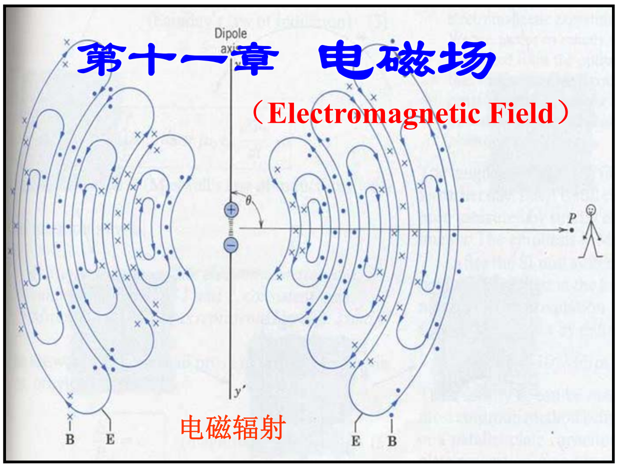
# 第十一章 电磁场

（Electromagnetic Field）




电磁辐射

## 本章目录





## 前 言

本章将全面介绍电磁场的基本规律 ——

麦克斯韦电磁场方程组，并阐明电磁波的性质和电磁场的相对性。

为比较集中地和简洁地给出这些规律。



## 电磁场方程组

回顾前几章的内容　　原因？

| | | |
|---|---|---|
| 电场 | 静电场 | 感生电场 |
| 空间存在 | 静止电荷 | $\frac{d\vec{B}}{dt}$ |
| 磁场 | 稳恒磁场 | 感生磁场？ |
| 空间存在 | 恒定电流 | $\frac{dE}{dt}$ ？ |

把安培环路定理推广到电流变化的回路时出现了矛盾

电流概念必须发展

完善宏观电磁场理论

## 里程碑 （在100年左右的时间）

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1785年 | Coulomb Law | | 静电规律 |
| 1791 | Volta电池 | | 动电规律 |
| 1820 | Oersted | 电➔磁 | 稳恒磁场 |
| 1831年 | Faraday | | 电磁感应 |
| 1865年 | Maxwell | | 完善 |

本章思路：

矛盾 ➔ 推广 ➔ 假设 ➔ 完善

## 11.1 位移电流 Displacememt current

一. 关于 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i内传导电流}$

1. 从稳恒电路中推出

最初目的：避开磁化电流的计算

2. 传导电流

（电荷定向移动） 热效应 产生磁场

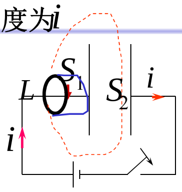
3. $\sum_i I_{i内}$ 内： 与回路套连的电流

取值:通过以L为边界的任一曲面的电流

## 在电容器充电过程中出现了矛盾

在某时刻 回路中传导电流强度为$i$

取L 如图




计算H的环流 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} =$

取$S_1$ $\sum_i I_{i内} = i$

取$S_2$ $\sum_i I_{i内} = 0$

思考之一：场客观存在 环流值必须唯一

思考之二：定理应该普适

假设：电容器内存在一种类似电流的物理量

## 麦克斯韦假设位移电流的存在，提出全电流的概念，

把安培环路定理推广到非恒定情况下也适用，

得到安培环路定理的普遍形式。

二. 位移电流 全电流 全电流定理

1. 位移电流

平板电容器内部存在一个物理量

可以产生磁场

起着电流的作用 应是电流的量纲

## 在充放电过程中，平行板电容器内有哪些物理量？

$t$ 时刻有

$\vec{E}$ $\boxed{\phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$ $\dfrac{d\vec{E}}{dt}$ $\dfrac{d\phi_E}{dt}$

$\vec{D}$ $\boxed{\phi_D = \int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}}$ $\dfrac{d\vec{D}}{dt}$ $\dfrac{d\phi_D}{dt}$

分析各量的量纲 $\left[\dfrac{d\phi_D}{dt}\right] = [i]$

## 从量纲上进行寻找

$$[\vec{D}] = [\sigma] \qquad \left[\frac{d\vec{D}}{dt}\right] = \left[\frac{d\sigma}{dt}\right] = [J]$$

电流面密度

$$\left[\frac{d}{dt}\Phi_D\right] = \left[\frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}\right] = [I]$$

Maxwell 定义：

displacement current

$$\boxed{I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}}$$

## 定义

$$\boxed{I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}}$$

通过某个面积的位移电流就是通过该面积的电位移通量对时间的变化率(变化的电场)

$$\boxed{\vec{J}_d = \frac{d\vec{D}}{dt}}$$

位移电流的面密度

$$\boxed{I_d = \int_S \vec{J}_d\cdot d\vec{S}} \qquad \boxed{I_d = \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

