概率论与数理统计历年真题（数一）

2012（数一）

（7）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 和参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}$ 等于（ ）

（A）$\frac{1}{5}$ （B）$\frac{1}{3}$ （C）$\frac{2}{5}$ （D）$\frac{4}{5}$

【答案】A

【解析】由题意可得 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-4y}, y>0 \\ 0, y\le 0 \end{cases}$，又 X 与 Y 相互独立，可得

联合概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-(x+4y)}, x>0, y>0 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$

$P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}=\iint\limits_{X-Y<0} f(x,y)dxdy=4\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_x^{+\infty} e^{-4y}dy=\frac{1}{5}$，故选（A）

（8）将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（ ）

（A）1 （B）$\frac{1}{2}$ （C）$-\frac{1}{2}$ （D）-1

【答案】D

【解析】设两段长度分别为 X,Y，则 $X+Y=1$，即 $Y=-X+1$，所以 $\rho_{XY}=-1$，选（D）

（14）设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$________

【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB\overline{C})}{1-\frac{1}{3}}$

而 $P(AB\overline{C})+P(ABC)=P(AB)=\frac{1}{2}$，而 $0\le P(ABC)<P(AC)=0$，故 $P(AB\overline{C})=\frac{1}{2}$

故 $P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$

（22）（满分 11 分）设离散型随机变量 X,Y 的联合分布律如下：

X \ Y	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

求（1）$P\{X=2Y\}$；（2）$Cov(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}

【解析】（1）$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{Y=1,X=2\}=\dfrac{1}{4}$

（2）$Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)=Cov(X,Y)-DY$

X 的分布律为

X	0	1	2
p	1/2	1/3	1/6

Y 的分布律为

Y	0	1	2
p	1/3	1/3	1/3

XY 的分布律为

XY	0	1	4
p	7/12	1/3	1/12

$EX=\dfrac{2}{3},DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{5}{9}$，$EY=1,DY=EY^2-(EY)^2=\dfrac{2}{3}$，$E(XY)=\dfrac{2}{3}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，因此$Cov(X-Y,Y)=-\dfrac{2}{3}$

所以$\rho_{XY}=0$

（23）（满分 11 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，

其中σ 是未知参数且$\sigma>0$，设$Z=X-Y$

（1）求 Z 的概率密度 $f_Z(z,\sigma^2)$

（2）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$

（3）证明 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计

【解析】（1）$EZ=EX-EY=0$，$DZ=DX+DY=3\sigma^2$

$$f_Z(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}\sigma}\exp\{-\frac{z^2}{2\cdot 3\sigma^2}\}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\exp\{-\frac{z^2}{6\sigma^2}\}$$

（2）似然函数$L(\sigma^2)=(\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma})^n\exp\{-\frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{6\sigma^2}\}$

$\ln L(\sigma^2)=-n\ln\sqrt{6\pi}\sigma-\frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{6\sigma^2}$，令$\frac{\partial\ln L(\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{6(\sigma^2)^2}=0$得

$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^n z_i^2$

（3）$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^n E(z_i^2)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^n[(Ez)^2+Dz]=\frac{1}{3n}(3n\sigma^2)=\sigma^2$

因此$\hat{\sigma}^2$是σ^2的无偏估计

2011 年（数一）

（7）设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（　　）

（A）$f_1(x)f_2(x)$　　（B）$2f_2(x)F_1(x)$　　（C）$f_1(x)F_2(x)$　　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

【答案】D

【解析】$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]dx=[F_2(x)F_1(x)]_{-\infty}^{+\infty}=1$

所以 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 是概率密度，其它的选项都不能满足此条件。

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 EUV 等于（ ）

（A）$EU\cdot EV$　（B）$EX\cdot EY$　（C）$EU\cdot EY$　（D）$EX\cdot EV$

【解析】B

【解析】$UV=\max\{X,Y\}\min\{X,Y\}=XY$

$EUV=EXY=EX\cdot EY$

（14）设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ ____________

【答案】$\mu(\sigma^2+\mu^2)$

【解析】由题意可知 $\rho_{XY}=0$，因为二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，所以 X 与 Y 相互独立，因此

$E(XY^2)=EX\cdot E(Y^2)=\mu(DY+(EY)^2)=\mu(\sigma^2+\mu^2)$

（22）设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	−1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2=Y^2)=1$

求（1）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（2）$Z=XY$ 的概率分布；

（3）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

【解析】（1）由 $P(X^2=Y^2)=1$ 可得 $P(X^2\neq Y^2)=0$，所以 (X,Y) 的概率分布如下表

X \ Y	-1	0	1
0	0		0
1		0	

再由X和 Y的概率分布可得(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

（2）XY的可能取值为$-1,0,1$

$Z=XY$的概率分布为

XY	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（3） $EX=\frac{2}{3}$，$EY=0$，$EX^2=\frac{2}{3}$，$EY^2=\frac{2}{3}$，$EXY=0$

$\rho_{XY}=0$

（23）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自正态总体$N(\mu_0,\sigma^2)$的简单随机样本,其中μ_0已知，$\sigma^2>0$未知，$\overline{X}$和S^2分别表示样本均值和样本方差

（1）求参数σ^2的最大似然估计$\hat{\sigma}^2$

（2）计算$E\hat{\sigma}^2$和$D\hat{\sigma}^2$

【解析】（1）似然函数 $L=f(x_1)\cdots f(x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}]$

取对数 $\ln L=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$

则令 $\frac{d\ln L}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^4}=0\Rightarrow\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$

（2）$\because Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 \sim \chi^2(n) \quad EY=n, DY=2n$

$$E\hat{\sigma}^2=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2]=\frac{\sigma^2}{n}EY=\sigma^2$$

$$D\hat{\sigma}^2=D(\frac{\sigma^2}{n}Y)=\frac{\sigma^4}{n^2}DY=\frac{2\sigma^4}{n}$$

2010 年（数一）

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2} & 0\le x\le 1\\ 1-e^{-x} & x>2\end{cases}$ ，则 $P\{X=1\}$ =（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　(D) $1-\mathrm{e}^{-1}$

【答案】C

【解析】 $P(X=1)=P(X\le 1)-P(X<1)=F(1)-F(1-0)=\frac{1}{2}-e^{-1}$

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，

$f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\le 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}$　$(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足（　　）

(A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$　　(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=2$

【答案】A

【解析】 利用概率密度的性质

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=a\int_{-\infty}^{0}f_1(x)dx+b\int_{0}^{+\infty}f_2(x)dx=a\cdot\frac{1}{2}+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{3}{4}$$

所以 $2a+3b=4$

(14) 设随机变量 X 概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，则 EX^2 =____________.

