离散数学第二部分

关系和序关系理论

主要内容

* 关系的概念
* 关系的表示
* 关系的性质
* 等价关系及其特性应用
* 关系的运算
* 偏序关系、良序关系等

1. 关系的概念

[例]

设A={Alice,Bob,Tom}, B={Algebra,Graphs, Sets}

Alice选修了Graphs,

Bob选修了Algebra, Graph和Sets;

Tom选修了Algebra,Graphs;

R={<Alice,Graphs>,<Bob,Algebra>,<Bob,Graphs>, <Bob,Sets>,<Tom,Algrbra>,<Tom,Graphs> } $\subseteq$ A×B,

表示了学生集合A与课程集合B之间的选修关系。

二元关系的定义

设X,Y是两个集合， $X\times Y$的任何一个子集 R 都确定了一种二元关系，称为从X到Y的二元关系。

- $<x,y>\in R$可记为 xRy，显然 $R\subseteq X\times Y$

  $<x,y>\notin R$可记为 $x\neg Ry$

- 当 X=Y 即 X 与 Y 同一时，称 R 为 X 上的一个二元关系。

这里，X称为R的前域，Y称为R的后域。

令 $C=\{x|<x,y>\in R\}\subseteq X$，

$D=\{y|<x,y>\in R\}\subseteq Y$，

称C为R的定义域，记为C＝domR；称D为R的值域，记D＝ranR；并称fldR＝D∪C为R的域。

特别

当R=Φ时，称R为空关系(emptyrelation)；

当$R=A\times B$时，则称R为全关系(TotalRelation)。

设一有序对$<x,y>$：

若$<x,y>\in R$，则记为xRy，读作“x对y有关系R”；

若$<x,y>\notin R$，则记为xRy，读作“x对y没有关系R”。

[例]

$F=\{<x,y>|\ x$是y的父亲$\}$

$S=\{<x,y>|\ x,y$为正整数且x可整除$y\}$

$T=\{<y^2,y>|\ y$为实数$\}$

对上述的：x，y，R，有$<x,y>\in R$ 或 $<x,y>\notin R$，二者必居其一。

例

假设A={a,b}，B={c,d}，试写出从A到B的所有不同关系。

解 因为A={a,b}，B={c,d}，所以

A×B={<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>}。

于是A×B的所有不同子集为：

0–元子集：Φ；

1–元子集：{<a,c>},{<a,d>},{<b,c>},{<b,d>}；

2–元子集：{<a,c>,<a,d>}，{<a,c>,<b,c>}，
{<a,c>,<b,d>}，{<a,d>,<b,d>}，
{<a,d>,<b,d>}，{<b,c>,<b,d>}；

3–元子集：

{<a,c>,<a,d>,<b,c>},{<a,c>,<a,d>,<b,d>}，
{<a,c>,<b,c>,<b,d>},{<a,d>,<b,c>,<b,d>}；

4–元子集：{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>}。

注意

当集合A,B都是有限集时，A×B共有$2^{|A|\cdot|B|}$个不同的子集，即从A到B的不同关系共有$2^{|A|\cdot|B|}$个。

例:求定义在Z上关系的定义域、值域和域。

（1）$R_1=\{<x,y>|(x,y\in Z)\wedge\{y=x^2\}\}$；

（2）$R_2=\{<x,y>|(x,y\in Z)\wedge\{|x|=|y|=7\}\}$。

解（1）$domR_1=Z$，

$ranR_1=\{x^2|x\in Z\}$，

$fldR_1=Z$；

例

设H={f,m,s,d}表示一个家庭中父母子女四个人的集合，确定H上的一个长幼关系R_H，指出该关系的定义域、值域和域。

解 $R_H=\{\langle f,s\rangle,\langle f,d\rangle,\langle m,s\rangle,\langle m,d\rangle\}$；

$\mathrm{dom}R_H=\{f,m\}$，$\mathrm{ran}R_H=\{s,d\}$，$\mathrm{fld}R_H=\{f,m,s,d\}$

推广

定义 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为n个非空集合，称$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$的任意子集R为以$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$为基的n元关系(n-Relation)。

2 关系的表示方法

(1) 集合表示法

用语言描述

(2) 关系矩阵

设 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$， $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$， $m,n<+\infty$

R是X到Y的二元关系。构造矩阵

$$M_R=[m_{ij}]_{m\times n}, \quad m_{ij}=\begin{cases}1 & \langle x_i,y_j\rangle\in R \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

注意

1. 必须先对集合A,B中的元素排序
2. A中元素序号对应矩阵元素的行下标，
3. B中元素序号对应矩阵元素的列下标；
4. 关系矩阵是0-1矩阵，称为布尔矩阵。

例：设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$

X到Y的关系R为

$$R=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_3\rangle,\langle x_2,y_3\rangle,\langle x_4,y_2\rangle\}$$

则R的关系矩阵为

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

例（1）设A={a}，B={b,c}，用枚举法写出从A到B的不同关系；

（2）用叙述法写出定义在R上的“相等”关系。

解（1）A到B的不同关系有：

R1=Φ，　　R2={<a,b>}，

R3={<a,c>}，R4={<a,b>,<a,c>}；

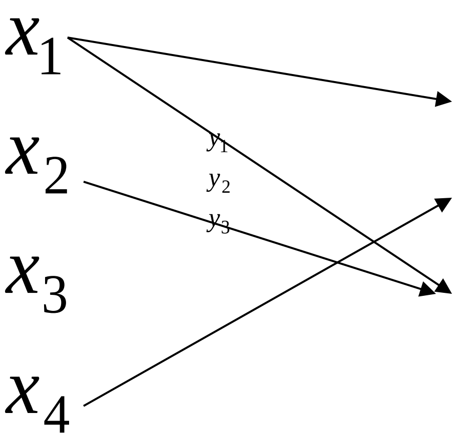
（2）设R上的“相等”关系为S，则

$S=\{<x,y>|(x,y\in R)\wedge(x=y)\}$。

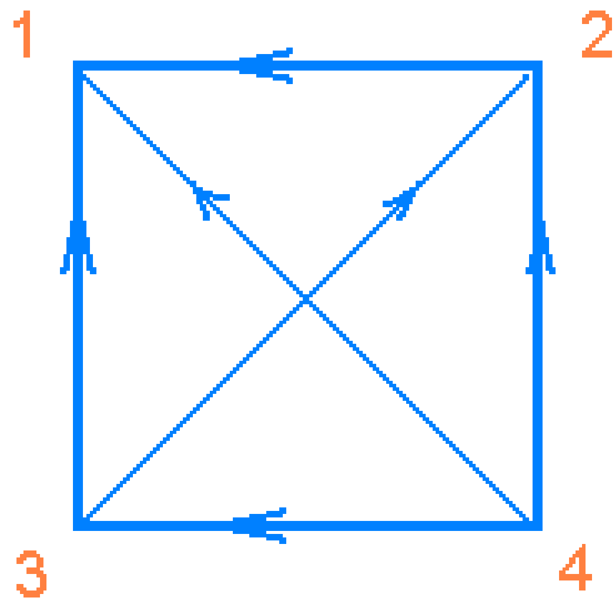
(3) 关系图表示法

用结点表示X、Y上的元素；若 $<x,y>\in R$ 则从结点x到结点y画一条弧。

[例] 上述关系的关系图：



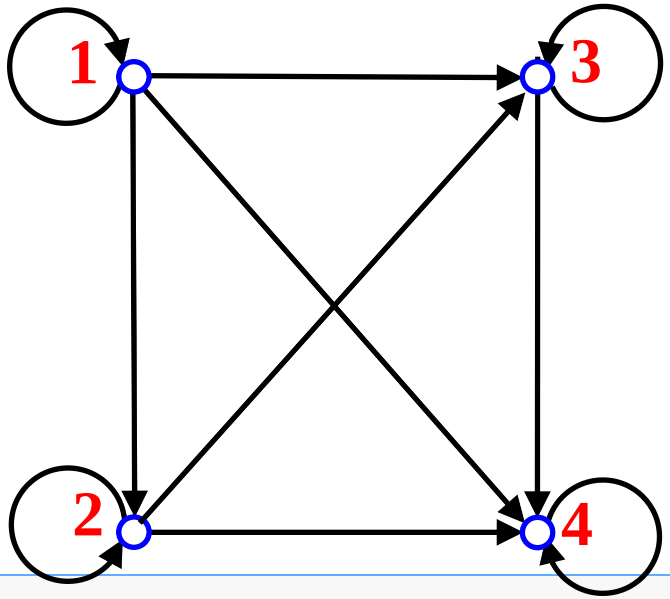
[例] 设 X={1,2,3,4}，X 上的关系 “ > ”：



例:

假设A={1,2,3,4}，则A上的小于等于关系

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,$
$\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$。



