概率与数理统计

王超

2022年2月

Motivation （缘起）

- 是我们认识不确定现象的理论方法
- 是我们处理大量随机数据的手段
- 将作为研究生入学考试的一个部分

课程介绍(Introduction)

- 本课程包含两个部分

  概 率 论：是研究随机现象规律性的科学，属于数学的一个分支，同时是统计的理论基础。

  数理统计：统计是一门独立的学科。

Example 1: 一家四个孩子最可能的情况是那种？

假若生男生女是均等的，那么最大的可能是2-2吗？

4个孩子的组合共有16种可能

4-0	2-2	3-1
MMMM	MMFF	MFFF
FFFF	FFMM	FMFF
	FMFM	FFMF
	MFMF	FFFM
	MFFM	FMMM
	FMMF	MFMM
		MMFM
		MMMF

4-0的可能：2/16=1/8

2-2的可能：6/16=3/8

3-1的可能：8/16=4/8

一家四个孩子，最有可能的情形是3-1，而不是2-2

其他类似事例：

- 同时抛4枚硬币，每个抛了100次

  看看3-1、2-2、4-0的组合；

  最可能的是3-1

- 一手桥牌中四种花色的最可能分布，是4-3-3-3 吗？

  错！最可能的一手牌是4-4-3-2 ；

是否可以抽象出来共性的东西，而不是case by case?

对应问题： 随机变量

注意到，我们如果把所有的结果列出来再计算，有时是很苦难的，如：7个孩子的可能分布有$2^7＝128$种

对应问题：概率论计算方法

为什么要学习概率统计

- 日常生活（常见用语、彩票、打扑克、天气预报）
- 工农业生产（产品检验、产量计算）
- 信息论（信息墒、信息传输、信息压缩，密码理论）
- 金融、保险、证券、期货（风险）
- 各种统计（人口统计、经济统计、民意调查、市场调查）
- 街头骗局

概率统计的观念影响到每一个人的行为和生活方式！

怎样学好概率统计

- 树立概率统计非常有用的观念，增强学习动力；
- 当作一门数学来学习，借鉴学习《高等数学》和《线性代数》的经验；
- 多看例题，多做习题，并尽可能按照例题的求解步骤和论述方式写出习题答案。
- 多与实际相结合，提高解决实际问题的能力。

不确定现象

- 为什么有些现象是不确定的？

影响因素太多造成的:

1、抛硬币

2、股市涨跌

3、天气预报

3. 天气预报

- 1960's全球大气研究计划：预期准确预报天气、长期预报天气。
- 在1960's我们的气象工作者只是事后的报告
  我们现在的中央台每日在预报，预报明天、后天，乃至大趋势。
- NKU Star早先应用之一是天津市局部天气预报

[1] 准确的天气预报是不存在的，因为有诸多的随机因素。

[2] 七天以上的天气预报是没有用的：

  - 要么不准（比如我们谁可以说下周一就比今天暖和？）
  - 要么是常识（如7月份的天气在15°以上）

蝴蝶效应

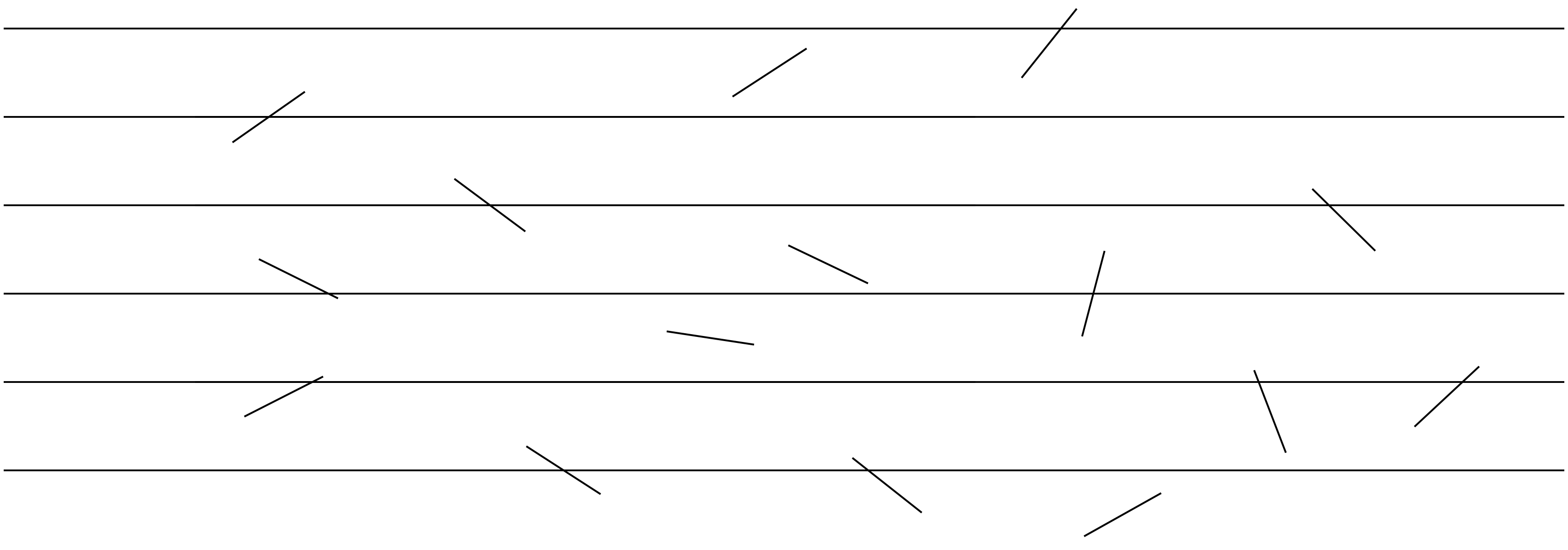
MIT的Lornze，1961年在研究天气预报时，用计算计作仿真，遇到了一个奇特的现象，发现了蝴蝶效应（Butterfly Effect）

用计算机求解仿真地球大气的13个方程式。
1961年的一个冬天，为了考察一天更长的序列， Lorenz走了条捷径。他没有令计算从头运行，而是从中途开始。作为计算的初值，他直接打入了上一次的输出结果。而当他喝了杯咖啡以后回来再看时竟大吃一惊：本来期望计算应该准确地重复老的结果，但是实际结果却偏离了十万八千里！ Lorenz的第一个念头是：又坏了一只真空管。计算机没有毛病！于是，洛伦兹（Lorenz）认定，他发现了新的现象：“对初始值的极端不稳定性”，即：“混沌 ”，

Butterfly Effect: 巴西里约热内卢的一只蝴蝶煽动了一下翅膀，导致万里之外的美国的德克萨斯州的一场龙卷风.