【答案】2

【解析】 $1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c}{k!}=ce\Rightarrow c=e^{-1}$　X 服从参数为 1 的泊松分布

$$EX^2=DX+(EX)^2=1+1^2=2$$

(22)（本题满分 11 分）设二维随机变量 $(X+Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

【解析】 为了利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[\frac{-(x-\mu)}{2\sigma^2}]dx=1$，把 $f(x,y)$ 配方得

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}=Ae^{-(y-x)^2}e^{-x^2}$$

$$= A\pi\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}\exp[\frac{-(y-x)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}]\}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}\exp[\frac{-x^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}]]$$

$$\therefore 1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = A\pi \qquad \therefore A = \frac{1}{\pi}$$

X 的边缘密度为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$,所以条件密度为

$$f_{Y\backslash X}(y\backslash x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}, -\infty < x, y < +\infty.$$

(23)(本题满分 11 分)设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中 $\theta \in (0,1)$ 未知, 以 N_i 来表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数

$(i=1,2,3)$, 试求常数 a_1, a_2, a_3, 使 $T = \sum_{i=1}^{3} a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

【解析】 因为 $N_1 \sim B(n,1-\theta)$, $N_2 \sim B(n,\theta-\theta^2)$, $N_3 \sim B(n,\theta^2)$,

$$ET = E(\sum_{i=1}^{3} a_i N_i) = a_1 n(1-\theta) + a_2 n(\theta-\theta^2) + a_3 n\theta^2$$

$$= a_1 n + (a_2 - a_1)n\theta + (a_3 - a_2)n\theta^2$$

因为 T 为 θ 的无偏估计量，所以 $ET = \theta$,即得

$$\begin{cases} na_1 = 0 \\ n(a_2 - a_1) = 1 \\ n(a_3 - a_2) = 2 \end{cases} \text{整理得} \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1/n \\ a_3 = 1/n \end{cases}$$

所以统计量 $T = 0 \times N_1 + \frac{1}{n}N_2 + \frac{1}{n}N_3 = \frac{1}{n}(N_2 + N_3) = \frac{1}{n}(n - N_1)$，所以

$$DT = \frac{1}{n^2}D(n - N_1) = \frac{1}{n^2}D(N_1) = \frac{1}{n}\theta(1-\theta)$$

2009 年（数一）

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F\left(x\right)=0.3\Phi\left(x\right)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi\left(x\right)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX=$（　）

(A) 0　　(B) 0.3　　(C) 0.7　　(D) 1

【答案】C

【解析】

随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=0.3\varphi(x)+0.35\varphi(\frac{x-1}{2})$

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}0.3x\varphi(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}0.35x\varphi(\frac{x-1}{2})dx$，令 $\frac{x-1}{2}=y$，则

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}0.7(2y+1)\varphi(y)dy=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}2y\varphi(y)dy+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)dy=0.7$

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N\left(0,1\right)$, Y 的概率分布为 $P\left\{Y=0\right\}=P\left\{Y=1\right\}=\frac{1}{2}$,　记 $F_Z\left(z\right)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,

则函数 $F_Z\left(z\right)$ 的间断点个数为（　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】B

【解析】

$F_z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}=P\{XY\le z，\ Y=0\}+P\{XY\le z,Y=1\}$

当 $z<0$ 时，$F_z(z)=P\{XY\le z,Y=1\}=P\{XY\le z|Y=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{2}P\{X\le z\}=\frac{1}{2}\Phi(z)$

当 $z\ge 0$ 时，$F_z(z)=P\{XY\le z，\ Y=0\}+P\{XY\le z,Y=1\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(z)$

因此 $z=0$ 为其间断点。

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B\left(n,p\right)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k=$____________.

【答案】-1

【解析】$E(\overline{X}+kS^2)=E(\overline{X})+kE(S^2)=np+knp(1-p)$

令 $np+knp(1-p)=np^2$，可得 $k=-1$

(22)(本题满分 11 分) 袋中有 1 个红色球, 2 个黑色球与 3 个白球, 现有回放地从袋中取两次,

每次取一球, 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $p\left\{X=1\middle|Z=0\right\}$.　(2) 求二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 概率分布.

【解析】（1） $P\{Z=0\}=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$

$P\{X=1,Z=0\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{36}$

于是　$P\{X=1|Z=0\}=\frac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\frac{4}{9}$

（2） (X,Y) 可能的取值为 $(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)$

$P\{X=0,Y=0\}=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$， $P\{X=0,Y=1\}=2\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{36}$

$P\{X=0,Y=2\}=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$， $P\{X=1,Y=0\}=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{36}$,

$P\{X=1,Y=1\}=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$， $P\{X=2,Y=0\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2,Y=2\}=0$

所以 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	9/36	12/36	4/36
1	6/36	4/36	0
2	1/36	0	0

(23) (本题满分 11 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x},x>0\\0,\text{其他}\end{cases}$,

其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知, X_1, X_2, $\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量.　　(2) 求参数 λ 的最大似然估计量.

【解析】（1） $EX=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^2e^{-\lambda x}d(\lambda x)=\frac{2}{\lambda}$

令 $EX=\overline{X}$ 即 $\overline{X}=\frac{2}{\lambda}$，故 λ 的矩估计为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$

（2）样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则似然函数为

$$L(\lambda)=\lambda^{2n}\prod_{i=1}^{n}x_i e^{-\lambda xi}$$

$$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+2n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

令 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ 得 $\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\overline{X}}$

则 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$

2008 年（数一）

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F\left(x\right)$，则 $Z=\max\left\{X,Y\right\}$ 的分布函数为（　　）

(A) $F^2\left(x\right)$　　(B) $F\left(x\right)F\left(y\right)$　　(C) $1-\left[1-F\left(x\right)\right]^2$　　(D) $\left[1-F\left(x\right)\right]\left[1-F\left(y\right)\right]$

【答案】A

【解析】设 Z 的分布函数为 $F_Z(x)$，则

$$F_Z(x)=P\{Z\le x\}=P\{\max\{X,Y\}\le x\}=P\{X\le x\}P\{Y\le x\}=F^2(x)$$

(8) 设随机变量 $X\sim N\left(0,1\right)$，$Y\sim N\left(1,4\right)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　　）

(A) $P\left\{Y=-2X-1\right\}=1$　　(B) $P\left\{Y=2X-1\right\}=1$

(C) $P\left\{Y=-2X+1\right\}=1$　　(D) $P\left\{Y=2X+1\right\}=1$

【答案】D

【解析】由于相关系数 $\rho_{XY}=1>0$，因此 $P\{Y=aX+b\}=1$ 且 $a>0$

$1=EY=E(aX+b)=aEX+b=b$，选（D）

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X=EX^2\right\}=$ ________.