3. 关系的性质

定义. 设R是X上的二元关系，则：

① R 是自反的$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \to xRx)$

② R 是对称的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x,y \in X\ xRy \to yRx)$

③ R 是传递的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x,y,z \in X\ \ xRy \wedge yRz \to xRz)$

④ R 是反自反的$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \to \neg(xRx))$

⑤ R 是反对称的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x,y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

例：

1. 设A={1,2,3,4,6,12},A中的“整除”关系记为R,则R是自反的，对称的，反自反的，反对称的，传递的吗？画出R的关系图和关系矩阵。
2. R是A中的恒等关系，定义为：$I_A=\{<a,a>|a\in A\}$,则该关系是对称关系吗？是反对称关系吗？一个关系不是对称的，就是反对称的吗？

4. 关系的运算

（1）关系的一般运算

[定义] 设 R、S是X到Y的二元关系，定义运算如下：

$$R\cup S=\{<x,y>|xRy\vee xSy\}$$

$$R\cap S=\{<x,y>|xRy\wedge xSy\}$$

$$R-S=\{<x,y>|xRy\wedge x\neg Sy\}$$

$$\sim R=X\times Y-R$$

(2) 关系的复合运算

设二元关系R:X→Y，S:Y→Z，则称

$R \circ S=\{<x,z>|x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y)(y\in Y\wedge xRy\wedge ySz)\}$

为R和S的(右)复合关系，或(右)复合运算结果。

1. **R和S是可复合的⇔R的后域和S的前域完全相同；**
2. **RoS的前域是R的前域A，后域是S的后域C；**
3. **RoS＝Φ⇔对任意x∈A和z∈C，不存在y∈B，使得xRy和ySz同时成立；**
4. **ΦoR＝RoΦ＝Φ 。**

试判断下列关系是否是两个关系的复合，如果是，请指出对应的两个关系。

（1）“祖孙”关系；（2）“舅甥”关系；

（3）“兄妹”关系。

解（1）“祖孙”关系是“父女”关系和“母子”关系的复合；

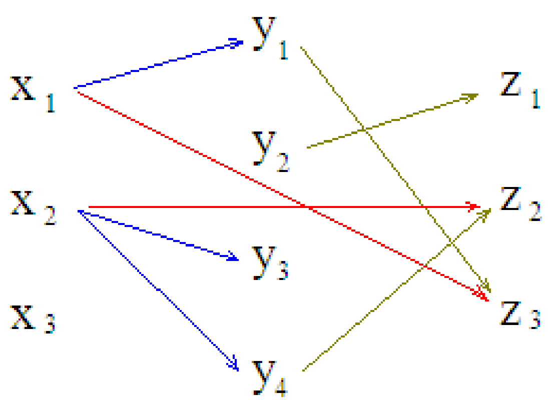
（2）“舅甥”关系是“兄妹”关系和“母子”关系的复合；

（3）不是。

例 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$， $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$， $Z=\{z_1, z_2, z_3\}$

$R=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_3>,<x_2,y_4>\}$

$S= \{<y_1,z_3>,<y_2,z_1>,<y_4,z_2>\}$



$R \circ S=\{\langle x_1,z_3\rangle, \langle x_2,z_2\rangle\}$

关系的复合运算性质

关系复合运算的结合律：设二元关系

$R: X \to Y$，$S: Y \to Z$， $P: Z \to W$，

则有 $(R \circ S) \circ P = R \circ (S \circ P)$

［关系的幂运算］ 设R为X上的二元关系，$R \circ R \circ \ldots \circ R$ 记为 R^n，规定 $R^n = R^{n-1} \circ R$，$R^0 = I_X$

[**定理**] 关系复合运算与一般运算的结合律：设二元关系

R_1：X→Y， R_2, R_3：Y→Z， R_4：Z→W，则有

$$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

$$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$

$$(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$$

$$(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$$

[逆关系] 设二元关系 R：X→Y，定义

$R^{-1}=\{<y,x>|x\in X\wedge y\in Y\wedge <x,y>\in R\}$ 为R的逆关系。

[性质]

$(R^{-1})^{-1}=R$，$\varnothing^{-1}=\varnothing$

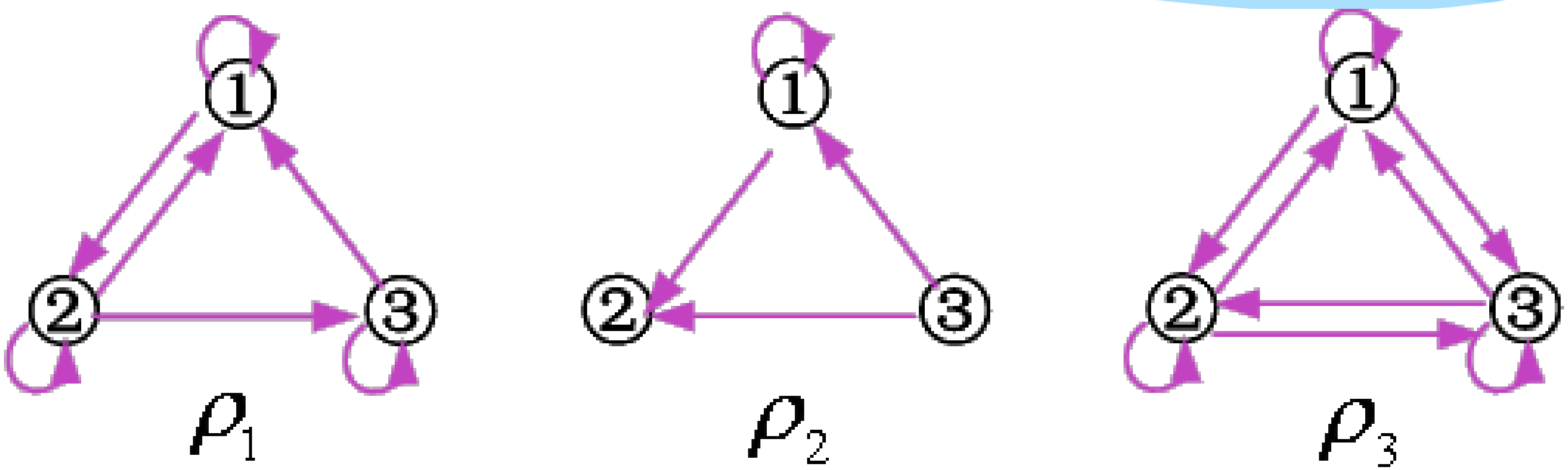
$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$，$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

$(\sim R)^{-1}=\sim(R^{-1})$

$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

$R=S \Leftrightarrow R^{-1}=S^{-1}$　　　$R\subseteq S \Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$

例 设 $A=\{1,2,3\}$ 下面分别给出集合A上三个关系的关系图，试判断它们的性质。



(1） 是自反的，非对称，不是反对称，不可传递

（2） 非自反，也不是反自反，非对称，反对称， 可传递。

（3） 是自反的，对称的,可传递的,不是反自反,不是反对称。

注意

1. 将R的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得R^{-1}的关系图，反之亦然；
2. 将R的关系矩阵转置即得R^{-1}的关系矩阵，即R和R^{-1}的关系矩阵互为转置矩阵。
3. R^{-1}的前域与后域正好是R的后域和前域，即$domR=ranR^{-1}$，$domR^{-1}=ranR$；
4. $|R|=|R^{-1}|$；
5. $(RoS)^{-1}=S^{-1}oR^{-1}$。

例 设ρ_1 是由$A=\{1,2,3,4,\}$ 到$B=\{2,3,4\}$ 的关系。ρ_2 是由 B 到 $C=\{3,5,6\}$ 的关系。分别定义为:

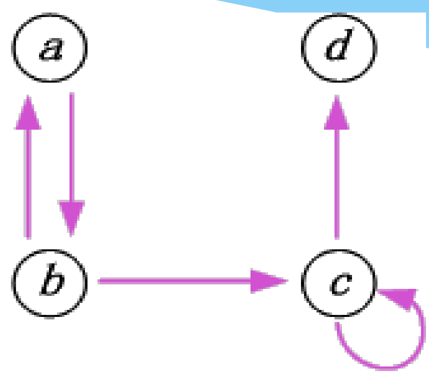
$$\rho_1=\{\langle a,b\rangle \mid a+b=6\}=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

$$\rho_2=\{\langle b,c\rangle \mid b\text{整除}\,c\}=\{\langle 2,6\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle\}$$

