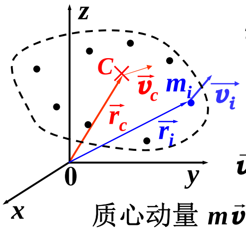
§4.6质心运动定理

（theorem of motion of center of mass）

一、质心运动定理



$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

$\vec{v}_C$是质点系的“平均”速度

质心动量 $m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i =$ 总动量 $\vec{P}$

即质点系的总动量 $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_C}$

由 $\vec{F}_{外} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) = m\frac{d\vec{v}_C}{dt}$

有 $\boxed{\vec{F}_{外} = m\vec{a}_C}$ — 质心运动定理

质心的运动如同一个在质心位置处的质点的运动，该质点集中了整个质点系的质量和所受的外力。在质点力学中所谓“物体”的运动，实际上是物体质心的运动。

注意

1、一个系统中，只有质心具有这个特性，其它点没有这个特性。这正是质心的特殊之处。

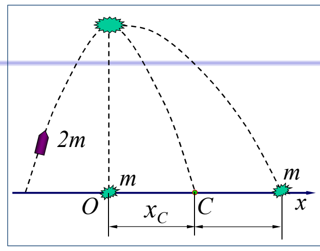
2、系统内力不会影响质心的运动,例如:

▲在光滑水平面上滑动的扳手，其质心做匀速直线运动

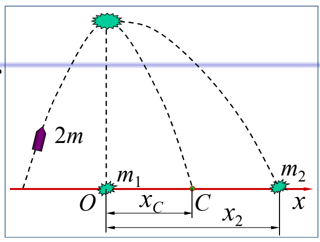
▲做跳马落地动作的运动员尽管在翻转，但其质心仍做抛物线运动

▲爆炸的焰火弹虽然碎片四散，但其质心仍在做抛物线运动

例 设有一质量为2*m*的弹丸，从地面斜抛出去，它飞行在最高点处爆炸成质量相等的两个碎片，其中一个竖直自由下落，另一个水平抛出，它们同时落地．问第二个碎片落地点在何处?



解 选弹丸为一系统，爆炸前、后质心运动轨迹不变．建立图示坐标系，



$m_1 = m_2 = m$

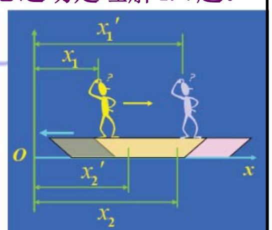
$x_1 = 0$

x_C为弹丸碎片落地时质心离原点的距离

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad x_2 = 2x_C$$

书中例题4.14（P.166）用质心运动定理解4.7题。

解：人和船组成质点系，在水平方向上外力为0。根据质心运动定理，系统质心的加速度a_c=0。系统原来处于静止状态，人走动后，质心依然保持不变。



	走动前	走动后
人相对岸的位置坐标：	x_1；	x_1'
船的质心坐标：	x_2 ；	x_2'

走动前 $x_c = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$ 走动后 $x_c' = \frac{mx_1' + Mx_2'}{m+M}$

走动后的位置变化：
船相对岸移动了－S，　$x_2'=x_2-S$

人相对岸移动了l－S，$x_1'=x_1+l-S$

质心坐标保持不变：$x_c=x_c'$

$$\frac{mx_1+Mx_2}{m+M}=\frac{m(x_1+l-S)+M(x_2-S)}{m+M}$$

$$S=\frac{ml}{m+M}=\frac{50\times4}{50+150}=1(m)$$

人相对岸的距离：l－S＝4－1＝3

43

二．动量守恒与质心的运动

若合外力为零，则 $\begin{cases}\text{质点系动量守恒}\\ \vec{a}_C=0\rightarrow\vec{v}_C=\text{常矢量}\end{cases}$

若合外力分量为0，则 $\begin{cases}\text{质点系分动量守恒}\\ \text{相应的质心分速度不变}\end{cases}$

如：$\sum_i F_{ix}=0 \longrightarrow v_{Cx}=\text{常量}$

质点系动量守恒和质心匀速运动等价！

质心运动定理的局限性：仅给出质心加速度，未对质点系作全面描述.