【答案】$\dfrac{1}{2}e^{-1}$

【解析】依题意，$EX=DX=\lambda=1$ 又 $EX^2=DX+(EX)^2=2$ 于是有

$$P\{X=EX^2\}=P\{X=2\}=\frac{1^2}{2!}e^{-1}=\frac{1}{2}e^{-1}$$

(22)（本题满分 11 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为

$P\left\{X=i\right\}=\dfrac{1}{3}\left(i=-1,0,1\right)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，

记 $Z=X+Y$，　(1) 求 $P\left\{Z\le\dfrac{1}{2}\middle|X=0\right\}$.　(2) 求 Z 的概率密度.

【解析】(1) $P\{Z\le\dfrac{1}{2}\big|X=0\}=\dfrac{P\{Z\le\frac{1}{2},X=0\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{P\{X+Y\le\frac{1}{2},X=0\}}{P\{X=0\}}$

$$=\frac{P\{Y\le\frac{1}{2},X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{P\{Y\le\frac{1}{2}\}P\{X=0\}}{P\{X=0\}}=P\{Y\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{1/2}1\mathrm{dy}=\frac{1}{2}$$

（2）设Z的分布函数为$F_z(z)$

$$F_z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=P\{X+Y\le z\big|X=-1\}P\{X=-1\}+P\{X+Y\le z\big|X=0\}P\{X=0\}$$

$$+P\{X+Y\le z\big|X=1\}P\{X=1\}$$

$$=P\{Y\le z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\le z\}P\{X=0\}+P\{Y\le z-1\}P\{X=1\}$$

$$=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z-1\}$$

当$z<-1$时，$z+1,z,z-1$均小于 0，则$F_z(z)=0$

当$-1\le z<0$时，$z,z-1$均小于 0，则$F_z(z)=\frac{1}{3}\int_0^{z+1}1dy=\frac{1}{3}(z+1)$

当$0\le z<1$时，$F_z(z)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^z 1dy=\frac{1}{3}(z+1)$

当$1\le z<2$时，$F_Z(z)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{z-1}1dy=\frac{1}{3}(z+1)$

当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=1$，于是Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1\\ \frac{z+1}{3}, & -1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

⒇（本题满分 11 分）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体为$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本.

记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

(1)证明T是μ^2的无偏估计量.　　　　(2)当$\mu=0,\sigma=1$时，求DT.

证明：（1）要证T是μ^2的无偏估计量，只须证$ET=\mu^2$，事实上

$$ET=E(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}ES^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n(n-1)}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2)-n(\overline{X})^2]$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{1}{n-1}(EX^2-E\overline{X}^2)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{1}{n-1}(\sigma^2+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2)$$

$$=\mu^2$$

所以T是μ^2的无偏估计量.

（2）当$\mu=0,\sigma=1$时，$EX=0,DX=1$，$E\overline{X}=0,D\overline{X}=\frac{1}{n}$，由（1）可得$ET=\mu^2=0$

即$E(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=0$，因此$E(\overline{X}^2)=\frac{1}{n}ES^2$，从而可得$ES^2=1$

$$DT=D(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}DS^2$$

令$Y=\frac{\overline{X}}{1/\sqrt{n}}$，则$Y$服从标准正态分布，

$$EY^4=\int_{-\infty}^{+\infty}y^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y3}{\sqrt{2\pi}}d(-e^{-y^2/2})=3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y2}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy=3EY^2=3$$

由于$Y^4=n^2\overline{X}^4$所以$E\overline{X}^4=\frac{3}{n^2}$，$D(\overline{X}^2)=E(\overline{X}^4)-E(\overline{X}^2)^2=\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{2}{n^2}$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，从而可得$D[\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2]=2(n-1)$

所以$DS^2=2(n-1)\frac{1}{(n-1)^2}=\frac{2}{n-1}$

因此$DT=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}DS^2=\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2}{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}$

2007 年（数一）

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为（ ）

(A) $3p(1-p)^2$ (B) $6p(1-p)^2$ (C) $3p^2(1-p)^2$ (D) $6p^2(1-p)^2$

【答案】C

【解析】事件 A="第 4 次射击恰好第 2 次命中目标"表示共射击 4 次，其中前 3 次只有一次击中目标，且第 4 次击中目标，因此

$P(A)=C_3^1 p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度, 则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为（ ）

(A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$ (C) $f_X(x)\ f_Y(y)$ (D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

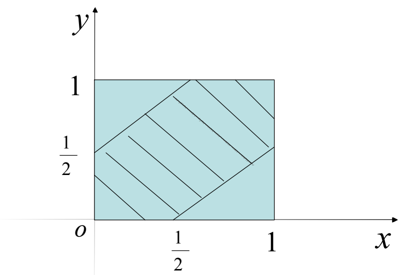
【答案】A

【解析】随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 则 X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow$ X,Y 相互独立

因此 $f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

【答案】$\dfrac{3}{4}$



【解析】本题考查几何概型。设所取的两个数分别为 x,y

设事件 A 表示两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ ，则样本空间为

$\Omega=\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}$,

事件 A 的样本点组成的集合如上图中阴影部分所示

$P(A)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

(23) (本题满分 11 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y,0<x<1,0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X>2Y\}$. (2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

【解析】（1） $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{X>2Y} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{X>2Y}(2-x-y)dxdy$

$$=\int_0^{1/2}dy\int_{2y}^1(2-x-y)dx=\frac{7}{24}$$

（2）解法一，分布函数法

先求 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$

当 $Z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $Z\geq 2$ 时，$F_Z(z)=1$

当 $0\leq Z<1$ 时，有

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leq z\}=\int_0^z dy\int_0^{z-y}(2-x-y)dx$$

$$=\int_0^z(2z-\frac{z^2}{2}-2y+\frac{y^2}{2})dy=z^2-\frac{z^3}{3}$$

当 $1\leq z<2$ 时，

$$P\{X+Y>z\}=\int_{z-1}^1 dy\int_{z-y}^1(2-x-y)dx=\int_{z-1}^1[\frac{1}{2}(1-z)(3-z)+y-\frac{y^2}{2}]dy$$

$$=\frac{1}{2}(1-z)(2-z)(3-z)+\frac{z}{2}(2-z)-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}(z-1)^3$$

$$=\frac{1}{3}(2-z)(4-4z+z^2)=\frac{1}{3}(2-z)^3$$

$$P\{X+Y\leq z\}=1-P\{X+Y>z\}=1-\frac{1}{3}(2-z)^3$$

于是 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z^2-\frac{z^3}{3}, & 0\leq z<1\\ 1-\frac{1}{3}(2-z)^3, & 1\leq z<2\\ 1, & z\geq 2\end{cases}$$