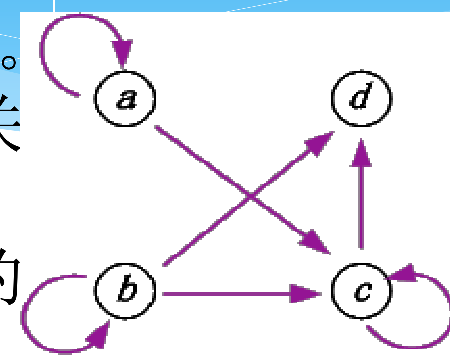
于是复合关系 $\rho_1\circ\rho_2=\{\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,6\rangle\}$

例 $\rho=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle b,c\rangle\}$

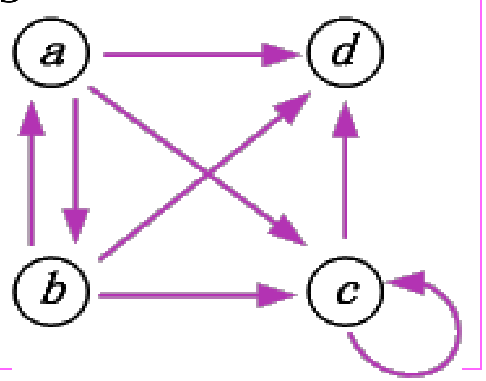
（1）先作出 ρ 的关系图



（2）构造 ρ^2 的关系图。在 ρ 的关系图中寻找长为2的路。

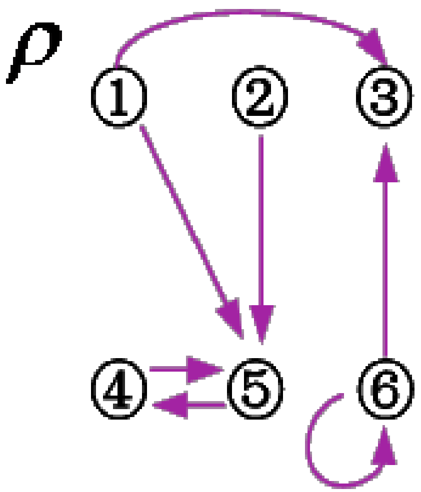


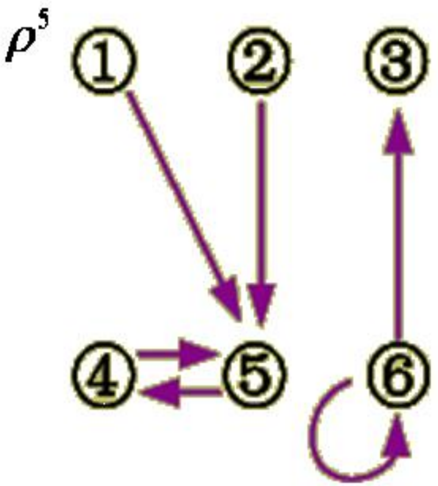
（3）构造 ρ^3 的关系图。在 ρ 的关系图中寻找长为3的路.

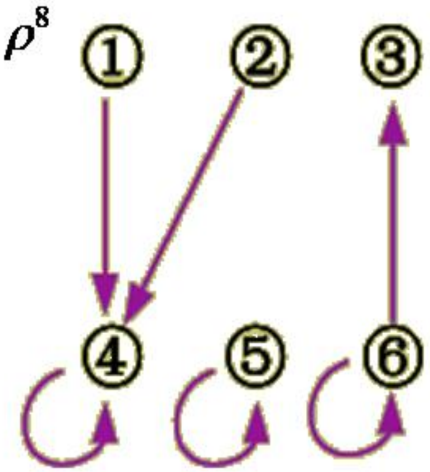


（4）根据 ρ^2 和 ρ^3 的关系图直接写出 ρ^2 和 ρ^3 中的序偶.

例. 下图给出了集合$A=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系的关系图 ρ ，试画出关系 ρ^5和 ρ^8的关系图。







定理

设A是有限集合，且|A|＝n，R是A上的二元关系，则：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

证明　显然，$\bigcup_{i=1}^{n} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$。下面证：$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

由于，$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} R^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^i\right)$ 为此，只要证明对任意k＞n，

有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$ 即可。

对任意<a,b>∈R^k，则由“o”的定义知，存在$a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}$∈A（为了统一，并假设a_0＝a，a_k＝b)，使得：

$<a_0,a_1>\in R$，$<a_1,a_2>\in R$，$<a_2,a_3>\in R$，…，$<a_{k-1},a_k>\in R$。

由于$|A|=n$，所以由鸽笼原理知：$k+1$个元素中至少有两个以上元素相同，不妨假设$a_i=a_j(i<j)$，则可在

$$\langle a_0,a_1\rangle\in R，\langle a_1,a_2\rangle\in R，\langle a_2,a_3\rangle\in R，\ldots，$$

$$\langle a_{k-1},a_k\rangle\in R$$

中删去$\langle a_i,a_{i+1}\rangle\in R$，$\langle a_{i+1},a_{i+2}\rangle\in R$，…，

$$\langle a_{j-1},a_j\rangle\in R$$

后仍有

$$\langle a_0,a_1\rangle\in R，\langle a_1,a_2\rangle\in R，\langle a_2,a_3\rangle\in R，\ldots，$$

$$\langle a_{i-1},a_i\rangle\in R，\langle a_j,a_{j+1}\rangle\in R，\ldots，\langle a_{k-1},a_k\rangle\in R$$

由关系的复合运算得，$\langle a,b\rangle=\langle a_0,a_k\rangle\in R^{k'}$，其中

$k'=k-(j-i)$，此时：

若k'≤n，则：<a,b> $\in \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$

若k'＞n，则重复上述做法，最终总能找到

k"≤n，使得：$<a,b>=<a_0,a_k>\in R^{k''}$，

即有：$<a,b> \in \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$，由此有：$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$。由k的任意性知：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$$

所以， $$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} = \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$$

(4) 关系的闭包运算

[自反闭包] 设R为X上的二元关系，若另有一关系R'，满足：

① R' 是自反的；

② $R \subseteq R'$；

③ 对于任何自反的关系R''，若 $R \subseteq R''$，则$R' \subseteq R''$。

则称 R'为R的自反闭包，记为r(R)

对称闭包: 包含给定关系R的最小对称关系，称为R的对称闭包, 记作s(R).

(1) s(R)是对称的;

(2) $R \subseteq s(R)$;

(3) $(\forall S)((R\subseteq S \wedge S$对称$) \rightarrow s(R)\subseteq S)$.

传递闭包: 包含给定关系R的最小传递关系, 称为R的传递闭包, 记作t(R).

(1) t(R)是传递的;

(2) $R \subseteq t(R)$;

(3) $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S$传递$) \rightarrow t(R) \subseteq S)$.

闭包性质: 设$R\subseteq A\times A$且$A\neq\varnothing$,则

(1) R自反 $\Leftrightarrow r(R) = R$;

(2) R对称 $\Leftrightarrow s(R) = R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow t(R) = R$;

证明: (1) $R\subseteq R \wedge R$自反 $\Rightarrow r(R)\subseteq R$

又 $R \subseteq r(R)$, $\therefore$ $r(R) = R$.

(2)(3) 类似.

闭包性质: 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$;

证明: (1) $R_1 \subseteq R_2 \subseteq r(R_2)$自反,

$\therefore\ r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2)(3) 类似可证.

定理: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^c$;

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

对比: R自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

R对称 $\Leftrightarrow R = R^c$

R传递 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

证明:

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

i) $R \subseteq R \cup I_A$;

ii) $I_A \subseteq R \cup I_A \Leftrightarrow R \cup I_A$ 自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R \cup I_A$;

iii) $R \subseteq r(R) \wedge r(R)$ 自反

$\Rightarrow R \subseteq r(R) \wedge I_A \subseteq r(R)$

$\Rightarrow R \cup I_A \subseteq r(R)$

$\therefore\ r(R) = R \cup I_A$.

(2) $s(R) = R \cup R^c$;

i) $R \subseteq R \cup R^c$;

ii) $(R \cup R^c)^c = R \cup R^c \Leftrightarrow R \cup R^c$ 对称 $\Rightarrow s(R) \subseteq R \cup R^c$;

iii) $R \subseteq s(R) \wedge s(R)$ 对称

$\Rightarrow R \subseteq s(R) \wedge R^c \subseteq s(R)$

$\Rightarrow R \cup R^c \subseteq s(R)$

$\therefore\ s(R) = R \cup R^c$.

证明(3)之前，说明以下事实：

复合运算对并运算满足分配律

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3)=(R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$

(2) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 =(R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$

复合运算对交运算满足**弱**分配律

(1) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

(2) $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

i) 先证$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$;

$\because R \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$;

$\because (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)^2 = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

$\Leftrightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$传递

$\therefore \Rightarrow t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$;

ii)再证$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

$\because R \subseteq t(R) \wedge t(R)$传递

$\Rightarrow R \subseteq t(R) \wedge R^2 \subseteq t(R) \wedge R^3 \subseteq t(R) \wedge \ldots$

$\Rightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

$\therefore t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$. #

定理： 设X是含有n个元素的集合，R是X上的二元关系，则存在一个正整数$k \le n$，使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k$$

例

设 A = { a,b,c,d }, R = { <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d> }.