44

三．质心（参考）系（frame of center of mass）

1．质心系

讨论天体运动及碰撞等问题时常用到质心系。

质心系是固结在质心上的平动参考系。

质心系不一定是惯性系。

质点系的复杂运动通常可分解为：

- 质点系整体随质心的运动
- 各质点相对于质心的运动 —— 在质心系中考察质点系的运动

45

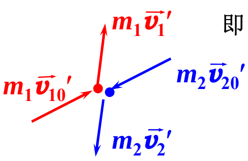
2. 质心系的基本特征

设m_i表示质点系中各质点的质量，$\vec{r}_i'$ 表示质点系各质点相对于质心系的位移，$\vec{v}_i'$ 表示质点相对于质心系的速度：

由于：$\boxed{\vec{r}_C=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}}$　则：$\boxed{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i'=0}$　$\boxed{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i'=0}$

即：$\sum m_i\vec{v}_i'=(\sum m_i)\vec{v}_C'=0$

质心系是零动量参考系(在此参考系中，系统的总动量为零。



质心系中看两粒子碰撞

两质点系统在其质心系中，总是具有等值、反向的动量。

46

Δ §3.10 质心系中的功能关系

一．克尼希定理（Konig theorem）

S'（质心系）：$\vec{v}_C'=0\rightarrow\sum m_i\vec{v}_i'=0$
（m_i，$\vec{v}_i'$）
$$E_k'=\sum\frac{1}{2}m_iv_i'^2$$

S（惯性系）：$E_k=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2$，
（$\vec{v}_i$，$\vec{v}_C$）
$$E_{kC}=\frac{1}{2}(\sum m_i)\,v_C^2$$
$$\vec{v}_i=\vec{v}_i'+\vec{v}_C$$

47

$$E_k=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i'+\vec{v}_C)\cdot(\vec{v}_i'+\vec{v}_C)$$
$$=\sum\frac{1}{2}m_iv_i'^2+\underbrace{(\sum m_i\vec{v}_i')}_{=0}\cdot\vec{v}_C+\frac{1}{2}(\sum m_i)v_C^2$$

所以 $\boxed{E_k=E_k'+E_{kC}}$ — 克尼希定理

质点系的总动能等于相对于质心系的动能加上随质心整体平移的动能

二．质心系中的功能原理

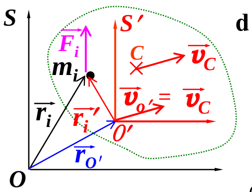
可以证明，质心系中功能原理仍然成立：

$$\begin{cases}\boxed{\mathrm{d}W_{外}'+\mathrm{d}W_{内非}'=\mathrm{d}E'} & \text{（微分形式）}\\ \boxed{W_{外}'+W_{内非}'=\Delta E'} & \text{（积分形式）}\end{cases}$$

48

[证明]　$dW_{内非} = dW'_{内非}$　（内力成对出现）

S系：$dW_外 + dW_{内非} = dE_k + dE_p = dE'_k + dE_{kC} + dE'_p$ （1）



$$dW_外 = \sum \vec F_i \cdot d\vec r_i$$
$$= \sum \vec F_i \cdot d\vec r_i' + \sum \vec F_i \cdot d\vec r_{O'}$$
$$= dW'_外 + (\sum \vec F_i)\cdot d\vec r_C$$
$$= dW'_外 + dE_{kC} \qquad (2)$$

S'系：$dW'_外 + dW'_{内非} \overset{(2)}{=} dW_外 - dE_{kC} + dW_{内非} \overset{(1)}{=} dE'_k + dE'_p = dE'$

$\to W'_外 + W'_{内非} = \Delta E'$

49

质心系中的功能原理成立，也可以简单地做如下的证明：

若质心系是惯性系，则功能原理必然成立。

若质心系是非惯性系，则还需考虑惯性力的功。

即：　$dW'_外 + dW'_{内非} + dW'_惯 = dE'$

设质心加速度为$\vec a_C$，则在质心系的惯性力做功为

$$dW'_惯 = \sum_i (-m_i \vec a_C)\cdot d\vec r_i' = -\vec a_C \cdot (\sum_i m_i \vec v_i')dt$$
$$= -\vec a_C \cdot m \vec v_C' \, dt = 0 \qquad (\because \vec v_C' = 0)$$

于是有 $dW'_外 + dW'_{内非} = dE' \to W'_外 + W'_{内非} = \Delta E'$

50

质心系中机械能守恒定律：

若 $dW'_外 = 0$ 且 $dW'_{内非} = 0$， 则 $E' =$ 常量。

不管质心系是否为惯性系，功能原理和机械能守恒定律都与惯性系中形式相同。

三. 质心系中两质点系统的动能

惯性系 S：m_1速度$\vec v_1$，m_2速度$\vec v_2$

$$\vec v_C = \frac{m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2}{m_1 + m_2}$$

$$E_{kC} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_C^2$$

51

质心系S'：

$$E'_k = E_k - E_{kC}$$
$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$
$$= \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec v_2 - \vec v_1)^2$$

