概率论与数理统计

第三章　多维随机变量及其分布

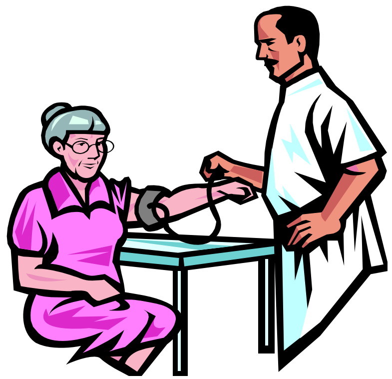
§5 两个随机变量的函数的分布

- 问题的引入
- 离散型随机变量函数的分布
- 连续型随机变量函数的分布

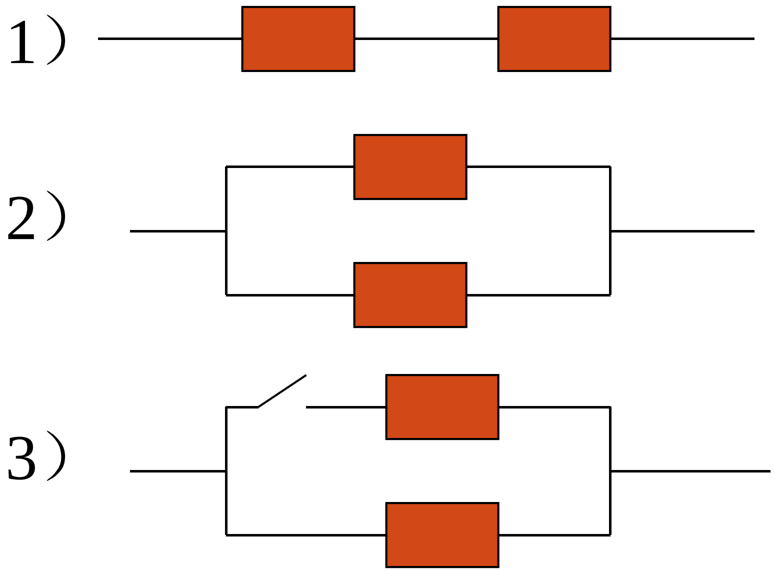
一、问题的引入

有一大群人，令 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重，Z 表示该人的血压，并且已知 Z 与 X,Y 的函数关系 $Z=g(X,Y)$,如何通过 X,Y 的分布确定 Z 的分布.

为了解决类似的问题下面我们讨论随机变量函数的分布.



在实际问题中，常常会遇到需要求随机变量函数的分布问题。例如：在下列系统中，每个元件的寿命分别为随机变量 X,Y，它们相互独立同分布。我们想知道系统寿命 Z 的分布。



$$Z=\min(X,Y)$$

$$Z=\max(X,Y)$$

$$Z=X+Y$$

这就是求随机变量函数的分布问题。

二、离散型随机变量函数的分布

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z=g(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{g(X,Y)=z_k\}$$

$$=\sum_{z_k=g(x_i y_j)} p_{ij} \qquad k=1,2,\cdots.$$

例1　设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 $(1) X+Y$, $(2) \left|X-Y\right|$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以 $X+Y, |X-Y|$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

例2 若 X 和 Y 相互独立,它们分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布, 证明$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

解 依题意

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \quad i=0,1,2,\dots$$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!} \quad j=0,1,2,\dots$$

于是 $$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\mathrm{r-i}}}{(\mathrm{r-i})!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{\mathrm{r}!}{\mathrm{i}!(\mathrm{r-i})!}\lambda_1^{\mathrm{i}}\lambda_2^{\mathrm{r-i}}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^r,\qquad \mathbf{r=0,1,\ldots}$$

即Z服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

$Z = X + Y$ 的分布,离散型随机变量的情况

若 X、Y 独立，$P(X=k)=a_k$, $k=0$, 1 , 2 ,…, $P(Y=k)=b_k$, $k=0,1,2,\ldots$,求 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 $$P(Z=r)=P(X+Y=r)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

由独立性

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0 \qquad r=0,1,2,\ldots$$

三、连续型随机变量函数的分布

(一) $Z=X+Y$ 的分布

设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$. 则 $Z=X+Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y, \qquad (5.1)$$