## 2. 全电流定理

电流概念的推广 能产生磁场的物理量

1）传导电流 载流子定向运动 $I_0$

2）位移电流 $I_d$

$$I = I_0 + I_d$$

$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_{全}}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

电流概念的推广　　仅仅从产生磁场的能力上定义——仅此而已

其它方面均表现出不同

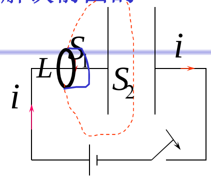
如在真空中

位移电流不伴有电荷的任何运动

所以谈不上产生焦耳热

---

用全电流定理就可以解决前面的充电电路中矛盾




$S_1$ 只有传导电流 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = i$

$S_2$ 只有位移电流 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_d$

平行板电容器板面积为S　$\Phi_D = DS = \sigma S = q$

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dq}{dt} = i$$

---

3. 位移电流的本质之认识

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$　　$\dfrac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0 \dfrac{d\vec{E}}{dt} + \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

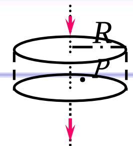
$\dfrac{d\vec{E}}{dt}$ 对应着感生磁场　完善麦的假设

$\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(nq\vec{l}) = nq\dfrac{d\vec{l}}{dt}$　改变电偶极矩

若 真空 $\vec{P} = 0$　$\dfrac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0 \dfrac{d\vec{E}}{dt}$

---

例 平板电容器　均匀充电




$\dfrac{dE}{dt} = c$　板半径为R

内部充满介质 $\varepsilon$　$\mu$

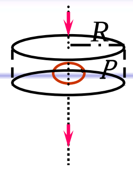
求：1) $I_d$（忽略边缘效应） 2) $\vec{B}_P (r \ll R)$

解：$I_d = \dfrac{d\Phi_D}{dt} = \dfrac{d}{dt}(D\pi R^2)$

$= \varepsilon \dfrac{dE}{dt}\pi R^2$

---

$$I_d = \varepsilon \frac{dE}{dt}\pi R^2$$




$\dfrac{dE}{dt} > 0$　$I_d$ 方向↓　充电

$\dfrac{dE}{dt} < 0$　$I_d$ 方向↑　放电

2) 过P点垂直轴线作一圆环

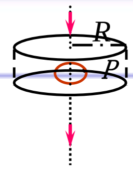
等效为位移电流均匀通过圆柱体

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H 2\pi r$$

---

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H2\pi r = \sum_{内} I_d$$

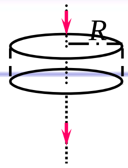
由全电流定理




$$\sum_{内} I_d = \pi r^2 \varepsilon \frac{dE}{dt}$$

$H = \dfrac{\varepsilon r}{2}\dfrac{dE}{dt}$　　$B = \mu H = \dfrac{\mu\varepsilon r}{2}\dfrac{dE}{dt}$

$H=\dfrac{\varepsilon r}{2}\dfrac{dE}{dt}$ $\quad B=\mu H=\dfrac{\mu\varepsilon r}{2}\dfrac{dE}{dt}$




忽略边缘效应

电容器内总位移电流 $I_d=\varepsilon\dfrac{dE}{dt}\pi R^2$

作一数量级估算　若 $r=R\quad R=0.1m$

$\varepsilon=\varepsilon_0\quad \mu=\mu_0\qquad \dfrac{dE}{dt}=10^{13}V/ms$

得 $\longrightarrow\quad I_d=2.78A\qquad B=5.56\times10^{-6}T$

由此看出：位移电流产生的磁场非常弱，只有在超高频情况下，才需要考虑位移电流产生的磁场。

---

讨论 全电流定理 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S \vec{J}_0\cdot d\vec{S}+\int_S\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

传导电流面密度　位移电流面密度

★S是以L为边界的任意面

✸电流的概念

就产生磁场而论　传导　位移　束缚电流

✸B的安培环路定理

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum_i I_{全电流}+\mu_0\sum_i I'_{束缚电流}$$

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$$

---

## 11.2 麦克斯韦方程组(Maxwell equations)

麦克斯韦对已有规律作了假设性的推广，得到了普遍的电磁场方程组。它的正确性得到了实践的肯定。 这是麦克斯韦继提出了感生电场、位移电流概念之后，对电磁场规律研究的又一大贡献。