令 $\vec v_2 - \vec v_1 = \vec v_r$ — 相对速度

$\boxed{\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu}$ — 约化质量（reduced mass）

则有　$\boxed{E'_k = \dfrac{1}{2}\mu v_r^2}$　相对（质心）动能。高能物理实验中称为资用能

52

$\boxed{\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu}$ 若 $m_2 >> m_1$ 则　$\mu \approx m_1$，$E'_k = \dfrac{1}{2} m_1 v_r^2$

例如对物体（m）— 地球（M_e）系统：

$M_e >> m$，　$\mu = m$，　$v_r = v_{m对地}$

地球 — 物体质心系中，地球和物体总动能为：

$$E'_k = \frac{1}{2}\mu v_r^2 = \frac{1}{2} m v_{m对地}^2$$

此即地心系中物体的动能，这就是我们讨论地球 — 物体系统的能量问题时，可以不考虑地球动能的道理。

53

2.资用能　$\boxed{E'_k = \dfrac{1}{2}\mu v_r^2}$

在高能物理研究微观粒子的结构和相互作用及反应机制时，有用的能量。

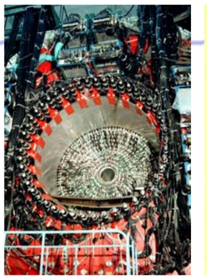
正负电子在对撞机里相向高速回旋、对撞，探测对撞产生的“碎片”——次级粒子

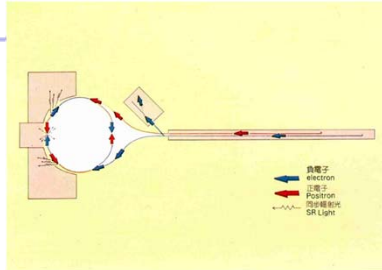
电子在对撞机里偏转时发生的一种光辐射——同步辐射，又可以把对分子和原子的研究

对撞机的优点：相对动能最大，资用能最多

54

每秒可实现对撞一亿多次



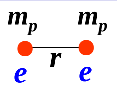


北京正负电子对撞机(BEPC);

2011年度国家最高科学技术奖得主 谢家麟

西欧联合核子中心的正负电子对撞机(LEP)

[例]已知：质子间相互作用电势能为$k\dfrac{e^2}{r}$，k为常量。两个质子从相距很远处分别以速率v_0和$2v_0$相向运动。



求：二者能达到的最近距离$r_{\min}$

解：两质子间只有保守内力作用，动能和静电势能之和守恒（忽略万有引力）。

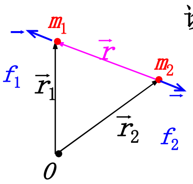
在质心系中两质子达到最近距离时，全部动能转化为静电势能。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_p}{2}\right)(3v_0)^2 = k\frac{e^2}{r_{\min}} \rightarrow r_{\min} = \frac{4ke^2}{9m_p v_0^2}$$

△ §3.11 两体问题

两物体在相互作用下的运动问题称两体问题，如：α 粒子被原子核散射，行星绕太阳运动等。这类问题可简化为单体问题处理。

设质点间的作用力为中心力，

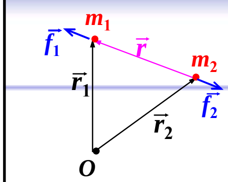


惯性系中的固定点

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = f(r)\vec{e}_r \qquad (1)$$

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -f(r)\vec{e}_r \qquad (2)$$

$m_2\times(1) - m_1\times(2)$:



$$m_1m_2\frac{d^2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{dt^2} = (m_1+m_2)f(r)\vec{e}_r$$

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(r)\vec{e}_r \qquad (3)$$

惯性系中的固定点

在中心力作用下质点 m_1 相对于 m_2 的运动，和一个质量为μ 受同样力作用的质点在固结于m_2的平动参考系（以m_2为原点）中的运动相同。这里固结于 m_2 的平动参考系虽然不是惯性系，但只要将m_1用μ代替，则牛顿第二定律就适用。

在两体问题中，对固结于其中一个质点的平动参考系来说，由于把另一质点的质量改为约化质量时牛顿定律成立，故动量和能量的定理也都适用。

前面 §10的例题中，也可按二体问题处理：选其中的一个质子为原点，则能量守恒关系为

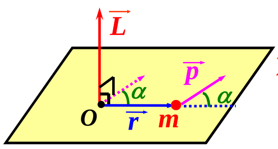
$$\frac{1}{2}\mu(3v_0)^2 = k\frac{e^2}{r_{\min}}$$

