# 南开大学 2007 级物理类高等数学统考试卷 2008 年 6 月 22 日

一、求曲面 $2x^2+y^2+z^2=4$ 在点（1，1，1）处的切平面和法线方程。（12 分）

答案：切平面方程为 $2x+y+z-4=0$

法线方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

二、设方程：$2x^2+y^2+z^2=yf(\dfrac{z}{y})$，确定函数 $z=z(x,y)$，其中 $f(u)$ 对 $u$ 可微，

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。（16 分）

解　方程两边同时对 $x$ 求偏导，得 $4x+2zz'_x=yf'(\dfrac{z}{y})\dfrac{z'_x}{y}$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{4x}{f'(\dfrac{z}{y})-2z}$.

方程两边同时对 $y$ 求偏导，得 $2y+2zz'_y=f(\dfrac{z}{y})+yf'(\dfrac{z}{y})\dfrac{yz'_y-z}{y^2}$，解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y^2-yf(\dfrac{z}{y})+zf'(\dfrac{z}{y})}{yf'(\dfrac{z}{y})-2yz}.$$

注　本题中 $f$ 为一元函数，故不可使用 $f'_x,f'_y,f'_1,f'_2$ 等记号。

三、求函数 $f(x,y,z)=x+y-z+10$ 在条件：$x^2+y^2+z^2\le 3$ 下的最大值、最小值。（16 分）

解法一　函数 $f(x,y,z)=x+y-z+10$ 在 $x^2+y^2+z^2<3$ 时无驻点，无不可导点。

当 $x^2+y^2+z^2=3$ 时，作 $L(x,y,z,\lambda)=x+y-z+10+\lambda(x^2+y^2+z^2-3)$.

$$\begin{cases} L'_x=1+2\lambda x=0 \\ L'_y=1+2\lambda y=0 \\ L'_z=-1+2\lambda z=0 \\ L'_\lambda=x^2+y^2+z^2-3=0 \end{cases}$$

解得 $(x,y,z)=\pm(1,1,-1)$

$f(1,1,-1)=13$ 为最大值，$f(-1,-1,1)=7$ 为最小值。

解法二 根据柯西不等式，$(x+y-z)^2 \le (1+1+1)(x^2+y^2+z^2) \le 9$

故 $-3 \le x+y-z \le 3$． $f(1,1,-1)=13$ 为最大值， $f(-1,-1,1)=7$ 为最小值。

解法三 在平面 $x+y-z=C$ 上函数 $f(x,y,z)=x+y-z+10$ 取值相同。问题变成平面 $x+y-z=C$ 与球 $x^2+y^2+z^2 \le 3$ 交集非空时，求 $C$ 的最值。显然当平面 $x+y-z=C$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 相切时，$C$ 达到最大、最小值。两切点的连线为球的直径，该直径过球心 O 且方向向量为 $(1,1,-1)$（即平面 $x+y-z=C$ 的法向量）.故切点为 $\pm(1,1,-1)$.

$f(1,1,-1)=13$ 为最大值， $f(-1,-1,1)=7$ 为最小值。

（注 解法三叙述比较麻烦，用作验算更合适些）

解法四 设 $x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$，其中

$0 \le r \le \sqrt{3}, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi$

$u=f(x,y,z)=x+y-z+10=r(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin\varphi-\cos\varphi)+10$

$=r[\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})\sin\varphi-\cos\varphi]+10=r\sqrt{2\cos^2(\theta-\frac{\pi}{4})+1}\sin(\varphi+\varphi_0)+10$

于是 $|u-10| \le r\sqrt{2\cos^2(\theta-\frac{\pi}{4})+1} \le \sqrt{3}r \le 3$.

故 $7 \le u=f(x,y,z) \le 13$.

检验等式成立的条件可知， $f(1,1,-1)=13$ 为最大值， $f(-1,-1,1)=7$ 为最小值。

四、计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，$D$ 为不等式 $\sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$ 所确定的平面区域。（12 分）

解 $D: 0 \le x \le 2, \sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^2dr=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)d\theta=\frac{4\pi}{3}-\frac{16}{9}.$$

五、计算曲面积分：$I=\iint\limits_{\Sigma} 2ydydz-2xdzdx+z^2dxdy$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在平面$z=1$及$z=3$之间的里侧。（12 分）

解 $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， $z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$I=\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 9}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^3 r^3dr=40\pi.$$

六、求$\oint\limits_{C}\dfrac{-ydx+xdy}{2x^2+y^2}$，其中$C$： $x^2+y^2=1$，取逆时针方向。（14 分）

解 $P=\dfrac{-y}{2x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{2x^2+y^2}$. 于是$P'_y=Q'_x=\dfrac{y^2-2x^2}{(2x^2+y^2)^2}$. 取充分小的正数$\varepsilon$，使得曲线$C_1: 2x^2+y^2=\varepsilon^2$在曲线$C$里面，$C_1$取逆时针方向。曲线$C$与$C_1$围成区域$D$. 由格林公式，

$$\oint\limits_{C}\frac{-ydx+xdy}{2x^2+y^2}-\oint\limits_{C_1}\frac{-ydx+xdy}{2x^2+y^2}=\iint\limits_{D}0dxdy=0.$$

$$\oint\limits_{C}\frac{-ydx+xdy}{2x^2+y^2}=\oint\limits_{C_1}\frac{-ydx+xdy}{2x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_{C_1}-ydx+xdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{2x^2+y^2\le\varepsilon^2}2dxdy=\sqrt{2}\pi.$$

七、计算曲面积分：$I=\iint\limits_{S}(z^3+x)dydz-zdxdy$，其中$S$为抛物面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0,z=2$之间部分下侧。（12 分）

解 $z'_x=x$， $z'_y=y$

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\frac{1}{8}x(x^2+y^2)^3+x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)dxdy \text{ (对称性)}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy \text{ (对称性)}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=8\pi.$$

八、证：当 $a^2+b^2>0$，$\iint\limits_D |ax+by|dxdy=\dfrac{4}{3}\sqrt{a^2+b^2}$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$。（6分）

证 $\iint\limits_D |ax+by|dxdy=\int_0^{2\pi}|a\cos\theta+b\sin\theta|\,d\theta\int_0^1 r^2dr=\dfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}|a\cos\theta+b\sin\theta|\,d\theta$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}|a\cos\theta+b\sin\theta|\,d\theta=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}\int_0^{2\pi}|\cos(\theta+\varphi)|\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}\int_0^{2\pi}|\cos t|\,dt=\frac{4\sqrt{a^2+b^2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=\frac{4\sqrt{a^2+b^2}}{3}.$$

## 南开大学2008级物理类高等数学统考试卷 2009年6月28日

一、设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=2xyz$ 所确定，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $dz$.（本题12分）

答案 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz-x}{z-xy},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz-y}{z-xy},dz=\dfrac{yz-x}{z-xy}dx+\dfrac{xz-y}{z-xy}dy$.

二、设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{y}{x})$，其中 $f$ 具有二阶连续偏导数，$g$ 具有二阶连续导数，

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.（本题12分）

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'(xy,\dfrac{x}{y})+\dfrac{1}{y}f_2'(xy,\dfrac{x}{y})-\dfrac{y}{x^2}g'(\dfrac{y}{x})$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'(xy,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^2}f_2'(xy,\frac{x}{y})+\frac{1}{x}g'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(xy,\frac{x}{y})+xyf_{11}''(xy,\frac{x}{y})-\frac{1}{y^2}f_2'(xy,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^3}f_{22}''(xy,\frac{x}{y})-\frac{1}{x^2}g'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^3}g''(\frac{y}{x}).$$

三、计算 $\iint\limits_D |\sin(x+y)|dxdy$，其中 $D: 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi$.（本题12分）

解 由对称性，$\iint\limits_D |\sin(x+y)|dxdy=2\int_0^{\pi}dx\int_0^{\pi-x}\sin(x+y)dy=2\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx=2\pi$.

四、求积分 $I=\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$，其中 $V$ 是由平面 $x+y+z=1$ 以及三个坐标平面所围成的区域.（本题12分）

解　由对称性，$I=3\iiint\limits_V xdxdydz=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz=\frac{3}{2}\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx=\frac{1}{8}$.

五、计算曲线积分 $I=\int_L(2x^2+z^2)ds$，其中 $L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $y=x$ 相交的圆周，$a>0$.（本题10分）

解　由对称性，$\int_L x^2ds=\int_L y^2ds$.

$I=\int_L(2x^2+z^2)ds=\int_L(x^2+y^2+z^2)ds=\int_L a^2ds=2\pi a^3$.

六、求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧面.（本题10分）

解法一　不妨设 $a>0$. $\Sigma$ 所围球体记为 $\Omega$.

$I=\frac{1}{a^3}\oiint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{1}{a^3}\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz$（高斯公式）

$=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi$.

解法二　不妨设 $a>0$. 由对称性，

$I=3\oiint\limits_{\Sigma}\frac{zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{a^3}\oiint\limits_{\Sigma}zdxdy=\frac{6}{a^3}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\frac{6}{a^3}\cdot\frac{2}{3}\pi a^3$（半球体积为 $\frac{2}{3}\pi a^3$）$=4\pi$.

七、求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的切平面，并求此切平面与曲面 $z=11-x^2-4y^2+2x+4y$ 所围立体的体积.（本题12分）

解　$z'_x=2x$，$z'_y=2y$. 故在点 $(1,2,5)$ 处的切平面，其法向量为 $(2,4,-1)$. 切平面方程为

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$. 即 $2x+4y-z-5=0$.

曲面 $z=11-x^2-4y^2+2x+4y=13-(x-1)^2-(2y-1)^2$ 为开口向下的椭圆抛物面，对应所围立体的上底，切平面 $2x+4y-z-5=0$ 作下底。

交线$\begin{cases} z = 11 - x^2 - 4y^2 + 2x + 4y \\ 2x + 4y - z - 5 = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ z = 2x + 4y - 5 \end{cases}$.

投影到 $xOy$ 平面，得$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

所围立体的体积为 $\iint\limits_{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\le 1} [(11 - x^2 - 4y^2 + 2x + 4y) - (2x + 4y - 5)]dxdy$

$= \iint\limits_{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\le 1} (16 - x^2 - 4y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (16 - 16r^2) 8r dr = 64\pi$.

八、设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0) = 0$. 试求 $f(x)$ 及 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} [f(x) - e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$.（本题 8 分）

解 $Q'_x - P'_y = -f'(x)\cos y - [f(x) - e^x]\cos y = 0$. 由 $y$ 的任意性，知 $f'(x) + f(x) = e^x$.

解得 $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$. 由 $f(0) = 0$，得 $C = -\dfrac{1}{2}$. 于是 $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

$\int_{(0,0)}^{(1,1)} [f(x) - e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2}\sin y \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \dfrac{1 - e^2}{2e}\sin 1$.

九、试证 $6\pi e^{-3} \le \iint\limits_D e^{xy} dxdy \le 6\pi e^3$，其中 $D$ 由椭圆 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 所围成的区域.（本题 6 分）

证 $2\left|\dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{y}{2}\right| \le \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1$，即 $-3 \le xy \le 3$，

$6\pi e^{-3} = \iint\limits_D e^{-3} dxdy \le \iint\limits_D e^{xy} dxdy \le \iint\limits_D e^3 dxdy = 6\pi e^3$.

十、设函数 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$，满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \iint\limits_{s^2+t^2\le x^2+y^2} \dfrac{1}{1 + s^2 + t^2} dsdt$，且.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$（1）试求 $f'(x)$ 的表达式；（2）若 $f(0) = 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^2}$.（本题 6 分）

解 $\iint\limits_{s^2+t^2\le x^2+y^2}\frac{1}{1+s^2+t^2}dsdt=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{r}{1+r^2}dr=\pi\ln(1+x^2+y^2)$

$u'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})$，

$u''_{xx}=\frac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}f'(\sqrt{x^2+y^2})+\frac{x^2}{x^2+y^2}f''(\sqrt{x^2+y^2})$.