求 r(R), s(R), t(R).

解:

$r(R)=R\cup I_A=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\ <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\ \}$

$s(R)=R \cup R^c= \{ <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>, <c,d>\ <d,c> \}$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$

$=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>, <a,d>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<b,d>,<c,d>\}$

[例] 整数集上的“＜”关系的自反闭包是“≤”，对称闭包是“≠”，传递闭包仍然是“＜”。

[例] 整数“=”的自反、对称、传递闭包都是它本身。

［例］有关系矩阵

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $M_{r(R)}$、 $M_{s(R)}$、 $M_{t(R)}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{r(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{s(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 设R为X上的二元关系，则

① $r(R) = R \cup I_x$

② $s(R) = R \cup R^{-1}$

③ $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

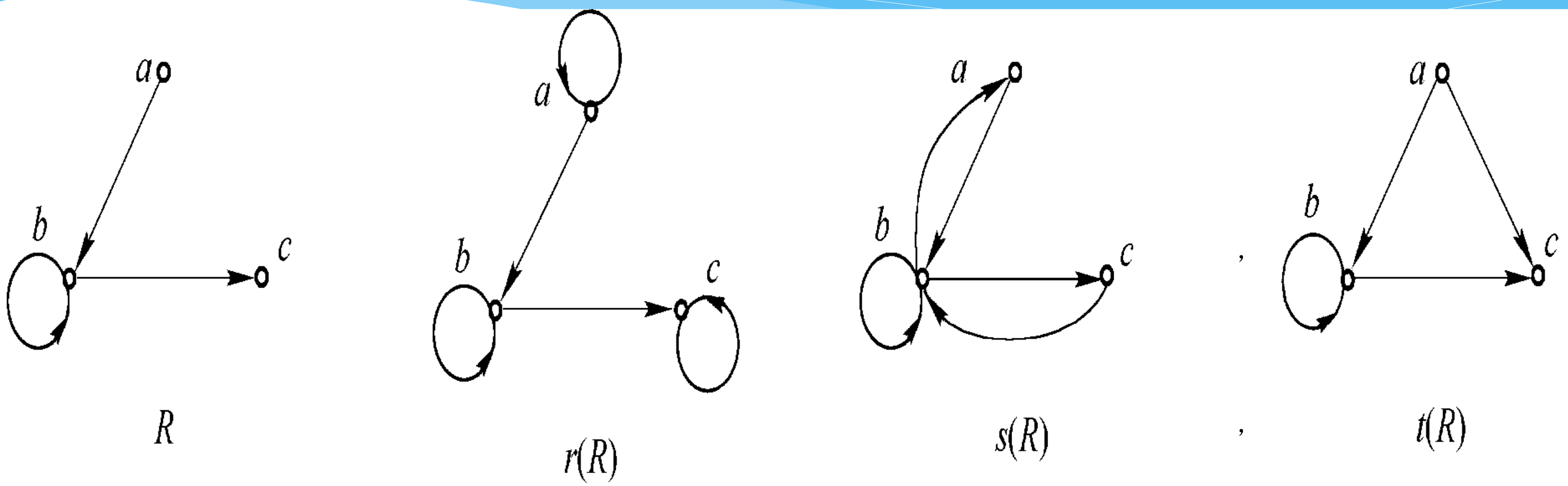
例

设集合A={a,b,c}，R={<a,b>,<b,b>,<b,c>}是定义在A上的二元关系，求r(R)，s(R)，t(R)，并画出R，r(R)，s(R)，t(R)的关系图和写出相应的关系矩阵。

（1） $r(R)=\{<a,b>,<b,b>,<b,c>,<a,a>,<c,c>\}$；

（2） $s(R)=\{<a,b>,<b,b>,<b,c>,<b,a>,<c,b>\}$；

（3） $t(R)=\{<a,b>,<b,b>,<b,c>,<a,c>\}$。



$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{r(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{s(R)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例

设P={P1, P2, P3, P4}是四个程序，R，S是定义在P上的调用关系如下：

R={〈P1, P2〉, 〈P1, P3〉, 〈P2, P4〉, 〈P3, P4〉}

S={〈P1, P2〉, 〈P2, P1〉, 〈P2, P3〉, 〈P3, P4〉}

求r(R), s(R), t(R), r(S), s(S), t(S)。

$r(R)=R\cup I_A=\{\langle P1,P2\rangle,\langle P1,P3\rangle,\langle P2,P4\rangle,\langle P3,P4\rangle\}\cup\{\langle P1,P1\rangle,\langle P2,P2\rangle,\langle P3,P3\rangle,\langle P4,P4\rangle\}$

$\mathbf{=\{\langle P1,P2\rangle,\langle P1,P3\rangle,\langle P2,P4\rangle,\langle P3,P4\rangle,\langle P1,P1\rangle,\langle P2,P2\rangle,\langle P3,P3\rangle,\langle P4,P4\rangle\}}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle P1,P2\rangle,\langle P1,P3\rangle,\langle P2,P4\rangle,\langle P3,P4\rangle\}\cup\{\langle P2,P1\rangle,\langle P3,P1\rangle,\langle P4,P2\rangle,\langle P4,P3\rangle\}$

$\mathbf{=\{\langle P1,P2\rangle,\langle P1,P3\rangle,\langle P2,P4\rangle,\langle P3,P4\rangle,\langle P2,P1\rangle,\langle P3,P1\rangle,\langle P4,P2\rangle,\langle P4,P3\rangle\}}$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{\langle P1,P2\rangle,\langle P1,P3\rangle,\langle P2,P4\rangle,\langle P3,P4\rangle\}\cup\{\langle P1,P4\rangle\}\cup F\cup F$

$\mathbf{=\{\langle P1,P2\rangle,\langle P1,P3\rangle,\langle P2,P4\rangle,\langle P3,P4\rangle,\langle P1,P4\rangle\}}$

r(S)=S∪IA={<P1,P2>,<P2,P1>,<P2,P3>,<P3,P4>}∪{<P1,P1>,<P2,P2>,<P3,P3>,<P4,P4>}

={<P1,P2>,<P2,P1>,<P2,P3>,<P3,P4>,<P1,P1>,<P2,P2>,<P3,P3>,<P4,P4>}

s(S)=S∪S-1={<P1,P2>,<P2,P1>,<P2,P3>,<P3,P4>}∪{<P2,P1>,<P1,P2>,<P3,P2>,<P4,P3>}

={<P1,P2>,<P2,P1>,<P2,P3>,<P3,P4>,<P3,P2>,<P4,P3>}

t(S)=S∪S2∪S3∪S4

={<P1,P2>,<P2,P1>,<P2,P3>,<P3,P4>}∪{<P1,P1>,<P2,P2>,<P1,P3>,<P2,P4>}

∪{<P1,P2>,<P2,P1>,<P2,P3>,<P1,P4>}∪{<P1,P1>,<P2,P2>,<P1,P3>,<P2,P4>}

={<P1,P2>,<P2,P1>,<P2,P3>,<P3,P4>,<P1,P1>,<P2,P2>,<P1,P3>,<P2,P4>,<P1,P4>}

等价关系

定义　设R是定义在非空集合A上的关系，如果R是自反的、对称的、传递的，则称R为A上的等价关系（Equivalent Relation）。

例　（1）在一群人所组成的集合上定义的“同姓”关系、“同年龄”关系和“同性别”关系，都是等价关系；而“朋友”关系和“同学”关系不是等价关系，因为它可能不是传递的。

（2）任何非空集合A上的恒等关系I_A和全关系$A \times A$都是A上的等价关系。

（3）三角形的“相似”关系、“全等”关系都是等价关系；而直线间的“平行”关系不是等价关系，因为它不是自反的。

（4）幂集上定义的“ ”关系、整数集上定义的“≤”都不是等价关系，因为它们不是对称的。

例 设m为正整数，考虑整数集合Z上的关系如下：

$R=\{<x,y>|\{x,y\in Z\}\wedge(m|(x-y))\}$

证明R是一个等价关系。

证明 （1）对任意$x\in Z$，有$m|(x-x)$，所以$<x,x>\in R$，即R是自反的。

（2）对任意$x,y\in Z$，若$<x,y>\in R$，即$m|(x-y)$，所以$m|(y-x)$，所以，$<y,x>\in R$，即R是对称的。

（3）对任意$x,y,z\in Z$，若$<x,y>\in R$且$<y,z>\in R$，有$m|(x-y)$且$m|(y-z)$，所以由$(x-z)=(x-y)+(y-z)$得$m|(x-z)$，所以，$<x,z>\in R$，即R是传递的。