设空间既有自由电荷和传导电流,又有变化的电场和磁场，同时还有电介质和磁介质。

21

---

### 一. 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\left.\begin{aligned}&\oint_L\vec{E}_{静}\cdot d\vec{l}=0\\&\oint_L\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}\end{aligned}\right\}\rightarrow\boxed{\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}}\quad(1)$$

$$\oint_S\vec{D}_{静}\cdot d\vec{s}=\int_V\rho_0\,dV\rightarrow\boxed{\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{s}=\int_V\rho_0\,dV}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\oint_L\vec{H}_{静}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{j}_0\cdot d\vec{s}\\&\vec{j}_d=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\rightarrow\boxed{\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S(\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{s}}\quad(3)$$

$$\oint_S\vec{B}_{静}\cdot d\vec{s}=0\quad\rightarrow\quad\boxed{\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{s}=0}\quad(4)$$

22

---

(1) - (4)是积分形式的麦克斯韦方程组(Maxwell equations)。方程组形式上的不对称，是由于没有单独的磁荷，也没有相应于传导电流的“磁流”。

该方程组在宏观领域证明是完全正确的，但在微观领域并不完全适用。那里需要考虑量子效应，从而建立更为普遍的量子电动力学。

除(1)-(4)外，预言粒子的运动还有洛仑兹力公式：$\boxed{\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}}$　(5)

23

---

可以证明：

$$\left.\begin{aligned}(2)\\(3)\end{aligned}\right\}\rightarrow\boxed{\oint_S\vec{j}_0\cdot d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\int_V\rho_0\,dV}$$

这正是电荷守恒定律的积分形式。

对各向同性介质还有如下三个补充关系：

$$\left.\begin{aligned}\vec{D}&=\varepsilon\vec{E}\\\vec{B}&=\mu\vec{H}\\\vec{j}_0&=\sigma\vec{E}\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

麦氏方程、洛伦兹力公式和介质方程三者构成经典电动力学的基础

24

## 二．麦克斯韦方程组的微分形式及界面关系

利用数学中的斯托克斯定理和高斯定理可证明：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \xrightarrow[\text{（斯）}]{} \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1)'$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_V \rho_0\, dV \xrightarrow[\text{（高）}]{} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \qquad (2)'$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{s} \xrightarrow[\text{（斯）}]{} \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (3)'$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \xrightarrow[\text{（高）}]{} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad (4)'$$

—— 麦克斯韦方程组的微分形式

25

补充：

1.数学上的定理

$\nabla$ 梯度

$\nabla\cdot$ 散度　算符

$\nabla\times$ 旋度

Gauss定理

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{A})dV$$

直角坐标系

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

Stokes定理

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

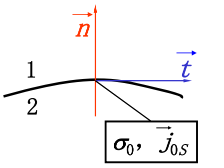
$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

26

### 3. 积分微分对应形式

| 积分形式 | 微分形式 |
|---|---|
| $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$ | $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$ |
| $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ | $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
| $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ | $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ |
| $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_0\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ | $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ |
| $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{A})dV$ | $\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$ |

在界面处场不连续，微分关系不能用了，要代之以界面关系：




$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} & (1)'' \\ D_{1n} - D_{2n} = \sigma_0 & (2)'' \\ H_{1t} - H_{2t} = (\vec{j}_{0S}\times\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_t & (3)'' \\ B_{1n} = B_{2n} & (4)'' \end{cases}$$

(1)′— (4)′和(1)″— (4)″ 构成了完备的方程组，在一定初始条件和边界条件下，就可以求解电磁场了。

28

## 11.3 电磁波（ electromagnetic wave）

### 一．电磁波的波动方程

麦克斯韦1865年预言了电磁波，1886年赫兹（Hertz） 用实验证实了电磁波的存在。

设在均匀无限大媒质中，$\rho_0 = 0$，$\vec{j}_0 = 0$，再考虑到 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$、$\vec{B} = \mu\vec{H}$，由麦克斯韦方程组有：

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & (1) \\ \nabla\cdot\vec{E} = 0 & (2) \\ \nabla\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (3) \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 & (4) \end{cases}$$

$\vec{E}$、$\vec{H}$ 的规律极对称

29

由(1)、(2)、(3)、(4)可得到电磁波的方程：

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} & (A) \\ \nabla^2\vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} & (B) \end{cases}$$

* [证(A)：$\frac{\partial}{\partial t}(3) \rightarrow \nabla\times(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) = \varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$　(C)

由(1)和(C) $\rightarrow -\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

由矢量微分公式 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$

和(2)，则(C)成为：$\nabla^2\vec{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$，得证。]

30

设： $\vec{E}=\vec{E}(x,t)$、$\vec{H}=\vec{H}(x,t)$

由(A)、(B)可得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的一维波动方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}=\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} & (5) \\ \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2}=\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} & (6) \end{cases}$$

其中 $\boxed{u=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$ （波速） (7)