同理，$u''_{yy}=\frac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}f'(\sqrt{x^2+y^2})+\frac{y^2}{x^2+y^2}f''(\sqrt{x^2+y^2})$.

由题设知 $f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=\pi\ln(1+r^2)$.

解得 $f'(r)=\frac{\pi r}{2}\ln(1+r^2)-\frac{\pi r}{2}+\frac{\pi}{2r}\ln(1+r^2)+\frac{C}{r}$.

故 $f'(x)=\frac{\pi x}{2}\ln(1+x^2)-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2x}\ln(1+x^2)+\frac{C}{x}$.

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$ 知 $C=0$.

故 $f'(x)=\frac{\pi x}{2}\ln(1+x^2)-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2x}\ln(1+x^2)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}[\frac{\pi}{4}\ln(1+x^2)-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4x^2}\ln(1+x^2)]=0$.

## 南开大学 2009 级物理类高等数学统考试卷 2010 年 7 月 5 日

一、设 $u=f\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-x}{xz}\right)$，证明：$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$。（本题 10 分）

证明略。

二、已知曲线方程：$\begin{cases}3x^2y+y^2z=-2\\2xz-x^2y=3\end{cases}$，求该曲线在点 $(1,-1,1)$ 处的切线和法平面。（本题 10 分）

解 方程两边求关于 $x$ 的导数，得 $\begin{cases}6xy+3x^2y'+2yy'z+y^2z'=0\\2z+2xz'-2xy-x^2y'=0\end{cases}$. 代入 $(x,\mathrm{y},\mathrm{z})=(1,-1,1)$，得 $y'(1)=\frac{16}{3}$，$z'(1)=\frac{2}{3}$

切线方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{16}=\frac{z-1}{2}$

法平面方程为 $3x+16y+2z+11=0$.

三、计算$\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中$L$为以$A(1,0),B(2,0),C(2,1),D(1,1)$为顶点的正方形，取逆时针方向。（本题 10 分）

解法一

$$\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=(\int\limits_{L(AB)}+\int\limits_{L(BC)}+\int\limits_{L(CD)}+\int\limits_{L(DA)})(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_1^2 x^2dx+\int_0^1(4-y^2)dy+\int_2^1(x^2+1)dx+\int_1^0(1-y^2)dy$$

$$=2$$

解法二

设$L$所围区域为$D$，由格林公式

$$\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\iint\limits_D (2x-2y)dxdy$$

$$=2.$$

四、计算：$\iiint\limits_V zdxdydz$，其中$V$是两个球$x^2+y^2+z^2\le R^2, x^2+y^2+z^2\le 2Rz$的公共部分。（本题 12 分）

解法一

两球面的交线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=2Rz \end{cases}$，即$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}R^2 \\ z=\dfrac{R}{2} \end{cases}$

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{3}{4}R^2} dxdy\int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdz=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{3}{4}R^2}(R\sqrt{R^2-x^2-y^2}-\frac{R^2}{2})dxdy$$

$$=R\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{3}{4}R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy-\frac{3}{8}\pi R^4$$

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\sqrt{R^2-r^2}dr-\frac{3}{8}\pi R^4$$

$$=\frac{5}{24}\pi R^4$$

解法二

平面$z=h$截几何体$V$所得的截面记为$D_h$.

$$\iiint_V zdxdydz = \int_0^R dz\iint_{D_z} zdxdy = \pi\int_{\frac{R}{2}}^{R} z(R^2-z^2)dz + \pi\int_0^{\frac{R}{2}} z[R^2-(R-z)^2]dz$$

$$= \pi\int_{\frac{R}{2}}^{R} z(R^2-z^2)dz + \pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}(R-t)(R^2-t^2)dt \quad （设 t = R - z ）$$

$$= \pi\int_{\frac{R}{2}}^{R} z(R^2-z^2)dz + \pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}(R-z)(R^2-z^2)dz$$

$$= \pi\int_{\frac{R}{2}}^{R} R(R^2-z^2)dz$$

$$= \frac{5}{24}\pi R^4 .$$

五、计算曲面积分 $\iint_S (y^2+z^2)dS$，其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$。（本题 12 分）

解　由对称性，$\iint_S x^2dS = \iint_S y^2dS = \iint_S z^2dS$ .

$$\iint_S (y^2+z^2)dS = \frac{2}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS = \frac{2}{3}\iint_S a^2dS = \frac{8}{3}\pi a^4 .$$

六、计算：$\iint_S (x+y+1)dydz+(y+z+1)dzdx+(z+x+1)dxdy$，其中 $S$ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1$（$z\ge 0$），取上侧。（本题 10 分）

解　设 $S_1: x^2+y^2\le 1$，$z=0$，取下侧. $V$ 表示上半球。由高斯公式

$$\iint_S (x+y+1)dydz+(y+z+1)dzdx+(z+x+1)dxdy$$

$$= \iiint_V 3dxdydz - \iint_{S_1}(x+y+1)dydz+(y+z+1)dzdx+(z+x+1)dxdy$$

$$= 2\pi - \iint_{S_1}(x+1)dxdy$$

$$= 2\pi - \iint_{S_1} dxdy \quad （对称性）$$

$$= 2\pi - \iint_{x^2+y^2\le 1}(-1)dxdy \quad （由前面的第二型曲面积分，变成这一行的二重积分）$$

$$= 3\pi .$$

七、求一元函数 $f(r)$ 使得 $\nabla\cdot(f(r)\vec{r})=0$，其中 $\vec{r}=(x,y,z)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。（本题 10 分）

解　散度 $\nabla\cdot(f(r)\vec{r}) = div(f(r)\vec{r}) = \dfrac{\partial(xf(r))}{\partial x}+\dfrac{\partial(yf(r))}{\partial y}+\dfrac{\partial(zf(r))}{\partial z} = 3f(r)+rf'(r)$

于是$3f(r)+rf'(r)=0$．故$(r^3 f(r))'=0$． $f(r)=Cr^{-3}$．

八、求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x^2-xy}$。（本题 10 分）

解　设$u=\dfrac{y}{x}$，方程变为$xu'+u=\dfrac{u^2}{1-u}$

$$\frac{1-u}{2u^2-u}du=\frac{dx}{x}$$
$$\int(\frac{1}{2u-1}-\frac{1}{u})du=\int\frac{dx}{x}$$
$$\frac{2u-1}{u^2}=Cx^2$$

即$2y-x=Cxy^2$．

九、求解微分方程$y''+y=\sin x-\cos 2x$。（本题 10 分）

解　先求齐次微分方程的通解$\bar{y}$．特征方程$t^2+1=0$．有共轭复根$t=\pm i$．

$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$．

再求非齐次微分方程的特解$y^*$． $y^*=-\dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{1}{3}\cos 2x$（求特解的技巧超出了当前教材的要求，感兴趣者可查阅其它参考书，也可跳过。）

于是非齐次微分方程的通解$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{1}{3}\cos 2x$.

十、求微分形式$y\sin ydx+(x\sin y+\cos y)dy$的积分因子。（本题 6 分）

解　$y\sin ydx+(x\sin y+\cos y)dy=\sin yd(xy)+d\sin y$

令积分因子$\mu(x,y)=e^{xy}$，则

$\mu(x,y)[y\sin ydx+(x\sin y+\cos y)dy]=e^{xy}[\sin yd(xy)+d\sin y]$

$=\sin yd(e^{xy})+e^{xy}d\sin y=d(e^{xy}\sin y)$.

本题超出了当前教材的要求，可跳过。

## 南开大学 2010 级物理类高等数学统考试卷 2011 年 07 月 5 日

一、计算下列各题（共六小题，每题 10 分，共 60 分）

1.计算二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$。

答案　2.

2.设 $z = xye^{\sin(xy)}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

答案　$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{\sin(xy)} + xy^2 e^{\sin(xy)} \cos(xy)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\sin(xy)} + 3xye^{\sin(xy)} \cos(xy) + x^2 y^2 e^{\sin(xy)} \cos^2(xy) - x^2 y^2 e^{\sin(xy)} \sin(xy).$$

3.设 $x, y, z$ 满足方程 $z^2 y - xz^3 - 1 = 0$，求 $dz$。

答案　$dz = \frac{z^2}{2y - 3xz} dx - \frac{z}{2y - 3xz} dy$.

4.交换积分顺序 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy$。

答案　$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$.

5.计算曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$，其中 $L$ 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$。

解法一　$L: r = a\cos\theta$，参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^2\theta \\ y = a\sin\theta\cos\theta \end{cases}$

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_L \sqrt{ax} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos\theta d\theta = 2a^2.$$

解法二　参数方程 $\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\theta \\ y = \frac{a}{2}\sin\theta \end{cases}$，$ds = \frac{a}{2} d\theta$

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_L \sqrt{ax} ds = \int_{-\pi}^{\pi} a\cos\frac{\theta}{2} \cdot \frac{a}{2} d\theta = 2a^2.$$

6.计算曲线积分 $\int_L \sin y dx + \sin x dy$，其中 $L$ 为由点 $(0, \pi)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的直线段。

解　$\int_L \sin y dx + \sin x dy = \int_0^{\pi} [\sin(\pi - x) - \sin x] dx = 0$.

二、计算第一型曲面积分 $\iint\limits_S \left[\left(x^2+y^2\right)^2+z^2\right]dS$，其中 $S$ 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 位于 $0\le z\le h$ 的部分。（6 分）

解法一 $\iint\limits_S \left[\left(x^2+y^2\right)^2+z^2\right]dS=\iint\limits_S \left(R^4+z^2\right)dS=2\iint\limits_{D_{xz}}\left(R^4+z^2\right)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}d\,x\,d$

$=2\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx\int_0^h\left(R^4+z^2\right)dz=\frac{2}{3}\pi Rh\left(3R^4+h^2\right).$

解法二 $\iint\limits_S \left[\left(x^2+y^2\right)^2+z^2\right]dS=\iint\limits_S \left(R^4+z^2\right)dS=2\pi R\int_0^h\left(R^4+z^2\right)dz=\frac{2}{3}\pi Rh\left(3R^4+h^2\right).$

三、计算三重积分 $\iiint\limits_V zdxdydz$，其中 $V$ 由曲面 $x^2+y^2+z^2=2$，$x^2+y^2=z^2$ 围成，$z\ge 0$。（6 分）

解法一 $\iiint\limits_V zdxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}zdz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)dxdy=\frac{\pi}{2}.$

解法二 $\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}zdxdy+\int_1^{\sqrt{2}}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z^2}zdxdy=\frac{\pi}{2}.$

四、选取 $a,b$ 使 $\frac{\left(y^2+2xy+ax^2\right)dx-\left(x^2+2xy+by^2\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$。（7 分）

解 $u'_x=\frac{y^2+2xy+ax^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $u'_y=\frac{-\left(x^2+2xy+by^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. 故

$u''_{xy}=\frac{2x^3+(2-4a)x^2y-6xy^2-2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}$， $u''_{yx}=\frac{2x^3+6x^2y+(4b-2)xy^2-2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}$ 连续。

由 $u''_{xy}=u''_{yx}$，得 $a=b=-1.$

$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y^2+2xy-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

同理$\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)'_y=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

所以$u(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}+C$.

五、计算曲线积分$\int\limits_L\dfrac{\left(e^{x^2}-x^2y\right)dx+\left(xy^2-\sin y^2\right)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$是$x^2+y^2=1$，顺时针方向。（7 分）

解 $\int\limits_L\dfrac{\left(e^{x^2}-x^2y\right)dx+\left(xy^2-\sin y^2\right)dy}{x^2+y^2}=\int\limits_L\left(e^{x^2}-x^2y\right)dx+\left(xy^2-\sin y^2\right)dy$

$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy$（格林公式）

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=-\dfrac{\pi}{2}$.