概率论的妙用1

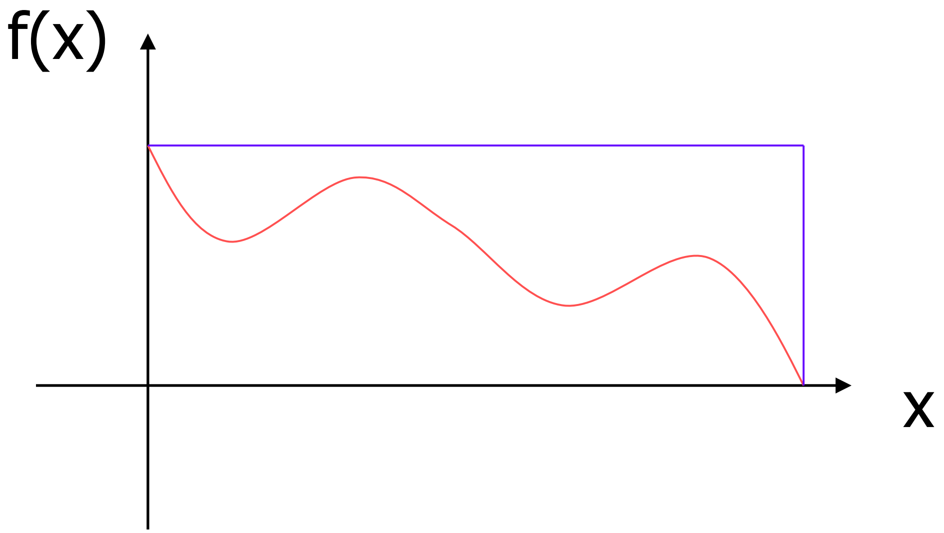
- **计算π**（**1777**年法国科学家**Buffon**计算**π**的投针试验）



公式：$\boxed{\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{n}{N}}$

概率的妙用2

- 蒙特卡罗方法(计算复杂函数的积分)



抽签、抓阄的公平性

- 放回的抽签是公平的。

$$\frac{1}{N}$$

- 不放回的抽签也是公平的！

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}$$

有关小概率事件的两个原理1

1、实际推断原理（小概率原理）

概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的。

①彩票（如何计算中奖概率）

②飞机失事

有关小概率事件的两个原理2

2、原理2

小概率事件只要试验次数足够多，而且试验是独立进行的，那么这一事件几乎是肯定发生的。

（根据：实际推断原理。）

①彩票

②飞机失事

Continued…

2、生日概率问题：一个班级大概有**60**个人，其中有人生日相同的概率是多少？

答案：**>99.4%**

注意：（新问题）要求你遇到的人中至少有一人和你生日相同的概率大于**50%**，你最少要遇到 **253** 人才成。

课程介绍(Introduction)

- 参考教材：

[1] 盛骤、谢式千、潘承毅(浙江大学).《概率论与数理统计》第四版，高等教育出版社。

[3] 天津大学数学系编.《概率论与数理统计讲义》，高等教育出版社。

[3] Morris H.DeGroot, Mark J.Schervish, 《 Probability and Statistics》（Third Edition），高等教育出版社，2005年第一版。

课程安排（Schedule)

[1] 教学内容：

《概率论与数理统计》 (浙大)第一章至第八章部分内容

[2] 教学周期：第一周至第十七周

期末考试：第十八周

课程主讲时间实际是十六周，平均每周要讲（或者完成）10页左右

[3] 授课方式：

大课：介绍主要内容，不及细解大家的问题，看情况扩展；

课后习题作业：进一步巩固课堂学习内容。

Grade Policy （课程考核方法）

- 考核包括

  考勤、作业、期末笔试三部分；

- 成绩分布

  考勤＋作业＋大作业（共30-40%）

  ＋期末考试（占60-70%）

- 注意

  不得违反学校规定，缺课一定次数需要处理

（注：特批的除外）

思考（不马上做）

1：详细写出你目前所知道的一种概率统计的应用，并尽可能做到与众不同。

2：赌片中常见一种赌扑克牌的方法，叫“梭哈”。方法是从一副去掉大小王共**52**张牌中各发**5**张牌给每一位参与者，以此**5**张牌的搭配模式来确定输赢。搭配模式包括同花顺、四张、扶虏、同花、顺子、三张、两对、单对、散张等，以同花顺为最大。其中扶虏是指**5**张牌中有三张是同一个点数，另两张也是同一个点数；同花是指**5**张牌是同一个花色，但不是顺子。计算各自出现的概率，并给出这些模式赢牌的顺序。

（有条件的确认一下与实际赌场中的赢牌顺序是否相符，另外需要重点注意比较扶虏和同花的概率大小。）

Chpt.1 Basic Concepts of Probability

第一章 概率论的基本概念

1.1.1 What Is Random Event

必然事件

在某一条件下必然发生的事件

太阳早晨从东方升起

不可能事件

在某一条件下肯定不会发生的事件

水在一个标准大气压下40°结冰

随机事件

在必然事件与不可能事件之间的事件

抛硬币：结果是正面

1.1 Introduction

Example 1.1.1 产品抽样检查

大批量生产，产品质量可以加以控制，但还是需要检验。

从N件产品中任意抽取n件，观察不合格产品的数目。

产品抽检

- 一般是非破坏性的检验（也有破坏性的检验）
- 一般是非全面的检验（抽样检验）
- 具有不确定性

Example 1.1.2 网络节点的Down time

Down有一定的随机性，可以用Down Time来描述系统的可靠性 (Reliability)

Level	Availability	Down Time (Min/Year)
Unmanaged	90%	50,000 (833.3h)
Managed	99%	5,000 (83.3h)
Well Managed	99.9%	500 (8.3h)
High-Availability	99.99%	50 (0.83h)
Fault Tolerant	99.999%	5
Goal	99.9999%	0.5 (30s)

Example 1.1.3 股票涨跌由什么决定

影响股票涨跌的因素有很多，例如：

1）政策的利空利多；

2）大盘环境的好坏；

3）主力资金的进出；

4）个股基本面的重大变化；

5）个股的历史走势的涨跌情况；

6）个股所属板块整体的涨跌情况；

7）其它未知情况！

1.1 Introduction

1.1.1 What Is Random Event

这类事件事前不可预料，即在相同条件下重复进行观察或试验时，有时出现，有时不出现。

这些事件称之为随机事件或不确定性事件。
这种现象称之为随机现象。

1.1 Introduction

1.1.2 Why to Study

随机现象是普遍存在的，确定性的（必然、不可能）现象是少数的。需要正面对待。

随机现象有其偶然性的一面，也有其必然性的一面.

其必然性表现在大量重复试验或观察中呈现出的固有规律性

↓

规律性：随机现象的统计规律

研究目标：寻求随机现象的内在规律

1.1.3 How to Study

如何来研究随机现象？抛开书来谈,途径有两种：

途径1：类似于确定性现象那样，寻求事务之间的因果关系，最理想的是1-1对应关系（如函数可逆、矩阵可逆）。

寻求随机事件发生的条件几乎是不可能的，它是由大量的随机因素支配的。

途经2：不去寻求导致事件发生的确切条件，而是研究事件在某一条件下发生的可能性的大小。

如：正常环境下，射击运动员射中十环的可能性。

如：正常生产条件下，一批产品的合格率。

$\Downarrow$

$\boxed{\text{概率理论}}$

1.1.3 How to Study

寻求事件发生的可能性的想法在人们实践中很自然地产生。

射击运动员每次射中环数不一，但是我们可以谈他射中9环的可能性。

这种可能性可以由大量的试验、实践统计得到：

如果在条件e下进行n次试验，事件A发生的次数为A_n (称为频数)，事件A发生的频率为：$f_n(A)=A_n/n$

- $f_n(A)$是不同的，也就是所每作n次试验，所得$f_n(A)$未必相同；
- 但是当n较大时，$f_n(A)$接近一个常数P(A)，它是$f_n(A)$的极限。