从而 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1\\ (2-z)^2, & 1\leq z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（2）解法二，用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

由于被积函数只有在 $0<x<1,0<z-x<1$ 即 $0<x<z<x+1<2$ 时不为 0，此时被积函数 $f(x,z-x)=2-x-(z-x)=2-z$

当$0<z<1$时，$f_Z(z)=\int_0^z(2-z)dx=z(2-z)$

当$1\le z<2$时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^1(2-z)dx=(2-z)^2$

于是Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2,\ 0<z<1\\(2-z)^2,1\le z<2\\0,\qquad 其它\end{cases}$$

(24)(本题满分 11 分)设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta},0<x<\theta\\\dfrac{1}{2(1-\theta)},\theta\le x<1\\0,其他\end{cases}$

$X_1,X_2\cdots,X_n$是来自总体x的简单随机样本, $\overline{X}$是样本均值

(1)求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$.　　　(2)判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量,并说明理由.

【解析】(1) $EX=\int_0^\theta\frac{1}{2\theta}xdx+\int_\theta^1\frac{x}{2(1-\theta)}dx=\frac{1+2\theta}{4}$

令$EX=\overline{X}$即$\frac{1+2\theta}{4}=\overline{X}$，于是可得参数$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}=\frac{4\overline{X}-1}{2}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$

(2) 判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量，就是要计算$4\overline{X}^2$的数学期望，并判断其是否等于被估计量θ^2

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^\theta\frac{x^2}{2\theta}dx+\int_\theta^1\frac{x^2}{2(1-\theta)}dx=\frac{\theta^2}{6}+\frac{1-\theta^3}{6(1-\theta)}=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}-\frac{4\theta^2+4\theta+1}{16}=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48}$$

$$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{DX}{n}+(EX)^2=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48n}+\frac{4\theta^2+4\theta+1}{16}\ne\frac{\theta^2}{4}$$

即$E(4\overline{X}^2)\ne\theta^2$，故$4\overline{X}^2$不是$\theta^2$的无偏估计量

2006 年（数一）

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,

则 $P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}$ =________.

【答案】$\frac{1}{9}$

【解析】$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(13) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B)>0$, $P(A|B)=1$, 则必有（　　）

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$

【答案】（C）

【解析】由题意可得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1\Rightarrow P(AB)=P(B)\Rightarrow B\subset A$$

故 $P(A\cup B)=P(A)$，

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$, 则（　　）

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$　　(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$

【答案】（A）

【解析】$\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$，$\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\sim N(01)$

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}\Leftrightarrow P\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\}>P\{\left|\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right|<\frac{1}{\sigma_2}\}$$

所以 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}$， $\sigma_1<\sigma_2$

(22) (本题满分 9 分) 随机变量 x 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/2,-1<x<0\\1/4,0\le x<2\\0,\text{其它}\end{cases}$$

令$Y=X^2$，$F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数.

求(1) Y的概率密度$f_Y\left(y\right)$.　(2) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

【解析】(1) 设Y的分布函数为$F_Y(y)$，由于$P\{-1<X<2\}=1$，所以$P\{0<Y<4\}=1$

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$；当$y\ge 4$时，$F_Y(y)=1$

当$0\le y<1$时，$-1<-\sqrt{y}\le 0$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X<0\}+P\{0\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=\frac{\sqrt{y}}{2}+\frac{\sqrt{y}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{y}$$

当$1\le y<4$时，$-\sqrt{y}\le -1, 1\le\sqrt{y}<2$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=P\{-1\le X<0\}+P\{0\le X\le\sqrt{y}\}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y}}{4}$$

于是Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y}}{4}, & 1\le y<4\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$$

Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) $F(-\frac{1}{2},4)=P\{X\le -\frac{1}{2},Y\le 4\}=P\{X\le -\frac{1}{2},X^2\le 4\}=P\{X\le -\frac{1}{2}\}=\frac{1}{4}$

(23)(本题满分 9 分)设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$，$X_1,X_2...,X_{\mathrm{n}}$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

记 N 为样本值 $x_1,x_2...,x_n$ 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

【解析】由题意，样本值 $x_1,x_2...,x_n$ 中小于 1 的个数为 N，其余 $n-N$ 的值大于或等于 1，因此似然函数为

$$L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$$

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{N}{\theta}-\dfrac{n-N}{1-\theta}=0$，解得 $\theta=\dfrac{N}{n}$

于是 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$

2005 年（数一）

(6) 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则

$P\{Y=2\}=$___________.

【答案】$\frac{13}{48}$

【解析】用全概率公式

$$P\{Y=2\}=P\{Y=2|X=2\}P\{X=2\}+P\{Y=2|X=3\}P\{X=3\}+P\{Y=2|X=4\}P\{X=4\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{48}$$

(13) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则（　　）

(A) $a=0.2,b=0.3$　　(B) $a=0.4,b=0.1$　　(C) $a=0.3,b=0.2$　　(D) $a=0.1,b=0.4$

【答案】B

【解析】由题意 $P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$

即 $P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$，所以 $a=(a+0.4)(a+b)$

又 $a+b=0.5$，所以 $a=0.4,b=0.1$

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，

S^2 为样本方差，则（　）

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

【答案】D

【解析】$\overline{X} \sim N(0,\frac{1}{n})$，$\frac{\overline{X}}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\overline{X} \sim N(0,1)$，所以（A）错

$(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$，（B）错；$\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$，（C）错

$\frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2 \Big/ (n-1)} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$，所以（D）正确

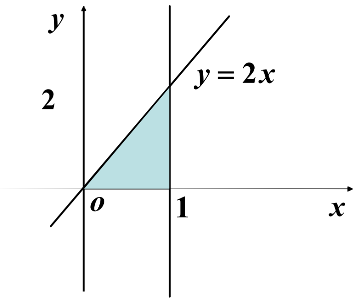
(22)(本题满分 9 分)设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1) (X,Y)的边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$.

(2) $Z = 2X - Y$的概率密度$f_Z(z)$.