六、计算曲面积分$\iint\limits_S\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$，其中$S$为椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，外侧。（7 分）

解 取充分小的正数$\varepsilon$，使得球面$S_1:x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$被$S$包围，$S_1$取外侧。由高斯公式，

$$\iint\limits_S\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}-\iint\limits_{S_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\iiint\limits_V 0dxdydz=0,$$

其中$V$是由曲面$S$与$S_1$围成的几何体。于是

$$\iint\limits_S\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\iint\limits_{S_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\varepsilon^2}3dxdydz=4\pi.$$

七、设函数$F(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，且$gradF\neq 0,(x,y,z)\in R^3$，若$(\xi,\eta,\zeta)$是曲面$S:F(x,y,z)=0$上的一点，该点到原点的距离是曲面$S$到原点的最短距离，证明：曲面$S$在点$(\xi,\eta,\zeta)$的法线必通过原点。（7 分）

证 用拉格朗日乘数法求曲面$S$到原点的最短距离。令

$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda F(x,y,z)$.

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda F'_x(x,y,z) = 0 \\ L'_y = 2y + \lambda F'_y(x,y,z) = 0 \\ L'_z = 2z + \lambda F'_z(x,y,z) = 0 \\ L'_\lambda = F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

故$(\xi,\eta,\zeta) = -\dfrac{\lambda}{2}(F'_x, F'_y, F'_z)$.

或者说$(\xi,\eta,\zeta) // (F'_x, F'_y, F'_z)$.

即曲面$S$在点$(\xi,\eta,\zeta)$的法线通过原点。

## 南开大学 2011 级物理类高等数学统考试卷 2012 年 07 月 2 日

一、（共二题，每题 8 分，共 16 分）

1．设$z = f\left(x^2 - y^2, e^{xy}\right)$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x f'_1 + y e^{xy} f'_2$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y f'_1 + x e^{xy} f'_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy f''_{11} + 2x^2 e^{xy} f''_{12} + (1+xy)e^{xy} f'_2 - 2y^2 e^{xy} f''_{21} + xy e^{2xy} f''_{22}.$$

2. 设$z = f(x,y)$是由方程$z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$所确定的二元函数，求$dz$.

答案 $dz = \dfrac{1 - e^{z-y-x} + xe^{z-y-x}}{1 + xe^{z-y-x}} dx + dy$.

二、（本题 8 分）求曲面$z - e^z + 2xy = 3$点$(1, 2, 0)$处的切平面方程。

答案 切平面方程为$2x + y - 4 = 0$.

三、计算下列各题（共四题，每题 8 分，共 32 分）

1. 计算$I = \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy.$

解 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 y e^{-y^2} dy = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-4})$.

2. 计算$I = \iint\limits_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2} dxdy$，其中积分区域$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x + y \ge 1\}$.

解

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy \ =\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1(\cos\theta+\sin\theta)dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta-1)d\theta=2-\frac{\pi}{2}.$$

3. 计算曲线积分$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$，其中$\Gamma$：$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=1\end{cases}(a>0)$.

解 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds=\int_\Gamma (a^2+1)\,ds=2\pi a(a^2+1)$.

4. 计算曲面积分$\iint_\Sigma (z+2x+\frac{4}{3}y)\,dS$，其中$\Sigma$为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限的部分。

解 $\iint_\Sigma (z+2x+\frac{4}{3}y)\,dS=\iint_\Sigma 4(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4})\,dS=\iint_\Sigma 4\,dS=\frac{4}{3}\sqrt{61}\iint_{D_{xy}} dxdy=4\sqrt{61}$.

四、（本题 10 分）计算曲线积分$I=\int_L(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$，其中 L 为由点$A(-1,1)$沿曲线$y=x^2$到坐标原点，再由坐标原点沿$x$轴到$B(2,0)$.

解 $\int_L(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$

$=\int_{L(AO)}(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy+\int_{L(OB)}(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$

$=\int_{-1}^0(12x^3-2x\cos x^2+e^{x^2}+2x^2e^{x^2})dx+\int_0^2 dx$

$=(3x^4-\sin x^2+xe^{x^2})\Big|_{-1}^0+2$

$=\sin 1+e-1.$

五、（本题 10 分）计算曲面积分$I=\iint_\Sigma zdxdy+ydzdx+xdydz$，其中$\Sigma$为圆柱面

$x^2+y^2=1$被$z=0,z=3$截得的部分的外侧。

解 设$S_1:z=0,x^2+y^2\le 1$，取下侧；$S_2:z=3,x^2+y^2\le 1$，取上侧。由高斯公式，

$$\iint_\Sigma zdxdy+ydzdx+xdydz+\iint_{S_1}0dxdy+\iint_{S_2}3dxdy=\iiint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\0\le z\le 3}}3dxdydz,$$

$$\iint_\Sigma zdxdy+ydzdx+xdydz=\iiint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\0\le z\le 3}}3dxdydz-\iint_{S_2}3dxdy=9\pi-3\pi=6\pi.$$

六、（本题 6 分）计算三重积分$I=\iiint_\Omega (ax+by+cz)^2dV$，其中

$\Omega=\{(x,y,z)\,\|\,x|+|y|+|z|\le 1\}$.

解　由对称性，$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dV = \iiint\limits_{\Omega} z^2 dV$，$\iiint\limits_{\Omega} xydV = \iiint\limits_{\Omega} yzdV = \iiint\limits_{\Omega} zxdV = 0$.

设$\Omega_1$为$\Omega$在第一卦限的部分。于是

$$\iiint\limits_{\Omega} (ax+by+cz)^2 dV = (a^2+b^2+c^2)\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV = 8(a^2+b^2+c^2)\iiint\limits_{\Omega_1} z^2 dV$$

$$= 8(a^2+b^2+c^2)\int_0^1 dz \iint\limits_{\substack{x+y\le 1-z \\ x,y\ge 0}} z^2 dxdy = 4(a^2+b^2+c^2)\int_0^1 z^2(1-z)^2 dz = \frac{2}{15}(a^2+b^2+c^2).$$

七、（本题 6 分）设　$f(x,y) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，

（1）证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；　（2）求 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$；

（3）讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的可微性。

解　（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = 0$，$\left|\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \dfrac{\pi}{2}$. 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

（2）$f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2}} - 0}{x-0} = \dfrac{\pi}{2}$，

$f_y'(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y-0} = 0$.

（3）$(x,y)\ne(0,0)$时，

$$f_x'(x,y) = \arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f_y'(x,y) = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x'(x,y) = \dfrac{\pi}{2} - 0 = f_x'(0,0)$. 故 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续。同理，$f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续。故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微。

八、（本题 6 分）求证：$\dfrac{3}{2}\pi < \iiint\limits_{\Omega} \sqrt[3]{x-2y+2z+5}\,dV < 3\pi$，其中$\Omega$为$x^2+y^2+z^2 \le 1$.

解法一至四　仿照 2007 级第二学期试卷第三题的解法得到$x-2y+2z$在$\Omega$的最

大值 3，最小值 $-3$，再用估值定理估计三重积分的值即可。

解法五　将直角坐标系 $Oxyz$ 旋转成新的立体直角坐标系 $Ouvw$，其中 $u$ 轴的正方向为 $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，原点不变。易知，$u=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z$. 在新坐标系中 $\Omega$ 为 $u^2+v^2+w^2\le 1$.

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x-2y+2z+5}\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{3u+5}\,dudvdw=\int_{-1}^{1}du\iint\limits_{v^2+w^2\le 1-u^2}\sqrt[3]{3u+5}\,dvdw$$

$$=\int_{-1}^{1}\pi(1-u^2)\cdot\sqrt[3]{3u+5}\,du$$

$$=\int_{\sqrt[3]{2}}^{2}\pi\left(1-\frac{t^6-10t^3+25}{9}\right)t^3dt$$ （其中 $t=\sqrt[3]{3u+5}$ ）

$$=\pi\left(2+\frac{20}{63}-\frac{17}{45}-\frac{1}{9}\right)+\pi\cdot\sqrt[3]{2}\left(\frac{4}{45}-\frac{40}{63}+\frac{8}{9}\right)$$
$\approx 2.2605\pi$ （此处是用电脑算的）

注：解法五仅提供一种新的解题思路，优点是可以算出精确值，但运算量要远远超过前几种方法，因此不推荐用于考场。

九、（本题 6 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$，

其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y+1)^2\le 2\}$， $f(x,y)=(x^{2012}+y^{2012})\sin(x+y)$.

解　$D$ 关于 $x+y=0$ 对称，在对称点处被积函数取值互为相反数，即 $f(x,y)=f(-y,-x)$. 故 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=0$.

## 南开大学 2012 级物理类高等数学统考试卷 2013 年 6 月 17 日

一、（10 分）求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y\sin(xy)e^{x-y}}{x^2+y^2}$.

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}ye^{x-y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}e^{x-y}=0$，$\left|\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\le\dfrac{1}{2}$，于是

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y\sin(xy)e^{x-y}}{x^2+y^2}=0.$$

二、（10 分）设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 $f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin yf_1'+2xf_2'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos yf_1'+e^{2x}\sin y\cos yf_{11}''+2e^x y\sin yf_{12}''+2xe^x\cos yf_{21}''+4xyf_{22}''.$$

三、(10 分)求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程和切平面方程.

答案　法线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$,

切平面方程为 $x-4y+6z-21=0$.

四、(10 分=5×2)(1)求函数 $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$ 的极值.

(2)求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+15y$ 在 $\Omega=\left\{(x,y)\middle|\,4x^2+y^2\le 1\right\}$ 上的最大、小值.

解　(1)$\begin{cases}f_x'=3x^2+3y^2-15=0\\ f_y'=6xy-12=0\end{cases}$

解得驻点 $(1,2)$,$(-1,-2)$,$(2,1)$,$(-2,-1)$,无不可导点。

$A=f_{xx}''=6x$,$B=f_{xy}''=6y$,$C=f_{yy}''=6x$

在点 $(1,2)$,$(-1,-2)$ 处,$AC-B^2<0$,

点 $(2,1)$ 处,$AC-B^2>0$,$A>0$,$f(2,1)=-28$ 为极小值。

点 $(-2,-1)$ 处,$AC-B^2>0$,$A<0$,$f(-2,-1)=28$ 为极大值。

(2)法一　当 $4x^2+y^2<1$ 时,$\begin{cases}f_x'=2x=0\\ f_y'=8y+15=0\end{cases}$,椭圆内无驻点,无不可导点。

当 $4x^2+y^2=1$ 时,令 $L(x,y,\lambda)=x^2+4y^2+15y+\lambda(4x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases}L_x'=2x+8\lambda x=0\\ L_y'=8y+15+2\lambda y=0\\ L_\lambda'=4x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

得条件极值点 $(0,\pm 1)$.

$f(0,1)=19$ 为最大值,$f(0,-1)=-11$ 为最小值。

法二　当 $4x^2+y^2<1$ 时,$\begin{cases}f_x'=2x=0\\ f_y'=8y+15=0\end{cases}$,椭圆内无驻点,无不可导点。

当$4x^2+y^2=1$时，$f(x,y)=x^2+4y^2+15y=\frac{1}{4}(15y^2+60y+1)$，$-1\le y\le 1$.

$f(0,1)=19$为最大值，$f(0,-1)=-11$为最小值。

法三　$f(x,y)=x^2+4y^2+15y\le\frac{1}{4}(15y^2+60y+1)$，$-1\le y\le 1$.

$\frac{1}{4}(15y^2+60y+1)\le\frac{1}{4}(15+60+1)=19$. 故$f(0,1)=19$为最大值。

$f(x,y)=x^2+4y^2+15y\ge 4y^2+15y=4(y+\frac{15}{8})^2-\frac{225}{16}$，$-1\le y\le 1$.

故$f(0,-1)=-11$为最小值。

五、（20 分＝10×2）计算二重积分：（1）$\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$；

（2）$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2-2x+3y+2)dxdy.$

解

（1）$\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx=\int_0^1\frac{y^2}{2\sqrt{1+y^3}}dy=(\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3})\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

（2）$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2-2x+3y+2)dxdy$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+2)dxdy$（对称性）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{|a|}r^3\cos^2\theta dr+2\pi a^2$（圆面积）

$=\frac{1}{4}\pi a^4+2\pi a^2$.

六、（10 分）求$\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域.

解　交线$\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2}\\ z=x^2+y^2\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$

$\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}zdz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2]dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}r^4)rdr=\frac{7}{12}\pi$.