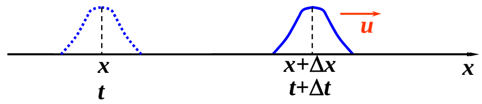
波动方程(5)、(6)的一般解的函数形式为：

31

$$\begin{cases} \vec{E}(x,\ t)=\vec{E}_1(t-\dfrac{x}{u})+\vec{E}_2(t+\dfrac{x}{u}) & (8) \\ \vec{H}(x,\ t)=\vec{H}_1(t-\dfrac{x}{u})+\vec{H}_2(t+\dfrac{x}{u}) & (9) \end{cases}$$

(8)、(9)分别代入(5)、(6)就可证明满足方程。

(8)、(9)中的 $\vec{E}$、$\vec{H}$ 具有传播的性质：




以（$t-x/u$）为变量的是沿+$x$方向传播的波，

以（$t+x/u$）为变量的是沿$-x$方向传播的波。

32

例如对 $\vec{E}_1(t-\dfrac{x}{u})$，令 $u=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 则有：

$$\vec{E}_1(x+\Delta x,\ t+\Delta t)=\vec{E}_1(t+\Delta t-\frac{x+\Delta x}{u})$$

$$=\vec{E}_1(t+\Delta t-\frac{x}{u}-\Delta t)=\vec{E}_1(t-\frac{x}{u})=\vec{E}_1(x,\ t)$$

即$t$时刻在 $x$ 处的 $\vec{E}_1$，经过时间间隔 $\Delta t$ 后，以速度 $u$ 沿 $x$ 方向传到了 $x+\Delta x$ 的位置。

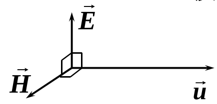
沿 $x$ 方向传播的平面简谐波的方程为：

$$\begin{cases} \vec{E}(x,\ t)=\vec{E}_0\cos\omega(t-\dfrac{x}{u}) \\ \vec{H}(x,\ t)=\vec{H}_0\cos\omega(t-\dfrac{x}{u}) \end{cases}$$

33

## 二．电磁波的性质

1. $\vec{E}\perp\vec{H}$
2. $\vec{E}\times\vec{H}\ //\ \vec{u}$ —波传播方向




即电磁波是横波

（transverse wave）

3. $\sqrt{\mu}H=\sqrt{\varepsilon}E$
4. 波速：$u=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\dfrac{c}{n}$

$n$为介质的折射率，$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\approx\sqrt{\varepsilon_r}$（非铁磁质）

34

## 三．电磁波的能量和动量

1. 能量密度 （energy density）

电磁场能量密度：$w=w_e+w_m$

对各向同性介质：$w=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2+\dfrac{1}{2}\mu H^2$

对电磁波：$H=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}E$，

$$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\mu\cdot\frac{\varepsilon}{\mu}E^2=w_e$$

$$\therefore\ w=2w_e=\varepsilon E^2=\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H\cdot E=\frac{EH}{u}$$

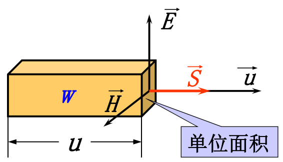
35

2. 能流密度 （energy flow density）

能流密度$S$：单位时间内，通过垂直波传播方向的单位面积的能量。

能流密度矢量：

$$\vec{S}=S\cdot\vec{e}_u=wu\cdot\vec{e}_u=EH\cdot\vec{e}_u=\vec{E}\times\vec{H}$$

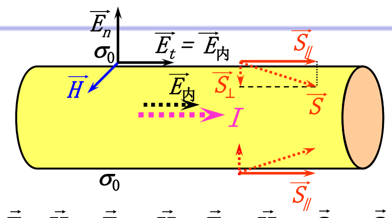



也叫坡印廷矢量

（Poynting vector）

36

在输电线上电磁能量是沿导线由电磁场传输的：




$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \vec{E}_n\times\vec{H} + \vec{E}_t\times\vec{H} = \vec{S}_{//} + \vec{S}_\perp$$

