

$$f''(x_1) = 1 + \sin(0,75522) = 1,68545$$

$$\Delta x = f'(x_1)/f''(x_1) = 0,02710/1,68545 = 0,01608$$

$$x_2 = x_1 - \Delta x = 0,75522 - 0,01608 = 0,73914$$

Достигнута заданная точность!

Финальный результат: $x_{min} = 0,73909, f(x_{min}) = -0,40049$

Код программы:

Язык: Java

```
public class MinFindingMethods {

    public static double f(double x) {
        return 0.5 * x * x - Math.sin(x);
    }

    public static double df(double x) {
        return x - Math.cos(x);
    }

    public static double d2f(double x) {
        return 1 + Math.sin(x);
    }

    public static void bisectionMinimization(double a, double b, double e) {
        System.out.println("== МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ (минимизация) ==");
        System.out.println("f(x) = 0.5*x^2 - sin(x)");
        System.out.printf("Начальный интервал: [% .2f, %.2f], точность: %.3f%n", a, b, e);

        double c;
        for (int i = 1; i <= 5; i++) {
            c = (a + b) / 2;
            double fa = f(a);
            double fb = f(b);
            double fc = f(c);

            System.out.printf("ШАГ %d:%n", i);
            System.out.printf("a = %.5f, f(a) = %.5f%n", a, fa);
            System.out.printf("b = %.5f, f(b) = %.5f%n", b, fb);
            System.out.printf("c = (%.5f + %.5f)/2 = %.5f%n", a, b, c);
            System.out.printf("f(c) = 0.5*%.5f^2 - sin(%5f) = %.5f%n", c, c, fc);

            if (f(c - e / 2) < f(c + e / 2)) {
                System.out.printf("f(c-ε/2) < f(c+ε/2) -> минимум в [a, c]%n");
                b = c;
            } else {
                System.out.printf("f(c-ε/2) >= f(c+ε/2) -> минимум в [c, b]%n");
                a = c;
            }
            System.out.printf("Новый интервал: [% .5f, %.5f]%, a, b);
            System.out.println();
        }

        while (Math.abs(b - a) > e) {
            c = (a + b) / 2;
            if (f(c - e / 2) < f(c + e / 2)) {
                b = c;
            } else {
                a = c;
            }
        }

        double min_x = (a + b) / 2;
        System.out.printf("ФИНАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ: x_min = %.5f, f(x_min) = %.5f%n", min_x, f(min_x));
        System.out.println("=====\\n");
    }

    public static void goldenSectionMinimization(double a, double b, double e) {
        System.out.println("== МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (минимизация) ==");
        System.out.println("f(x) = 0.5*x^2 - sin(x)");
        System.out.printf("Начальный интервал: [% .2f, %.2f], точность: %.3f%n", a, b, e);

        double phi = (1 + Math.sqrt(5)) / 2;
        double x1, x2;
        for (int i = 1; i <= 5; i++) {
            x1 = b - (b - a) / phi;
            x2 = a + (b - a) / phi;
        }
    }
}
```

```

        double fx1 = f(x1);
        double fx2 = f(x2);

        System.out.printf("ШАГ %d:\n", i);
        System.out.printf("Текущий интервал: [% .5f, %.5f]\n", a, b);
        System.out.printf("x1 = b - (b-a)/phi = %.5f - %.5f/.5f = %.5f\n",
                          b, (b - a), phi, x1);
        System.out.printf("x2 = a + (b-a)/phi = %.5f + %.5f/.5f = %.5f\n",
                          a, (b - a), phi, x2);
        System.out.printf("f(x1) = 0.5*%.5f^2 - sin(% .5f) = %.5f\n", x1, x1, fx1);
        System.out.printf("f(x2) = 0.5*%.5f^2 - sin(% .5f) = %.5f\n", x2, x2, fx2);

        if (fx1 < fx2) {
            System.out.printf("f(x1) < f(x2) -> минимум в [a, x2]\n");
            b = x2;
        } else {
            System.out.printf("f(x1) >= f(x2) -> минимум в [x1, b]\n");
            a = x1;
        }
        System.out.printf("Новый интервал: [% .5f, %.5f]\n", a, b);
        System.out.println();
    }

    while (Math.abs(b - a) > e) {
        x1 = b - (b - a) / phi;
        x2 = a + (b - a) / phi;
        if (f(x1) < f(x2)) {
            b = x2;
        } else {
            a = x1;
        }
    }
    double min_x = (a + b) / 2;
    System.out.printf("ФИНАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ: x_min = %.5f, f(x_min) = %.5f\n", min_x, f(min_x));
    System.out.println("=====\\n");
}

public static void chordMinimization(double a, double b, double e) {
    System.out.println("== МЕТОД ХОРД (поиск минимума через f'(x)=0) ==");
    System.out.println("f'(x) = x - cos(x)");
    System.out.printf("Начальный интервал: [% .2f, %.2f], точность: %.3f\n", a, b, e);
    double x = a;
    for (int i = 1; i <= 5; i++) {
        double fa = df(a);
        double fb = df(b);
        x = a - fa * (b - a) / (fb - fa);
        double fx = df(x);

        System.out.printf("ШАГ %d:\n", i);
        System.out.printf("a = %.5f, f'(a) = %.5f\n", a, fa);
        System.out.printf("b = %.5f, f'(b) = %.5f\n", b, fb);
        System.out.printf("x = a - f'(a)*(b-a)/(f'(b)-f'(a)) = %.5f - %.5f*.5f/.5f = %.5f\n",
                          a, fa, (b - a), (fb - fa), x);
        System.out.printf("f'(x) = %.5f - cos(% .5f) = %.5f\n", x, x, fx);

        if (Math.abs(fx) < e) {
            System.out.println("Достигнута заданная точность!");
            break;
        }
        if (fa * fx < 0) {
            System.out.printf("f'(a)*f'(x) < 0 -> корень f'(x) в [a, x]\n");
            b = x;
        } else {
            System.out.printf("f'(a)*f'(x) >= 0 -> корень f'(x) в [x, b]\n");
            a = x;
        }
        System.out.printf("Новый интервал: [% .5f, %.5f]\n", a, b);
        System.out.println();
    }

    while (Math.abs(df(x)) > e) {
        x = a - df(a) * (b - a) / (df(b) - df(a));
        if (df(a) * df(x) < 0) b = x;
        else a = x;
    }
}