由（1）、（2）、（3）知，R是Z上的等价关系。

例 设A={a,b,c,d,e}，A上的关系

r1={(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)}，

r2={(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e)}，

试判断r1和r2是否为等价关系。

解 r1是等价关系，因为它满足自反性，对称性和传递性。

r2不是等价关系，因为：①(a,a),(e,e) Ïr2，即r2不满足自反性；②(d,e) Îr2，但(e,d) Ïr2，即r2不满足对称性；③(a,b) Îr2，(b,a) Îr2，但(a,a) Ïr2，即r2不满足传递性。

当然，以上三条原因中只要具备任何一条就可判断r2不是等价关系。

例 设r1是集合A上的一个二元关系，r2={(a,b)｜存在c，使(a,c)∈r1且(c,b)∈r1}，证明若r1是一个等价关系，则r2也是一个等价关系。

证明 设r1是A上的等价关系，

（1）对任意一个x ∈A，因为r1在A上自反，所以(x,x) ∈ r1。由r2的定义，(x,x) ∈ r2，所以r2是自反的。

（2）对任意x,y ∈ A，若(x,y) ∈ 2，则存在某个c ∈ A，使得(x,c) ∈ r1且(c,y) ∈ r1，因为r1是对称，故有(y,c) ∈ r1且(c,x) ∈ r1，由r2的定义，可知(y,x) ∈ r2，所以r2是对称的。

（3）对任意x,y,z $\in$ A，若(x,y) $\in$ r2，(y,z) $\in$ r2，则必存在某个c1 $\in$ A，使(x,c1) $\in$ r1，(c1,y) $\in$ r1。由r1的传递性，可知(x,y) $\in$ r1，同理存在c2 $\in$ A，使(y,c2) $\in$ r1且(c2,z) $\in$ r1，由r1传递，可知(y,z) $\in$ r1。再由r2的定义，得(x,z) $\in$ r2。所以r2是传递的。

由以上（1）（2）（3）可知r2是一个等价关系。证毕。

定理:

设r1和r2都是集合A上的等价关系，

（1）试证明：r1∩r2也是A上的等价关系；

（2）r1∪r2是A上的等价关系吗？为什么？

等价类

定义 设R为集合A上的等价关系，与A中的元素a有关系R的所有元素的集合称为a的关于R的等价类，有时也简记为[a]。

例 设A={a,b,c,d,e}，A上的关系r={(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)}，确定由集合A中的元素产生的等价类。

由上看出[a] = [b], [d] = [e]，这说明不同的元素可能产生的等价类是相同的。

定理 设R是集合A上的等价关系，对于a,b∈A，有aRb 当且仅当[a] = [b]。

证明 设[a] = [b]，因为b ∈[b]，故b ∈ [a]，即aRb。

反之，若aRb，设c ∈ [a]，则aRc，aRb，从而bRa,所以bRc，因此c ∈[b]，即[a]包含于 [b]。同理，可得[b]包含于 [a]，所以[a] = [b]。

由以上两方面知定理成立。证毕。

定理：

集合A的一个分划确定A上的一个等价关系。

证明 设$p=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$是集合A的一个分划，定义A上的关系R，$(a,b) \in R$当且仅当a,b在同一分划块中。下面证明R是等价关系。

（1）由于a与a在同一分划块中，故有aRa，即r是自反的。

（2）若a,b在同一分划块中，则b与a也在同一分划块中，即由(a,b) ∈R，可推出(b,a) ∈R，所以r是对称的。

（3）设(a,b) (b,c) ∈ R，则a,b在同一分划块中，b,c在同一分划块中，又因为Si∩Sj=空集，所以b恰属于一个分划块，故a,c在同一分划块中，即(a,c) ∈ R，所以R是传递的。

由以上（1）（2）（3）可知r是A上的等价关系。证毕。

例 设A={a,b,c,d,e}有一个分划p={{a,b},{c},{d,e}}，求p所确定的等价关系R。

解 设r1={a,b} ×{a,b}={(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)}，

r2={c} ×{c}={(c,c)},

r3={d,e} ×{d,e}={(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)}。

所以

R=r1∪r2∪r3={(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)}。

划分

定义 设A是一个非空集合，p是满足下列条件的集合：

（1）p中元素是A的非空子集；

（2）A中任一元素至少属于p中一个元素，即p中各元素之并等于A。

则称p为A的一个覆盖，如果p还满足条件：

（3）p中元素互不相交。

则称p为A的一个分划，p中每个元素叫做A的一个分划块。

例：

设A={0,1,2,3,4}，p1={{0,1},{1,2},{2,3,4}}，p2={{0,1},{2,3},{4}}，则p1是A的一个覆盖但不是分划，p2既是A的一个覆盖，也是A的一个分划。

例 设A是由4个元素组成的集合，试问在A上可以定义多少个不同的等价关系?

解 如果直接考虑A上可以定义多少个等价关系，则计算过程比较繁琐，也容易出错。根据定理4.16可知集合A上的等价关系与分划存在一一对应的关系，因此此题可转化为考虑A上有多少个不同的分划。

将集合A分划为一块：有1种分法；

将集合A分划为两块：有 ？种分法

将集合A分划为三块：有?种分法

将集合A分划为四块：有1种分法

偏序关系

[偏序关系] 集合A上的一个关系R满足自反性、反对称性和传递性时，称R是A上的一个偏序关系，记为“≤”，用二元组〈A, ≤〉表示该偏序结构，或称之为偏序集。偏序集中用

[例] A={2, 3, 6, 8}，“≤”={〈x, y〉| x, y∈A（x整除y)}

“≤”=｛……..｝

容易验证，上述关系为偏序关系。

例: 验证实数集R上的小于等于关系“$\le$” 是偏序关系。

证明：1. 对于任何实数$a\in R$,有$a\le a$成立，故“$\le$”是自反的。

2. 对于任何实数$a,b\in R$，如果$a\le b$，$b\le a$，则必有$a=b$，故“$\le$”是反对称的。

3. 如果$a\le b$，$b\le c$ 那么必有$a\le c$，故“$\le$”是传递的。

因此“$\le$” 是一个偏序关系。

定义 6.5.2. 如果偏序集 $(S,\preceq)$ 的元素 $a \preceq b$ 或 $b \preceq a$，则称 a 和 b 为可比的。

当 a 和 b 是 S 的元素并且既没有 $a \preceq b$，也没有 $b \preceq a$，则称 a 与 b 是不可比的。

例如：在 $(\mathbb{Z}^+, |)$ 中，3 与 2 是不可比的，4 和 2 是可比的。

定义 6.5.3. 若 $(S,\preceq)$ 是偏序集，且 S 的每对元素都是可比的，则称 S 为全序集。

例如：偏序集 $(\mathbb{Z},\geq)$ 是全序集，而偏序集 $(\mathbb{Z}^+,|)$ 不是全序集。

定义 6.5.4. 对于偏序集 $(S,\preceq)$，若 $\preceq$ 是全序，且 S 的每个非空子集都有一个最小元素，则称它为良序集。

例如，正整数的有序对集合上的偏序集 $(\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+,\preceq)$ 定义为：

对于 (a_1,a_2) 和 (b_1,b_2)，如果 $a_1<b_1$，或如果 $a_1=b_1$ 且 $a_2\leq b_2$（字典顺序），则 $(a_1,a_2)\preceq(b_1,b_2)$。偏序集 $(\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+,\preceq)$ 是良序集。

x、y之间存在偏序关系时，说 x、y（在该关系下）可比较，否则说 x、y 不可比较。上例中，2和3不可比较（在上述定义的“ ≤ ”下）。

定义[盖住]: 设 $<A, \leq>$ 是偏序集，若有 $x, y \in A$，$x \leq y$，且 $x \neq y$，且不存在其它元素z，$z \in A$，使得 $x \leq z \wedge z \leq y$，则称元素y盖住元素x。并且记盖住集为:

$$COVA=\{<x,y>|x,y \in A ;y\text{盖住}x\}$$。

例 在偏序集〈R, ≤〉中任何实数均无覆盖，因为任意两个实数之间均有另外的实数。偏序集〈N, ≤〉中每个自然数均有惟一的覆盖。

哈斯图：由于偏序关系本身具备的特性，在用关系图来描述偏序关系且不引起混淆时，可以将其中的一些显然的因素略去而不管。对应的图叫偏序图或叫Hasse图，此图的作图方法如下：

（1）用小圆圈或点表示A中的元素，省掉关系图中所有的 环（因自反性）

（2）对任意x, y∈A，若x＜y，则将x画在y的下方，可省掉关系图中所有边的箭头。(因反对称性)