$\vec{S}_{//} = \vec{E}_n\times\vec{H}$ 沿导线由电源传向负载；

$\vec{S}_\perp = \vec{E}_t\times\vec{H}$ 沿导线径向由外向内传播，以补偿导线上的焦耳热损耗。

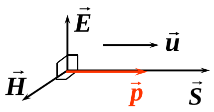
37

## 3. 动量密度（momentum density）

电磁波的质量密度 $m = \dfrac{w}{c^2} = \dfrac{EH}{c^2 u}$

电磁波的动量密度 $\vec{p} = m\vec{u}$

$$= \frac{1}{c^2}\vec{E}\times\vec{H}$$



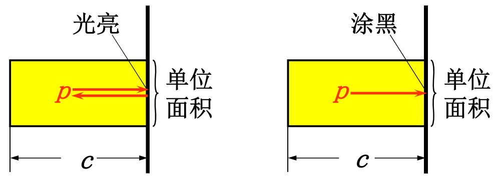

$$= \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$p = \frac{EH}{c^2}$$

38

## 辐射压强（光压）$p_r$

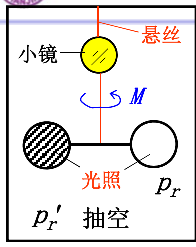
设真空中电磁波⊥入射：




$p_r = 2p\cdot c = 2\dfrac{EH}{c}$　　$p_r' = p\cdot c = \dfrac{EH}{c}$

39

1899年列别捷夫首次测定了光压。

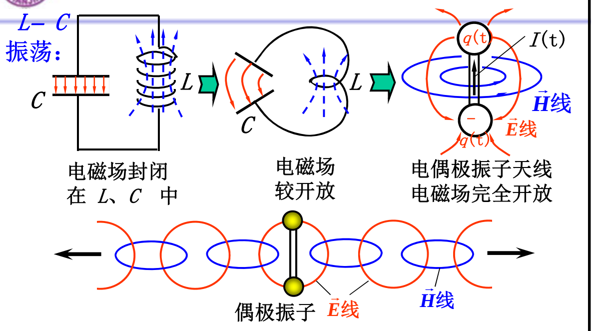



离100W灯泡1m， $p_r \sim 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2}$

一般很难观察到光压。但光压在极大和极小的尺度上却起到重要的作用。如：恒星光压与引力相平衡，使恒星保持一定的体积；在太阳辐射压的作用下，彗星的彗尾总是向背离阳光的方向伸展；光子与自由电子碰撞产生的康普顿效应也表明，电磁波确实存在动量。

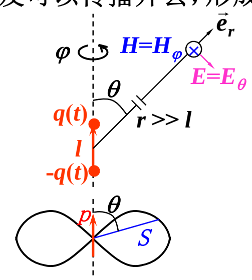
40

## 11.4 电磁辐射( electromagnetic radiation)




41

在开放的空间中，电磁场的变化和相互激发可以传播开去，形成脱离开场源的电磁辐射。




解麦克斯韦方程，

（$r>>l$，$r>>\lambda$）有：

$$E = E_\theta = \frac{\ddot{p}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \propto \frac{1}{r},$$

$\ddot{p} = \dfrac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2}$　在辐射区

$$H = H_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_\theta$$

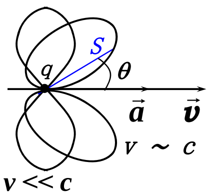
辐射能流密度：$S = EH = \dfrac{(\ddot{p})^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2} \propto \dfrac{1}{r^2}$

42

电荷振动造成 $p$ 的变化 ： $\ddot{p} = q\dfrac{d^2 l}{dt^2} = qa$

这说明电荷加速运动就会辐射电磁场。

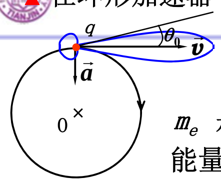
▲ 在直线加速器中$\vec{a} \,//\, \vec{v}$， 能流密度 $S$ 的分布如图示：




带电粒子速度 $v$ 越高，能量辐射越向前倾。



▲在环形加速器中$\vec{a} \perp \vec{v}$， $S$的分布如图示。




计算表明，对电子有：

辐射角宽度 $\theta_0 \approx m_e c^2 / E$

$m_e$ 是电子静质量，$E$是电子能量

能量$E \uparrow \rightarrow$ 辐射角宽度 $\theta_0 \downarrow$

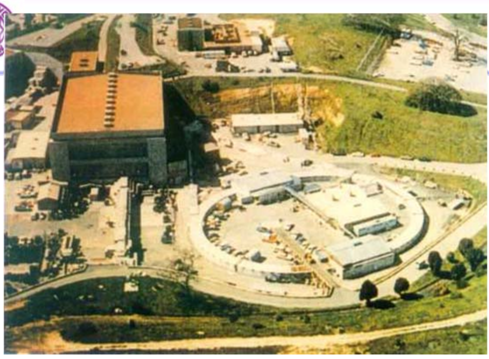
BEPC： $E$ = 2.8 GeV，$\theta_0 \sim 2 \times 10^{-4}$ rad ；