七、（10 分＝5×2）（1）求柱面 $x^2+y^2+z^2=Rx$ 含在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 内的立体体积；

（2）求柱面 $x^2+y^2+z^2=Rx$ 含在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 内的部分的面积.

解　原题有错，将柱面方程都改成 $x^2+y^2=Rx$.

（1）立体体积为 $\iint\limits_{x^2+y^2\le Rx} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}2\sqrt{R^2-r^2}\cdot rdr$

$=\frac{2}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin^3\theta|)d\theta=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=(\frac{2}{3}\pi-\frac{8}{9})R^3$.

（2）面积为 $\int\limits_{x^2+y^2=Rx}2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,ds$

曲线 $x^2+y^2=Rx$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=R\cos^2\theta\\ y=R\sin\theta\cos\theta\end{cases}$， $ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta=Rd\theta$.

故 $\int\limits_{x^2+y^2=Rx}2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2R^2|\sin\theta|\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4R^2\sin\theta d\theta=4R^2$.

八、（12 分＝6×2）（1）计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}z^2dS$ ,其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$;

（2） 计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中 $\Sigma$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 $\Omega$ 的整个边界曲面的外侧.

解　（1）由对称性，$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS$. 故

$\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}R^2dS=\frac{4}{3}\pi R^4$.

（2）由高斯公式，

$\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz=\iiint\limits_{\Omega}(y-z)dxdydz=-\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$ （对称性）

$=-\pi\int_0^3 zdz=-\frac{9\pi}{2}$.

九、（8 分）设函数 $\varphi(x)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意光滑简单闭曲线 $C$ 上，曲线积分

$\oint_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设$L$为正向曲线$(x-2)^2+y^2=1$,证明：$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$.

(2) 求函数$\varphi(x)$的表达式.

(3) 设$C$是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$.

解　(1)设$L_1$为由直线$x=-1, y=\pm 1$和左半圆围成的正向曲线，$L_2$为由直线$x=-1, y=\pm 1$和右半圆围成的正向曲线。由题设，

$\oint_{L_1} \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{L_2} \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$. 故

$$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{L_2} \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}-\oint_{L_1} \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0.$$

(2) 仿照(1)的证明可得，在不围绕原点的任意光滑简单闭曲线$C$上，曲线积分$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$. 于是$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi(x)}{x^4+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{x^4+y^2}\right)$.

$$\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)=2x^5-2xy^2.$$

$$\begin{cases} x^4\varphi'(x)-4x^3\varphi(x)=2x^5 \\ y^2\varphi'(x)=-2xy^2 \end{cases}$$

解得$\varphi(x)=-x^2$.

(3) 设$C_1$为由直线$x=\pm 1, y=\pm 1$围成的正向曲线，则

$$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_1} \frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{-2x}{x^4+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{-1}{1+y^2}dy+\int_{1}^{-1}\frac{2x}{x^4+1}dx+\int_{1}^{-1}\frac{-1}{1+y^2}dy$$

$=0$（对称性）.

# 南开大学2013级物理类高等数学统考试卷 2014年6月17日

一、（10分）设$z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中$f,\varphi$具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

答案　$z''_{xy}=yf''+\varphi'+y\varphi''$.

二、（10 分）求由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)}$.

答案　$\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)}=dx-\sqrt{2}dy$.

三、（10 分）求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程.

答案　$x+2y-4=0$.

四、（40 分=8 分×5）计算：

（1）计算 $I=\iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$.

解　由对称性，$I=\iint\limits_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\dfrac{r}{1+r^2}dr=\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

（2）计算 $I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$，其中 $\Omega$ 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周形成的曲面与 $z=1$ 所围成的区域.

解

$$I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{1}(x^2+y^2)dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\left(1-\frac{r^2}{2}\right)dr=\frac{2\pi}{3}.$$

（3）计算 $I=\int_L (x+y)ds$，其中 $L$ 是由点 $O(0,0)$ 经过点 $A(1,0)$ 到点 $B(0,1)$ 的折线.

解　$I=\int_{L(OA)}(x+y)ds+\int_{L(AB)}(x+y)ds=\int_0^1 xdx+\int_{L(AB)}ds=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$.

（4）计算 $I=\iint\limits_\Sigma (x+y+z)dS$，其中 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上 $z\ge h$ $(0<h<R)$ 的部分.

解　$I=\iint\limits_\Sigma (x+y+z)dS$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2-h^2}(x+y+\sqrt{R^2-x^2-y^2})\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2-h^2}R\quad dxdy=\pi R(R^2-h^2).$$

（5）计算 $I=\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz$，其中 $\Gamma$ 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $(a>0)$，从 $z$ 轴正

向看去为逆时针.

解　设$\Gamma$在平面$x+y+z=0$上所围的圆为$S$，取上侧。由斯托克斯公式，

$$I=\oint_{\Gamma} ydx+zdy+xdz=\iint_S -dydz-dzdx-dxdy=\iint_S \{-1,-1,-1\}\cdot\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}dS$$

$$=-\sqrt{3}\iint_S dS=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

五、（6 分）求函数$z=3axy-x^3-y^3(a>0)$的极值.

解　$z'_x=3ay-3x^2=0$, $z'_y=3ax-3y^2=0$,得驻点$(a,a)$. 在点$(a,a)$处，

$A=C=-6a<0$，$B=3a$，$AC-B^2>0$，故在点$(a,a)$处取极大值，极大值为$z=a^3$.

六、（8 分）已知二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.（1）求$f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$；

（2）证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$连续而不可微；　（3）设方向$l$与$x$轴正方向的夹角为$\alpha$，求$\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l}\right|_{(0,0)}$

解　（1）$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

（2）$0\le\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\le1,\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x=0$，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}=0$，即$f(x,y)$在点$(0,0)$连续。

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\dfrac{\Delta x^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0-\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{-\Delta x\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\neq0$$，这是因为$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y=\Delta x}}\dfrac{-\Delta x\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\neq0$.

故$f(x,y)$在点$(0,0)$不可微。

（3）$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to0}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}=\cos^3\alpha.$$

注　本题没说清由$x$轴正方向逆时针旋转$\alpha$得到$l$，还是顺时针旋转$\alpha$得到$l$. 允

许两种情况任写一种，也允许两种都讨论，都是不扣分的。

七、（8 分） 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中

$\Sigma:(x-1)^2+(y-1)^2+\dfrac{z^2}{4}=1(y\ge 1),$ 取外侧.

解 设 $\Omega$ 为 $\Sigma$ 与平面 $y=1$ 围成的几何体。设 $S:y=1$，取外侧。由高斯公式，

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)dxdydz-\iint\limits_{S}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[2(x-1)+2+2y+2z]dxdydz-\iint\limits_{S}dzdx$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2+2y)dxdydz+\iint\limits_{S^-}dzdx \text{（对称性）}$$

$$=\iint\limits_{(x-1)^2+\frac{z^2}{4}\le 1}dxdz\int_1^{1+\sqrt{1-(x-1)^2-\frac{z^2}{4}}}(2+2y)dy+2\pi$$

$$=\iint\limits_{(x-1)^2+\frac{z^2}{4}\le 1}[1-(x-1)^2-\frac{z^2}{4}+4\sqrt{1-(x-1)^2-\frac{z^2}{4}}]dxdz+2\pi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2+4\sqrt{1-r^2})2rdr=\frac{19\pi}{3}.$$

八、（8 分）设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$（其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数）唯一确定. $L$ 为正向曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a>0,b>0.$ 求

$$I=\oint_L(xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx\cdot$$

解 设平面区域 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1.$

由 $F(xz-y,x-yz)=0$ 可得 $z'_x=\dfrac{zF'_1+F'_2}{yF'_2-xF'_1}$， $z'_y=\dfrac{F'_1+zF'_2}{xF'_1-yF'_2}$. 由格林公式，

$$I=\oint_L(xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx$$

$$=\iint\limits_{D}[(xz^2+2yz)'_x+(2xz+yz^2)'_y]dxdy$$

$$=\iint_D 2dxdy=2\pi ab.$$

注　本题中曲线 $L$ 以逆时针方向为正向。$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是 $xOy$ 平面中的椭圆，而非椭圆柱面。

# 南开大学 2014 级多元函数微积分试卷 2015 年 4 月 26 日

一、选择题（每小题 4 分，共 28 分）

(1) 设 $f(xy,\frac{x}{y})=(x+y)^2$，则 $f(x,y)=$（ B ）

A. $x^2(y+\frac{1}{y})^2$　　B. $\frac{x}{y}(1+y)^2$　　C. $y^2(x+\frac{1}{x})^2$　　D. $\frac{y}{x}(1+y)^2$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=$（ D ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

(3) 函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向 $\vec{L}=\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\}$ 的方向导数是（ B ）

A. 10　　B. 5　　C. 4　　D. $\sqrt{2}$

(4) 设 $z=y\sin x+xe^y$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（ A ）

A. $\cos x+e^y$　　B. $y\cos x+e^y$　　C. $-y\sin x$　　D. $\sin x+e^y$

(5) 下列命题中正确的是（ B ）

A. 函数 $f(x,y)$ 在 $P$ 点偏导数存在则连续

B. 函数 $f(x,y)$ 在 $P$ 点可微则偏导数存在

C. 函数 $f(x,y)$ 在 $P$ 点连续则偏导数存在

D. 函数 $f(x,y)$ 在 $P$ 点偏导数存在则可微

(6) 设 D 是矩形区域 $0\le x\le\pi, 0\le y\le 1$，则积分 $\iint_D y\sin x dxdy=$（ A ）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(7) 设 $L$ 是平面光滑曲线段，$f(x,y)$ 是 $L$ 上的连续函数，则下列陈述正确的是（ B ）

A. $\int_L f(x,y)ds \geq \int_L |f(x,y)|ds$　　B. $\left|\int_L f(x,y)ds\right| \leq \int_L |f(x,y)|ds$

C. $\left|\int_L f(x,y)ds\right| \geq \int_L |f(x,y)|ds$　　D. 以上命题均不成立

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$；

(2) 已知 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，试问 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否连续？

答：<u>不连续</u>；

(3) 曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ z^2=3x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切向量为 $\underline{\{8,10,7\}}$；

(4) 设 $z=e^u\sin v$，$u=xy$，$v=x+y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \underline{ye^{xy}\sin(x+y)+e^{xy}\cos(x+y)}$；

(5) 若 $z=x^y$，则 $dz=\underline{yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy}$；

(6) 两曲面 $z=x^2+y^2$，$z=8-x^2-y^2$ 所围成的立体的体积是 $\underline{16\pi}$.

三、计算下列各题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 设 $z=f(2x-y,y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

答案：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -2f''_{11}+2\sin xf''_{12}+\cos xf'_2-y\cos xf''_{21}+y\sin x\cos xf''_{22}$.

也可以写成 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+\cos xf'_2+y\sin x\cos xf''_{22}$.

2. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq x\}$，求 $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy$.

解　$\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \sqrt{r}\sqrt{\cos\theta}\cdot rdr$$

$=\dfrac{2}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$

$=\dfrac{8}{15}$.

3. 计算积分 $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dS$，其中 $S$ 是立体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界。

解　设上底为 $S_1$，下底为 $S_2$.

$$\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}.$$

$$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{2}(x^2+y^2)dxdy=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

$$\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dS=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.$$

4. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 $V$ 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 围成。

解　$\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r)r^3dr$

$=\dfrac{\pi}{10}$.

