离散数学第四部分之二

群　论

■ 半群与含幺半群

定义 在二元代数<S, *>中，若二元运算“*”满足结 合律，则称<S, *>为半群；

若半群<S, *>中的二元运算“*”满足交换律，则称<S, *>为可交换半群。

定义13.2.2 设<S, *>为半群，若S中存在关于运算“*”的幺元e，则称此半群为含幺半群（或独异点），有时也记为<S, *, e>；

若含幺半群<S, *, e>中运算“*”满足交换律，则称<S, *, e>为可交换含幺半群（可交换独异点）。

例

- 设A是非空集合，A^A表示所有A到A的函数集合，运算“o”表示映射的复合运算，证明<A^A, o>是半群。
- 分析 只需证明运算“o”满足封闭性和结合律。

- 证明 对任意f, g∈A^A， 显然有fog∈A^A,
  - 故封闭性成立。
  - 又函数复合运算“o”满足结合律,
  - 所以<A^A, o>是半群。

例

- 设S是一个集合，P(S)是S的幂集合，试证明代数系统 $<P(S), \cup>$ 与 $<P(S), \cap>$ 都是可交换的含幺半群。
- 分析 运算“$\cup$”和“$\cap$”显然满足交换律，因此只需说明 $<P(S), \cup>$ 与 $<P(S), \cap>$ 是半群，并计算它们的幺元即可。

例（续）

证明 显然运算“∪”和“∩”均满足结合律和交换律，因此它们是可交换的半群。

易证Φ和S分别是<P(S), ∪> 和<P(S), ∩>的幺元。因此，<P(S), ∪> 与<P(S), ∩>是可交换的含幺半群。

例

- 设 $\underline{n}$＝｛0, 1, 2, …, n-1｝, 定义$\underline{n}$上的运算$+_n$ 如下：
  - $x, y \in \underline{n}, x +_n y = x + y \pmod n$
- (即x＋y除以n的余数)。
- 证明$<\underline{n}, +_n>$是含么半群。

- 证明：封闭性：$x, y \in \underline{n}$, 令$k = x + y \pmod n$, 则
  - $0 \leq k < n-1$, 即$k \in \underline{n}$,
- 所以封闭性成立；

例（续）

结合律：$x, y, z \in \underline{n}$, 有

$$(x +_n y) +_n z = x + y + z \ (\mathrm{mod}\ n) = x +_n (y +_n z)$$

所以结合律成立。

幺元：　　$x \in \underline{n}$, 显然有

$$0 +_n x = x +_n 0 = x$$

所以0是幺元。

故$\langle \underline{n}, +_n \rangle$是含幺半群。

■ 子半群和子含幺半群

将子代数应用于半群，可得下面的定义：

定义 如果<S, $*$>是半群，T是S的非空子集，且运算“$*$”对T封闭，则称<T，$*$>是半群<S, $*$>的子半群；

如果<S, $*$, e>是含幺半群，T是S的非空子集，e∈T。且运算“$*$”对T封闭，则称<T, $*$, e>是含幺半群<S, $*$, e>的子含幺半群。

例

设<S, *>是含幺半群，

$$M = \{a \mid a \in S，对任意x \in S 有a*x = x*a\},$$

则 <M, *>是<S, *>的子含幺半群。

分析 需证明两点：幺元存在，运算“*”封闭。

证明 (1) 设e是半群<S, *>的幺元，则对任意x∈S，显然有

$$e * x = x * e,$$

因此，e∈M。进而M是S的非空子集。

例（续）

（2）对任意a,b∈M，由M的定义知，对任意x∈S，有

$$a * x = x * a, \quad b * x = x * b,$$

又运算“*”满足结合律，则

$$\begin{aligned}(a * b) * x &= a * (b * x) \\ &= a * (x * b) = (a * x) * b \\ &= (x * a) * b = x *(a * b),\end{aligned}$$

即　对任意x∈S, $(a * b)* x = x *(a * b)$,

因此，$(a*b)\in M$。

由(1)、(2)可知：<M, *>是的一个子含幺半群。