第四章第一次　补充作业题

1、设有 **4** 个独立工作的电子装置，其寿命 X_k 都服从参数为 θ 的指数分布。

（**1**）　若将这 **4** 个装置串连组成整机，求整机的平均寿命。

（**2**）　若将这 **4** 个装置并连组成整机，求整机的平均寿命。

2、设 X 和 Y 相互独立，且具有相同的分布 $N(0,1)$，试证明

$$E[\max(X,Y)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}。$$

3、 掷一次骰子，点数从 **1** 到 **6** 共六种情况。假定掷骰子时上述六种结果的出现是等概率的，那么不停掷骰子直到所有结果都出现为止，求所需抛掷次数 X 的数学期望 $E(X)$。

(提示：利用数学期望的“线性”性质，计算会简单一些。)

4、 设两个随机变量 X，Y 都满足 $N(0,1)$分布且相互独立，求随机变量|X-Y |的方差。（备注：此处用到性质“**如果随机变量 X，Y 分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且相互独立，则 $aX+bY$ 服从正态分布 $N(a\mu_1+b\mu_1,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$。**”）

（方法 4）

$$E\left[\max(X,Y)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\max(x,y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$\underline{\underline{\text{交换积分次序}}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dydx+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$\underline{\underline{\text{变量替换}}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\left[\int_{y}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]dy\qquad=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{y}^{\infty}\right]dy\qquad=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy\qquad=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

5、 设某年龄段一位健康者（一般体检未发现病症）在 10 年内活着或自杀身亡的概率为 p ($0<p<1$，p 已知)，在 10 年内非自杀死亡的概率为 1-p。保险公司开办 10 年人寿保险，参加者需交保险费 a 元(已知)。若 10 年内非自杀死亡，保险公司赔偿 b 元（$b>a$）。问 b 应如何定，才能使保险公司期望获益？若有 m 人参加保险，保险公司可期望从中收益多少元？

解：当 $b<\dfrac{a}{1-p}$ 能使保险公司期望获益。若有 m 人参加保险，

保险公司可期望从中收益 $m(a-b+bp)$ 元。

6、 掷一次骰子，点数从 1 到 6 共六种情况。假定掷骰子时上述六种结果的出现是等概率的，那么不停掷骰子直到所有结果都出现为止，求所需抛掷次数 X 的数学期望 $E(X)$。

(提示：利用数学期望的“线性”性质，计算会简单一些。)

解：记 X_i 为投掷骰子在出现第 i-1 种不同结果后，再投掷骰子直到第 i 种不同结果出现所需的投掷次数。则有

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \text{。}$$

容易看出每一个 X_i 都是满足几何分布的随机变量，且 X_i 对应的几何分布的参数为 $p_i = \frac{6-i+1}{6}$，因此有 $E\left(X_i\right) = \frac{6}{6-i+1}$，故

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) + E(X_6)$$

$$= \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14.7 \text{。}$$