四、讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性。（6 分）

解　由初等函数连续性知，非原点处，函数连续。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\ln(x^2+y^2)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=0,$$

其中 $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=0$. 故函数在原点也连续。

于是有，函数处处连续。

五、用求条件极值的方法求椭圆 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的长半轴与短半轴。（6 分）

解　易知椭圆中心在圆柱面$x^2+y^2=1$的旋转轴（即$z$轴）上，还在平面$x+y+z=1$上。故椭圆中心为点$(0,0,1)$．椭圆上的点到椭圆中心的最大、最小距离分别为长半轴与短半轴。距离$d=\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$．

令$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+(z-1)^2+\lambda_1(x^2+y^2-1)+\lambda_2(x+y+z-1)$，

$$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ L'_y=2y+2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ L'_z=2(z-1)+\lambda_2=0 \\ L'_{\lambda_1}=x^2+y^2-1=0 \\ L'_{\lambda_2}=x+y+z-1=0 \end{cases}$$

解得$(x,y,z)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1-\sqrt{2}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1+\sqrt{2}),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1)$．

$d=\sqrt{3}$或$d=1$．

故长半轴为$\sqrt{3}$，短半轴为1．

注　如果本题不要求用拉格朗日乘数法，还可以这样算：

$d^2=x^2+y^2+(z-1)^2=1+(z-1)^2=1+(x+y)^2$

由于$0\le(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)=2$，

故$1\le d\le\sqrt{3}$

当$(x,y)=\pm(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$时，$d$取最大值$\sqrt{3}$；

当$(x,y)=\pm(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$时，$d$取最小值1．

故长半轴为$\sqrt{3}$，短半轴为1．

六、求抛物面$z=1+x^2+y^2$的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面$(x-1)^2+y^2=1$围成的体积最小，试写出切平面方程并求出最小体积。（6 分）

解法一　设切点为$(x_0,y_0,1+{x_0}^2+{y_0}^2)$，则切向量为$(2x_0,2y_0,-1)$，切平面

$\pi: 2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-1-{x_0}^2-{y_0}^2)=0$，即

$\pi: z=2x_0x+2y_0y-{x_0}^2-{y_0}^2+1$.

体积 $V(x_0,y_0)=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}(x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+{x_0}^2+{y_0}^2)dxdy$

$=\iint\limits_{u^2+y^2\le 1}(u^2+2u+1+y^2-2x_0u-2x_0-2y_0y+{x_0}^2+{y_0}^2)dudy$（令 $u=x-1$）

$=\iint\limits_{u^2+y^2\le 1}(u^2+y^2)dudy+(1-2x_0+{x_0}^2+{y_0}^2)\pi$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr+(1-2x_0+{x_0}^2+{y_0}^2)\pi$

$=\frac{\pi}{2}+(1-2x_0+{x_0}^2+{y_0}^2)\pi$

$=\frac{\pi}{2}+(x_0-1)^2\pi+{y_0}^2\pi$

$\ge\frac{\pi}{2}$

故当 $x_0=1, y_0=0$ 时，体积最小为 $\frac{\pi}{2}$，此时切平面方程为 $\pi: z=2x$.

解法二　切平面、柱面、$xOy$ 平面所围的有向体积最大时，所求体积达到最小。而切平面与柱面轴线 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 的交点代表了那个曲顶柱体的平均高度。由抛物线的凸性知，切平面位于抛物面下方，而抛物面与轴线交于 $(1,0,2)$. 即平均高度最大为 2，此时切点为 $(1,0,2)$，切平面方程 $\pi: z=2x$，体积最小为 $\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}(x-1)^2+y^2dxdy=$

$\iint\limits_{u^2+y^2\le 1}u^2+y^2dudy=\frac{\pi}{2}$.

七、设 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，$L$ 是光滑曲线段，$(x(t),y(t)),\alpha\le t\le\beta$ 是其参数表达式，证明：$\int_L\frac{\partial f}{\partial \vec{T}_0}ds=f(x(t),y(t))\Big|_\alpha^\beta$，其中 $\vec{T}_0=\frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}$，$\vec{T}=(x'(t),y'(t))$.（5 分）

证 $\int_L \frac{\partial f}{\partial \overset{\Upsilon}{T_0}} ds = \int_L \frac{f'_x x'(t) + f'_y y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} ds = \int_\alpha^\beta (f'_x x'(t) + f'_y y'(t)) dt = f(x(t), y(t))\Big|_\alpha^\beta$.

八、设 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续， $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：

$\int_a^b p(x) f(x) dx \cdot \int_a^b p(x) g(x) dx \le \int_a^b p(x) dx \cdot \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$.（5 分）

证 设平面区域 $D: a \le x, y \le b$

左式 $= \int_a^b p(x) f(x) dx \cdot \int_a^b p(y) g(y) dy$

$= \iint_D p(x) f(x) p(y) g(y) dxdy$

$= \iint_D p(y) f(y) p(x) g(x) dxdy$ （对称性）

$= \frac{1}{2} \iint_D p(x) p(y) (f(x) g(y) + f(y) g(x)) dxdy$

同理，右式 $= \frac{1}{2} \iint_D p(x) p(y) (f(x) g(x) + f(y) g(y)) dxdy$

右式−左式

$= \frac{1}{2} \iint_D p(x) p(y) (f(x) g(x) + f(y) g(y) - f(x) g(y) - f(y) g(x)) dxdy$

$= \frac{1}{2} \iint_D p(x) p(y) (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dxdy$

$\ge 0$

故不等式得证。

# 南开大学 2014 级场论与无穷级数试卷 2015 年 6 月 22 日

一、选择题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 下列级数中，收敛的是( B ).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

2. 设函数 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数, 在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上有:

$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -\pi \le x < 0 \\ 1 + x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x = \pi$ 处收敛于( A ).

(A) $1 + \pi$ (B) $1 - \pi$ (C) $1$ (D) $0$

3. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的收敛域是( D ).

(A) $(-1,1)$ (B) $[-1,1]$ (C) $[-1,1)$ (D) $(-1,1]$

4. 微分方程$xdy+2ydx=0$满足初值条件$y|_{x=2}=1$的解是( A ).

(A) $x^2y=4$ (B) $x^2y=1$ (C) $xy^2=2$ (D) $xy^2=1$

5. 选取单位球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧为正侧, 若在点$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$处取单位球面的单位法向量$\vec{n}$, 使其方向与球面的定向一致, 则该方向法向量是( B ).

(A) $\{-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ (B) $\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ (C) $\{1,0,0\}$ (D) $\{0,0,-1\}$

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的和函数是$\underline{\frac{x}{(1-x)^2}}$;

2. 指出级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$的条件收敛和绝对收敛性: 条件收敛 ;

3. 微分式$2xy^3dx+3x^2y^2dy$的原函数是$\underline{x^2y^3+C}$;

4. 齐次方程$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$的通解是$\underline{y^2=2x^2\ln|x|+Cx^2}$;

5. 曲面积分$\iint_S dxdy=\underline{-\pi}$, 其中$S$是$O-xy$坐标平面上的圆$x^2+y^2\le 1$的下侧。

三、计算下列各题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 将函数$f(x)=1-x^2\ (0\le x\le\pi)$展开成余弦级数。

解 $b_n=0, n\ge 1.$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2-\frac{2}{3}\pi^2.$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nxdx=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}.$$

$$f(x)=(1-\frac{\pi^2}{3})+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx\ (0\le x\le\pi).$$

2. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数。

解 $f(x)=\dfrac{1}{2+(x-1)}-\dfrac{1}{3+(x-1)}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{(x-1)}{2}}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{(x-1)}{3}}$

$=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{x-1}{2})^n-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{x-1}{3})^n$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n$， $-1<x<3$.

3. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}zdxdy$，其中 $\Sigma$ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$z\geq 0$，取上侧。

解 $I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$

$=\dfrac{2}{3}\pi$（上半球的体积）.

4. 求微分方程 $y'+y=e^x$ 的通解。

解 $y=e^{-\int dx}[\int e^x e^{\int dx}dx+C]=e^{-x}[\dfrac{1}{2}e^{2x}+C]=\dfrac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$.

四、试利用格林公式和第二型曲线积分求由曲线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2})$ 与两个坐标轴所围区域的面积。（10 分）

解 曲线段端点 $A(a,0)$， $B(0,b)$，曲线段记为 $C_{AB}$.

$S=\iint\limits_{D}d\sigma$（其中 D 为所围区域）

$=\int\limits_{C_{AB}}xdy+\int\limits_{OA}xdy+\int\limits_{BO}xdy$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ab\cos^2 tdt+0+0$

$=\dfrac{\pi}{4}ab$.

五、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $S$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的

外侧，$a,b,c$ 为正常数。（8 分）

解　取充分小的正数 $\varepsilon$，使 $S_1: ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2$ 在 $S$ 内，$S_1$ 取外侧。$V$ 为 $S$ 与 $S_1$ 所围立体。

$$\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint_{S_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_V 0dv=0 .$$

故 $I=\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\iint_{S_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{ax^2+by^2+cz^2\le\varepsilon^2} 3dv$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}} .$$

六、证明幂级数 $1+(\frac{1}{2})^2x+(\frac{1\cdot3}{2\cdot4})^2x^2+\ldots+(\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n})^2x^n+\ldots$ 的和函数 $y(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内满足微分方程

$$x(1-x)y''+(1-2x)y'-\frac{1}{4}y=0 .$$ （7 分）

证　$y(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 x^n$

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 x^{n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 x^{n-2}$$

代入验证即可。

七、证明：若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+\ldots}$ 发散。（5 分）

证　对任意给定的 $n$，由题设，$\sum_{k=n}^{\infty}a_k$ 收敛。于是

$$\lim_{p\to\infty}\frac{a_n+a_{n+1}+\dots+a_{n+p}}{a_n+a_{n+1}+\dots}=1.$$

故存在 $p$，使得 $\dfrac{a_n+a_{n+1}+\dots+a_{n+p}}{a_n+a_{n+1}+\dots}>\dfrac{1}{2}$.于是

$$\left|\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+\dots}+\dots+\frac{a_{n+p}}{a_{n+p}+a_{n+p+1}+\dots}\right|\ge\frac{a_n+a_{n+1}+\dots+a_{n+p}}{a_n+a_{n+1}+\dots}>\frac{1}{2}.$$

由柯西收敛原理，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+\dots}$ 发散。

---

七、证明：若正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+\cdots}$ 发散.（5 分）

解：设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+\cdots}$收敛，设$R_n=a_n+a_{n+1}+\cdots$,则级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+\cdots}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n-R_{n+1}}{R_n}$,由于级数收敛可知$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n-R_{n+1}}{R_n}=0$,且$\frac{R_n-R_{n+1}}{R_n}>0$

由$\ln(1-x)\sim -x$,可知$\ln\left(1-\frac{R_n-R_{n+1}}{R_n}\right)=\ln(\frac{R_{n+1}}{R_n})\sim-\frac{R_n-R_{n+1}}{R_n}$,即$-\ln(\frac{R_{n+1}}{R_n})\sim\frac{R_n-R_{n+1}}{R_n}$，由比较判别法

$\sum_{n=1}^{\infty}-\ln(\frac{R_{n+1}}{R_n})$收敛，设该级数的部分和为$S_n=\sum_{i=1}^{n}-\ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}(lnR_i-ln\ {}_{i+1})=ln\ {}_1-ln\ {}_n$

因为$\lim_{n\to\infty}S_n$存在，所以$\lim_{n\to\infty}lnR_n$存在，即$R_n\nrightarrow 0$，这与正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛矛盾

# 南开大学 2015 级多元函数微积分试卷 2016 年 4 月 23 日

一、选择题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0\end{cases}$ 在其定义域上（ A ）

A. 处处连续　　B. 处处不连续　　C. 当 $x\neq 0$ 时不连续　　D. 当 $x=0$ 时不连续

2. $z=xe^y$ 在点 $(1,0)$ 处对 $y$ 的偏导数为（ B ）

A. 0　　B. 1　　C. $-1$　　D. 2

3. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(\sqrt{2},\sqrt{2},4)$ 处的单位切向量是（ A ）

A. $\pm\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\}$　　B. $\pm\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\}$　　C. $\pm\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$

D. $\pm\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$

4. 设区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，则二重积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy=$（ B ）

A. $-1$　　B. 1　　C. 2　　D. $-2$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$ __2__；

2. 函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分是 $\underline{e^2dx+2e^2dy}$；

3. 函数 $z=x^2-y^2$ 在点 $P(1,1)$ 处沿与 $x$ 轴正方向成 $\dfrac{\pi}{3}$ 的方向上的导数是 $\underline{1\pm\sqrt{3}}$；（只写其中一个答案也不扣分）

4. 椭球体 $x^2+y^2+2z^2=1$ 在点 $(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{6}})$ 处的切平面方程是

___ $x+y+\sqrt{2}z-\sqrt{3}=0$ __。

三、计算下列各题（每题 8 分）：

1. 设方程 $z+xy=e^{x+z}$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

答案　$z'_x=\dfrac{e^{x+z}-y}{1-e^{x+z}}$，　$z'_y=\dfrac{-x}{1-e^{x+z}}$　（也可以写成 $z'_x=\dfrac{z+xy-y}{1-z-xy}$，　$z'_y=\dfrac{x}{z+xy-1}$　）

2. 求曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+3y-z=2 \end{cases}$ 在点 $(1,2,5)$ 处的切线方程。

答案　切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-5}{-2}$.