1.2.1 随机试验

可以用试验来描述随机现象。试验总是有条件、有结果的。

[定义1.1] 随机试验用来描述条件相同时出现不同结果的试验。随机试验满足三点：

[1] 可以在相同的条件下重复；

[2] 每次试验的可能的结果不止一个，所有可能的结果是可以事先确切描述的；

[3] 每次试验的结果事前是不能确定的。

Example 1.2.1 抛硬币

[1] 抛一枚硬币，观察出现正面的情况；

[2] 将一枚硬币三次，观察出现正面H反面T的情况；

Example 1.2.2 摸球

一只袋子中装有M只白球、N只红球，从袋子中取球两次，每次取一只，考虑两种模式：放回、不放回。观察以下试验：

[1] 两只球均为白色；

[2] 两只球同色；

[3] 至少有一只白球。

1.2.2 样本空间

[定义1.2]: 把随机试验所有的结果组成的集合S称为随机试验的样本空间。样本空间中的元素称为样本点。

Example 1.2.1 抛硬币：将一枚硬币抛三次，观察出现正面H、反面T的情况；

S＝{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT }

Example 1.2.2 摸球：一只袋子中装有3只白球、2只红球，从袋子中取球两次，每次取一只

有放回试验S={W_1R_1, W_1R_2, W_1W_1, W_1W_2, W_1W_3,
W_2R_1, W_2R_2, W_2W_1, W_2W_2, W_2W_3,
W_3R_1, W_3R_2, W_3W_1, W_3W_2, W_3W_3,
R_1R_1, R_1R_2, R_1W_1, R_1W_2, R_1W_3,
R_2R_1, R_2R_2, R_2W_1, R_2W_2, R_2W_3}

不放回试验S={ W_1R_1, W_1R_2, W_1W_2, W_1W_3,
W_2R_1, W_2R_2, W_2W_1, W_2W_3,
W_3R_1, W_3R_2, W_3W_1, W_3W_2,
R_1R_2, R_1W_1, R_1W_2, R_1W_3,
R_2R_1, R_2W_1, R_2W_2, R_2W_3}

1.2.3 随机事件

基本事件——样本空间中单个样本点

随机事件—— S的子集

必然事件—— S本身

不可能事件 ——空集Φ

事件是可以关联的，事件之间的各种关联构成新的事件。

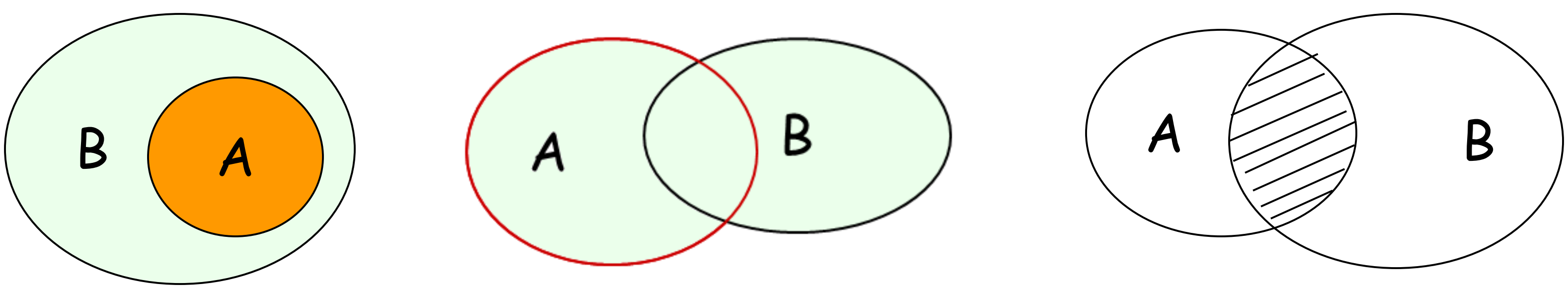
1.2.4 事件的关系与运算

- B包含A (B⊇A)　　If $x\in A \Rightarrow x\in B$
- 和事件（并）：　　$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

  n个事件的和 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ，可列（可数事件）和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
- 积事件（交）：　　$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

  n个事件的交 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ，　有时记作$A_1A_2\dots A_n$

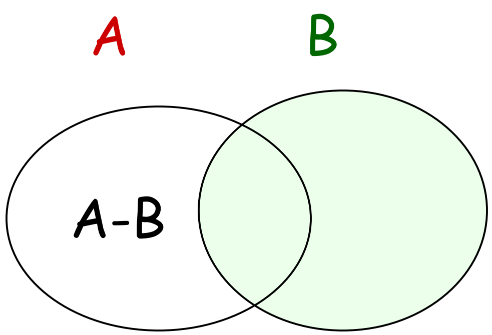
  可列（可数事件）交 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

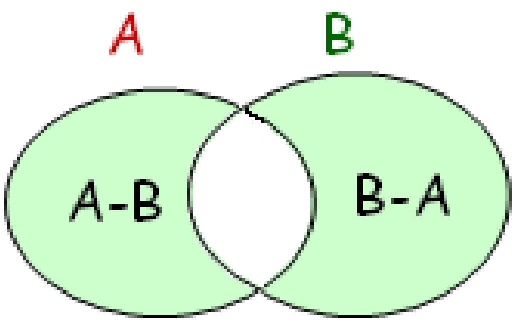


1.2.4 事件的关系与运算

- 互不相容(互斥): $A \cap B = \Phi$
- 差事件: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$
- 逆事件(对立事件): $A \cup B = S,\ A \cap B = \Phi$

  A的逆事件记为 $\overline{A} = S - A$
- 对称差: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$





1.2.5 概率定义与基本特性

概率是在一随机试验中某一事件发生可能性大小的一种量化描述。

严格地讲: 没有定义

根据频率的性质:

[1] $0 \le f_n(A) \le 1$

[2] $f_n(S)=1$

[3] $A_1, A_2, \cdots\cdots A_k$是两两互不相容的事件则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots\cdots + f_n(A_k)$$

1.2.5 概率定义与基本特性

[定义1.3] 随机试验E，样本空间为S，其中事件的概率P(A)满足：

[1] Nonnegative： $P(A) \geq 0$

[2] Normalization： $P(S)=1$

[3] σ-可加性： $A_1, A_2, A_3, \ldots$是两两互不相容的事件则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Problem 1：对于一个样本空间而言，概率是唯一的吗？

对于一个样本空间而言，可以在其上定义多种概率。这就像距离函数一样，可以定义多个。

假设在S上定义了概率P，有一事件B满足P(B)>0，定义一个新的函数$\overline{P}$，对任意的S上的事件A有 $\overline{P}(A)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

[1] $\overline{P}(A)\geq 0$

[2] $\overline{P}(S)=\dfrac{P(SB)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$

[3] $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 是两两互斥的

$$\overline{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots) = \frac{P\left(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P\left((B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\cdots\cdots)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots\cdots}{P(B)}$$

$$=\overline{P}(A_1)+\overline{P}(A_2)+\cdots\cdots$$

1.2.5 概率定义与基本特性

可见 $\overline{P}$ 满足概率的定义，应该是S上的一个概率，但是它不同于P。

事实上它是我们后面将要提到的条件概率P(A|B)。

Problem 2: 实际应用中的概率是如何定义的?