```

```

        System.out.printf("ФИНАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ: x_min = %.5f, f(x_min) = %.5f\n", x, f(x));
        System.out.println("=====\n");
    }
    public static void newtonMinimization(double x0, double e) {
        System.out.println("== МЕТОД НЬЮТОНА (минимизация через f'(x)=0) ==");
        System.out.println("f'(x) = x - cos(x)");
        System.out.println("f''(x) = 1 + sin(x)");
        System.out.printf("Начальное приближение: %.2f, точность: %.3f\n", x0, e);

        double x = x0;
        double delta;

        for (int i = 1; i <= 5; i++) {
            double f1x = df(x);
            double f2x = d2f(x);
            delta = f1x / f2x;
            double x_new = x - delta;

            System.out.printf("ШАГ %d:\n", i);
            System.out.printf("x%d = %.5f\n", i - 1, x);
            System.out.printf("f'(x%d) = %.5f - cos(%5f) = %.5f\n", i - 1, x, x, f1x);
            System.out.printf("f''(x%d) = 1 + sin(%5f) = %.5f\n", i - 1, x, f2x);
            System.out.printf("Δx = f'(x%d)/f''(x%d) = %.5f/.5f = %.5f\n", i - 1, i - 1, f1x, f2x, delta);
            System.out.printf("x%d = x%d - Δx = %.5f - %.5f = %.5f\n", i, i - 1, x, delta, x_new);
            System.out.println();

            x = x_new;

            if (Math.abs(delta) < e) {
                System.out.println("Достигнута заданная точность!");
                break;
            }
        }
        do {
            delta = df(x) / d2f(x);
            x -= delta;
        } while (Math.abs(delta) > e);

        System.out.printf("ФИНАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ: x_min = %.5f, f(x_min) = %.5f\n", x, f(x));
        System.out.println("=====\n");
    }

    public static void main(String[] args) {
        double a = 0.0;
        double b = 1.0;
        double e = 0.03;
        double x0 = (b - a) / 2;

        bisectionMinimization(a, b, e);
        goldenSectionMinimization(a, b, e);
        chordMinimization(a, b, e);
        newtonMinimization(x0, e);
    }
}

```