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D (2y-x)dxdy$，其中 $D$ 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y=x+2$ 围成。

解　两条抛物线交点为 $(2,4),(-1,1)$.

$$\iint\limits_D (2y-x)dxdy=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}(2y-x)dy=\int_{-1}^{2}(2x+4-x^4+x^3)dx=\frac{243}{20}.$$

四、(1) 求 $f(x,y)=\dfrac{x}{2}+y$ 在约束条件 $x^2+2y^2=1$ 下的极值；(2) 在第一问所求极值点处计算 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{t}}$，其中 $\vec{t}$ 是曲线 $x^2+2y^2=1$ 在该极值点处的单位切向量（8 分）。

解　(1) $L=\dfrac{x}{2}+y+\lambda(x^2+2y^2-1)$

$$\begin{cases} L_x' = \frac{1}{2} + 2\lambda x = 0 \\ L_y' = 1 + 4\lambda y = 0 \\ L_\lambda' = x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 为条件极大值， $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为条件极小值。

(2) 曲线 $x^2 + 2y^2 = 1$ 的切向量为 $(1, \frac{dy}{dx}) = (1, -\frac{x}{2y})$，在条件极值点处的切向量为

$(1, -\frac{1}{2})$，单位切向量为 $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$. 故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \overset{r}{t}}\right|_{(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{2}{\sqrt{5}} f_x'(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{5}} f_y'(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.$$

五、求 $\iint\limits_D (x^2 + y^2 + y)dxdy$，其中 $D$ 是介于两个圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 之间的平面区域（8 分）。

解　设 $D_1$ 由圆 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 围成， $D_2$ 由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 围成，则

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2 + y)dxdy$$

$$= \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy \text{（对称性）}$$

$$= \iint\limits_{D_2} (x^2 + y^2)dxdy - \iint\limits_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^3 dr$$

$$= 8\pi - 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

$$= 8\pi - 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{13\pi}{2}.$$

六、计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$，其中 $\Omega$ 为 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1$ 所确定的区域（8

分）。

解 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}dz$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}2\sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr$

$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 tdt$ （令 $r=\sin t$ ）

$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-\cos^4 t)dt$

$=\frac{\pi^2}{4}$.

七、设 $f(x,y)$ 在 $R^2$ 上有连续一阶偏导数，且满足 $x\cdot f_x(x,y)+y\cdot f_y(x,y)=0$，证明 $f(x,y)$ 在 $R^2$ 上为常数（6 分）。

证法一

$\forall P(x,y)\ne(0,0)$，设 $\mathbf{l}=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ 为向量 $OP$ 对应的单位向量

易知方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}=0$.

于是在以 $O$ 为端点的射线上， $f(x,y)$ 取值不变，即 $f(x,y)=f(0,0)$.

故 $f(x,y)$ 在 $R^2$ 上为常数。

证法二（极坐标）

当 $r\ne 0$ 时，由题设，有 $\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial r}=\cos\theta f_x+\sin\theta f_y=0$.

于是在以 $O$ 为端点的射线上， $f(x,y)$ 取值不变，即 $f(x,y)=f(0,0)$.

故 $f(x,y)$ 在 $R^2$ 上为常数。

八、设 $\Omega$ 为 $x^2+y^2+z^2\le 1$，证明

$$\frac{4\sqrt[3]{2}}{3}\pi\le\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}dxdydz\le\frac{8}{3}\pi \text{（6 分）。}$$

证法与 2011 级第八题类似。

## 南开大学 2015 级场论与无穷级数试卷 2016 年 6 月 13 日

一、选择题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 下列级数收敛的是（ D ）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ (D) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$

2. 幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{2n+1}$的收敛域是（ C ）

A. $(-1,1)$, B. $[-1,1)$, C. $(-1,1]$, D. $[-1,1]$;

3. 若任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则下列选项中成立的是（ B ）

（A） 可能$\lim_{n\to\infty}a_n=0$也可能$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$， (B) 必有$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，

（C）必有$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$， (D) 必有$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$；

4. 设有曲线$L: x^2+y^2=1$，则积分$\int_L (x^2+y^2)\,ds$=（ A ）

A. $2\pi$, B. $\pi$ , C. $-\pi$, D. $-2\pi$

二、填空题

1. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散情况是<u>收敛</u>；

2. 幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数是<u>$\frac{-x^2}{1+x^2}$</u>；

3. 考虑直线段 $L$：$y=x$,以$A(0,0)$为起点，$B(1,1)$为终点，则$\int_L dx+dy=$<u>2</u>；

4. 微分式$ydx+xdy$的原函数是<u>$xy+C$</u>。

三、计算下列各题

1. 判断级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$是发散、条件收敛或者绝对收敛。

答案 条件收敛。

2. 将函数 $f(x)=\frac{3}{2-x}$ 展开为 $x$ 的幂级数。

答案 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}x^n$， $x\in(-2,2)$.

3. 把函数 $f(x)=x^2$ （$x\in[-\pi,\pi]$ ）展为傅里叶级数。

答案　见教材例题。

4. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S \frac{dS}{z}$，其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, 0<h\le z\le a$

解　$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{a}{z}$

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-h^2}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy=2\pi a(\ln a-\ln h).$$

四、计算积分$I=\iint_S xydzdx$，其中 $S$ 是柱面$x^2+y^2=1$在第一卦限中$0\le z\le 1$的部分的前侧。

解　$I=\iint\limits_{0\le x,z\le 1} x\sqrt{1-x^2}dzdx=\frac{1}{3}.$

五、计算$\int_L (e^x siny+xy^2)dy-y(x^2+x)dx$，其中$L$为从点 $A(0,2)$沿左半圆周$x^2+y^2=4$到点$B(0,-2)$。

解　记线段 $B$ 到 $A$ 为 $L_1$，$D$ 为左半圆。由格林公式，

原式$=\iint\limits_D (e^x\sin y+y^2+x^2+x)dxdy-\int\limits_{L_1}\sin ydy$

$$=\iint\limits_D (y^2+x^2+x)dxdy-\int_{-2}^{2}\sin ydy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^2(r^2+r\cos\theta)rdr-0$$

$$=4\pi-\frac{16}{3}.$$

六、设 $\Sigma$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$的外侧，求曲面积分 $\iint\limits_\Sigma\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(\sqrt{2x^2+2y^2+z^2})^3}$。

解　设 $\Sigma_1$ 是椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=\frac{1}{4}$ 的外侧，$\Omega$ 由 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 围成，$\Omega_1$ 由 $\Sigma_1$ 围成。由高斯公式，

原式$=\iiint\limits_\Omega 0dxdydz+\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(\sqrt{2x^2+2y^2+z^2})^3}$

$$=8\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=8\iiint\limits_{\Omega_1}3dxdydz=2\pi.$$

七、设 $D$ 是有逐段光滑边界的单连通平面区域，$\partial D$取逆时针方向，函数$f(x,y),g(x,y)$在$\overline{D}$上有连续偏导数，证明

（1）$\iint_D f_x' g\,dxdy = \oint_{\partial D} fg\,dy - \iint_D g_x' f\,dxdy$；

（2）若$f(x,y)$在$\overline{D}$上有二阶连续偏导数，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，且在$\partial D$上$f(x,y)\equiv 0$，则有

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = 0。$$

证（1）由格林公式立得。

（2）在（1）中代入 $g=f_x'$，得

$$\iint_D (f_x')^2 dxdy = \oint_{\partial D} f\cdot f_x' dy - \iint_D f_{xx}''\cdot f dxdy = -\iint_D f_{xx}''\cdot f dxdy$$

类似可证

$\iint_D (f_y')^2 dxdy = -\iint_D f_{yy}''\cdot f dxdy$. 于是

$$\iint_D [(f_x')^2+(f_y')^2]dxdy = -\iint_D (f_{xx}''+f_{yy}'')\cdot f dxdy = 0.$$

八、设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有连续的导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 条件收敛.

证 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$$

（这里也可用洛必达法则 $a=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}=f'(0)$）

于是在点 $x=0$ 的某邻域内 $f'(x)>0, f$ 单调增加，

故当 $n$ 充分大时，$f(\frac{1}{n})$ 单调减少。

$\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$。于是当 $n$ 充分大时，$f(\frac{1}{n})$ 非负。

由莱布尼兹判别法，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a$$

由比较判别法极限形式，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 条件收敛。

# 南开大学 2016 级多元函数微积分试卷 2017 年 4 月 8 日

一、选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，则f(x,y)在点(0,0)处（ B ）

(A)连续　(B)间断　(C)$f_x'(0,0)$不存在　(D)$f_y'(0,0)$不存在

2. 设空间曲线的参数方程为：$x=t,y=t^2,z=t^3$则其在(1,1,1)处的切线方程为

（ D ）

(A) $\frac{x-1}{1}=\frac{x-2}{1}=\frac{x-3}{1}$　(B) $\frac{x-1}{1}=\frac{x-1}{1}=\frac{x-1}{1}$

(C) $\frac{x-1}{1}=\frac{x-2}{2}=\frac{x-3}{3}$　(D) $\frac{x-1}{1}=\frac{x-1}{2}=\frac{x-1}{3}$

3. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续, 则两个偏导数 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微的（ C ）

（A）充分必要条件　　（B）充分条件, 但不是必要条件

（C）必要条件, 但不是充分条件　　（D）既不是充分条件, 也不是必要条件

以下是函数连续，偏导数存在，但函数不可微的例子:

**例 8.4.1　设函数**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

讨论函数在点(0,0)处的可微性.

**解** $$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0,$$

即函数$f(x,y)$在(0,0)处偏导数都存在且相等. 如果$z=f(x,y)$在点(0,0)处可微,则根据全微分定义有

$$\mathrm{d}z(0,0)=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y=0.$$

但 $$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z(0,0)}{\rho}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

特别当$\Delta y=\Delta x$时,有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

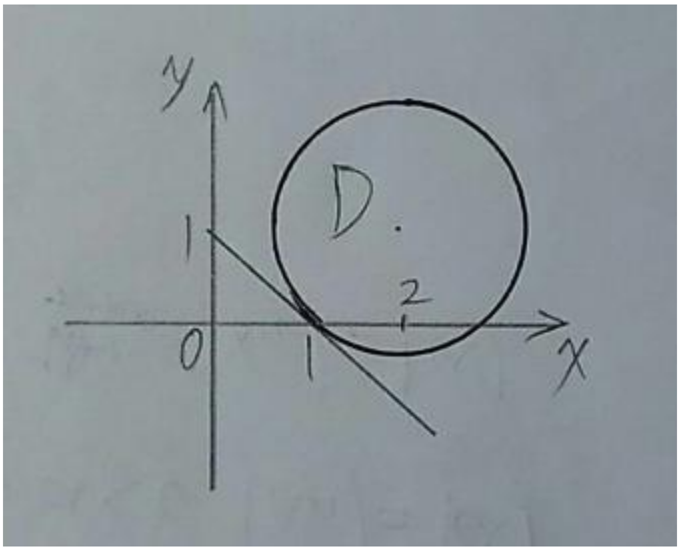
故 $f(x,y)$在(0,0)处不可微.