【解析】 如图



（1）当$0 < x < 1$时，$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{2x} 1dy = 2x$，

所以$f_X(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_{y/2}^{1} 1dx = 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（2）先求Z的分布函数$F_Z(z)$

当$z \le 0$时，$F_Z(z) = 0$；当$z \ge 2$时$F_Z(z) = 1$

当$0 < z < 2$时，

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{2X - Y \le z\} = 1 - P\{2X - Y > z\}$$

$$= 1 - \iint_{2X-Y>z} f(x,y)dxdy$$

$$= 1 - \int_{z/2}^{1} dx \int_0^{2x-z} dy = 1 - (1 - z + \frac{z^2}{4}) = z - \frac{z^2}{4}$$

Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, 0<z<2\\ 0, \qquad \text{其它}\end{cases}$$

(23)(本题满分 9 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，

记 $Y_i=X_i-\overline{X}, i=1,2,\cdots,n.$

求：（1）Y_i 的方差 $DY_i, i=1,2,\cdots,n$.

（2）Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

【解析】（1）$DY_i=D(X_i-\overline{X})=D(X_i-\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j)=D[(1-\dfrac{1}{n})X_i-\dfrac{1}{n}\sum_{j\neq i}^{n}X_j]$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}DX_i+\frac{n-1}{n^2}$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}$$

（2）因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，而独立的两个随机变量的协方差等于零，于是有

$$Cov(Y_1,Y_n)=Cov(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})$$

$$=Cov(X_1,X_n)-Cov(X_1,\overline{X})-Cov(\overline{X},X_n)+D\overline{X}$$

$$Cov(X_1,\overline{X})=Cov(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}Cov(X_1,\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}DX_1=\frac{1}{n}$$

类似地，$Cov(\overline{X},X_n)=\dfrac{1}{n}$，又 $D\overline{X}=\dfrac{1}{n}$，所以有

$$Cov(Y_1,Y_n)=0-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}$$

2004 年（数一）

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\}$ = ________

【答案】e^{-1}

【解析】$DX = \frac{1}{\lambda^2}$， $P\{X > x\} = e^{-\lambda x}(x > 0)$

$P\{X > \sqrt{DX}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = e^{-1}$

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$,

若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于（　　）

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D) $u_{1-\alpha}$

【答案】C

【解析】$P\{|X| < x\} = \alpha \Rightarrow P\{< -x < X < x\} = \alpha \Rightarrow P\{X > x\} = \frac{1-\alpha}{2}$

$$\Rightarrow x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$$

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0.$

令 $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 则（　　）

(A) $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$

(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2$　　(D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n}\sigma^2$

【答案】A

【解析】$Cov(X_1, Y) = Cov(X_1, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}DX_1 = \frac{\sigma^2}{n}$

$$D(X_1 + Y) = D(X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = D[(1 + \frac{1}{n})X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i]$$

$$= \frac{(n+1)^2\sigma^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 = \frac{n+3}{n}\sigma^2 \neq \frac{n+2}{n}\sigma^2$$

$$D(X_1 - Y) = D(X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = D[(1 - \frac{1}{n})X_1 + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i]$$

$$=\frac{(n-1)^2\sigma^2}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\frac{n+1}{n}\sigma^2$$

(22)(本题满分 9 分)设 A,B 为随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B\mid A)=\frac{1}{3},P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,

令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$

求: (1)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

(2) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

【解析】$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}\Rightarrow P(AB)=\frac{1}{3}P(A)=\frac{1}{12}$

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(B)=2P(AB)=\frac{1}{6}$

(1) $P\{X=1,Y=1\}=P\{A\text{发生},B\text{发生}\}=P(AB)=\frac{1}{12}$

$P\{X=1,Y=0\}=P\{A\text{发生},B\text{不发生}\}=P(A\overline{B})$

$=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

$P\{X=0,Y=1\}=P\{A\text{不发生},B\text{发生}\}=P(\overline{A}B)$

$=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$

(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	2/3	1/12
1	1/6	1/12

(2)从(1)所求出 (X,Y) 的概率分布容易得出随机变量 X 与 Y 分别服从参数为 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{6}$ 的 0-1 分布

$EX=\frac{1}{4}$, $DX=\frac{3}{16}$, $EY=\frac{1}{6}$, $DY=\frac{5}{36}$

$EXY=P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{24}$$

因此X与Y的相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

(23)(本题满分 9 分)设总体X的分布函数为

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

其中未知参数$\beta>1, X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X$的简单随机样本,

求: (1) β的矩估计量.

(2) β的最大似然估计量.

【解析】(1) X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1}, x>1\\ 0, \quad x\le 1\end{cases}$

$$EX=\int_1^{+\infty}\beta x^{-\beta}dx=\frac{\beta}{-\beta+1}x^{-\beta+1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\beta}{\beta-1}$$

令$EX=\overline{X}$即$\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$可得$\beta$的矩估计量为$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

(2) 对于总体X的样本值$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 似然函数为

$$L(\beta)=\begin{cases}\beta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{-(\beta+1)}, x_i>1, i=1,2,\cdots,n\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

当$x_i>1$时, $L(\beta)>0$

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

对β求导, 得$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$得$\beta$的最大似然估计为$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

2003 年（数一）

(5)设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}6x & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，

则$P\{X+Y\le 1\}=$______ .

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{X+Y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x} \quad 6xdy=\frac{1}{4}$

(6)已知一批零件的长度X(单位:cm)服从正态分布$N(\mu,1)$,从中随机地抽取 16 个零件,得到长度的平均值为 40 (cm),则μ的置信度为 0.95 的置信区间是_________ .(注:标准正态分布函数值$\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95.$)

【解析】这是一个正态总体方差已知求期望值μ的置信区间问题，该类型置信区间公式为

$$I=(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda,\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda)$$

其中λ由$P\{|U|<\lambda\}=0.95$确定$(U\sim N(0,1))$，即$\lambda=1.96$

将$\bar{x}=40,\sigma=1,n=16,\lambda=1.96$代入上面估计公式，

得到μ的置信度为 0.95 的置信区间是（39.51,40.49）

(6)设随机变量$X\sim t(n)(n>1),Y=\frac{1}{X^2}$,则（　　）

(A)$Y\sim\chi^2(n)$　　(B)$Y\sim\chi^2(n-1)$　　(C)$Y\sim F(n,1)$　　(D)$Y\sim F(1,n)$

【答案】C

【解析】由$X\sim t(n)$可得，$X=\frac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}}$（其中$X_1\sim N(0,1)$，$Y_1\sim\chi^2(n)$）

从而$Y=\frac{1}{X^2}=\frac{Y_1/n}{X_1^2}=\frac{Y_1/n}{X_1^2/1}\sim F(n,1)$

十一 、(本题满分 10 分)
已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,
求: (1)乙箱中次品件数的数学期望.
(2)从乙箱中任取一件产品是次品的概率.
【解析】(1)记 X 为乙箱中次品件数,则 X 的可能取值有 0,1,2,3

$$P\{X=0\}=P\{从甲箱中取得都是正品\}=\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$$

$$P\{X=1\}=P\{从甲箱中取得两件正品，一件次品\}=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}$$

$$P\{X=2\}=P\{从甲箱中取得两件次品，一件正品\}=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}$$

$$P\{X=3\}=P\{从甲箱中取得三件次品\}=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$$

则 $EX=\frac{9}{20}\cdot 1+\frac{9}{20}\cdot 2+\frac{1}{20}\cdot 3=\frac{3}{2}$

(2)记事件 A 为“从乙箱中任取一件产品是次品”,则

$$P(A)=P(A|X=0)P\{X=0\}+P(A|X=1)P\{X=1\}$$
$$+P(A|X=2)P\{X=2\}+P(A|X=3)P\{X=3\}$$
$$=0+\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

十二 、(本题满分 8 分)设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0 & x\le\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,

记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1)求总体 X 的分布函数 $F(x)$.