或

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.2)$$

又若 X 和 Y 相互独立，设 (X,Y) 关于 X,Y 的边缘

密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$，则(5.1),(5.2)分别化为

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y, \qquad (5.3)$$

和

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.4)$$

这两个公式称为f_X和f_Y的卷积公式，记为$f_X * f_Y$，

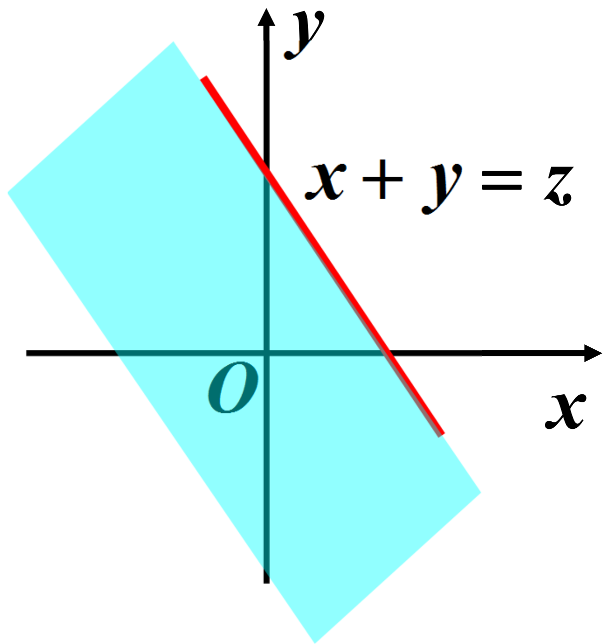
即

$$\begin{aligned} f_X * f_Y &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

证 先来求$Z=X+Y$的分布函数$F_Z(z)$, 即有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$



这里积分区域$G: x+y\le z$是直线$x+y=z$及其左下方的半平面.

将二重积分化成累次积分, 得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

固定z和y对积分$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$作变量变换，令

$x = u - y$，得

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u$$

于是

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

由概率密度的定义即得 (5.1)式. 类似可证得(5.2)式.

例3 设X和Y是两个相互独立的随机变量.他们都服从$N(0,1)$分布, 其概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

解 由(5.4)式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

令$t=x-\frac{z}{2}$，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即Z服从$N(0,2)$分布.

说明

一般,设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.由(5.4)式经过计算知$Z = X + Y$仍然服从正态分布,且有$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例4 在一简单电路中,两电阻 R_1 和 R_2 串联连接,设 R_1, R_2 相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

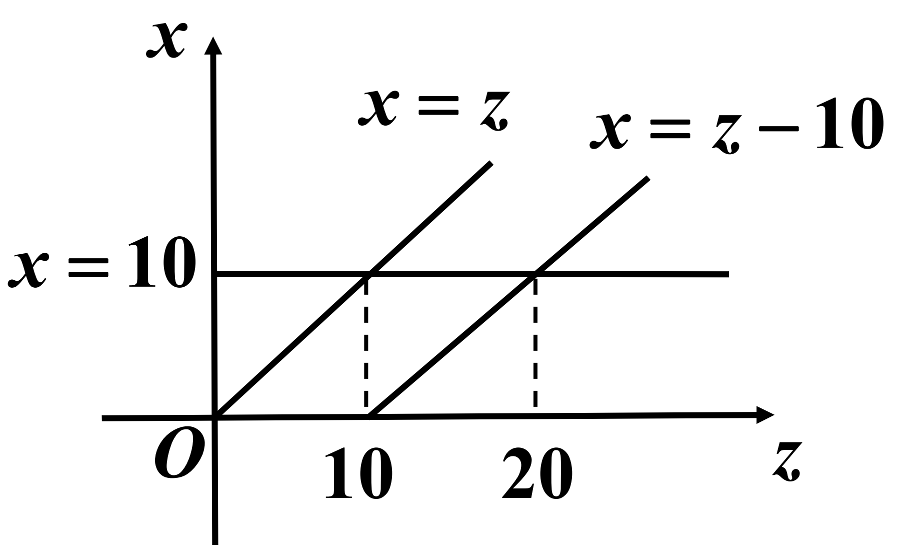
解 由(5.4)式, R 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

易知仅当

$$\begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零. 参考下图, 即得



$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 0\le z<10,\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 10\le z\le 20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

