数学文化

见面课（六）

联系方式

李军　数学科学学院**416**办公室

邮箱：lijun@nankai.edu.cn

鼓励师生课下的联系和交流。上周已经建立了课程的飞书群，教学通知会发到飞书群。大家在学习中遇到问题，就及时通过飞书联系我。

- 说明：做平台上“测验题”和参与“讨论题”讨论的情况，均会被平台记录，作为慕课成绩的组成部分。
- 千万不要错过平台上做题的截止时间！

  即：每周日的晚上23点30分。

  第6讲测验题的截止时间是10月30日（周日）的晚上23点30分，第7讲测验题和第1次作业互评的截止时间都是11月6日（周日）的晚上23点30分。

本课程的教材请自己去买，有用！

问题请事先准备，提得具体、明确；

问题小一点，集中一点，才便于讨论。

下面是一些“不好”的问题：

- 如何证明一个数是无理数?
- 有关数学发展史或发展转折点的问题。
- 线性代数怎么与编程联系在一起?
- 数列特征方程的原理。
- 泰勒公式，线性代数的一些变形问题。

主观题 10分

设置

说说你在数学文化的学习中感到困惑的问题或很有兴趣的问题。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

多选题 2分

设置

数学发展史上共有三次数学危机，下列关于数学危机的说法中，哪些是正确的?

A 数学危机阻碍了数学科学的发展

B 三次数学危机都与无穷有关

C 三次数学危机都是对当时数学基础的质疑

D 三次数学危机都是数学家群体内部提出的

E 三次数学危机都已经彻底解决了

提交

平台上慕课内容的拓展

逻辑智力题：真话村与谎话村

一个小岛上有两个村子，分别在小岛东侧与西侧，其中一个村子名叫“真话村”，真话村的居民永远说真话，另一个村子名叫“谎话村”，谎话村的居民永远说谎话。

一个外乡人到达了这个小岛，他知道这两个村子名字的由来，但不知道哪个村子是真话村。他找到一个村民，用一个“是”或“否”回答的问题就知道了哪个村子是真话村。怎么提问呢？

一道有挑战性的逻辑题

你驾驶的飞船在降落外星的时候坏了。幸好碰上可以可以帮助你修复飞船的三个外星人，不过他们要跟你玩儿一个游戏。

这三个外星人中有一个始终只说真话的诚实人，一个始终只说假话的骗子，还有一个有时真话有时假话的正常人。你可以提三个是或否的问题来确定三人的身份。

他们可以听懂你说的所有问题，并用“呼啦啦”或者“哇哈哈”来回答。你知道这两个单词意为“是”和“否”，但你并不知道哪个代表是，哪个代表否。同一个问题只能向一个外星人提问，你可以向一个外星人提多个问题，三个问题不一定需要同时提问。

视频：三王难题

- https://www.bilibili.com/video/BV1sx411S74S?from=search&seid=4580738638427738385&spm_id_from=333.337.0.0

猜帽子颜色问题1

甲乙两人闭上眼后每人被戴上了一顶帽子，颜色为黑或红，然后睁开眼，每人只能看到对方的帽子。要求每人猜自己帽子的颜色，要甲乙两人同时说出来，至少有一人猜对的话他们就获得奖励。

甲乙两人可以在游戏开始前商量策略。

请你来设计一个一定能获得奖励的策略。

视频：帽子谜题

- https://www.bilibili.com/video/BV1hh411o77K?from=search&seid=16439926650525170386&spm_id_from=333.337.0.0

猜帽子颜色问题2

甲乙丙三人闭上眼后每人被戴上了一顶帽子，颜色为黑或红或白，然后睁开眼，每人只能看到其他两人的帽子。要求每人猜自己帽子的颜色，要甲乙丙三人同时说出来，至少有一人猜对的话他们就获得奖励。