一个样本空间上的概率并不是如此定义出来的，需要的根据实际情况确定。但是，所确定的概率需要满足以上条件。

1.2.5 概率定义与基本特性

[1] 不可能事件概率为零：$P(\Phi)=0$

[2] 有限可加性：

$A_1, A_2, \ldots, A_k$是两两互不相容的事件则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)$$

[3] 可减性：

$A \subset B$，则$P(B-A)=P(B)-P(A)$

特别地$P(\overline{A})=1-P(A)$

[4] 不降性：

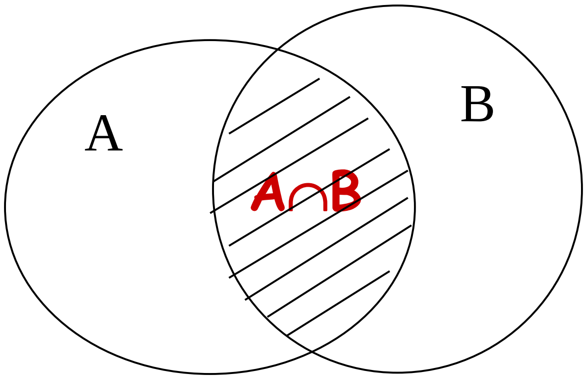
$A \subset B$，$P(A) \le P(B)$;

$\forall$事件A, $P(A) \le 1$

1.3 Principles for Probability

1.3.1 加法原则：

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$



可以利用面积原理加以说明

Proof：

$$A\cup B = A\cup(B - A\cap B)$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B - A\cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_k\right) = \sum P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

1.3.2条件概率与乘法定理

Example 1.3.1 四人（拱猪、升级、桥牌）打牌，以每人拿到红桃为例，均为随机的。

A＝东家拿到4张红桃

B＝西家拿到4张红桃

这两件事都是随机的，在抓牌前均是未知的。

我们考虑这样一件事：

当东家真的抓到4张红桃后，他要判断一下西家拿到4张红桃的可能性是多大？

（他计算此种可能性的关心程度远超过在摸牌之前计算“西家拿到4张红桃”的可能性！）

1.3.2条件概率与乘法定理

[定义1.4] 概率是对随机事件发生可能性大小的描述，在一事件A发生的前提下，另一事件B是否发生依然是随机的，其发生的可能性大小与A的发生有关系，记这样的概率为 P(B|A).

How to calculate P(B|A)

A是大前提，在A发生的前提下，看B发生的可能性；

假设A在S中有m个，AB有k个，总样本数是n个；

则

$$P(B|A)=k/m=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.3.2条件概率与乘法定理

Example 1.3.2：一盒子装4只产品，3只合格1只次品。顺序取两只

问：在第一次取得是合格品的情况下，第二次依然取得合格品的概率

解：A—第一次取得合格品；B—第二次取得合格品。

S—共有4×3种可能

A—共有3×3种可能

AB—共有3×2种可能

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/12}{9/12}=\frac{2}{3}$$

Example 1.3.3: 中央电视台“幸运52”栏目中的“百宝箱”互动竞猜游戏，规则如下:

在20个商标中，有5个商标牌的背面注明了一定的奖金额，其余商标的背面是一张哭脸，若翻到它就不得奖。参加这个游戏的观众有三次翻牌的机会。

某观众前两次翻牌均得若干奖金，如果翻过的牌不能再翻，那么这位观众第三次翻牌获奖的概率是?

$$A\ \ \frac{1}{4}\qquad B\ \ \frac{1}{6}\qquad C\ \ \frac{1}{5}\qquad D\ \ \frac{3}{20}$$

1.3.2条件概率与乘法定理

Remark 1: 条件概率依然是概率，它满足概率的三个原则；

Remark 2: 虽然我们说概率论不去研究事件与原因之间的对应关系，但是可以探索导致一件事情发生的原因，如果A发生，那么是原因E的可能性有多大?

这和后面的Bayes公式相关。

乘法定理

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$

$$P(ABC)=P(C|AB)P(AB) \quad =P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})P(A_1A_2\ldots A_{n-2}A_{n-1})$$

$$=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\, P(A_1A_2\ldots A_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2}) \cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$=P(A_1)\, P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

积的概率分解为多个条件概率的积，而这些条件概率相对是容易计算的

Example 1.3.4 袋中有r只红球，t只白球。每次自袋中任取一球，观察其颜色后放回，并再放入a只与所取球同色的球。

问：连续取球4次，第一、二次为红球且第三、四次为白球的概率

解：以A_i(i＝1,2,3,4)表示“第 i 次取得红球”

则 $\overline{A}_3, \overline{A}_4$ 分别表示事件第三、四次取到白球。

所描述的事件为 $A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4$

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$= \frac{r}{r+t} \bullet \frac{r+a}{r+t+a} \bullet \frac{t}{r+t+a+a} \bullet \frac{t+a}{r+t+a+a+a}$$

Example 1.3.5 某公司有两个汽车生产厂，分别生产80%、20%的汽车，第一个厂的产品合格率为95%，第二个厂的产品合格率为98%。

[1] 买一辆此公司的汽车为合格的概率是多少?

[2] 如果买到的汽车是合格的，则此汽车为第一厂的概率是多少?

解：记

A - 买到的汽车为合格品　　　　C - 买的车为第一厂

B_1 - 买到的车为第一厂生产且合格　　　　$B_1=AC$

B_2 - 买到的车为第二厂生产且合格　　　　$B_2=A\overline{C}$

则问题分别为$P(A)$、$P(C|A)$

$$P(A)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)$$

$$P(B_1)=P(AC)=P(C)\,P(A|C)$$

$$=0.8\times 0.95=0.76$$

$$P(B_2)=P(A\overline{C})=P(\overline{C})\,P(A|\overline{C})$$

$$=0.2\times 0.98=0.196$$

$$P(A)=0.956$$

$$P(C|A)=P(AC)/P(A)$$

$$=P(B_1)/P(A)$$

$$=0.76/0.956$$

$$=0.794979$$

Example 1.3.6：一盒子装4只产品，3只合格1只次品。有放回取两只

问：在第一次取得是合格品的情况下，第二次依然取得合格品的概率

解：A—第一次取得合格品；B—第二次取得合格品。

S—共有4×4种可能

A—共有3×4 种可能

B—共有4×3种可能

AB—共有3×3种可能

$P(A)=3/4$　　$P(B)=3/4$　　$P(AB)=9/16$

$P(B|A)=P(AB)/P(A)$

$=(9/16)/(3/4)$

$=3/4$

i.e. $\underline{P(B|A)=P(B)}$,　　即 $P(AB)/P(A)=P(B)$

从而 $\underline{P(AB)=P(A)P(B)}$。

这说明事件B的发生与事件A的发生是无关的，称A、B相互独立

1.3.3 独立事件

[定义1.2]: A、B为两事件，如果满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称A、B相互独立。

[定理1.1] A、B两事件，$P(A)>0$， 如A、B相互独立，则$P(B|A)=P(B)$。反之也成立。

[定理1.2] 如事件A、B是独立的，则下列各对事件也独立：A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$。