(2)求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$.

(3)如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量,讨论它是否具有无偏性.

【解析】（1） $F(x)=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2(x-\theta)}dx=e^{2\theta}(1-e^{-2x}), & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$

（2） $F_{\hat\theta}(x)=P\{\hat\theta\le x\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le x\}$

$=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x\}$

$=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}$

$=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$

（3） $\hat\theta$的概率密度为

$$f_{\hat\theta}(x)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

$$E\hat\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat\theta}(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2n}\ne\theta$$

所以$\hat\theta$不是θ的无偏估计

2002 年（数一）

(5)设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 μ =____________.

【答案】4

【解析】方程$y^2+4y+X=0$无实根 $\Leftrightarrow 16-4X<0 \Rightarrow X>4$

根据题意 $P\{X>4\}=0.5$，由正态分布的对称性可知 $\mu=4$

(5)设 X 和 Y 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$,分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,则（　）

(A) $f_X(x)+f_Y(y)$ 必为某一随机变量的概率密度

(B) $f_X(x)\ f_Y(y)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_X(x)+F_Y(y)$ 必为某一随机变量的分布函数

(D) $F_X(x)\ F_Y(y)$ 必为某一随机变量的分布函数.

【答案】D

【解析】首先可以否定选项（A）与（C），因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x_1)+f(x_2)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_2)dx=2\neq 1$$

$$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2\neq 1$$

对于选项（B），若 $f_1(x)=\begin{cases}1,-2<x<-1\\0,其它\end{cases}$，$f_2(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,其它\end{cases}$，

则对任何 $x\in R$，$f_1(x)f_2(x)=0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1)f(x_2)dx=0\neq 1$，因此否定（C）

用排除法可知应选（D）

事实上，令 $X=\max(X_1,X_2)$，而 $X_i\sim f_i(x)\ (i=1,2)$，

则 X 的分布函数 $F(x)$ 正好是 $F_1(x)F_2(x)$

$$F(x)=P\{\max(X_1,X_2)\le x\}=P\{X_1\le x;X_2\le x\}$$

$$=P\{X_1\le x\}P\{X_2\le x\}=F_1(x)F_2(x)$$

十一、(本题满分 7 分)设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\le x\le \pi \\ 0 & 其它\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

【解析】$P\{X>\frac{\pi}{3}\}=\int_{\pi/3}^{+\infty}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$，依题意 Y 服从二项分布 $B(4,\frac{1}{2})$，则

$EY^2=DY+(EY)^2=npq+(np)^2=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(4\times\frac{1}{2})^2=5$

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ ($0<\theta<\frac{1}{2}$) 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3.

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

【解析】(1) $EX=2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)=3-4\theta$

令 $EX=\overline{X}$ 解得 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-EX)$

根据给定的观察值，$\overline{X}=\frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$

因此 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$

(2) 对于给定的样本值，似然函数为

$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$， $\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得方程 $12\theta^2-14\theta+3=0$，

解得 $\theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$ $(\theta=\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2},不合题意)$

于是 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

2001 年（数一）

(5)设随机变量的方差为 2,则根据切比雪夫不等式有估计

$P\{|X-E(X)|\geq 2\}\leq$ ____________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】根据切比雪夫不等式$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$，于是

$$P\{|X-E(X)|\geq 2\}\leq\frac{DX}{2^2}=\frac{1}{2}$$

(5)将一枚硬币重复掷n次,以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数, 则X和Y相关系数为 （　　）

(A) -1　　　　(B)0　　　　(C)$1/2$　　　　(D)1

【答案】A

【解析】由题意$X+Y=n$，即$Y=-X+n$，所以X和Y相关系数为-1

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为

$p(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立. Y为中途下车的人数,

求:(1)在发车时有n个乘客的条件下,中途有m人下车的概率.

(2)二维随机变量(X,Y)的概率分布.

【解析】问题（1）是个条件概率，即当$X=n$时，$Y=m$的概率$P\{Y=m|X=n\}$

由于上车的每位乘客下车与否是相互独立的，因此，Y的条件概率分布为二项分布

（1）$P\{Y=m|X=n\}=C_m^n p^m(1-p)^{n-m},0\leq m\leq n,n=0,1,2,\cdots$

（2）$P\{X=n.Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m|X=n\}$

$$=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot C_n^n p^m(1-p)^{n-m},0\leq m\leq n,n=0,1,2,\cdots$$

十二、(本题满分 7 分)

设X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本$X_1,X_2,\ldots,X_{2n}(n\geq 2)$,

其样本均值$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$,求统计量$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$的数学期望$E(Y)$.

【解析】易见随机变量$(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2}),\cdots,(X_n+X_{2n})$相互独立都服从正态分布

$N(2\mu,2\sigma^2)$，因此可以将他们看作是取自总体$N(2\mu,2\sigma^2)$的一个容量为n的简单随机样本，

其样本均值为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i = 2\overline{X}$$

样本方差为$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}Y$

因为样本方差是总体方差的无偏估计，故$E(\frac{1}{n-1}Y) = 2\sigma^2$，即$E(Y) = 2(n-1)\sigma^2$

2000 年（数一）

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)$=____________.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】由题意 $P(\overline{A}\overline{B})=\frac{1}{9}$，

$$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)\Rightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)=P(B)$$

又 A,B 相互独立，故 $\overline{A},\overline{B}$ 也相互独立，于是有

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[P(\overline{A})]^2=\frac{1}{9}\Rightarrow P(\overline{A})=\frac{1}{3}\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}$$

(5) 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为（　）

(A) $E(X)=E(Y)$　　　　(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$　　　　(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

【答案】B

【解析】ξ，η 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{\xi\eta}=0\Leftrightarrow Cov(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow Cov(X+Y,X-Y)=0$

$$\Leftrightarrow DX=DY$$

十二、（本题满分 8 分）

某流水线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$，各产品合格与否相对独立，当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

【解析】记 $q=1-p$，则 X 的概率分布为 $P\{X=i\}=pq^{i-1},i=1,2,\cdots$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}ipq^{i-1}=p\sum_{i=1}^{\infty}(q^i)'=p(\sum_{i=1}^{\infty}q^i)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty}i^2pq^{i-1}=p[q(\sum_{i=1}^{\infty}q^i)']'=p[\frac{q}{(1-q)^2}]'=p\frac{1+q}{(1-q)^3}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

十三、(本题满分 6 分)设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2\,\mathrm{e}^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0 & x\le\theta\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值, 求参数 θ 的最大似然估计值.