4. 设积分区域$D=\{(x,y)\mid(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$，则积分$I_1=\iint_D (x+y)^2 d\sigma$与$I_2=\iint_D (x+y)^3 d\sigma$的大小关系是（ ）

（A）$I_1<I_2$（B）$I_1>I_2$（C）$I_1=I_2$（D）不能确定

积分区域D的边界是圆，与直线$x+y=1$相切。在圆内，$x+y>1$，

$(x+y)^3>(x+y)^2$.




二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}=\frac{1}{4}$；

2. 函数$z=e^{xy}+x^2+y^2$在点$(1,0)$处的全微分是$2dx+dy$；

3. 曲面$x^2+2y^2+z^2=4$在（1，1，1）处的切平面方程为$x+2y+z-4=0$；

4. 设二次积分为$\int_{-1}^{1}dx\int_{x}^{1}f(x,y)dy$，改换其积分次序后该二次积分为

$\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{y}f(x,y)dx$。

三、计算下列各题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 求由方程$e^{x+y}-\sin(x+z)=0$确定的隐函数 z=z(x, y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

$e^{x+y}-(1+z_x')\cos(x+z)=0$，解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{x+y}-\cos(x+z)}{\cos(x+z)}$.

$e^{x+y}-z_y'\cos(x+z)=0$，解得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{x+y}}{\cos(x+z)}$.

2. 设 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ ，求函数的极值。

设 $f(x)=x^3+3x^2-9x$，$g(y)=-y^3+3y^2$，则

$z=f(x)+g(y)$

易证 $(x_0,y_0)$ 是 $f(x)+g(y)$ 的极大(小)值点

$\Leftrightarrow$ $x_0$ 是 $f(x)$ 的极大(小)值点，且

$y_0$ 是 $g(y)$ 的极大(小)值点.

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

驻点有 $x=-3$，$x=1$

$f''(x)=6x+6$　$f''(-3)<0$，$f''(1)>0$

$\therefore$ $x=-3$ 为 $f$ 的极大值点，

$x=1$ 为 $f$ 的极小值点.

同理可得，$y=0$ 为 $g$ 的极小值点，

$y=2$ 为 $g$ 的极大值点.

$\therefore$ 当 $x=-3$，$y=2$ 时，函数取极大值 $31$；

当 $x=1$，$y=0$ 时，函数取极小值 $-5$.

3. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 \ln(r^2)\cdot r\,dr$$

$$=\pi\int_1^2 \ln(r^2)\,d(r^2)$$

$$\overset{t=r^2}{=\!=\!=}\pi\int_1^4 \ln t\,dt$$

$$=\pi\left[t\ln t-t\right]_1^4$$

$$=\pi(4\ln 4-3)$$

四、计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\cos z^2 dV$，其中 $\Omega$ 由椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ 和平面 $z=1$ 所围成。（8 分）

$$I=\int_0^1 dz\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le z}\cos z^2\,dxdy$$

$$=\int_0^1 6\pi z\cos z^2\,dz$$

$$\overset{t=z^2}{=\!=\!=}3\pi\int_0^1\cos t\,dt$$

$$=3\pi\sin 1$$

五、设f(x,y) 具有连续的二阶偏导数， $u=f(x+y,xy)$， 求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$（8 分）

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + y f_2'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + x f_{12}'' + f_2' + y f_{21}'' + xy f_{22}''$$

（其中 $f_{12}'' = f_{21}''$，也可合并）

六、计算积分 $I = \iint\limits_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dxdy$，其中 $D$ 为平面曲线 $xy = 1, xy = 3, y^2 = x, y^2 = 3x$ 所围成的有界区域。（8 分）

设 $u = xy,\ v = \frac{y^2}{x}$，则 $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$，$y = \sqrt[3]{uv}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} v^{-1}$$

$$I = \int_1^3 du \int_1^3 \frac{3}{(u+1)v} \cdot \frac{1}{3v} dv$$

$$= \int_1^3 \frac{du}{u+1} \cdot \int_1^3 \frac{dv}{v^2}$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2$$

七、设 $f(x)$ 连续且恒大于零，$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,dv}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,d\sigma}$，$G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,dx}$，

其中 $\Omega(t) = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \le t^2\}$，$D(t) = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le t^2\}$，

证明：  当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$ .（7 分）

$$\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,dv$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{t}f(r^2)\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$
$$=4\pi\int_0^{t}r^2f(r^2)dr$$

$$\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,d\sigma$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{t}f(r^2)\cdot r\,dr$$
$$=2\pi\int_0^{t}r\,f(r^2)dr$$

$$\int_{-t}^{t}f(x^2)dx$$
$$=2\int_0^{t}f(r^2)dr$$

$$\int_0^{t}r^2f(r^2)dr\int_0^{t}f(r^2)dr$$
$$=\iint\limits_{0\le r,s\le t} r^2f(r^2)f(s^2)drds$$
$$\overset{\text{对称性}}{=}\iint\limits_{0\le r,s\le t}\frac{(r^2+s^2)}{2}f(r^2)f(s^2)drds$$
$$>\iint\limits_{0\le r,s\le t} rs\,f(r^2)f(s^2)drds$$
$$=\left(\int_0^{t}rf(r^2)dr\right)^2$$

$\therefore t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

八、设$u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，在 $x^2+y^2<1$ 内满足 $u''_{xx}+u''_{yy}=u$ ，

且在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$ ，试证：当 $x^2+y^2<1$ 时，$u(x,y)\ge 0$.（7分）

设$(x_0,y_0)$为$u$在单位圆$x^2+y^2\le 1$上的最小值点. 假设$u(x_0,y_0)<0$,则$u''_{xx}(x_0,y_0)+u''_{yy}(x_0,y_0)<0$. 左边两项至少有一个小于0. 不妨设$u''_{xx}(x_0,y_0)<0$.

又$u'_x(x_0,y_0)=0$. 于是$\exists \delta>0$,

$\forall x\in U(x_0,\delta)$, $u(x,y_0)<u(x_0,y_0)$.

(对$u(x,y_0)$使用极值存在的第二充分条件)

这与$u(x_0,y_0)$为最小值矛盾.

$\therefore$ $u(x_0,y_0)\ge 0$. 命题得证.

## 南开大学2016级场论与无穷级数试卷 2017年6月12日

一、选择题（每小题4分，共16分）

1. 设L为圆周$x^2+y^2=9$, 取顺时针方向, 则

$$\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=$$（ A ）

A. $18\pi$　B. $-18\pi$　C. $-36\pi$　D. $36\pi$

解　用格林公式即可。

2. 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，部分和数列$\{S_n\}$有界是$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的（ C ）

A. 充分条件　B. 必要条件　C. 充分必要条件　D. 既非充分又非必要条件

3. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$条件收敛，则级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$（ B ）

A. 绝对收敛　B. 条件收敛　C. 发散　D. 无法判定

4. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = y\sin x$ 的通解为（ D ）

A. $y = Ce^{\sin x}$ B. $y = Ce^{\cos x}$ C. $y = Ce^{-\sin x}$ D. $y = Ce^{-\cos x}$

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 设 C 的参数方程为$x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$, 则

$\int_C z\,ds = 2\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}$ .

2. 当 $\lambda = -4$时，曲线积分 $\int_L e^{\lambda x}(4\cos 3y\,dx + 3\sin 3y dy)$ 与路径无关。

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(x-1)^n$的收敛域是$(0,2)$.

4. 微分方程 $y' = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解为$e^{\frac{y}{x}} = Cy$.

提示

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2}$$

以y为自变量，上面是齐次方程.

三、计算下列各题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 设$\Sigma$为抛物面$z = 2-(x^2+y^2)$在 x0y 平面上方的部分,

求 $\iint_{\Sigma} \frac{2x^2+2y^2+z}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} dS$.

$z'_x=-2x$, $z'_y=-2y$

$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$

$$原式=\iint_{x^2+y^2\le 2}(2+x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2+r^2)\,r\,dr$$

$$=6\pi$$

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

法一 易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n(n-\ln n)}$ 绝对收敛

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n(n-\ln n)}$

条件收敛.

法二

用莱布尼茨判别法证收敛.

用极限判别法证不绝对收敛

∴ 条件收敛.

3. 求微分方程 $xy' - y = x^2 \sin x$ 的通解.

法一 $\left(\frac{y}{x}\right)' = \sin x$

$\frac{y}{x} = -\cos x + C$

$y = -x\cos x + Cx$

法二 一阶线性微分方程，代公式即可.

四、利用高斯公式计算曲面积分

$\oiint_S xz^2dydz + (x^2y - z^3)dxdz + (2xy + y^2z)dxdy$，其中封闭曲面

S 为上半球体 $\begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \le a^2 \end{cases}$ 的表面(含底面)外侧.（8 分）

原式 $= \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \, dr$

$= \frac{2}{5}\pi a^5$

五、将函数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$，$x \in [-\pi, \pi]$ 展开为周期为 $2\pi$ 的傅立叶级数，

并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$的和.（8 分）

$f$偶，$b_n=0,\ n=1,2,3,\cdots$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx+n\sin nx}{1+n^2}e^x\Big|_0^{\pi}+$$
$$\frac{1}{\pi}\frac{n\sin nx-\cos nx}{1+n^2}e^{-x}\Big|_0^{\pi}$$
$$=\left[\frac{(-1)^n e^{\pi}}{1+n^2}-\frac{1}{1+n^2}+\frac{(-1)^{n+1}e^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1}{1+n^2}\right]\frac{1}{\pi}$$
$$=\frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)}(e^{\pi}-e^{-\pi}),\ n=1,2,\cdots$$

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)}\cos nx,$$
$$x\in[-\pi,\pi]$$

$$\therefore f(\pi)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{2(e^{\pi}-e^{-\pi})}-\frac{1}{2}.$$

六、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$的和函数.（8 分）

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'-\frac{4}{1-x}+\frac{4}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)dt$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'-\frac{4}{1-x}+\frac{4}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t}dt$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{4}{1-x}-\frac{4}{x}\ln(1-x)$$

$x\in(-1,0)\cup(0,1)$

$x=0$时，$S(0)=1$

$x=\pm1$时，级数发散，收敛域$(-1,1)$.

$$\therefore S(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{1}{(1-x)^2}-\frac{4}{1-x}-\frac{4}{x}\ln(1-x), & x\in(-1,0)\cup(0,1)\end{cases}$$

七、已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$为$D$的正向边界，试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$；

（2）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\ge\frac{5}{2}\pi^2$.（7 分）

(1) 由格林公式

$$左 = \iint_D \left(e^{\sin y} + e^{-\sin x}\right) d\sigma$$

$$\overset{对称性}{=\!=} \iint_D \left(e^{-\sin y} + e^{\sin x}\right) d\sigma$$

$$= 右$$

(2)
$$左 = \iint_D \left(e^{\sin y} + e^{-\sin x}\right) d\sigma$$

$$= \iint_D e^{\sin x} d\sigma + \iint_D e^{-\sin x} d\sigma$$

$$= \iint_D \left(e^{\sin x} + e^{-\sin x}\right) d\sigma$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \left(e^{\sin x} + e^{-\sin x}\right) dx$$

$$\overset{对称性}{=\!=} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} + e^{-\sin x}\right) dx$$

2)

由泰勒级数，$e^{t} + e^{-t} = 2\left[1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right]$

$$\geq 2\left(1 + \frac{1}{2}t^2\right).$$

$$\therefore e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geq 2 + \sin^2 x,\ \cancel{x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]}$$

$$\therefore 左 \geq 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 + \sin^2 x\right) dx = \frac{5}{2}\pi^2$$

八、设函数 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$，证明级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛.（7 分）

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1+\sqrt5}{2}x\right)\left(1+\frac{\sqrt5-1}{2}x\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\frac{\sqrt5-1}{2}}{1+\frac{\sqrt5-1}{2}x}+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\frac{1+\sqrt5}{2}}{1-\frac{1+\sqrt5}{2}x}$$

$$=\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}x\right)^n+\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}x\right)^n$$

又 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$\therefore f^{(n)}(0)=n!\cdot\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right]$

$\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{f^{(n)}(0)}}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{f^{(n)}(0)}}{\left(\frac{2}{1+\sqrt5}\right)^{n+1}}=\sqrt5$

且等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt5}\right)^{n+1}$ 收敛.