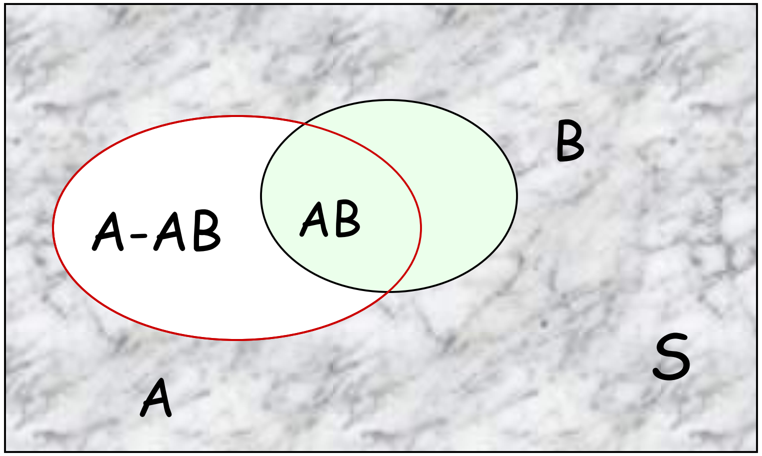
1.3.3 独立事件

事件A,B是独立的，则A与$\overline{B}$独立

如果证明了此，我们就知道：

B与$\overline{A}$ 独立（即$\overline{A}$与B独立）

$\overline{A}$与$\overline{B}$独立



Proof:

$$P(A\overline{B}) = P\{A \cap (S-B)\}$$
$$= P(A-AB)$$
$$= P(A) - P(AB)$$
$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)\{1-P(B)\}$$
$$= P(A)P(\overline{B})$$

1.3.3 独立事件

[定义1.3] 三个事件的相互独立

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(BC)=P(B)P(C)$$

$$P(AC)=P(A)P(C)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

一般，设A_1，A_2，……，A_n是n个事件，如果其中的任意多个事件的积事件的概率都等于各个事件概率的积，则称A_1，A_2，……，A_n相互独立。

1.3.3 独立事件

Remark 1：区分互斥、对立、独立三个概念；

互斥：$A \cap B = \Phi$

对立：互斥$A \cap B = \Phi$，并$A \cup B = S$

独立：$P(AB) = P(A)P(B)$

Remark 2：独立、互斥往往是根据实际意义去判断

Remark 3：两两独立未必三个独立;

例 四张卡片分别标以数字1,2,3,4，今任取一张。

A：取得的是1或2，$P(A)=1/2$

B：取得的是1或3，$P(B)=1/2$

C：取得的是1或4，$P(C)=1/2$

$P(AB)=1/4 \quad P(BC)=1/4 \quad P(CA)=1/4$

$P(AB)=P(A)P(B)$, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$

但是:

$P(ABC)=1/4$, $\quad P(A)P(B)P(C)=1/8$

Example 1.3.7 甲乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为p，$p\geq 1/2$。问：对甲而言，采用三局两胜制有利，还是采用五局三胜制有利。**假设各局的胜负相互独立**。

解：采用三局两胜制，甲获胜的情况：甲甲，甲乙甲，乙甲甲，总的获胜概率是三种情况（互斥事件）概率的和

$$
\begin{aligned}
P_3 &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) \\
&= p\times p+p(1-p)p+(1-p)p\times p \\
&= 3p^2-2p^3
\end{aligned}
$$

采用五局三胜制，如果要甲获胜，有以下几种可能：

甲前三盘连续获胜；

四盘（最后一盘必定是甲胜，前面三盘甲胜2盘，3选择2）；

五盘（最后一盘必定是甲胜，前面四盘甲胜2盘，4选择2）

总的获胜概率是三种情况概率的和（互斥事件）

1.3 Principles for Probability

$$P_5 = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$
$$= p^3 + C_3^2 p^3 (1-p) + C_4^2 p^3 (1-p)^2$$
$$= 10p^3 - 15p^4 + 6p^5$$

$$p_5 - p_3 = 10p^3 - 15p^4 + 6p^5 - 3p^2 + 2p^3$$
$$= 3p^2(2p^3 - 5p^2 + 4p - 1)$$
$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1)$$

如果$p > 1/2$, $p_5 > p_3$, 则$p_5 - p_3 > 0$，打五局比打三局要好

这就是增加了局数，偶然性就降低。

Example 1.3.8 设某型号的计算机服务器可靠性为85%，现在采用冗余配置（并行工作），欲使得系统的可靠性达到99.99%，问至少应配多少台这样的服务器?

解： 假设共需要n台这样的服务器才能使得系统的可靠性达到99.99%。

A系统工作正常，A_i＝第i台服务器工作正常

$A=\cup A_i$

$P(A)=P(\cup A_i)\geq 99.99\%$

注意到A_i是可以同时发生，不具备互斥性，无法直接分解成概率的和。但是 $\overline{A_i}$ 是独立的（再次说明独立、互斥之间的不同概念），也就是n台服务器是否down机是独立的。考虑如何把A_i和事件表达、分解为 $\overline{A_i}$ 积事件。

$$A = S - \overline{A} = S - \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$P(A) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

$$= 1 - (1 - 85\%)^n$$

$$= 1 - 0.15^n$$

$\geq 99.99\%$

$0.000\,1 \geq 0.15^{n}$

$n \geq 4.85$ 至少需要5台机器。

Example 1.3.9 若每个人的呼吸道中有感冒病毒的概率为0.002

求：在有1500人看电影的剧场中有感冒病毒的概率。

解：A_i — 事件“第i个人带有感冒病毒”（i=1,2,…，1500）

假定每个人是否带有感冒病毒是相互独立的，则所求概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{1500} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{1500}\right)$$

$$= 1 - P\left(\overline{A}_1\right) P\left(\overline{A}_2\right) \cdots P\left(\overline{A}_{1500}\right)$$

$$= 1 - (1 - 0.002)^{1500}$$

$$= 1 - 0.998^{1500}$$

$$\approx 0.95$$

可见：虽然每人带感冒病毒的可能性很小，但许多人聚集在一起时空气中含有感冒病毒的概率可能会很大

- 这种现象称为**小概率事件的聚众效应**。
- 卫生常识中,不让婴儿到人多的公共场所去就是这个道理。

Example 1.3.10 有一批产品是由甲、乙、丙三厂同时生产

	甲厂	乙厂	丙厂
产品百分比	15%	80%	5%
产品次品率	2%	1%	3%

如果从这批产品中随机抽取一件，试计算该产品是次品的概率多大?

解：设B_1、B_2、B_3分别表示抽得产品是甲厂、乙厂、丙厂生产的，A表示抽得产品为次品, 它也只能是来自B_1、B_2、B_3, 即：

$$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup(A\cap B_3)$$

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+P(A\cap B_3)$$

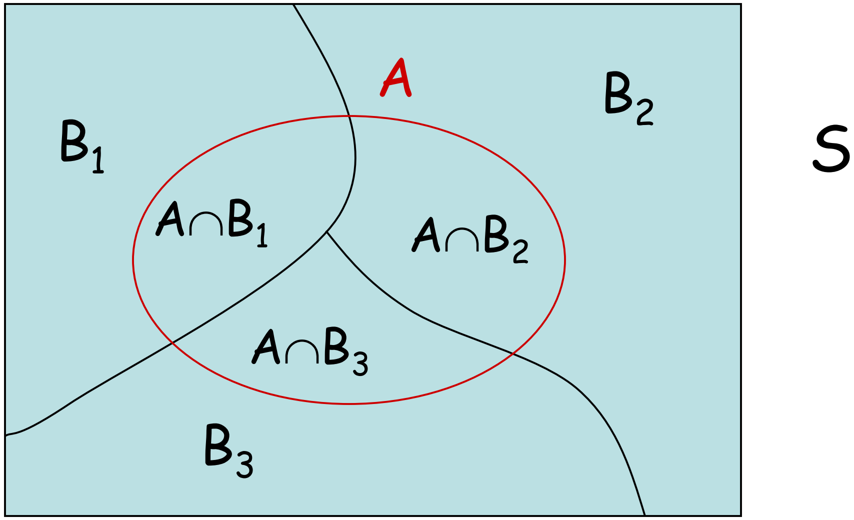
$$=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$

$$=0.02\times0.15+0.01\times0.8+0.03\times0.05$$

$$=0.0125$$

1.3.3 Rule of Total Probability

上面的例子，事实上是把事件 A 的概率计算转化为A在空间S上几个部分的概率计算。



空间S的划分：

设S为随机试验E的样本空间，B_1,B_2, ---, B_n为E的一组事件，如果

[1] B_1, B_2, ---, B_n是两两互斥的事件；

[2] $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n = S$

则称B_1,B_2, ---, B_n称为样本空间S的一个划分

1.3.3 Rule of Total Probability

[定理]：设S为随机试验E的样本空间，$B_1, B_2, ---, B_n$为S的一个划分，且 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$。则E的任意事件A的概率为

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

Remark：上述称为全概率公式，它事实上是把在一个复杂空间S上事件A的概率，分解为在数个小的子空间上的概率之和

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$

进一步地把在每个子空间上的概率分解为条件概率的积.