（3）对任意x, y∈A，若y覆盖x，则在x与y之间连一条线，否则无线相连。（因传递性）

[例]　集合A= {a,b,c}上的偏序关系为:

$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,c>,<c,b>,<a,b>\}$

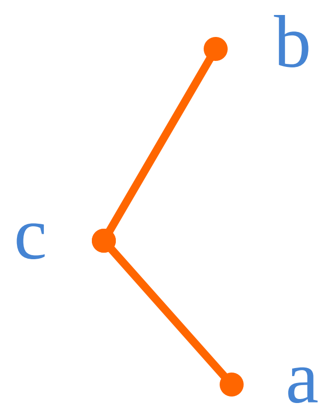
covA $=\{<a,c>,<c,b>\}$

Hasse图如右图

① 默认$a \le a$, $b \le b$, $c \le c$　*自反性*

② $a \le c$, $c \le b$

③ $a \le b$　*传递性*

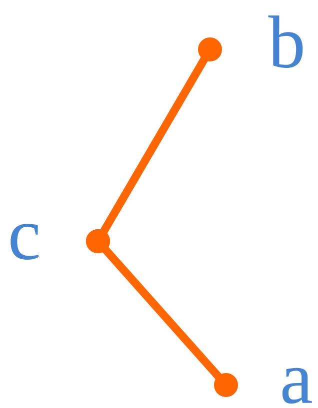


Hasse Diagram

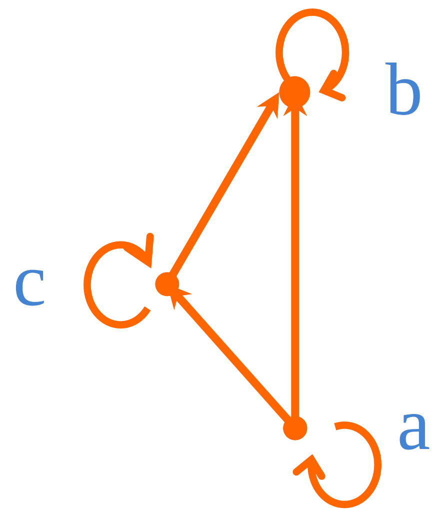
上述Hasse图表示的对应关系集合为:

$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,c>,<c,b>,<a,b>\}$

对应关系图如下：

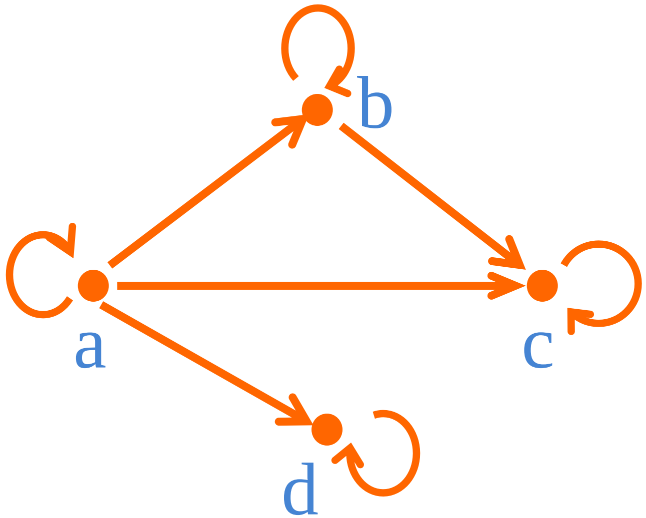


Hasse Diagram

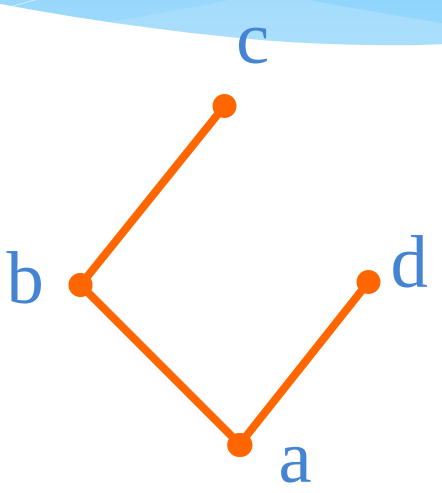


关系图

[例] 由偏序关系的关系图构造相应的Hasse图

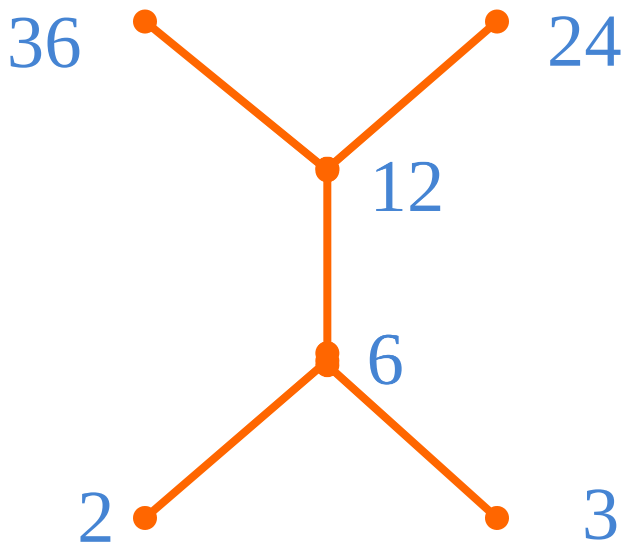


关系图



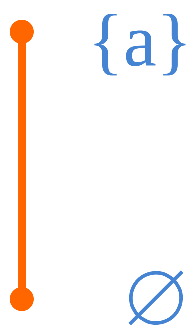
Hasse Diagram

[例] {2,3,6,12,24,36}上的整除关系的Hasse图。

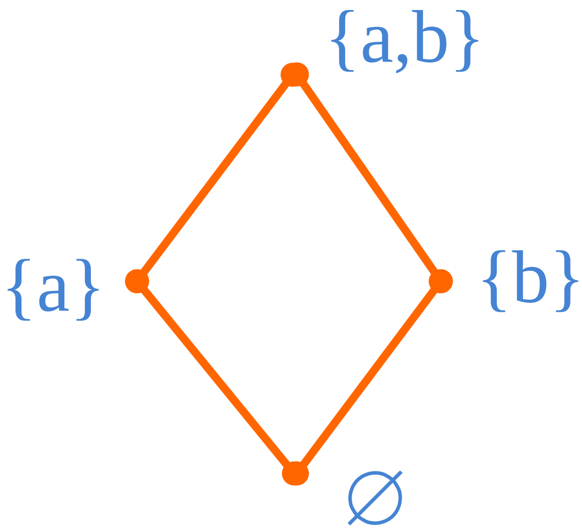


Hasse Diagram

［例］ A的幂集上的⊆关系的Hasse图。

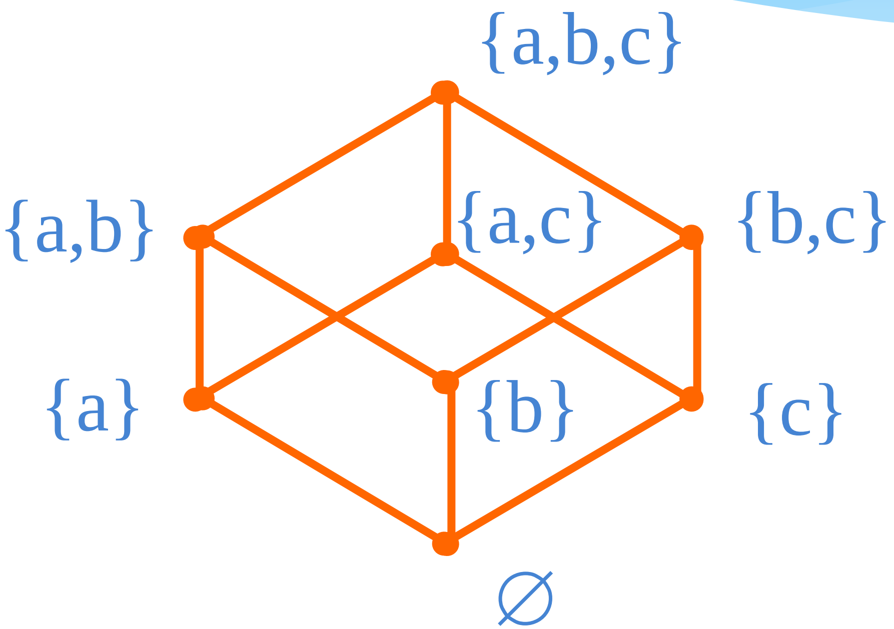


$A=\{a\}$



$A=\{a,b\}$

[例] A的幂集上的$\subseteq$关系的Hasse图。



$A=\{a,b,c\}$

偏序集中的特殊元素： 设$\langle A, \leqslant \rangle$是偏序集，$B$是$A$的任何一个子集。

（1）若存在元素$b \in B$，使得对任意$x \in B$，都有$x \leqslant b$，则称b为B的最大元素（Greatest Element），简称最大元。

