2012--2013 学年第 1 学期《概率论与数理统计》期末考试答案（A）

一、填空：

1. 10；　2. 0.5；　3. $\dfrac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$

4. 0；　5. (4.412, 5.588)；　6. $F(x;\frac{1}{2})=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

二、单项选择：

1、C　2. D，　3. D，　4. B，　5. D，　6. D

三、1．解： 设 A={邮件发生延迟}

(1) $P(A)=P(A|E_1)\,P(E_1)+P(A|E_2)\,P(E_2)+P(A|E_3)\,P(E_3)$

$=0.02\times0.4+0.01\times0.5+0.05\times0.1$

$=0.018$

(2) $P(E_1A)=P(A|E_1)\,P(E_1)=0.02\times0.4=0.008$

(3) $P(E_3|A)=P(A|E_3)\,P(E_3)/P(A)=5/18$

四、**解**：解：（1）边缘分布乘积不等于联合分布，不独立

（2）

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-y, & 0\le y<1\\ 1+y, & -1<y<0\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$P(X>\frac{1}{2}|Y>0)=\frac{P(X>\frac{1}{2},Y>0)}{P(Y>0)}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\int_0^x dy)dx}{\int_0^1(1-y)dy}=\frac{3}{4}$$

（3）　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{-\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}1-z/2, & z\in(0,2)\\ 0, & z\notin(0,2)\end{cases}$

五、解：设 X_i 表示公司从第 i 个投保者身上所得的收益,，i =1~1000 。

则 $X_i\sim\begin{pmatrix}100 & 100-a\\ 0.98 & 0.02\end{pmatrix}$。

由 $E(X_i)=100\times0.98+(100-a)\times0.02=100-0.02a>0$，得 $100<a<5000$。

故公司每笔赔偿小于 5000 元, 能使公司获益。

公司期望总收益为： $E(\sum_{i=1}^{1000}X_i)=\sum_{i=1}^{1000}E(X_i)=100000-20a$ 。

若公司每笔赔偿 3000 元, 能使公司期望总获益 40000 元。

六、**解**：设 $\boldsymbol{X_1, X_2, \cdots, X_n}$ 是取自总体 $\boldsymbol{X}$ 的一个样本，由

$$X \sim \pi\left(k;\lambda\right) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0,1,2,\cdots) \text{ ------------------- （2 分）}$$

故似然函数为 $\boldsymbol{(k_i = 0,1,2,\cdots; \quad i = 1,2,\cdots,n)}$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\pi\left(k_i;\lambda\right) = e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}k_i}}{\prod_{i=1}^{n}\left(k_i!\right)} \text{ ------------------- （4 分）}$$

故 $\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\ln\lambda - \ln\left(\prod_{i=1}^{n}(k_i!)\right)$

即 $\dfrac{d\left(\ln L(\lambda)\right)}{d\lambda} = -n + \dfrac{\sum_{i=1}^{n}k_i}{\lambda} = 0$ ----------------------------（6 分）

从而 λ 的极大似然估计量为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \overline{X} = \frac{100(1+100)}{200} = 50.50 \text{ ---（8 分）}$$

七、 解： $\bar{x} = 87.1, s^2 = 0.08$，

（1） $H_0: \mu = 87.4; \quad H_1: \mu \neq 87.4$，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域 $W = (-\infty, -4.0322] \cup [4.0322, +\infty)$

$$T_0 = \frac{87.4 - 87.1}{0.283/\sqrt{5}} = 2.37 \notin W，$$

接受 H_0 。

（2） $H_0: \sigma^2 = 0.04; \quad H_1: \sigma^2 > 0.04$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

拒绝域

$$W = [15.086, +\infty)$$

$\chi_0^2 = \dfrac{5\times 0.08}{0.04} = 10 \notin W$， 接受 H_0。