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

由此, 简化运算 (比照加法公式、乘法公式)

Example 1.3.11 甲乙丙分别操纵三门炮向一飞机射击。设他们的命中率分别为0.4、0.5、0.7；如只有一人射中，飞机坠毁的概率为0.2，如两个射中，飞机坠毁的概率为0.6，如三人都射中，则飞机必坠毁。

求：三人同时射击时飞机坠毁的概率?

解：记 C_1＝甲射中，C_2＝乙射中， C_3＝丙射中

B＝飞机坠毁

A_0＝3个人都没射中；

A_1＝有1个人射中；

A_2＝有2人射中；

A_3＝有3人射中；

$P(B|A_0)=0$;　$P(B|A_1)=0.2$；　$P(B|A_2)=0.6$；　$P(B|A_3)=1$

解：A_0、A_1、A_2、A_3是S的一个划分。有

$$P(B)=P(B|A_0)P(A_0)+P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

现在要求出A_0、A_1、A_2、A_3的概率

$$P(A_0)=P(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3})=(1-0.4)(1-0.5)(1-0.7)=0.09$$

$$P(A_1)=P(\text{有1个中})=P(C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3})+P(\overline{C_1}C_2\overline{C_3})+P(\overline{C_1}\,\overline{C_2}C_3)$$

$$=0.4(1-0.5)(1-0.7)+(1-0.4)0.5(1-0.7)+(1-0.4)(1-0.5)0.7$$

$$=0.36$$

$$P(A_2)=P(\text{有2个中})=P(C_1C_2\overline{C_3})+P(C_1\overline{C_2}C_3)+P(\overline{C_1}C_2C_3)$$

$$=0.4\times0.5(1-0.7)+0.4(1-0.5)0.7+(1-0.4)0.5\times0.7$$

$$=0.41$$

$$P(A_3)=P(\text{3个全中})=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

$$P(B)=0.458$$

1.3.4 Bayes' Theorem

一类实际问题： “已知结果看原因”

前面我们说过，概率研究的思路不是建立因果之间的关系

但是，已知某结果发生的前提下，还是可以分析导致它发生的原因的，或者说分析各种原因作用的大小。

例如：一汽大众有三个制造厂B_1,B_2, B_3。如果顾客买了一辆大众汽车，我们可以问这样的一些问题：

[1] 这辆车(A)最可能属于那个制造厂?

[2] 如果这辆车是合格的(B)，它最可能属于那个制造厂?

[3] 如果这辆车是不合格的(C)，它最可能属于那个制造厂?

1.3.4 Bayes' Theorem

这里，事件A、B、C发生后，我们希望知道导致这些事件发生几种原因的可能性。这几种原因就是B_1、B_2、B_3，他们是事实上是空间S的一个划分。

[Bayes定理]：设试验E的样本空间为S，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为样本空间S的一个划分，A为E的事件，$P(A)>0$, $P(B_i)>0 (i=1,2, \ldots n)$，则：

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

1.3.4 Bayes' Theorem

Proof: $P(B_i \mid A)=\dfrac{P(B_iA)}{P(A)} \qquad i=1,2,\cdots,n$

注意到$B_1,B_2, \ldots, B_n$为样本空间S的一个划分

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(AB_j)=\sum_{j=1}^{n}P(A \mid B_j)P(B_j)$$

而同时 $\boldsymbol{P(B_iA)=P(A \mid B_i)\,P(B_i)}$

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A \mid B_j)P(B_j)} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

Remark 1：该公式于1763年由贝叶斯(Bayes)给出，故称Bayes公式。它是在观察到事件A已发生的条件下，寻找导致A发生的每个原因的概率。有时也称为逆概率公式。

1.3.4 Bayes' Theorem

Remark 2：在贝叶斯公式中，$P(B_i)$和$P(B_i \mid A)$分别称为先验概率和后验概率.

$P(B_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$是基于以往的统计，人们对诸事件发生可能性大小的认识. 故称为先验概率。

当有了新的信息（知道A发生）后，人们对诸事件发生可能性大小$P(B_i \mid A)$有了新的估计。贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化。

比较$P(B_1 \mid A)$、$P(B_2 \mid A)$、……、$P(B_n \mid A)$的大小，则知导致A发生的最可能的原因.

Remark 3：注意Bayes公式对于任意事件B成立

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

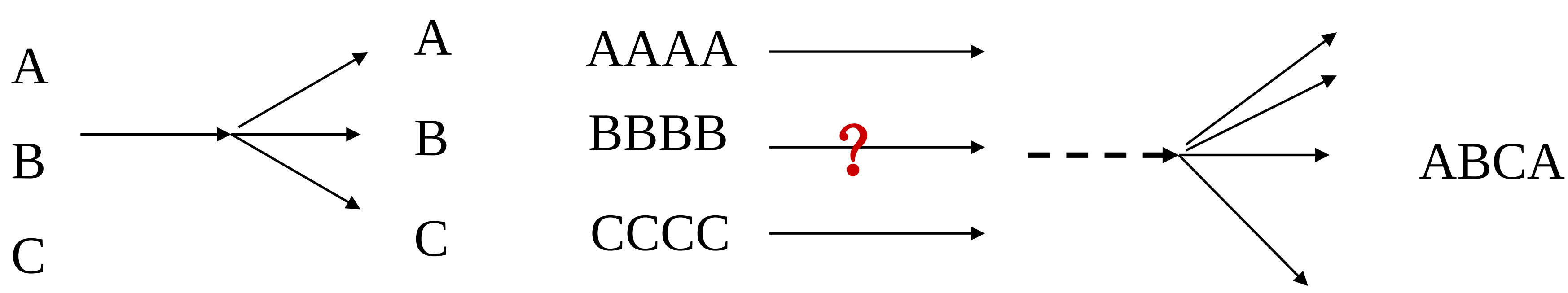
1.3.4 Bayes' Theorem

Example 1.3.12（习题40 pp.29）将A,B,C三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为α，而输出为其他一字母的概率均为(1-α)/2. 今将字母串AAAA,BBBB,CCCC之一输入到信道，输入的概率分别为p_1, p_2 ,p_3 ($p_1+p_2+p_3=1$)。

假设：信道传输各个字母的工作是独立的

已知：输出为ABCA

问：输入的是AAAA的概率是多少?