这和在质心系中的能量守恒方程完全一致。

§4.7 质点的角动量
（angular momentum of a particle）

一. 质点的角动量

角动量是质点运动中的一个重要的物理量，在物理学的许多领域都有着十分重要的应用。

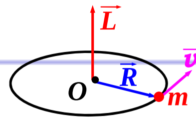


质点 m 对惯性系中的固定点O 的角动量定义为：

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times(m\vec{v})}$$

大小：$L = rp\sin\alpha = rmv\sin\alpha$，单位：$\mathrm{kg\cdot m^2/s}$

方向：⊥于$\vec{r}$，$\vec{p}$（$\vec{v}$）决定的平面（右螺旋）

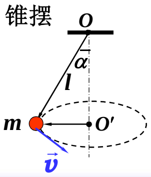


质点作匀速率圆周运动时，对圆心的角动量的大小为

$L = mvR$，方向⊥圆面不变。

同一质点的同一运动，其角动量却可以随固定点的不同而改变。例如：

锥摆



$\vec{L}_O = \vec{r}_{om} \times m\vec{v}$ $\begin{cases} L_O = lmv \\ \text{方向变化} \end{cases}$

$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{o'm} \times m\vec{v}$ $\begin{cases} L_{O'} = lmv\sin\alpha \\ \text{方向竖直向上不变} \end{cases}$

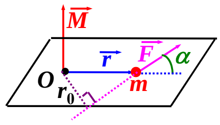
二．质点的角动量定理，力矩

由 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

有：$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$

定义力对定点 O 的力矩 (moment of force)为：



$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

$M = rF\sin\alpha = r_0 F$

$r_0 = r\sin\alpha$ 称力臂

于是有 $\boxed{\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}}$

或 $\boxed{d\vec{L} = \vec{M}\,dt}$

— 质点角动量定理（微分形式）

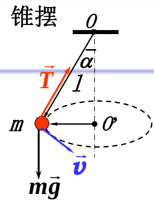
作用于质点的合外力对参考点 O 的力矩，等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率.

积分 $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$ —质点角动量定理（积分形式）

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,dt$ 称冲量矩

——力矩对时间的积累作用

[例1] 锥摆的角动量



对O点：力矩 $\vec{r}_{om} \times \vec{T} = 0$

$|\vec{r}_{om} \times m\vec{g}| = l\sin\alpha \cdot mg$

合力矩不为零，角动量变化。

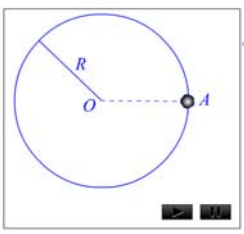
对O'点：$\vec{r}_{o'm} \times \vec{T} = \vec{r}_{o'm} \times (-m\vec{g}) \neq 0$

$\vec{r}_{o'm} \times m\vec{g} = -\vec{r}_{o'm} \times \vec{T}$

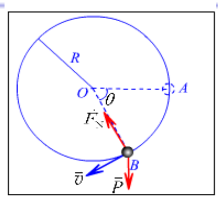
合力矩为零，角动量大小、方向都不变。

（合力不为零，动量改变！）

例2　一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内．一质量为 m 的小球穿在圆环上，并可在圆环上滑动．小球开始时静止于圆环上的点 A（该点在通过环心 O 的水平面上），然后从 A 点开始下滑．设小球与圆环间的摩擦力略去不计．求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度．



解　小球受力 $\vec{P}$、$\vec{F}_N$ 作用，$\vec{F}_N$ 的力矩为零，重力矩垂直纸面向里



$$M = mgR\cos\theta$$

由质点的角动量定理

$$mgR\cos\theta = \frac{dL}{dt}$$

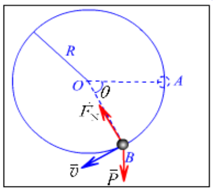
$$\therefore dL = mgR\cos\theta\,dt$$

考虑到 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t,\ L = mRv = mR^2\omega$

得$L\mathrm{d}L = m^2 gR^3 \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

由题设条件积分上式

$$\int_0^L L\mathrm{d}L = m^2 gR^3 \int_0^\theta \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$



得 $L = mR^{3/2}(2g\sin\theta)^{1/2}$

$\because L = mR^2\omega \qquad \therefore \omega = (\frac{2g}{R}\sin\theta)^{1/2}$

67