$\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛.

南开大学 2017 级多元函数微积分试卷 2018 年 5 月 5 日

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

| 一题得分 | |
|---|---|

1. 设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则$f(x,y)$在$(0,0)$处（B）

(A) 连续但偏导不存在；(B) 不连续但偏导存在；(C) 偏导存在且连续；(D) 不连续且偏导也不存在。

2. 二重极限$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$（C）

（A）0；（B）1；（C）$\ln 2$；（D）$\ln 3$。

3. 关于二元函数$f(x,y)$，下列有关偏导数与全微分关系的命题中正确的是（B）

(A) 偏导数不连续，则全微分必不存在；(B) 偏导数连续，则全微分必存在；

(C) 全微分存在，则偏导数必连续；(D) 全微分存在，而偏导数不一定存在。

4. 设$f(x,y)=2x^2+y^3$，向量$\vec{l}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$，已知方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(3,2)}=12\sqrt{2}$，则$\alpha=$（B）。

(A)$\frac{\pi}{6}$；（B）$\frac{\pi}{4}$；（C）$\frac{\pi}{3}$；(D)$\frac{\pi}{2}$。

5. 已知曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$在点$\left(\frac{a}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的切平面经过点$(2,3,0)$，则$a=$（A）

(A) 2；（B）3；（C）4；(D) 6.

6. $f(x,y)=(x+y^3-3y)e^x$的极值点的个数是（B）.

(A)0个；（B）1个；（C）2个；(D) 3个。

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

| 二题得分 | |
|---|---|

1. 函数$z=x^y$在 (2,1) 处的全微分= $dx+2\ln 2dy$；

2. 设方程$e^{x+y}\sin(x+z)=0$确定隐函数$z=z(x,y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$ $-1$ 或 $-\tan(x+z)-1$（两个都对）.

3. 交换二次积分的积分顺序，$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}f(x,y)\,dy=$ $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$.

4. 设$D$为$x^2+y^2=2x$所围区域，则二重积分$\iint_D(x^2+y^2)dxdy=$ $\frac{3}{2}\pi$.



1. 设方程$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$确定了隐函数$z=z(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.(8 分)

解：设 $F(x,y,z)=\ln\left(\frac{z}{y}\right)-\frac{x}{z}$.

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{-\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}}=\frac{z}{z+x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{-\frac{1}{y}}{\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}}=\frac{z^2}{zy+yx}$

三、计算下列各题：

1. 设方程$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$确定了隐函数$z=z(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.(8 分)

$$x = z\ln\frac{z}{y}$$

$$1 = z'_x \ln\frac{z}{y} + z\cdot\frac{z'_x}{z} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\ln\frac{z}{y}}$$

$$0 = z'_y \ln\frac{z}{y} + z\left(\frac{z'_y}{z} - \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{z}{y}}{1+\ln\frac{z}{y}}$$

2. 求函数$z=x^3-3x-y^2+2y$的极值。(9 分)

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2-3 = 0 \\ z'_y = -2y+2 = 0 \end{cases}$$

驻点$(\pm1,1)$，无不可导点.

$A=6x$，$B=0$，$C=-2$

$AC-B^2=-12x$. 在$(1,1)$，$AC-B^2<0$.

在$(-1,1)$，$AC-B^2>0$，$A<0$.

$\therefore z(-1,1)=3$为极大值，无极小值.

3. 计算二重积分$\iint_D y\,dxdy$，其中$D$是由曲线$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=x$，$x=0$所围区域. (8 分)

$$\iint_D y\,dxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r\sin\theta\cdot r\,dr$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

四、用拉格朗日乘数法在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿$\vec{l}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}$方向的方向导数最大.（10分）

| 四题<br>得分 | |
|---|---|

$$\frac{\partial f}{\partial l}=2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0=\sqrt{2}(x-y)$$

令$L(x,y,z,\lambda)=x-y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases} L'_x=1+4\lambda x=0 \\ L'_y=-1+4\lambda y=0 \\ L'_z=2\lambda z=0 \\ L'_\lambda=2x^2+2y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

得$(x,y,z)=\pm\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$

其中$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$即为所求.

六、设$V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$,验证下面的等式

$$\iiint_V (ax+by)^2\,dxdydz=(a^2+b^2)\iiint_V z^2\,dxdydz,\ a^2+b^2\neq 0.$$（10分）

| 五题<br>得分 | |
|---|---|

由对称性，左$=\iiint\limits_V a^2x^2dV+\iiint\limits_V 2abxy\,dV+\iiint\limits_V b^2y^2dV$

$=\iiint\limits_V a^2z^2dV+0+\iiint\limits_V b^2z^2dV$

$=$右

七、设函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，试证明：$f(x,y)$在$(0,0)$处连续、可导，但不可微。（9分）

| 七题<br>得分 | |
|---|---|

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$ $\therefore f$在$(0,0)$连续.

$f(x,0)\equiv 0$，$f'_x(x,0)=0$，$f'_x(0,0)=0$. 同理$f'_y(0,0)=0$.

$\therefore f$在$(0,0)$有偏导数.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)-f(0,0)-0\Delta x-\cancel{0}\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq 0$$

这是因为$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$.

$\therefore f$在$(0,0)$不可微.

八、设$f(x),g(x)$为$[-1,1]$上的连续函数，$h(x)=g(x)+g(-x)$，其中$f(x)$是偶函数，$f(x)$，$h(x)$在$[0,1]$上单调递增，证明：

$$2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx \ge \int_{-1}^{1}f(x)\,dx\int_{-1}^{1}g(x)\,dx \text{ (6分)}$$

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_0^1(g(x)+g(-x))dx=\int_0^1h(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=\int_0^1(f(x)g(x)+f(-x)g(-x))dx$$
$$=\int_0^1f(x)h(x)dx$$

$$\text{左}-\text{右}=\iint_D(f(x)h(x)+f(y)h(y))d\sigma-\iint_D(f(x)h(y)+f(y)h(x))d\sigma$$
$$=\iint_D(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))d\sigma$$
$$\ge 0 \quad \text{其中}D: 0\le x,y\le 1$$

A4—4

南开大学2017级场论与无穷级数试卷 2018年6月19日

一、选择题（每小题4分，共24分）

1. 考虑第二型曲线积分$\int_L ydx+xdy$，其中$L$是光滑曲线，则下列陈述错误的是 C

(A) 上述积分与路径无关；
(B) 当$L$是封闭曲线时积分为零；
(C) 当$L$是圆$x^2+y^2=1$时，积分值为$2\pi$；
(D) 存在函数$u(x,y)$，使$du=ydx+xdy$。

2. 对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，下列命题正确的是（C）

(A) 若$\{a_n\}$单调减少且趋于0，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；
(B) 若$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；
(C) 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$也收敛；
(D) 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$.

3. 设常数$k>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$（C）

(A) 发散；(B) 绝对收敛；(C) 条件收敛；(D) 收敛或发散与$k$的取值有关。

4. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$的收敛半径为（B）

(A) 0；　(B) $\sqrt{2}$；　(C) 2；　(D) $+\infty$。

5. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n}$ 在$[-1,1)$上的和函数为（C

(A) $\frac{1}{2}ln(1-x)$；　(B) $-\frac{1}{2}ln(1+x)$；　(C) $-\frac{1}{2}ln(1-x)$；　(D) $\frac{1}{2}ln(1+x)$ 。

6. 设$f(x)$是$[-\pi,\pi]$上的连续函数，$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx)$是其傅里叶级数，则下列陈述错误的是 C

(A) 如果$f(x)$是奇函数，则$a_n=0$；　(B). 如果$f(x)$是偶函数，则$b_n=0$；

(C) 如果$f(x)$是常数，则$b_n$不全为零；　(D) 如果$b_n=0$（$n=1,2,\cdots$），则$f(x)$是偶函数。

二、填空题（每小题4分，共16分）

1. 第一型曲线积分$\int_L x^2 ds =$ $\underline{2\pi}$，其中$L$为圆$x^2+y^2=4$在第一象限内的部分.

2. 星型线$\begin{cases}x=cos^3 t\\ y=sin^3 t\end{cases}$，$(0\le t\le 2\pi)$所围区域的面积为$\underline{\frac{3\pi}{8}}$。

3. S 为抛物面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，计算曲面积分$\iint_S \frac{ds}{\sqrt{4z+1}}=\underline{\pi}$。

4. 微分方程$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$满足条件$y(1)=0$的解是$\underline{x^2+y^2=1}$.

三、计算曲面积分$\iint\limits_S xdS$，其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在第一卦限的部分$(a>0)$。（9分）

$2x+2z\cdot z'_x=0 \quad \therefore z'_x=-\frac{x}{z} \quad$ 同理 $z'_y=-\frac{y}{z}$

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\iint\limits_S x\,dS=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x,y\ge 0}}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\frac{ar\cos\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\,dr$$

$$=a\left(\int_0^a\frac{a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}dr-\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,dr\right)$$

$$=a^3\cdot\arcsin\frac{r}{a}\Big|_0^a-a\cdot\pi a^2\cdot\frac{1}{4}\quad\text{(几何意义)}$$

$$=\frac{\pi}{4}a^3$$

四、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$的收敛域.（9分）

$$-\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}\qquad -\frac{x}{3}\in(-1,1]$$

∴ 收敛域为 $[-3,3)$

五、将函数$f(x)=arctan(2x)$展开为$x$的幂级数。(9分)

$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$ , $x\in(-1,1)$

两边积分,

$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ , $x\in[-1,1]$

$f(x)=\arctan 2x = 2x-\frac{2^3\cdot x^3}{3}+\frac{2^5\cdot x^5}{5}-\frac{2^7\cdot x^7}{7}+\cdots$ , $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

六、把函数$f(x)=|x|$ $(x\in[-\pi,\pi])$展开为傅里叶级数。(9分)

$f$偶, $\therefore b_n=0$ , $n=1,2,\cdots$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\pi$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x\,d\sin nx=\frac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^\pi-\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx$

$=0+\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^\pi=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$ , $n=1,2,\cdots$

$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos nx$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$ , $x\in[-\pi,\pi]$.

七、计算$I=\oint_L\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$,其中$L$为逆时针方向的椭圆$\frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>0,a\neq1)$.

$L$所围区域为$D$

(1)若$a<1$,则

$$I=\iint_D(Q'_x-P'_y)\,d\sigma=\iint_D 0\,d\sigma=0$$

(2)若$a>1$,则取$\varepsilon\in(0,a-1)$, $L_1$为$x^2+y^2=\varepsilon^2$,顺时针方向.

$D_1$为$L_1$所围区域.

$I=\left(\int_L+\int_{L_1}-\int_{L_1}\right)P\,dx+Q\,dy$

$=\iint_{D-D_1}0\,d\sigma-\int_{L_1}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$

$=\frac{-1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(x-y)dx+(x+y)dy$

$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2\,d\sigma=2\pi$.

八、设$f(x)$有一阶连续导数，$S$为由$y=x^2+z^2, y=8-x^2-z^2$所围立体表面的外侧，试计算

$\iint_S \frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)dydz+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)dzdx+zdxdy$。（9分）

$(x^2y-f(y^2))$ $\quad$ $(f(x^2)-xy^2)$

由高斯公式，$I=\iiint\limits_V 1\,dxdydz$

$$=\iint\limits_{x^2+z^2\le 4}\left[(8-x^2-z^2)-(x^2+z^2)\right]dxdz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(8-2r^2)r\,dr$$

$$=16\pi$$

九、设$a_{n+1}>a_n>0$，$n=0,1,2,\cdots$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$收敛的充分必要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}-1\right)$收敛。（6分）

| 九题得分 | |
|---|---|

(1) $\Rightarrow$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$ 收敛

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{a_{n-1}}{a_n}}{\frac{a_n}{a_{n-1}}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}=1$$

由比较判别法极限形式，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}-1\right)$ 收敛.

(2) $\Leftarrow$：同理可证.