有一种同步加速器专门产生这种辐射

— 同步辐射 （synchrotron radiation），

这是一种新型光源，强度极高、方向性好。





北京正负电子对撞机（BEPC）

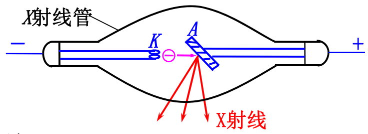
（储存环周长240m，电子最大能量 2.8GeV）



▲ 韧致辐射（deceleration radiation ）

带电粒子射入物质中要引起电离，损失能量，从而产生加速度。这样形成的辐射叫韧致辐射。

电子打入金属靶产生的韧致辐射就是X射线。




$K$ — 阴极，$A$— 阳极（钼、钨、铜等金属）

$A$ — $K$ 间加几万伏高压，以加速阴极发射的热电子

X射线波长 $\lambda$ ： $10^{-1}$ — $10^{2}$Å



## *△11.5 A–B效应

长直密绕载流螺线管外$\vec{B}$ = 0，但 $\vec{E}_{感} \neq 0$，

从近距作用的观点看，必须承认螺线管外有磁场。也就是说， 除$\vec{B}$ 之外一定还有其他的物理量能描写磁场。

在矢量运算中有恒等式： $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$

$\because \vec{B}$ 满足 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$，$\therefore$一定存在一个矢量函数 $\vec{A}$，

使得有关系式： $\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$

$\vec{A}$ — 磁场的矢量势



由$\vec{B} = \int_L \dfrac{\mu_0 I \, d\vec{l} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} = \nabla \times \vec{A}$，可得到$\vec{A} = \int_L \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r} d\vec{l}$。

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

$$= -\frac{d}{dt}\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_L \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{l}$$

斯托克斯定理

由于$L$可以任选，所以上式必然给出如下关系：

$$\boxed{\vec{E}_{感} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

理论计算给出，在长直密绕载流螺线管外虽 $\vec{B}=0$，但是却有$\vec{A}\neq 0$。这说明长直密绕载流螺线管外存在着磁场的作用。也说明 $\vec{A}$ 有其实际的物理意义。现代的实验也证实了这一点。

同样，电场中的电势 $\varphi$ 也具有实际的物理意义。

$\varphi$ 和$\vec{A}$都有直接的物理效应，称为A–B效应。

A–B效应在量子理论中有着重要的意义。 在量子电动力学的普遍理论中，标量势$\varphi$和矢量势$\vec{A}$是较电场强度 $\vec{E}$ 和磁感强度$\vec{B}$更基本的物理量。

49

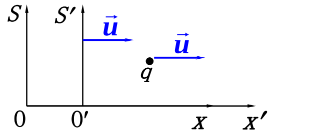
## 11.6 电场和磁场的相对性

电场和磁场也有相对性。

例如：

$S'$中只有静电场，

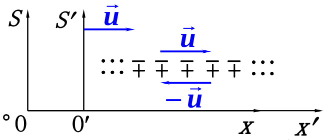
$S$ 中电场磁场皆有。




再如：

$S$ 中只有磁场，

$S'$中电场磁场皆有。




50

### 一．基本依据

1. 电量的相对论不变性。

2. 电场强度定义：$\boxed{\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}}$ （$q_0$ 静止）

电场力 $\boxed{\vec{F}=q\vec{E}}$ （$q$ 可以运动）

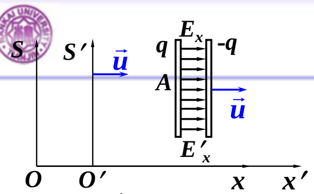
3. 高斯定理（律）$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$

（$q$可以运动， $\vec{E}$ 可以随时间变化）

### 二．电场的相对论变换

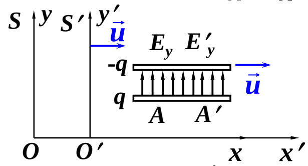
只由一个特例来分析：

51




$\because\ \sigma=\dfrac{q}{A}=\sigma'$

$\therefore\ E_x \underset{高}{=} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}=E'_x$




$\because\ q=q'$

$A=A'\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}=\dfrac{A'}{\gamma}$

$\therefore\ \sigma=\dfrac{q}{A}=\dfrac{q'}{A'/\gamma}=\gamma\sigma'$

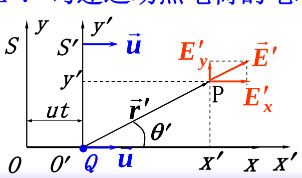
$\therefore\ E_y=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\gamma\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}=\gamma\,E'_y$， 同理 $E_z=\gamma E'_z$

52

普遍的 $\vec{E}'$（静止电荷的场强）和 $\vec{E}$ （运动电荷的场强）的变换关系也是：

$$\boxed{\begin{aligned}E_x&=E'_x\\E_y&=\gamma E'_y\\E_z&=\gamma E'_z\end{aligned}}\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

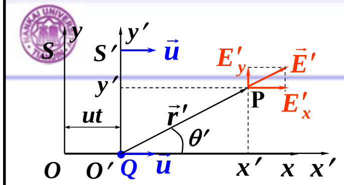
### 三．匀速运动点电荷的电场




$S'$ 中静电场强：

$$\vec{E}'=\frac{Q\cdot\vec{e}_{r'}}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