甲乙丙三人可以在游戏开始前商量策略。

请你来设计一个一定能获得奖励的策略。

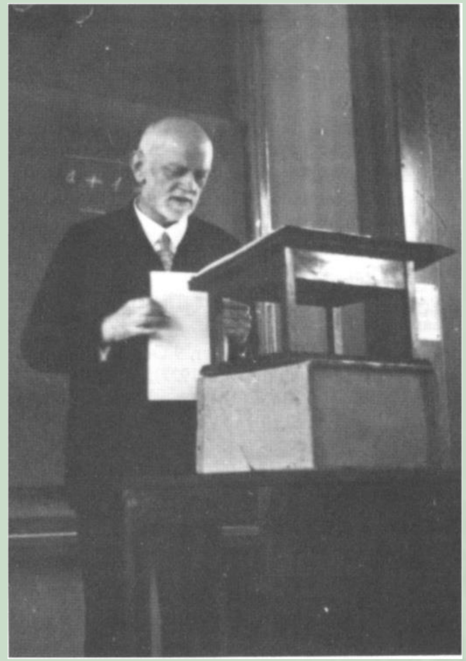
希尔伯特

希尔伯特（德国，1862—1943年）是19世纪末和20世纪上半叶最伟大的数学家之一。他提出的23个问题更是功勋卓著、影响深远。

那是1900年8月在巴黎召开的国际数学家大会上，年仅38岁的希尔伯特做了题为《数学问题》的著名讲演，根据19世纪数学研究的成果和发展趋势提出23个问题，成为数学史上的一个重要里程碑。


希尔伯特，D.


Hilbert



在世纪之交提出的这23个问题，涉及现代数学的许多领域。一个世纪以来，这些问题激发着数学家们浓厚的研究兴趣，对20世纪数学的发展起着巨大的推动作用。

希尔伯特的23个问题

1.证明“连续统假设”，即证明“可数基数”与“连续统基数”之间不存在任何基数。

2.研究算术公理的相容性。

3.两个等底等高的四面体的体积相等。

4.直线作为两点间最短距离的问题。

5.李（S.Lie）的连续变换群概念，但不要定义群的函数的可微性假设。

6.物理学的公理化。

7.某些数的无理性和超越性。

8.素数问题。

9.在任意数域中证明最一般的互反定律。

10.丢番图方程的可解性。

11.系数为任意代数数的二次型。

12. 阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广。
13. 不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程。
14. 证明某类完全函数系的有限性。
15. 舒伯特(Schubert)计数演算的严格基础。
16. 代数曲线与代数曲面的拓扑问题。

17.正定形式的平方和表示。
18.用全等多面体构造空间。
19.正则变分问题的解一定是解析的吗?
20.一般边值问题。
21.具有指定单值群的线性微分方程解的存在性证明。
22.通过自守函数使解析关系单值化。
23.变分法的进一步发展。

适当的问题对科学发展的价值

1． 有问题的学科才有生命力

问题，在学科进展中的意义是不可否认的。一门学科充满问题，它就充满生命力；而如果缺乏问题，则预示着该学科的衰落。正是通过解决问题，人们才能够发现学科的新方法、新观点和新方向，达到更为广阔和高级的新境界。

提出数学问题的动力，不仅来自数学以外的客观世界，也来自数学内部的逻辑发展。例如：素数的理论；非欧几何；伽罗瓦理论；代数不变量理论。

2． 提出一个“好的问题”是不容易的

这是因为在解决问题前，要想预先判断一个问题的价值是困难的，问题的价值最终取决于科学从该问题得到的收益。因此，只有对该学科的知识有广泛而深入了解的学者，对该学科的发展有清醒的认识和深刻洞察力的学者，才能提出有较大价值的“好的问题”。

3． “好的问题”的标准

尽管有困难，人们仍希望给出“好的问题”的一般标准。希尔伯特在他的演讲中就提出了这样的标准。我们把它归纳叙述如下：

1）清晰易懂

即，问题本身应很容易解释清楚，让别人听懂。希尔伯特说：“一个清晰易懂的问题会引起人们的兴趣，而复杂的问题使人们望而生畏。”

2）难而又可解决

希尔伯特说：“为了具有吸引力，一个数学问题应该是困难的，但又不应是完全不可解决，而使我们劳而无功。”