将$f(x)$的表达式代入上式得

$$f_R(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{15000}(600z-60z^2+z^3), & 0\le z<10,\\ \dfrac{1}{15000}(20-z)^3, & 10\le z<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例5　设随机变量 X,Y 相互独立，且分别服从参数为$\alpha,\theta;\beta,\theta$的$\Gamma$分布(分布分别记成 $X\sim\Gamma(\alpha,\theta)$, $Y\sim\Gamma(\beta,\theta)$), X,Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\[2ex] 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad \alpha>0,\theta>0,$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\beta}\Gamma(\beta)}y^{\beta-1}\mathrm{e}^{-y/\theta}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad \beta>0,\theta>0.$$

试证明 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\alpha+\beta,\theta$ 的 Γ 分布，即 $X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$.

注：Γ函数的定义 $\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\Gamma(\alpha)\quad(\alpha>0)$

证　由(5.4)式 $Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

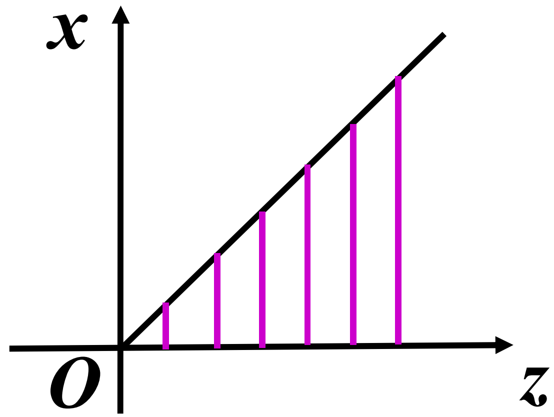
易知仅当

$$\begin{cases} x > 0, \\ z - x > 0, \end{cases} \quad 亦即 \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < z, \end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零，于是(参见下图)

当$Z \le 0$时，$Z = X_1 + X_2$的概率密度$f_Z(z)=0$.而

当$Z \ge 0$时，$Z = X_1 + X_2$的概率密度 为



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x) dx$$

注意积分区间

$$= \int_0^z \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-(z-x)/\theta} \, dx$$

$$=\frac{e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1}\,dx \quad (\text{令 } x=zt)$$

$$=\frac{z^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

$$\overset{\text{记成}}{=} Az^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta},$$

其中 $$A=\frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt \quad (5.5)$$

现在来计算A.由概率密度的性质得到:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^{\infty} Az^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}\,\mathrm{d}z$$

$$=A\theta^{\alpha+\beta}\int_0^{\infty}(z/\theta)^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}\,\mathrm{d}(z/\theta)$$ 注：凑出Γ函数

$$=A\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta),$$

即有 $$A=\frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

于是 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)}z^{\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-z/\theta}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{5.6}$$

亦即$Z=X_1+X_2$服从参数为$\alpha+\beta,\theta$的Γ分布，

即 $$X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\theta).$$

上述结论还能推广到 n 个相互独立的 Γ分布变量之和的情况.即若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 X_i 服从参数为 $\alpha_i, \beta(i=1,2,\cdots,n)$ 的Γ 分布,则$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从参数为 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \beta$ 的 Γ 分布. 这一性质称为 Γ分布的可加性.

(二) $Z=\dfrac{Y}{X}$ 的分布、$Z=XY$ 的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$. 则$Z=\dfrac{Y}{X}$, $Z=XY$仍为连续型随机变量, 其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)\,\mathrm{d}x,$$

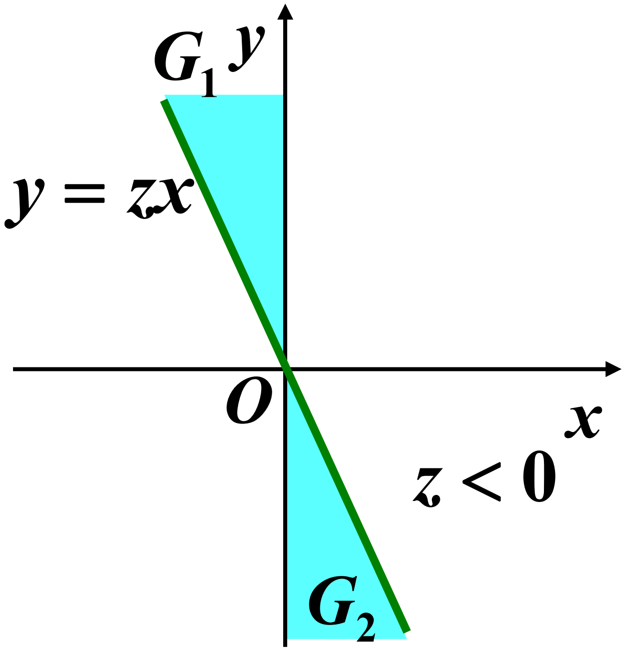
$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