53




$$\vec{E}'=\frac{Q\cdot\vec{e}_{r'}}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

设场点P在 $x'o'y'$ 平面内($z'$=0)，则在

S系中：
$$\left.\begin{aligned}E_x&=E'_x=\frac{Q\,x'}{4\pi\varepsilon_0(x'^2+y'^2)^{3/2}}\\E_y&=\gamma E'_y=\frac{\gamma\,Q\,y'}{4\pi\varepsilon_0(x'^2+y'^2)^{3/2}}\end{aligned}\right\}\qquad(A)$$

洛仑兹变换

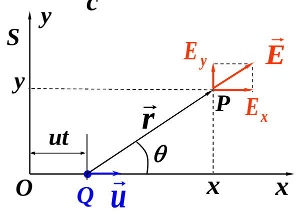
满足相对论基本原理的变换

$$\left.\begin{aligned}x'&=\gamma(x-ut)\\y'&=y\end{aligned}\right\}\qquad(B)$$

54

(B) → (A) 得：

$$\vec{E}=\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot\frac{Q\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overset{令}{=}K(\frac{u}{c},\theta)\cdot\frac{Q\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$




$\sin\theta=\frac{y}{r}$，

在 $u$，$r$ 一定时，

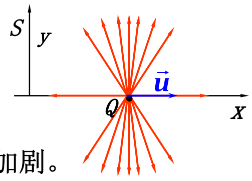
$\theta\downarrow\rightarrow K(\frac{u}{c},\theta)\downarrow\rightarrow E\downarrow$



$Q$不变，由高斯定理知，$\vec{E}$ 线的总条数不变，

$\because\theta\downarrow\rightarrow K(\frac{u}{c},\theta)\downarrow\rightarrow E\downarrow$

$\therefore\vec{E}$ 线向横向集中。




$u\uparrow\rightarrow\vec{E}$ 线向横向集中加剧。

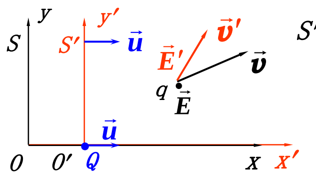
$\frac{u}{c}\rightarrow0$ 时，$K(\frac{u}{c},\ \theta)\rightarrow1$，$\vec{E}\rightarrow\frac{Q\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

（静电场）



## 四. 磁场的引入、匀速运动点电荷的磁场

由运动电荷的电场可进一步讨论运动电荷之间的作用，从而引入磁场的概念。




$S'$：$Q$ 静止→ 静电场$\vec{E}'$

$q$速度$\vec{v}'$ 只受电场力

$\vec{F}'=q\vec{E}'$　(1)

S：$q$速度$\vec{v}$ $Q$ 速度$\vec{u}$　$q$ 受作用力$\vec{F}=?$



由《力学》P336公式（6.52），有：

$$\left.\begin{aligned}F_x&=\frac{F'_x+\frac{u}{c^2}\vec{F}'\cdot\vec{v}'}{1+\frac{u}{c^2}v'_x}\\F_y&=\frac{F'_y}{\gamma(1+\frac{u}{c^2}v'_x)}\\F_z&=\frac{F'_z}{\gamma(1+\frac{u}{c^2}v'_x)}\end{aligned}\right\}\ (2)$$

由洛仑兹速度变换，有：

$$\left.\begin{aligned}v'_x&=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}\\v'_y&=\frac{v_y}{\gamma(1-\frac{u}{c^2}v_x)}\\v'_z&=\frac{v_z}{\gamma(1-\frac{u}{c^2}v_x)}\end{aligned}\right\}\ (3)$$



电场变换关系：

$$\left.\begin{aligned}E'_x&=E_x\\E'_y&=E_y/\gamma\\E'_z&=E_z/\gamma\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

将(1)、(3)、(4)式代入(2)式，经整理得：

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times(\frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E})$$

令 $\boxed{\vec{B}=\frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E}}$　称 $\vec{B}$ 为磁感强度

则 $\boxed{\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}}$ —— 洛仑兹力公式

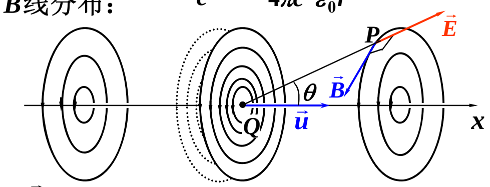
∴ 匀速运动点电荷的$\vec{B}$与 $\vec{E}$ 的关系式为：



$$\vec{B}=\frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E}=\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot\frac{Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{c^2\cdot4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