3）对学科发展有重大推动意义

问题解决的意义，不是局限于问题本身，而是波及整个学科，推动整个学科的发展。

“好的问题” 举例

- 费马大定理
- 五次方程根式解
- 最速降线问题
- 三体问题

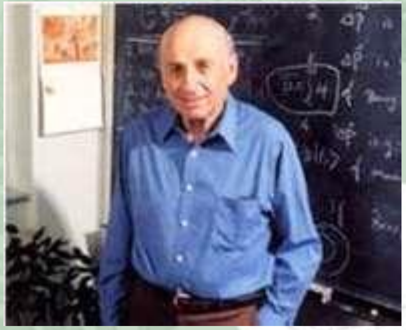
“希尔伯特问题”解决的现状

经过整整一个世纪，希尔伯特的23个问题中，将近一半已经解决或基本解决。有些问题虽未解决，但也取得了重要进展。

能够解决一个或基本解决一个希尔伯特问题的数学家，就自然地被公认为世界一流水平的数学家，由此也可见希尔伯特问题的特殊地位。

希尔伯特第1问题：连续统假设

1938年，奥地利数理逻辑学家哥德尔证明了连续统假设与ZF集合论公理系统的无矛盾性。1963年，美国数学家科恩（P.Cohen）证明了连续统假设与ZF公理彼此独立。因而连续统假设不能用ZF公理加以证明。在这个意义下，问题已获解决。



科恩1966年获得了菲尔兹奖。

希尔伯特第2问题：算术的无矛盾性

欧氏几何的无矛盾性可以归结为算术公理的无矛盾性。希尔伯特曾提出用形式主义计划的证明论方法加以证明，哥德尔1931年发表不完全性定理作出否定。根茨1936年使用超限归纳法证明了算术公理系统的无矛盾性。

库尔特·哥德尔（Kurt Godel）（1906年4月28日—1978年1月14日）是上个世纪最著名的数理逻辑学家之一。其最杰出的贡献是哥德尔不完全性定理和连续统假设的相对协调性证明。

希尔伯特第10问题：丢番图方程的可解性

能否通过有限步骤来判定整系数不定方程是否存在有理数解？

1970年， 苏联数学家马蒂塞维奇最终证明：在一般情况答案是否定的。

尽管得出了否定的结果， 却产生了一系列很有价值的副产品， 其中不少和计算机科学有密切联系。

希尔伯特问题的研究与解决，大大推动了许多数学分支的发展，这些分支包括：数理逻辑、几何基础、李群、数学物理、概率论、数论、函数论、代数几何、常微分方程、偏微分方程、黎曼曲面论、变分法等。第二问题和第十问题的研究，还促进了现代计算机理论的成长。

重要的“问题”，历来是推动科学前进的杠杆。但一位科学家，如此自觉、如此集中地提出如此一整批问题，并且如此持久地影响了一门学科的发展，这在科学史上是仅有的。

2000年5月24日， Clay数学促进会在巴黎法兰西学院宣布了七个数学问题，并允诺对每个问题的解决者给予100万美元的奖励。

1．P与NP问题

2．Riemann假设

3．Poincare猜想

4．Hodge猜想

5．Birch及Swinnerton－Dyer猜想

6．Navier－Stokes方程组

7．Yang—Mills理论

当然，希尔伯特当年也不是尽善尽美的。一些评论者认为，其局限性是，希尔伯特问题未包括拓扑学和微分几何，而这两者在20世纪也成了数学的前沿和热点，这是希尔伯特没有预见到的。此外，希尔伯特问题除数学物理外，很少涉及应用数学。

用反证法证明无理性

应用反证法的一个典型例子是证明“$\sqrt{2}$是一个无理数”。

学习数学要能举一反三，请你应用反证法来证明“$\log_2 3$是一个无理数”。

这种方法还可以用于证明“$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是一个无理数”。

构造性证明与存在性证明

在数学中，时常需要讨论一些“存在性命题”，去证明存在具有某些性质的数学对象.

对于存在性命题，通常有两类证明方法：一类是构造性的证明方法，即把需要证明存在的数学对象构造出来，便完成了证明；

一类是存在性证明，并不具体给出存在的事物，而是完全依靠逻辑的力量，证明事物的存在.

这两种数学方法都有各自的魅力.

一个经典的例子

证明：存在无理数a和b，使得a^b是有理数.