（2）若存在元素$b \in B$，使得对任意$x \in B$，都有$b \leqslant x$，则称b为B的最小元素（Smallest Element），简称最小元。

（3）若存在元素$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$，使得对任意$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$，满足$\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，则称$\boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{B}$的极大元素（**Maximal Element**），简称极大元。

（4）若存在元素$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$，使得对任意$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$，满足$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，则称$\boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{B}$的极小元素（**Minimal Element**），简称极小元。

（5）若存在元素$a \in A$，使得对任意$x \in B$，都有$x \le a$，则称a为B的上界（Upper Bound）。

（6）若存在元素$a \in A$，使得对任意$x \in B$，都有$a \le x$，则称a为B的下界（Lower Bound）。

（7）若元素$a' \in A$是B的上界，元素$a \in A$是B的任何一个上界，若均有$a' \le a$，则称a'为B的最小上界（Least Supper Bound）或上确界。记$a' = \mathrm{Sup}B$。

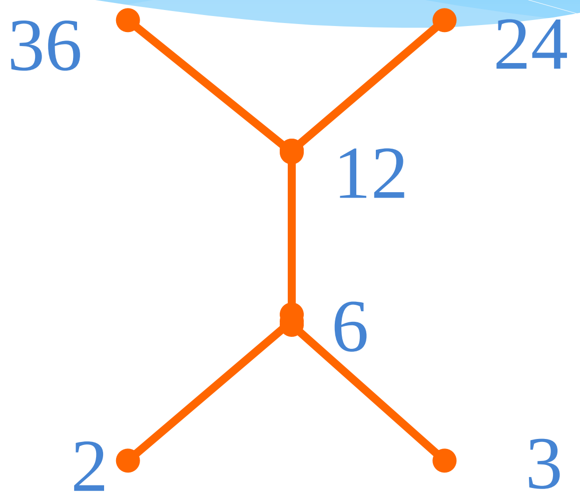
（8）若元素$a' \in A$是B的下界，元素$a \in A$是B的任何一个下界，若均有$a \le a'$,则称a'为B的最大下界（Greatest Lower Bound）或下确界。记$a' = \mathrm{Inf}B$。

[例] {2,3,6,12,24,36}上的整除关系的Hasse图。

2, 3 为极小元

24, 36 为极大元

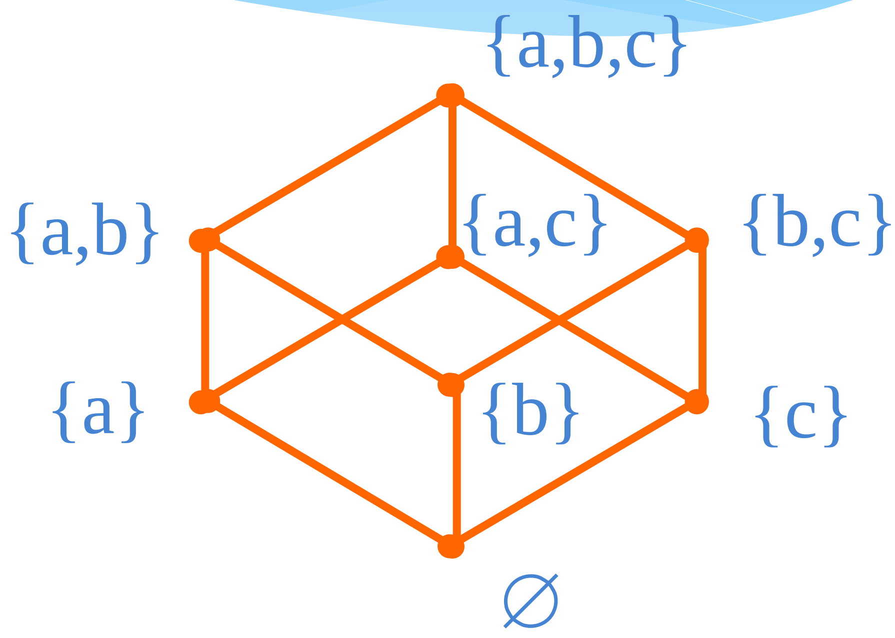
没有最小元和最大元



[例] A的幂集上的⊆关系的Hasse图。

$\varnothing$ 为最小元

$\{a, b, c\}$ 为最大元



A=$\{a,b,c\}$

[例] {2,3,6,12,24,36}上的整除关系的Hasse图。

令B_1={2,3,6}

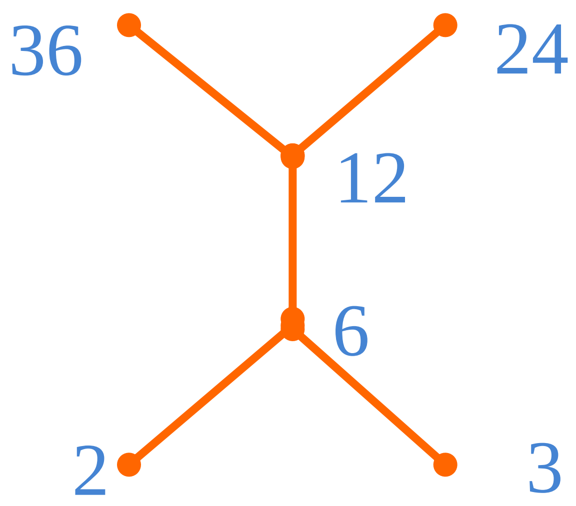
B_1的上界是 6,12,24,36

$6 \in B_1$，而$12,24,36 \notin B_1$

B_1没有下界

令B_2={2,6,12,24}

B_2的上界是24，下界是2



[例] {2,3,6,12,24,36}上的整除关系的Hasse图。

令B_1={2,3,6}

B_1的上界是 6,12,24,36

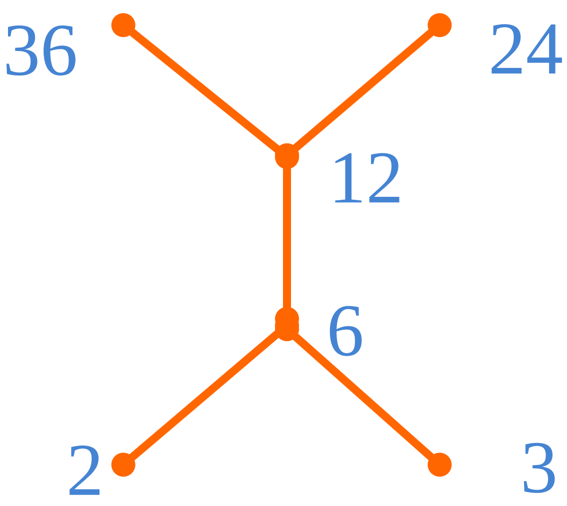
B_1的上确界是 6

B_1没有下界也没有下确界

令B_2={2,6,12,24}

B_2的上界和上确界是24

B_2的下界和下确界是2



例 设集合A={1,2,3,4,5,6,7,8}，“|”是A上的整除关系，则<A,|>是偏序集，考虑A的子集：$B1$={1,2,3,6}，$B2$={2,3,5,7}，$B3$=A。求出$B1$，$B2$，$B3$的最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、最小上界、最大下界。

集　合	最大元	最小元	极大元	极小元	上　界	下　界	最小上界	最大下界
B_1	6	1	6	1	6	1	6	1
B_2	无	无	2, 3, 5, 7	2, 3, 5, 7	无	1	无	1
B_3	无	1	5, 6, 7, 8	1	无	1	无	1

例

设集合$A=\{a,b,c\}$，考虑$r(A)$上的关系“ ”,则$< r(A)$，$>$是偏序集。求$r(A)$的子集：
$B1=\{\{a,b\},\{b,c\},\{b\},\{c\},F\}$，$B2=\{\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$，$B3=r(A)$的最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、最小上界、最大下界。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	最小上界	最大下界
B_1	无	Φ	$\{a,b\}$, $\{b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ
B_2	$\{a,c\}$	无	$\{a,c\}$	$\{a\}$, $\{c\}$	$\{a,c\}$, $\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,c\}$	Φ
B_3	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ

