多元积分练习题

1. 令 $I_1=\iint\limits_D xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_2=\iint\limits_D x^2e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 且 $I_3=\iint\limits_D x^3e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这里 $D:x^2+y^2\le a^2$，则

(A) $I_1=I_2$.　　(B) $I_2=I_3$.　　(C) $I_1=I_3$.　　(D) $I_1\ne I_2, I_2\ne I_3, I_1\ne I_3$

2. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 x 轴、y 轴以及直线 $x+y=1$ 围成，则 $f(x,y)=$

3. 设 $f(x,y)=\max\{x,y\}$，$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算 $I=\iint\limits_D f(x,y)\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

4. 设函数 $f(x)$ 可微，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$. 又设平面区域 $D:x^2+y^2\le t^2$ ，则

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma=$$

5. $I=\int_0^1 dy\int_y^1\cos(x^2)dx=$

6. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=8$，求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{e^{\sin^4 t}-1}\int_0^t dx\int_x^t f(xy)dy.$$

7. 求曲面 $z=xy$，与平面 $x+y+z=1$, $z=0$ 所围区域的立体 Ω 的体积 V .

8. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个领域内连续，令

$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy$.　　　　求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F'(t)}{t}$。

9. 求证 $\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}<\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}$

10. 设 $f(x)$ 连续且 $f(0)=0$，空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 2, x^2+y^2\le t^2\}$，

$F(t)=\iiint_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}=$

11. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 yoz 平面内 $z=0$，$z=2$ 以及曲线 $y^2-\left(z-1\right)^2=1$ 所围成的平面区域绕 z 轴旋转而成的空间区域。

12. 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=$

13. 计算逐次积分 $I=\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y\int_0^y\dfrac{\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$.

14. 设 l 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ 一周， 则第一型曲线积分 $I=\int_l (x+y)^2\,\mathrm{d}l=$

15. 设函数 $f\left(x,y\right)$ 在区域 D：$\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1$ 上具有连续的二阶偏导数，C 为顺时针椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，则 $\oint\limits_C\left[-3y+f_x'\left(x,y\right)\right]dx+f_y'\left(x,y\right)dy=$

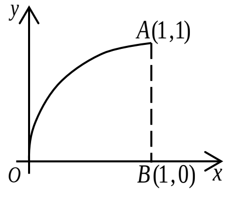
16. 给定曲线积分 $I=\int_C (y^3-y)\,\mathrm{d}x-2x^3\mathrm{d}y$，其中 C 为光滑的简单闭曲线，取正向. 当曲线 C 的方程为   时， I 的值最大.

17. 若 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 是某一个二元函数的全微分，则常数 $a=$____________ .

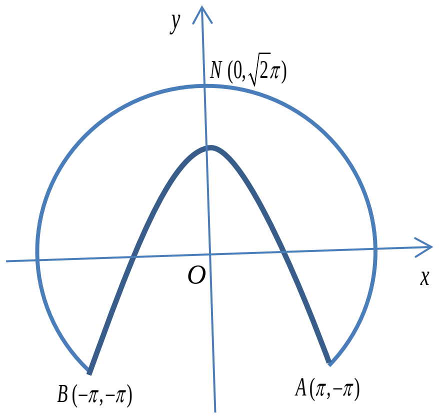
18. 求 $\int_L\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中曲线 L 是 $\dfrac{\left(x-1\right)^2}{9}+y^2=1$ 位于上半平面，从点 $\left(-2,0\right)$ 到 $\left(4,0\right)$ 的部分。

19. 计算曲线积分 $I=\int\limits_C\dfrac{\left(x+y\right)\mathrm{d}x-\left(x-y\right)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中曲线 C： $y=\varphi\left(x\right)$ 是从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一条不经过坐标原点的光滑曲线。

20. 计算 $\int_L(\sin y-y)\mathrm{d}x+(x\cos y-1)\mathrm{d}y$, 其中 L 为从点 $O(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 在第一象限部分到点 $A(1,1)$ 的路径.



21. 设 C 是沿曲线 $y=\pi\cos x$ 由点 $A(\pi,-\pi)$ 到点



$B(-\pi,-\pi)$ 的有向曲线． 计算曲线积分

$$I=\int_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

22. 计算曲线积分 $\int_{AB}\left[\frac{1}{y}+y\,f(xy)\right]\mathrm{d}x+\left[x\,f(xy)-\frac{x}{y^2}\right]\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x)$ 有连续导数，AB 是由点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的有向线段.

23. 计算曲线积分 $I=\oint_C \frac{xy^2dx-yx^2dy}{(x^2+y^2)^2}$

其中 C 为正向曲线 $2x^2+3y^2=1$.

24. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小.

25. 设 S 为球面：$x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$，其取外侧为 Σ，则两个曲面积分全为零的是（ ）

（A）$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}s,\ \iint\limits_\Sigma y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$；　　（B）$\iint\limits_S xy\mathrm{d}s,\ \iint\limits_\Sigma y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$；

（C）$\iint\limits_S x\mathrm{d}s,\ \iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；　　（D）$\iint\limits_S x\mathrm{d}s,\ \iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

26. 设曲面 $\Sigma=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1,z\ge 0\right\}$，并取上侧为正，则不等于零的曲面积分为：（ ）

（A）$\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；　　（B）$\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

（C）$\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}z$；　　（D）$\iint\limits_\Sigma y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

27. 设曲面Σ的方程为$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，则$\iint_\Sigma \frac{x+y+1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$ 等于

(A) π . (B) 2π . (C) 4π. (D) $\frac{\pi}{2}$

28. 设曲面$\Sigma=\{(x,y,z)\mid z=x^2+y^2, 0\le z\le 1\}$, 取上侧为正，$\Sigma_1$是 Σ在 $x\ge 0$的部分，则曲面积分

(A) $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$ (B) $\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma_1} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(C) $\iint_\Sigma y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{\Sigma_1} y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ (D) $\iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{\Sigma_1} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

29. 计算$I=\iint\limits_\Sigma \frac{xdydz-ydzdx+(z+1)dxdy}{x^2+y^2}$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$，$x-y+z=2$ 所截出部分的外侧.

30. 计算 $I=\oiint\limits_\Sigma |xy|z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+|x|y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，Σ为曲面$z=x^2+y^2$与$z=1$所围成的封闭曲面的外侧。

31. 计算曲面积分 $I=\oiint_\Sigma \frac{2}{x\cos^2 x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{1}{\cos^2 y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-\frac{1}{z\cos^2 z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ，

其中，曲面Σ 是球面$x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

32. 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ，其中Σ为空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid |x|\le 2,|y|\le 2,|z|\le 2\}$边界曲面的外侧。

33. 设S是由xOz平面内的一段曲线 $z=x^2-1\ (1\le x\le 2)$绕z轴旋转一周所成的有向曲面，其各点处的法向量与z轴正向成钝角,计算曲面积分

$$\iint\limits_S x^2(x-1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(3x^2y-y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(4xz-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
.

34. 设流速场$\vec{v}(x,y,z)=z^2\vec{i}+x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$，求流体沿空间闭曲线$\Gamma$的环流量 $\Phi=\oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$ ，其中Γ是两个球面$x^2+y^2+z^2=1$与$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$的交线，从$z$轴的正向看去，$\Gamma$为逆时针方向.