一种构造性证明的思路：取$a=\sqrt{2}, b=\log_{\sqrt{2}} 3$，则$a^b$=3是有理数.

一种存在性证明的思路：考虑$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. 若$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$是有理数，则取$a=b=\sqrt{2}$；若$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$是无理数，则取$a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b=\sqrt{2}$.

代数数与超越数

一个复数，如果它是某个整系数代数方程的根，则称之为代数数，否则就称之为超越数.

显然，所有有理数和用有理数开方表示的无理数都是代数数.

然而，指出一个数是超越数的事就没有这么简单.

超越数的例子

1844年法国数学家刘维尔最早证明了超越数的存在性，他构造了下面的超越数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}=0.110001000000000000000000010\cdots$$

1873年，厄尔米特证明了自然对数的底数e是超越数.

随后在1882年，林德曼证明了圆周率π的超越性.

存在超越数的存在性证明

要证明某个特定的数是超越数，一般来说难度较高. 康托尔建立集合论之后，给出了存在超越数的存在性证明，指出超越数不仅存在，实际上超越数比代数数多.

不难证明对于任意正整数n，n次整系数代数方程是可数多个，由此可知n次整系数代数方程的根组成的集合是可数无穷集. 进而可得全体代数数组成的集合是可数无穷集. 实数集是不可数无穷集，因此，一定存在实超越数.

实代数数集是可数无穷集，实超越数集是不可数无穷集，因此，实超越数集比实代数数集“大”.

猜帽子颜色问题3

100个人排成1列，闭上眼后每人被戴上了一顶帽子，颜色为黑或红，然后睁开眼，每人只能看到在他前面的所有人的帽子。从最后面的人开始（他能看到前面99个人的帽子），依次向前每人猜自己帽子的颜色，猜对的话有一份奖励。

这100个人可以在游戏开始前商量策略，目标是使得整体获得的奖励最多。

请你来设计一个策略。

视频：帽子谜题

- https://www.bilibili.com/video/BV17h41127dQ?from=search&seid=16439926650525170386&spm_id_from=333.337.0.0

三角决斗

在一个小镇上，有三个枪手正在进行着殊死搏斗。枪手A的枪法最为准确，命中率高达100%；枪手B枪法不错，命中率为80%；枪手C枪法欠佳，命中率仅为50%。

如果这三人站成一个等边三角形，每人每次只开一枪，抽签决定开枪顺序，以相同顺序循环往复，中枪则死，直至其中两人死亡。设三人都采取最佳策略，那么他们中谁活下的几率大呢？

三角决斗的解答

在枪手A和B都活着的情况下，轮到枪手C开枪，他的最佳策略是放空枪. 等到枪手A和枪手B分出生死，枪手C再与生存者决斗，这时枪手C先开枪，这使得枪手C在三角决斗中占据有利地位，存活机会最大.

计算概率的结果如下：枪手A活下来的概率是30%；枪手B活下来的概率约为18%；枪手C活下来的概率约为52%.

C、B、A次序下的三角决斗

《数学文化》期刊2013年第2期中“枪打出头鸟——三人决斗问题趣谈”一文讨论了C、B、A次序下的三角决斗，假设A的命中率是1，B和C的命中率分别是b和c，这里1>b>c>0. 在A、B都存活时，按C放空枪，A和B相互射击的策略，可以得到A、B、C的存活率分别为

A：$(1-b)(1-c)$；　B：$b-\frac{bc}{b+c-bc}$；

C：$c+\frac{bc}{b+c-bc}-bc$。

C、B、A次序下的三角决斗

当$b=\frac{2}{3}$时，A、B、C的存活率分别为

A：$\frac{1-c}{3}$；　B：$\frac{4(1-c)}{3(2+c)}$；　C：$\frac{c(8+c)}{3(2+c)}$。

这时，B的存活率始终大于A的存活率。当$2\sqrt{10}-6<c<\frac{2}{3}$时，C的存活率大于B的存活率，当$\frac{\sqrt{97}-9}{4}<c<2\sqrt{10}-6$时，C的存活率大于A的存活率，但小于B的存活率。

下次“见面课”

2022年11月8日

（周二）

本次“见面课”结束

谢谢！