定理　设$<A,\leq>$是一偏序集，B是A的子集。则：

（1）若b是B的最大元 则 b是B的极大元、上界、最小上界；

（2）若b是B的最小元 则b是B的极小元、下界、最大下界；

（3）若a是B的最小上界，且$a \in B$ Þ a是B的最大元；

（4）若a是B的最大下界，且$a \in B$ Þ a是B的最小元；

（5）若B存在最大元，则B的最大元是惟一的；

（6）若B存在最小元，则B的最小元是惟一的；

（7）b是B的最大元 Û b是B的惟一极大元；

（8）b是B的最小元 Û b是B的惟一极小元；

（9）若B存在最小上界，则B的最小上界是惟一的；

（10）若B存在最大下界，则B的最大下界是惟一的。

拓扑排序

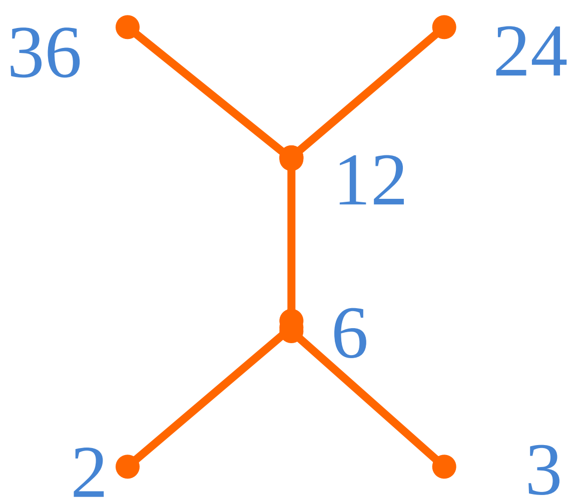
[链与反链] 对 $<A, \leq>$, $B \subseteq A$, 若B中任两个元素之间都是可比较的，则称B是A中的一条链。若B中任两个元素之间都是不可比较的，则称B是A中的一条反链。

[例] 右边所示Hasse图中，

$\{2, 6, 12, 24\}$ 是一条链

$\{2, 3\}$ 和 $\{24, 36\}$ 是反链

注意： $\{2, 3, 24, 36\}$ 并非反链



[全序关系] 设偏序集〈A，≤〉，若A是一条链，则称“≤”为A上的一个全序关系，此时称〈A，≤〉是一个全序集合。

偏序关系的逆关系

[定义] 设偏序集 <A, ≤ >，定义A上的关系“≥”

$$x \geq y \Leftrightarrow x, y \in A \wedge y \leq x$$

集合A和关系“≥”仍然构成一个偏序集 <A, ≤ >。

[拓扑排序] 一个偏序集可以表示一个工程中各个任务之间的依赖关系。如果一个时刻只能进行一个任务，那么整个工程的流程是一个与原偏序协调的全序。找出这个全序的过程称为拓扑排序。

[定义]设有偏序集$\langle A, \le \rangle$，如果存在一个全序$\subset$使得 $x \le y$ 蕴含 $x \subset y$，则称$\subset$是A上的一个拓扑排序。

[拓扑排序算法]

[问题] 是否每个偏序集都存在拓扑排序?

一个全序≤称为同偏序R是相容的，如果只要有aRb，就有a ≤b，从一个偏序构造一个相容的全序叫做拓扑排序.

每个非空有穷偏序集(S，≤)都有极小元素，因此可以产生一个相容的全序.

例：找出对于偏序集({1, 2, 4, 5, 12, 20}，|)的一个相容的全序.

词典次序

设字母表为X，“≤”为X上的自然次序。显然

$<X, \leq>$为全序集合。

① 长度为2的词库 $A=X\times X$

在A上定义全序关系S：

$$<x_1, y_1> S <x_2, y_2> \Leftrightarrow (x_1<x_2)\vee(x_1=x_2\wedge y_1\leq y_2)$$

② 长度不大于n的词库 $A=X\cup X^2\cup\ldots\ldots\cup X^n$

在A上定义全序关系S：

设 $<x_1,x_2,\ldots,x_p>$, $<y_1,y_2,\ldots,y_q>\in A$,其中$p\le q\le n$。

$<x_1,x_2,\ldots,x_p>S<y_1,y_2,\ldots,y_q>$ 当且仅当下列三个条件之一得到满足：

(i) $<x_1,x_2,\ldots,x_p>=<y_1,y_2,\ldots,y_p>$

(ii) $x_1\ne y_1$且在X中有$x_1\le y_1$

(iii) $x_i=y_i,i=1..k,k<p,x_{i+1}\ne y_{i+1}$且在X中有

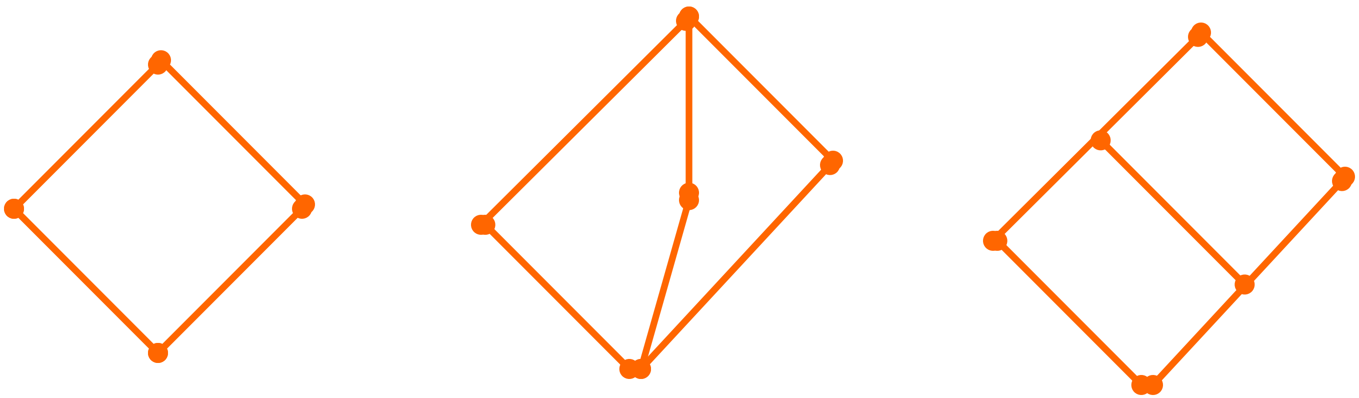
$x_{i+1}\le y_{i+1}$

否则 $<y_1,y_2,\ldots,y_q>S<x_1,x_2,\ldots,x_p>$

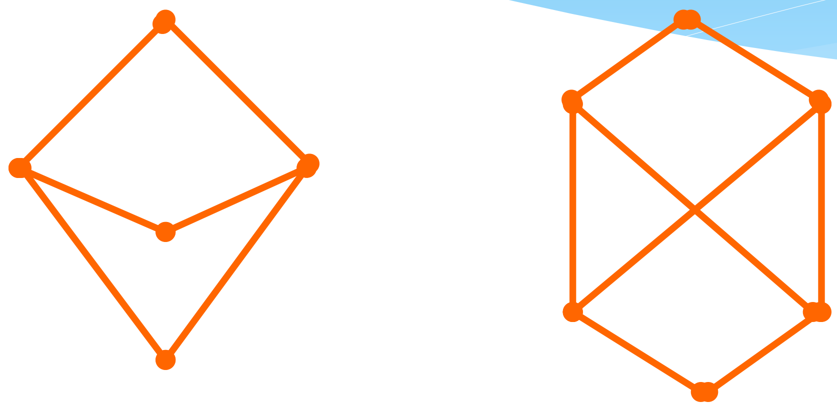
格

[格] 设偏序集合 ⟨A, ≤⟩, 若其中任何二个元素在A中都有上、下确界，则称 ⟨A, ≤⟩ 为一个格。

[例] 如下的Hasse 图描述了三个格：



［例］如下的Hasse 图描述的不是格：（没有下确界）



[例] $<I^+, \le>$，I^+ 正整数，a“$\le$” b iff a 整除 b。

任何 $\{x,y\} \subseteq I^+$, 其上确界为其最小公倍数，下确界为其最大公约数，均存在于I^+ 中。故 $<I^+, \le>$ 为格。

[上下确界] 设 $<A, \leq>$为格，对任意 $a,b \in A$，记 a,b的上确界元素为$a \vee b$，下确界元素为$a \wedge b$。

[性质] 设 $<A, \leq>$ 为格，对任意 $a,b,c,d \in A$，有

① $a \leq a \vee b,\ a \wedge b \leq a$

② 若 $a \leq b$,$c \leq d$，则 $a \vee c \leq b \vee d,\ a \wedge c \leq b \wedge d$

③ $a \wedge b = b \wedge a,\ a \vee b = b \vee a$ （交换律）

④ $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c,\ a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$（结合律）

⑤ $a \wedge (a \vee b)=a,\ a \vee (a \wedge b)=a$ （吸收律）

本章内容

* 关系的表示，特别是矩阵表示
* 关系的运算
* 闭包关系
* 等价和偏序关系的特点
* 偏序里面八大元素如何确定