

## 关系部分-练习题

1. 设 $R = \{ \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle \}$ , 计算以下各小题。

(1)  $R^{-1}$ 。

(2)  $R \circ R$ 。

2. 设集合 $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{4, 6, 7\}$ ,  $C = \{8, 9, 12, 14\}$ ,  $R_1$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系,  $R_2$ 是由 $B$ 到 $C$ 的二元关系, 定义如下:

$$R_1 = \{ \langle a, b \rangle \mid a \text{ 是素数且 } a \text{ 整除 } b \} \quad R_2 = \{ \langle b, c \rangle \mid b \text{ 整除 } c \}$$

求复合关系 $R_1 \circ R_2$ , 并用关系矩阵表示。

3. 判断下列各关系是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性。

(1)  $R$ 是自然数集 $N$ 上的关系, 且 $xRy$ 当且仅当 $x+y$ 是偶数。

(2)  $R$ 是自然数集 $N$ 上的关系, 且 $xRy$ 当且仅当 $x > y$ 或 $y > x$ 。

(3)  $R$ 是自然数集 $N$ 上的关系, 且 $xRy$ 当且仅当 $|x| + |y| \neq 3$ 。

(4)  $R$ 是有理数集 $Q$ 上的关系, 且 $xRy$ 当且仅当 $y = x + 2$ 。

(5)  $R$ 是自然数集 $N$ 上的关系, 且 $xRy$ 当且仅当 $xy = 4$ 。

4. 设 $R$ 是 $A$ 上自反的关系,

(1) 证明 $R \circ R^{-1}$ 是 $A$ 上的自反关系。

(2) 证明 $R \circ R^{-1}$ 是 $A$ 上的对称关系。

(3)  $R \circ R^{-1}$ 是否为 $A$ 上的传递关系? 如果是, 给出证明; 如果不是, 给出反例。

5. 指出下面命题证明中的错误。

命题: 设 $R$ 是集合 $A$ 上的对称、传递的关系, 则 $R$ 是自反的。

证: 设 $x \in A$ , 根据对称性由 $\langle x, y \rangle \in R$ 得到 $\langle y, x \rangle \in R$ , 再使用传递性

得到 $\langle x, x \rangle \in R$ 。从而证明了 $R$ 的自反性。

6.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x - y \text{ 可被 } 2 \text{ 整除} \}$ , 简答以下各题。

(1) 画出 $R$ 的关系图。

(2)  $R$ 是否为 $A$ 上的等价关系? 如果是, 求出 $R$ 的各等价类。

7. 对于给定的集合 $A$ 和其上的二元关系 $R$ , 判断 $R$ 是否为等价关系。

(1)  $A$ 为实数集,  $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x - y = 2$ 。

(2)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x + y \neq 3$ 。

(3)  $A = \mathbb{Z}^+$ , 即正整数集,  $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow xy$ 是奇数。

(4)  $A = P(X)$ , 集合 $X$ 的基数 $|X| \geq 2$ ,  $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x \subseteq y \vee y \subseteq x$ 。

(5)  $A = P(X)$ , 集合 $X$ 和 $C$ 满足 $C \subseteq X$ ,  $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x \oplus y \subseteq C$ 。

8. 设 $A = \{a, b, c, d\}$ , 对于 $A$ 上的等价关系

$$R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle \} \cup I_A$$

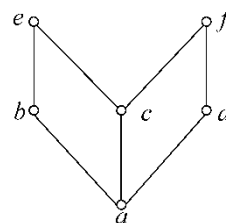
画出 $R$ 的关系图, 并求出 $A$ 中各元素关于 $R$ 的等价类。

9.  $R$ 为自然数集 $N$ 上的关系,  $\forall x, y \in N, xRy \Leftrightarrow 2|(x+y)$ , 试确定 $R$ 引起的 $N$ 的划分。

10. 设 $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ , 在 $A$ 上定义二元关系 $R$ 如下:  $\langle \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \rangle \in R$ 当且仅当 $xv = yu$ , 证明 $R$ 是一个等价关系。

11. 给出模 6 同余关系, 并求出所有的模 6 同余类。

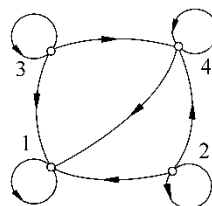
12. 图是偏序集 $\langle X, \leq \rangle$ 的哈斯图。



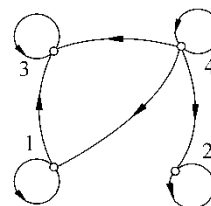
(1) 求 $X$ 和 $\leq$ 的集合表达式。

(2) 求该偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元。

13. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 图给出了 $A$ 上的两个偏序关系, 试画出它们的哈斯图, 并指出每个偏序集的极大元、最大元、极小元、最小元。



(a)



(b)