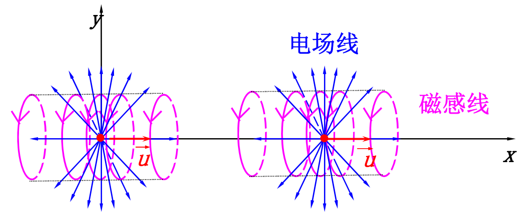
$$=K(\frac{u}{c},\ \theta)\frac{Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{4\pi c^2\varepsilon_0 r^2}$$

$\vec{B}$线分布：




$\vec{B}$线稀疏　$\vec{B}$线密集　$\vec{B}$线稀疏

高速运动的点电荷 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 相当于一个随电荷一起运动的电磁脉冲。




$t=0$时电磁脉冲的位置

$t>0$ 时电磁脉冲的位置



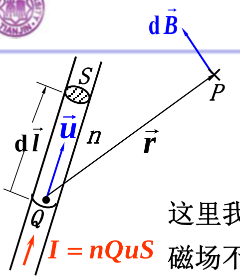
当 $u \ll c$ 时：$\vec{B}=\dfrac{Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{4\pi c^2\varepsilon_0 r^2}$

引入常量 $\mu_0=\dfrac{1}{c^2\varepsilon_0}$， 即 $c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$，

则有 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}$

把一段导线线元 $\mathrm{d}\vec{l}$ 中运动电荷产生的磁场相叠加，就得到毕 — 萨定律：






$$\mathrm{d}\vec{B}=nS\,\mathrm{d}l\cdot\frac{\mu_0 Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

$$=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

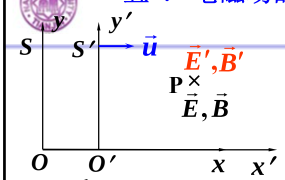
—— 毕 — 萨定律

这里我们看到，在一定的条件下，磁场不过是电场的相对论效应。

有关磁的规律，如 $\vec{B}$、$\vec{F}_m\ldots$都可由电场相应量的相对论变换给出。



## 五 ． 电磁场的相对论变换




$S'$：$\vec{E}'$，$\vec{B}'$
$S$：$\vec{E}$，$\vec{B}$ 　在同一点 P

由相对论变换可以得到：

$$\begin{cases}E_x=E'_x\\ E_y=\gamma(E'_y+uB'_z)\\ E_z=\gamma(E'_z-uB'_y)\end{cases}\qquad \begin{cases}B_x=B'_x\\ B_y=\gamma(B'_y-E'_z u/c^2)\\ B_z=\gamma(B'_z+E'_y u/c^2)\end{cases}$$

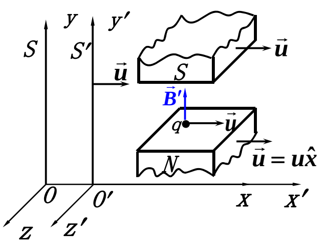
电磁场是个统一的整体。它们与参考系的选择有关，从而具有相对性。



最后由电磁场变换说明一个问题：

“洛仑兹力公式中的速度应是电荷相对观测者的速度”

只有承认这一点，才能给出图示电荷$q$在两个参考系中所受电磁力的合力皆为零的结果，而不出现矛盾。




$S'$：$q$ 静止，$\vec{B}'=B'\hat{y}$，

$\vec{v}'=0\ \rightarrow\ \vec{F}'_m=0$

$\vec{E}'=0\ \rightarrow\ \vec{F}'_e=0$

$\therefore\ \vec{F}'=\vec{F}'_m+\vec{F}'_e=0$



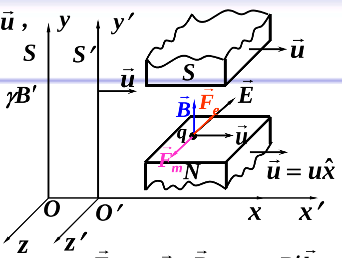
$S$：$q$ 运动，$\vec{v}=\vec{u}$，

$$\begin{cases}B_x=B'_x=0\\ B_y=\gamma(B'_y-\dfrac{u}{c^2}E'_z)=\gamma B'\\ B_z=\gamma(B'_z+\dfrac{u}{c^2}E'_y)=0\end{cases}$$

外磁场： $\vec{B}=\gamma B'\vec{j}$

$$\begin{cases}E_x=E'_x=0\\ E_y=\gamma(E'_y+uB'_z)=0\\ E_z=\gamma(E'_z-uB'_y)=-\gamma uB'\end{cases}$$

外电场：$\vec{E}=-\gamma uB'\vec{k}$




$\vec{F}_m=q\vec{u}\times\vec{B}=\gamma\,quB'\vec{k}$

$\vec{F}_e=q\vec{E}=-\gamma\,quB'\vec{k}=-\vec{F}_m$

$\therefore\ \vec{F}=\vec{F}_m+\vec{F}_e=0$

*电磁学全部结束*