离散数学第一部分之二

矩 阵 理 论

由于在大一已经学习过矩阵基础部分，因此，本部分做简单介绍，但是，矩阵在离散数学中会起到很重要的作用，因此，需要掌握相关的部分概念和应用方法。重点是：

- 矩阵表示
- 矩阵的描述方法
- 矩阵运算

一、 定义

由$m\times n$个数$a_{ij}\,(i=1,2,\ldots,m\,;\,j=1,2,\ldots,n)$有次序地排成$m$行(横排)$n$列(竖排)的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个m行n列的矩阵，简记$(a_{ij})_{m\times n}$，通常用大写字母A，B，C，…表示，m行n列的矩阵A也记为$A_{m\times n}$，构成矩阵A的每个数称为矩阵A的元素，而a_{ij}表示矩阵第 i 行、第 j 列的元素。

注意：

（1） 只有一行的矩阵 $A_{1\times n}=(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)$ 称为行矩阵

只有一列的矩阵 $A_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ 称为列矩阵

（2） 两个矩阵A、B，若行数、列数都相等，则称A、B是同型的。

(3) 若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$是同型的，且 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n)$则称$A$与$B$相等，记作$A=B$。

(4) 元素全为0的矩阵称为零矩阵，记作0，不同型的零矩阵是不相等的。

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法

(1) 定义 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$

则矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

$$
=\begin{pmatrix}
a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\
a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}
\end{pmatrix}
$$

称为矩阵A与B的和，记作 $C=A+B$

(2) 性质

设 A，B，C，O 都是 $m\times n$ 矩阵

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $A+O=O+A=A$

2. 矩阵的减法

(1) 负矩阵　　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则称

$$(-a_{ij})_{m\times n}$$ 为A的负矩阵，简记$-A$

显然　$A+(-A)=O$，　$-(-A)=A$

(2) 减法：　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$

$$A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

3.数与矩阵的乘法

(1) 定义　设λ是常数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则矩阵$(\lambda a_{ij})_{m\times n}$称为数$\lambda$与矩阵$A$的乘积，记为$\lambda A$，即

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 性质

设 A、B 为 $m \times n$ 矩阵，λ、u为常数

(1) $(\lambda u)A = \lambda(uA) = u(\lambda A)$;

(2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(3) $(\lambda + u)A = \lambda A + uA$

(4) $1 \cdot A = A$

$(-1) \cdot A = -A$

例 设 $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 求$A-2B$

解： $2B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix}$

$$A-2B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -7 & 1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

4. 矩阵的乘法

(1) 定义　设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$,　则A与B的

乘积 $C=AB$是$m\times n$矩阵，$C=(c_{ij})_{m\times n}$

其中C_{ij}等于A的第i行与B的第j列对应元素的乘积之和

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

$$=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$(i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,n)$

例 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix},$$

求乘积 AB 和 BA

解： $A_{2\times3}B_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}10&1\\7&3\end{pmatrix}$$

$$B_{3\times 2}\,A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 1 & 12\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

注：$AB \neq BA$ 即矩阵乘法不满足交换律

例 5： 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$,

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

试证： (1) $AB=0$ ； (2) $AC=AD$

证：

(1) $$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{O}$$

(2) $$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$AD=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

故 $AC = AD$

比较：

(1) 在数的乘法中，若$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或 $b = 0$

在矩阵乘法中，若$AB = O \Rightarrow A \cancel{=} O$ 或 $B = O$

两个非零矩阵乘积可能为O。

(2) 在数的乘法中，若$ac = ad$，且$a \neq 0 \Rightarrow c = d$ (消去律成立)

在矩阵乘法中，若$AC = AD$，且$A \neq O \Rightarrow C = \cancel{D}$

(消去律不成立)

(2) 性质

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $A(B+C) = AB + AC$

(3) $(B+C)A = BA + CA$

(4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (其中 λ 为常数)

5. 矩阵的转置

(1) 定义 将矩阵 $A_{m\times n}$ 的行换成同序数的列，列换成同序数的行所得的 $n\times m$ 矩阵称为A的转置矩阵，记作 A^T 或 A'。

例如：
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

则
$$A^T=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 性质

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T$$

例　设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 求 $(AB)^T$。

解法一：

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & -1\\ 8 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}$$

解法二：

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9&8\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

三、方阵

1.定义　行数与列数相同的 $n \times n$ 矩阵 A 称为方阵，n 称为它的阶数，简记 A_n。

记 $\underbrace{A \cdot A \ldots A}_{k个} = A^k$

则：$A^k \cdot A^l = A^{k+l}$

$(A^k)^l = A^{kl}$　(其中：k, l均为正整数)

$(AB)^k = \underbrace{(AB)(AB)\cdots\cdots(AB)}_{k个} \neq A^k B^k$

2.几类特殊方阵

1. 单位矩阵

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

称为n阶单位矩阵，简记E

显然

$$A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}$$

$$E_n B_{n\times m} = B_{n\times m}$$

2. 对角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

其中 $a_{ij} = 0, i \neq j$

特别：

$$K = \begin{pmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{pmatrix} = kE_n$$