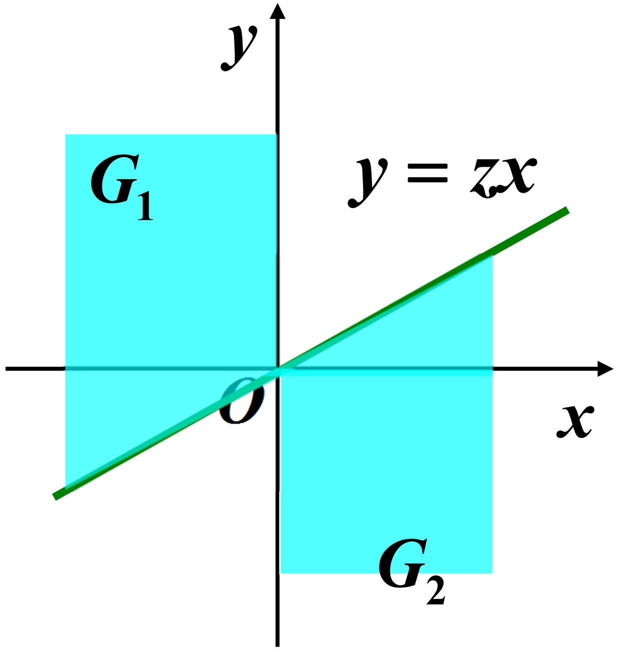
如果X和Y相互独立. 设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$, 则

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.7)$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x. \qquad (5.8)$$

证　$Z=\dfrac{Y}{X}$的分布函数为 $F_{Y/X}(z)$





$$F_{Y/X}(z) = P\{Y/X \le z\} = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{y/x \le z,\, x<0} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint_{y/x \le z,\, x>0} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{令}y=xu}{=}\int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty}xf(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}xf(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}(-x)f(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}xf(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}|x|f(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$

所以 $$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)\,\mathrm{d}x.$$

类似可得 $$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

例6 某公司提供一种地震保险, 保险费Y的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{25}e^{-y/5}, & y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

保险赔付X的概率密度为

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

设 X,Y 相互独立, 求 $Z=Y/X$ 的概率密度.

解　由(5.7)式知,当$z<0$时，$f_Z(z)=0.$

当$z>0$时，Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty} x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\cdot\frac{xz}{25}e^{-xz/5}dx$$

$$=\frac{z}{125}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x\left(\frac{1+z}{5}\right)}dx$$

$$=\frac{z}{125}\frac{\Gamma(3)}{[(1+z)/5]^3}=\frac{2z}{(1+z)^3}.$$

(三) $M=\max\{X,Y\}$及 $N=\min\{X,Y\}$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 现求

$$M=\max\{X,Y\}\text{及}N=\min\{X,Y\}$$

的分布函数.

由于$M=\max\{X,Y\}$不大于z等价于X和Y都不大于z, 故有

$$P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$

又由于 X,Y 相互独立, 得到$M=\max\{X,Y\}$的分布函数为

$$F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}.$$

即有 $F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z).$

类似地, 可得 $N=\min\{X,Y\}$的分布函数为

$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}.$$

即 $F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$

推广 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $M=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$及$N=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

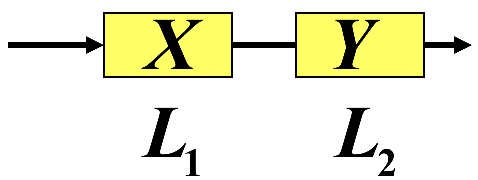
$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