【解析】似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i>\theta(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当 $x_i>\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)>0$，取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$$

由于 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0$，所以 $L(\theta)$ 单调增加

由于 θ 必须满足 $\theta<x_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 θ 应满足 $\theta\le\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

因此 θ 的最大取值应是 $\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

故 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

1999 年（数一）

（5）设两两相互独立的三事件 A ，B 和 C 满足条件：$ABC=\phi$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，

已知$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则$P(A)=$ ________

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】由于A,B,C两两相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)$，所以

$P(AB)=P(A)P(B)=[P(A)]^2$，$P(AC)=P(A)P(C)=[P(A)]^2$

$P(CB)=P(C)P(B)=[P(A)]^2$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3P(A)-3[P(A)]^2$$

依题意，有$3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16}$，解方程得$P(A)=\frac{1}{4}$($P(A)=\frac{3}{4}$不合题意舍去)

(5)设两个相互独立的随机变量X与Y分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$，则（ ）

(A) $P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$ (B) $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$ (D) $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】若随机变量 U 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则一定有$P\{U\le\mu\}=P\{U\ge\mu\}=\frac{1}{2}$

而$E(X+Y)=EX+EY=1$， 因此选（B）

十二、设随机变量X与Y相互独立,下表列出了二维随机变量(X,Y)联合分布律及关于X和关于Y的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处

	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=P_i$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$P\{Y=y_j\}=P_j$	1/6			1

【解析】$P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$，又$X,Y$相互独立，所以

$P\{X=x_1,Y=y_1\}=P\{X=x_1\}P\{Y=y_1\}$ 即 $\frac{1}{24}=\frac{1}{6}P\{X=x_1\}\Rightarrow P\{X=x_1\}=\frac{1}{4}$

从而 $P\{X=x_2\}=\frac{3}{4}$

于是 $P\{X=x_1,Y=y_3\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$

$P\{X=x_1,Y=y_2\}=P\{X=x_1\}P\{Y=y_2\}$ 即 $\frac{1}{8}=\frac{1}{4}P\{Y=y_2\}\Rightarrow P\{Y=y_2\}=\frac{1}{2}$

因此 $P\{X=x_2,Y=y_2\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

$P\{X=x_2,Y=y_3\}=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$ $P\{Y=y_3\}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

将数值填入表中如下

	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=P_i$
x_1	1/24	1/8	1/12	1/4
x_2	1/8	3/8	1/4	3/4
$P\{Y=y_j\}=P_j$	1/6	1/2	1/3	1

十三、设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3} & 0<x<\theta\\ 0 & other\end{cases}$$，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，

（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$

【解析】（1）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{\theta}{2}$

令 $EX=\overline{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}$

（2）$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{6\theta^2}{20}$

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{6\theta^2}{20}-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{20}$$

$$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}DX=\frac{\theta^2}{5n}$$

1998 年（数一）

(5) 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成, 二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为____________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】先求 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$，设区域 D 的面积为 S_D，则依题意有

$$S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{e^2}=2，\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},(x,y)\in D\\ 0,(x,y)\notin D\end{cases}$$

其中 $D=\{(x,y)\big|1\le x\le e^2,0\le y\le\frac{1}{x}\}$

其次求关于 X 的边缘概率密度，当 $x<1$ 或 $x>e^2$ 时，$f_X(x)=0$；当 $1\le x\le e^2$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{4}$$

(5) 设 A,B 是两个随机事件, 且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$, 则必有（　　）

(A) $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$

(B) $P(A\mid B)\ne P(\overline{A}\mid B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$

(D) $P(AB)\ne P(A)P(B)$

【答案】C

【解析】依题意

$$P(B\big|A)=P(B\big|\overline{A})\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

事实上，由 $P(B\big|A)=P(B\big|\overline{A})$ 可以看出事件 A 发生与否对事件 B 的发生没有影响，所以事件 A,B 相互独立，选（C）

十三、（本题满分 6 分）设两个随机变量 X,Y 相互独立, 且都服从均值为 0、方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布, 求随机变量 $\left|X-Y\right|$ 的方差.

【解析】令 $Z=X-Y$，则 $EZ=EX-EY=0$，$DZ=DX+DY=1$，因独立正态变量的

线性组合仍服从正态分布，故$Z \sim N(0,1)$，为求$D|Z|$，需要先计算$E|Z|$

$$E|Z| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2/2} d(\frac{z^2}{2}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

$$E(|Z|^2) = E(Z^2) = DZ + (EZ)^2 = 1$$

$$D|X-Y| = D|Z| = E(|Z|^2) - (E|Z|)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$$

十四、(本题满分 4 分)

从正态总体$N(3.4, 6^2)$中抽取容量为n的样本, 如果要求其样本均值位于区间$(1.4, 5.4)$内的概率不小于 0.95, 问样本容量n至少应取多大?

附:标准正态分布表$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(x)$	0.900	0.950	0.975	0.990

【解析】设$\overline{X}$为样本均值，则有

$$\frac{\overline{X} - 3.4}{6}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$P\{1.4 < \overline{X} < 5.4\} = P\{\left|\frac{\overline{X} - 3.4}{6}\sqrt{n}\right| < \frac{2\sqrt{n}}{6}\} = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - 1$$

依题设有$2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - 1 \geq 0.95$

查表有$\frac{\sqrt{n}}{3} = 1.96$，于是$n \geq (3 \times 1.96)^2 = 34.6$

因此样本容量n至少应取 35

十五、(本题满分 4 分)

设某次考试的学生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取 36 位考生地成绩, 算得平均成绩为 66.5 分, 标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

附: t分布表$P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$

	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

【解析】设该次考试的考生的成绩为X，则$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，设$\overline{X}$为从总体X抽取的样本容量为n的样本均值，S为样本标准差。根据题意建立假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 70; H_1: \mu \neq 70$$

选取检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} = \frac{\overline{X} - 70}{S}\sqrt{36}$$

在$\mu = \mu_0 = 70$时，$X \sim N(70,\sigma^2)$，$T \sim t(35)$

选取拒绝域$R = \{|T| \geq \lambda\}$，其中λ满足

$P\{|T| \geq \lambda\} = 0.05$，即$P\{T \leq \lambda\} = 0.975$，$\lambda = t_{0.975}(35) = 2.0301$

由$n = 36, \overline{x} = 66.5, \mu_0 = 70, s = 15$，可算得统计量$T$的值

$$|t| = \frac{|66.5 - 70|}{15}\sqrt{36} = 1.4 < 2.0301$$

因此不能拒绝H_0，即在显著性水平 0.05 下可以认为这次全体考生的平均成绩为 70 分

1997 年（数一）

(5)袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个是白球,今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是____________.