$$P(\mathrm{AAAA}|\mathrm{ABCA}) = \frac{P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{AAAA})P(\mathrm{AAAA})}{P(\mathrm{ABCA})}$$

$$P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{AAAA})P(\mathrm{AAAA}) = \alpha \frac{(1-\alpha)}{2} \bullet \frac{(1-\alpha)}{2} \alpha p_1$$

$$= p_1\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)\alpha / 4$$

$$P(\mathrm{ABCA}) = P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{AAAA})P(\mathrm{AAAA}) + P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{BBBB})P(\mathrm{BBBB}) + P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{CCCC})P(\mathrm{CCCC})$$

$$= p_1\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)\alpha/4 + p_2\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)/8 + p_3\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)/8$$

$$P(\mathrm{AAAA}|\mathrm{ABCA}) = 2p_1\alpha / \{2p_1\alpha + p_2(1-\alpha) + p_3(1-\alpha)\}$$

$$= 2p_1\alpha / \{(3\alpha - 1)p_1 + (1-\alpha)\}$$

1.4.1 古典概型

古典概率是一类比较简单、直观的随机试验。有以下两个明显特征:

- 试验所得的可能的结果个数有限，即基本事件个数有限

$$S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$$

- 各个试验结果在每次实验中发生的可能性是一样的

$$P(e_i)=1/n$$

事件A是基本事件的集合，包含了k个基本事件，则

$$P(A)=P(e_{i1})+P(e_{i2})+\ldots+P(e_{ik})$$
$$=k/n$$

Example 1.4.1 (pp.11 例3) 将n只球放入N（$N\geq n$）只盒子中，试求每个盒子至多有一只球（n个球落入不同的盒子）的概率。

解： S--每只球都可以放入N个盒子中的任意一个，共有N种方法，n只球所有放法共有 N^n 种。

A--每个盒子中至多有一个球。那么，第一只球有N种放法，第二只球有（N-1）种放法，…，

如此n只球总的放法为：

$$N(N-1)\cdots(N-(n-1))=A_N^n$$

（注意：没有区分球，所以S、A都没有考虑具体地放那个球）

$$P(A)=A_N^n \big/ N^n$$

[实际应用-生日问题] 假设每个人在一年中每一天出生的可能性是一样的，那么n个人生日各不相同（生在不同的日子）的概率为：

$$P=365(365-1)\ldots(365-n+1)/365^n$$

如此，n个人中至少有两个生日相同的概率为

$$P'=1-365(365-1)\ldots(365-n+1)/365^n$$

表：n个人中至少有两个人生日相同的概率

n	20	23	30	40	50	64	100
P'	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

[实际应用Example 1.4.2 (pp.14 例8)] 某接待站在某周曾接待过12次来访，已知所有这12次接待都是在周二、周四进行的。

问：由此是否可以推断接待时间是有规定的?

解：假设没有规定，则12次访问落到七天内的概率一致，共有7^{12}种可能，而12次访问落入周二、周四的可能事件为2^{12}，因此概率为

$$(2/7)^{12} = 0.000\,000\,3$$

这样的话如果没有规定，全部落入周二、周四的可能性微乎其微，而12次接待都是在周二、周四进行的事件确实发生了，所以由此可以推断出接待时间是有规定的。

Example 1.4.3 (pp.13 例7) 将15新生随机平均分配到3个班中，其中3名为优秀生。

问：[1] 每个班分配到一名优秀生的概率是多少?
[2] 3名优秀生分在同一个班的概率是多少?

解：总体样本空间S的样本数 $C_{15}^{5}C_{10}^{5}C_{5}^{5}$

[1] A—3名优秀生分配到三个班是3 × 2 × 1种可能

每个班的另外4名学生来自一般生。

共有 $C_{12}^{4}C_{8}^{4}C_{4}^{4}\times 3!$ 种可能，p=0.274

[2] B—3名优秀生同在一个班，共有3种可能；

而其余12名学生要按2-5-5随机分配。

共有 $3C_{12}^{2}C_{10}^{5}C_{5}^{5}$ 种可能，p=0.0659

Example 1.4.4 (pp.12 例4) N件产品，其中有D件次品，今从中任取n件，问其中恰有k（$k \le D$）件次品的概率是多少?

解： k件次品必然来自于D件次品，可能的情况为 C_D^k

其余n-k件产品则来自余下的N-D正品 C_{N-D}^{n-k}

N 件产品中取 n 件产品的可能 C_N^n

$$p = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

此称为“超几何分布”

推广应用

[推广1] 此可以进一步推广到产品的质量管理中： N件产品，其中有D件次品，从中随机抽取少量的n件样品，如果次品数少于k则接收。

$$C_D^0 C_{N-D}^n / C_N^n + C_D^1 C_{N-D}^{n-1} / C_N^n + C_D^2 C_{N-D}^{n-2} / C_N^n + \cdots + C_D^{k-1} C_{N-D}^{n-k+1} / C_N^n$$

[推广2] 上述超几何分布也可加以推广。假某N件产品中包含一、二、三级产品各为 $n_1, n_2, N-n_1-n_2$件，现从中抽查n件，那么包含 k_1 件一级产品，k_2 件二级产品，$n-k_1-k_2$ 件三级产品的概率为

$$C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} C_{N-n_1-n_2}^{n-k_1-k_2} / C_N^n$$

1.4.2 几何概型

问题出处：古典概型只考虑有限个等可能样本点。如果试验结果的个数为无限，但是依然是等可能性的，那么上述的古典概型就不可用。

如何计算概率?

解决途径：可以考虑采用测度（长度、面积、体积等）计算方法。由此形成了确定概率的另一方法——几何方法。

Example 1.4.5 甲、乙两人相约在周二下午6点~7点在某地见面，并约定先到者等20分钟，过时则可离去。设每人在6点到7点这段时间内各时刻到达该地是等可能的，且两人到达的时刻互不相关。试求甲、乙两人能会面的概率?