称为数量矩阵

结论：

(1)
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & & 0 \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & 0 \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

(2) k为正整数时

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{11}^{\ k} & & & 0 \\ & a_{22}^{\ k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{\ k} \end{pmatrix}$$

3. 上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } a_{ij} = 0,\ i > j$$

下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } a_{ij} = 0,\ i < j$$

4. 对称矩阵

(1) 若方阵A满足 $A^T = A$，即 $a_{ji} = a_{ij}$，则称A为对称矩阵。

(2) 若方阵A满足 $A^T = -A$，即 $a_{ji} = -a_{ij}$，则称A为反对称矩阵。这时 $a_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots n$)

例7： 设A为任一方阵，证明：$A+A^T$为对称阵， $A-A^T$为反对称阵

证： 由于

$$(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$$

$$(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A$$

$$=-(A-A^T)$$

故 $A+A^T$为对称阵，$A-A^T$为反对称阵

3、比较方阵与行列式

(1) 方阵 A 对应的行列式记为 $|A|$或 $\det A$

若 $|A| \neq 0$，则称方阵 A 是非奇异(非退化)的，否则，

称 A 是奇异(退化)的。

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

(3) $|AB| = |A||B|$

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{pmatrix},$$ 有 $$|AB|=\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{vmatrix}=30$$

而 $$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=10,\quad |B|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$$

所以 $|AB|=|A||B|$

推广：

$$|A_1 A_2 \cdots A_m| = |A_1| \, |A_2| \cdots |A_m|$$

(4) $|A^m| = |A|^m$

逆矩阵

一、逆矩阵的定义

定义1　设A是一个n阶方阵，若存在n阶方阵B

使

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵，并称 A 可逆。

显然A 为B 的逆矩阵，即 A 与B 互为逆矩阵。

例如： $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

有 $$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以 B 是 A 的逆阵，同时 A 也是 B 的逆阵。

例 设 $a_{11}\ \ a_{22}\ \ \ldots\ \ a_{nn} \neq 0,$

由于:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & 0 \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

所以

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & 0 \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

定理1 (唯一性)

若方阵 A 的逆矩阵存在，则唯一，用 A^{-1} 表示

证：设B、C均是A的逆矩阵，则

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

所以A的逆矩阵唯一。

二、矩阵可逆的条件

定义2: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 ($i, j = 1, 2, \ldots, n$);

矩阵 $$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ 称为 A 的伴随矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

即： $AA^* = A^*A = |A|E$

定理2 方阵 A 存在逆矩阵 ⟺ $|A| \neq 0$

且 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$

求逆矩阵的第一种方法：

方阵 A 满足 $|A| \neq 0$ 时，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}$$

例3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解: $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1\neq 0$

故 A 可逆，又 $A_{11}=5$，$A_{12}=-2$，$A_{21}=-2$，$A_{22}=1$

则 $A^*=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

比较：

（1） 在数的乘法中，若$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或 $b = 0$

在矩阵乘法中，若$AB = 0 \Rightarrow A \cancel{=} 0$ 或 $B = 0$

两个非零矩阵乘积可能为0。

（2） 在数的乘法中，若$ac = ad$，且$a \neq 0 \Rightarrow c = d$（消去律成立）

在矩阵乘法中，若$AC = AD$，且$A \neq 0 \Rightarrow C \cancel{=} D$（消去律不成立）

例4 设 A 是可逆阵，证明：

(1) 若 $AX = AY \Rightarrow X = Y$

(2) 若 $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

证： (1) 由 $AX = AY$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(AY)$$

$$(A^{-1}A)X = (A^{-1}A)Y$$

$EX = EY$ 所以 $X = Y$

(2) 由 $AB=0$，有$A^{-1}(AB) = A^{-1}0$

$(A^{-1}A)B = 0$ 所以 $B=0$

三、逆矩阵的性质

(1) 若A，B均为n阶方阵，且 $AB = E$ (或 $BA = E$)，则 $B = A^{-1}$

证： 设 $AB = E$

$\because |A|\,|B| = |E| = 1 \qquad \therefore |A| \neq 0$

A^{-1}存在，且$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AB)$

$= (A^{-1}A)\,B \quad = EB \quad = B$

同理可证 $BA = E$ 的情形

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) 若A可逆，$\lambda \neq 0$ 为常数，则

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

(4) 若A，B 均为n阶可逆矩阵，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

证明： 因为 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$= AEA^{-1} = E$

所以 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

推广： 若A_1，A_2，…，A_m均为n阶可逆矩阵，则 $(A_1 A_2 \ldots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$

特别： 当 $|A| \neq 0$，有 $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ (m为正整数)

(5) $$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

这是因为 $|A^{-1}||A| = |E| = 1$

本章要点:

基于在后续章节中的应用，需要掌握如下内容:

- 矩阵表示方法
- 单位矩阵表示
- 矩阵运算特别是乘法
- 矩阵和行列式的不同