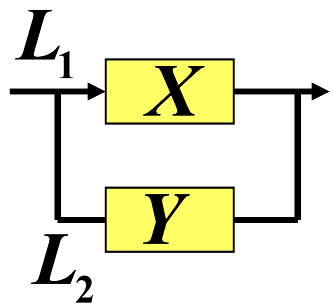
当$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且具有相同的分布函数$F(x)$时有

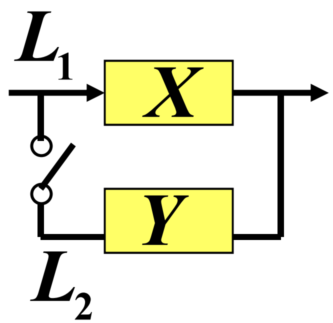
$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n,$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

例7 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成, 连接的方式分别为 (i)串联, (ii) 并联, (iii) 备用(当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.







设 L_1、L_2 的寿命分别为 X、Y, 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中$\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i)串联的情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时，系统 L 就停止工作，所以这时 L 的寿命为

$$Z=\min\{X,Y\}.$$

X,Y的分布函数分布为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

$Z=\min\{X,Y\}$的分布函数为

$$F_{\min}(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$Z=\min\{X,Y\}$的概率密度为

$$f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联的情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作, 所以这时 L 的寿命为 $Z=\max\{X,Y\}$.

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$Z=\max\{X,Y\}$的概率密度为

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 才开始工作，因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1,L_2 之和：

$$Z=X+Y$$

当且仅当 $\begin{cases}y>0,\\ z-y>0,\end{cases}$ 即 $0<y<z$ 时，

上述积分的被积函数不等于零.

故　当z ≤ 0时，$f_Z(z)=0.$

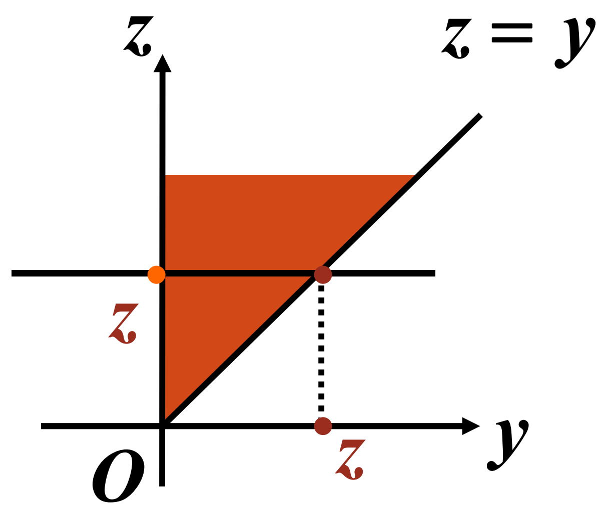
当 $z>0$ 时 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)}\beta \mathrm{e}^{-\beta y}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z}\int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z}].$$



于是 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z}], & z>0,\\[2ex] 0, & z\le 0.\end{cases}$$

小 结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z = g(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X,Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij} \qquad k = 1,2,\cdots.$$

2. 连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$ 的分布

(2) $Z = \dfrac{Y}{X}$ 的分布,$Z = XY$ 的分布

(3) $M = \max(X,Y)$ 及 $N = \min(X,Y)$ 的分布

作业：课后习题 22、24、26 、29

练习

1、设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解　因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

2、设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求：

$Z=\max(X,Y)$ 的分布律.

解　因为 X 与 Y 相互独立,

所以 $P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$P\{\max(X,Y)=i\}$$
$$=P\{X=i,Y\le i\}$$
$$+P\{X\le i,Y=i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow \quad P\{\max(X,Y)=0\}=P\{0,0\}=\frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\}=P\{1,0\}+P\{0,1\}+P\{1,1\}$$
$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}.$$

故$Z=\max(X,Y)$的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

3、设 X,Y 分别表示两只不同型号 的灯泡的寿命，X,Y 相互独立，它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他, \end{cases} \qquad g(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数 .

解　由公式

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty} yf(yz,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x}\mathrm{e}^{-2y}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

得所求密度函数 (当$z>0$时)

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty} 2y\mathrm{e}^{-yz}\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^{\infty} 2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{2}{(2+z)^2},$$

(当$z\le 0$时) $f_Z(z)=0,$

得 $$f_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$