解：我们以0~60分钟为一个区间，便于描述此事。

两人到达约会地点的时间记为x, y，所有可能的事件集合为

$$G=\{(x, y) \mid 0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\}$$

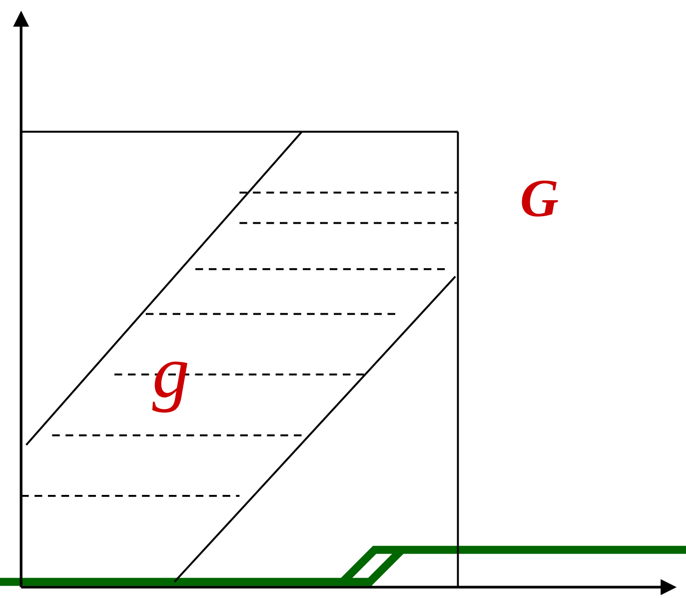
两个人达到时间相距不超过20分钟的集合为

$g=\{(x, y) \mid |x-y| \le 20, (x, y) \in G\}$

$P=S(g) / S(G)$

$S(G)=60\times 60$，$S(g)=2000$

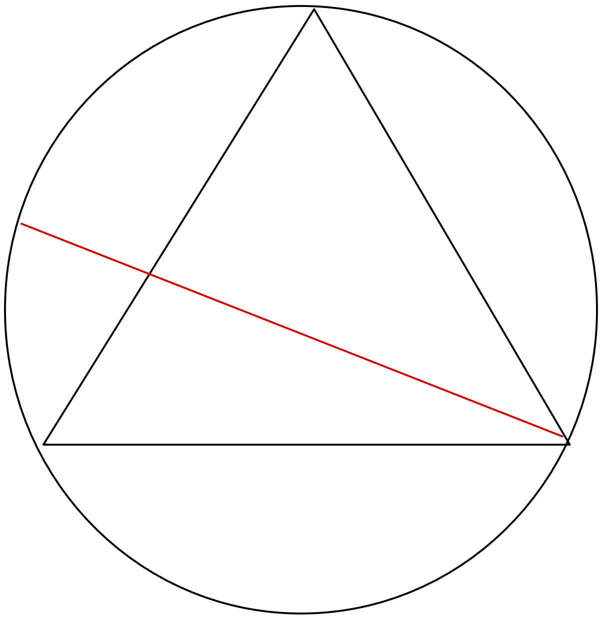
$P=0.556$



Example 1.4.6 在半径为1的圆内随机地取一条弦。

问：其长超过该圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}$ 的概率为多少？

解：任何弦交圆周于两点，不失一般性，先固定其中一点于圆周上，以此点为顶点作一内接等边三角形。

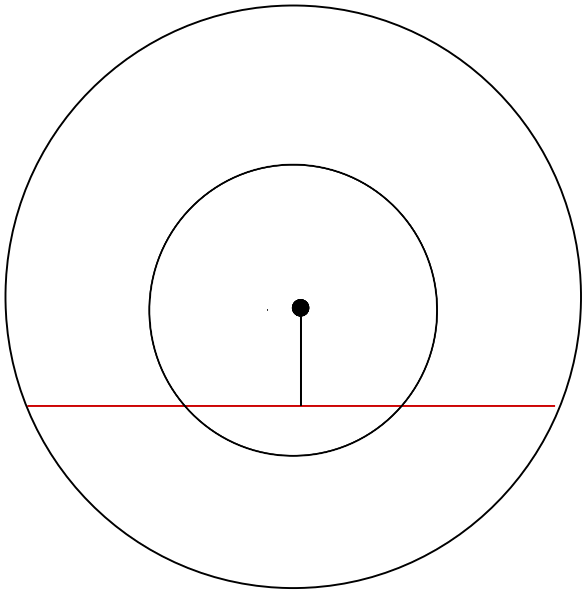


显然只有落入此三角形的弦，其长度才大于等边三角形边长。

而这样的弦的另一端跑过的弧的长度为整个圆周的1/3。

故此，所求概率为1/3。

另解：一条弦完全由其中点确定。可假定弦的中点在圆内均匀分布，则只有当弦中点在以半径为1/2的小圆内时，这条弦与圆心的的距离小于1/2，而其弦长才大于$\sqrt{3}$ 。因此所求概率为1/4。



同一问题，为什么出现两个解？到底哪个对？

两个都对，主要在于对“随机”的理解不一样。

它们事实上是两个不同的随机试验

1.4.3 二项概率模型

一类随机试验：在相同的情况下重复进行n次同样的试验

每次的可能结果为有限个

且各次试验的结果互不影响（n次试验相互独立的）

这种概率模型称做n重独立试验概型。

特别,当每次试验只有两种可能结果A和 $\overline{A}$，则$P(A)=p \quad (0<p<1)$

$$P(\overline{A})=1-p.$$

称为n重贝努里（Bernoulli）概型， 也称为n重贝努里试验。

[定理] 在贝努里概型中，$P(\overline{A})=1-p(0<p<1)$，则事件$A$在$n$次试验中恰好发生$k$次的概率为：

$$b(k,n,p)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (0\le k\le n)$$

Remark1 该公式正好与 $[p+(1-p)]^n$ 的二项展开式中第（k+1）项完全相同，故有时又称之为参数为n和p的二项概率公式。

Remark2 反过来，由n重Bernoulli 实验可能成功的次数为0,1,2 ,…,n，必有

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}=1$$

Remark3 一般而言，可以把任何事件二分，要么成功，要么失败（不成功的均为失败），如此试验可重复、独立进行，构成n重Bernoulli试验。

Example 1.4.7 某人进行射击，每次射击命中率为0.02，独立射击400次。

求：至少击中两次的概率。

解：A: 至少击中两次。

B_1: 一次不中

B_2: 射中一次

$$P(A) = 1 - P(B_1 \cup B_2)$$

$$= 1 - P(B_1) - P(B_2)$$

$$= 1 - (1-0.02)^{400} - 400 \times 0.02 \times (1-0.02)^{399}$$

$$= 0.9972$$

Example 1.17 反欺诈（Anti-Fraud）

招聘专业品酒师，随机让他区分两种酒。每次给他一杯酒，让他品尝说出是哪一种。连续重复10次（每次后稍加休息、漱口）。如果10次中有8次正确，则聘; 否则不聘。

问： 这种做法合适否?

分析： 判断这种标准合适与否，也就是判断一下什么样的人被录用的可能性大。

如一个人水平高，区辨能力达到$p=90\%$，那么应该可以聘用；而如果一个人连蒙带唬，区辨能力为$p=50\%$，那就该拒绝。是否如此呢?

Example 1.17 反欺诈（Anti-Fraud）

解：每次品酒要么正确，要么错误。

假设一个人每次正确判断可能为p，那么10次中有8次（包括以上）正确，其概率为：

$$b(8,10,p)+b(9,10,p)+b(10,10,p)$$

$$=p^8[45(1-p)^2+10p(1-p)+p^2]$$

如果$p=90\%$，则发生8次正确的概率为 $2.16p^8=0.929\ 809$

如果$p=80\%$，则发生8次正确的概率为 $4.04p^8=0.671\ 088$

如果$p=50\%$，则发生8次正确的概率为 $56.0p^8=0.054\ 684$

看来连蒙带唬的人8次正确的概率很小，只有约5.5%；而能力强的人（90%）8次正确的概率为约93%。

Example1.18 碰运气能否通过英语四级考试

问题：早期CET-4 包括听力、语法结构、阅读理解、综合填空、写作等。除写作占15分外，其余85道题为单项选择题，每道题附有A、B、C、D四个选项。

靠运气能通过CET-4考试吗?

分析：看看靠运气通过考试的概率

假定不考虑写作所占的15分，若按及格为60分，85道选择题必须答对51题以上。

Example 碰运气能否通过英语四级考试

每道题有4个选择，只有一个答案是对的

其选择可以视为Bernoulli试验，成功概率为1/4，失败概率为3/4；85道题的选择可以看为85重Bernoulli试验。

要及格，必须在85次中成功51次，其概率为：

$$
\begin{aligned}
p &= b(51,85,0.25)+b(52,85,0.25)+\cdots+b(85,85,0.25) \\
&= \sum_{k=51}^{85} C_{85}^{k} 0.25^{k}(1-0.25)^{85-k} \\
&\approx 8.74\times 10^{-12}
\end{aligned}
$$

此概率非常之小，在1000亿碰运气的考生中，只有0.874个可能成功！！！