【答案】$\dfrac{2}{5}$

【解析】抽签与顺序无关

(5)设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2,则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是（　　）

(A)8　　(B)16　　(C)28　　(D)44

【答案】44

【解析】$D(3X-2Y)=9DX+4DY=36+8=44$

九、（本题满分 7 分）从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是 $\dfrac{2}{5}$. 设 X 为途中遇到红灯的次数,求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

【解析】X 服从二项分布 $B(3,\dfrac{2}{5})$，其概率分布为

$$P\{X=k\}=C_3^k(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{3-k},k=0,1,2,3$$

即 $P\{X=0\}=\dfrac{27}{125},P\{X=1\}=\dfrac{54}{125},P\{X=2\}=\dfrac{36}{125},P\{X=0\}=\dfrac{8}{125}$

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{27}{125}, & 0\le x<1\\ \dfrac{81}{125}, & 1\le x<2\\ \dfrac{117}{125}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}\qquad EX=np=3\times\frac{2}{5}=1.2$$

十、（本题满分 5 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & other\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本,分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量.

【解析】（1）矩估计

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令 $EX=\overline{X}$ 即 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

（2）最大似然估计

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值，则样本的似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta},0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n\\ \quad 0, \qquad\qquad \text{其它}\end{cases}$$

当 $0<x_i<1$（$i=1,2,\cdots,n$）时，$L>0$，且

$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 θ 的最大似然估计值是 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

因而 θ 的最大似然估计量是 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

1996 年（数一）

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1)设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%,现从由 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品属 A 生产的概率是____________.

【答案】$\frac{3}{7}$

【解析】设事件 C=“抽取的产品是次品”，事件 D=“抽取的产品是工厂 A 生产的”，则 $\overline{D}$ 表示“抽取的产品是工厂 B 生产的”，依题意有

$$P(D)=0.6, P(\overline{D})=0.4, P(C|D)=0.01, P(C|\overline{D})=0.02$$

应用贝叶斯公式可以求得条件概率 $P(D|C)$

$$P(D|C)=\frac{P(D)P(C|D)}{P(D)P(C|D)+P(D)P(C|\overline{D})}=\frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.4\times 0.02}=\frac{3}{7}$$

(2)设 ξ,η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$ 的随机变量,则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)$=____________.

【答案】$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

【解析】由于 ξ 与 η 相互独立且同服从正态分布 $N(0,\frac{1}{2})$，因此它们的线性函数 $U=\xi-\eta$ 服从正态分布 $N(0,1)$，应用随机变量函数的期望公式有

$$E|\xi-\eta|=E|U|=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du=\int_0^{+\infty}\frac{2u}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

十一、(本题满分 6 分)

设 ξ,η 是两个相互独立且服从同一分布的两个随机变量,

已知 ξ 的分布律为 $P(\xi=i)=\frac{1}{3}, i=1,2,3.$ 又设 $X=\max(\xi,\eta), Y=\min(\xi,\eta).$

(1)写出二维随机变量的分布率

X \ Y	1	2	3
1			
2			
3			

（2）求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.

【解析】（1）$P\{X=Y=i\}=P\{\max(\xi,\eta)=i,\min(\xi,\eta)=i\}$

$$=P\{\xi=i,\eta=i\}=P\{\xi=i\}P\{\eta=i\}=\frac{1}{9}(i=1,2,3)$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{\max(\xi,\eta)=1,\min(\xi,\eta)=2\}=0$$

$$P\{X=1,Y=3\}=P\{\max(\xi,\eta)=1,\min(\xi,\eta)=3\}=0$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{\max(\xi,\eta)=2,\min(\xi,\eta)=1\}$$

$$=P\{\xi=2,\eta=1\}+P\{\xi=1,\eta=2\}=2P\{\xi=2\}P\{\eta=1\}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=2,Y=3\}=P\{\max(\xi,\eta)=2,\min(\xi,\eta)=3\}=0$$

$$P\{X=3,Y=1\}=P\{\max(\xi,\eta)=3,\min(\xi,\eta)=1\}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=3,Y=2\}=P\{\max(\xi,\eta)=3,\min(\xi,\eta)=2\}=\frac{2}{9}$$

因此 (X,Y) 的联合分布律如下表

Y \ X	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

（2）$EX=\frac{1}{9}\times1+\frac{3}{9}\times2+\frac{5}{9}\times3=\frac{22}{9}$

1995 年（数一）

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1)设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射中目标的概率为 0.4,

则 X^2 的数学期望 $E(X^2)$=____________.

【答案】18.4

【解析】由题意，X 服从二项分布 $B(10,0.4)$

$$EX = np = 10\times 0.4 = 4, DX = npq = 10\times 0.4\times 0.6 = 2.4$$

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = 18.4$$

(2)设 X 和 Y 为两个随机变量,且 $P\{X\geq 0, Y\geq 0\} = \dfrac{3}{7}, P\{X\geq 0\} = P\{Y\geq 0\} = \dfrac{4}{7}$,

则 $P\{\max(X,Y)\geq 0\} =$ ____________.

【答案】$\dfrac{5}{7}$

【解析】$P\{\max(X,Y)\geq 0\} = P\{(X\geq 0)\bigcup(Y\geq 0)\}$

$$= P\{X\geq 0\} + P\{Y\geq 0\} - P\{X\geq 0, Y\geq 0\}$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

十一、(本题满分 6 分)设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases},$$

求随机变量 $Y = \mathrm{e}^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

【解析】先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y\leq y\} = P\{e^X\leq y\}$$

当 $y\leq 1$ 时，$F_Y(y) = 0$

当 $y>1$ 时，$F_Y(y) = P\{e^X\leq y\} = P\{X\leq \ln y\} = \int_0^{\ln y} e^{-x}dx = 1 - \dfrac{1}{y}$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & y>1 \\ 0, & y\leq 1 \end{cases}$$