场论与无穷级数习题

一、常微分方程

1. 设连续函数$f(x)$满足$f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$，求$f(x)$.

2. 设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求$f(t)$.

3. 设级数$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 的和函数$s(x)$，求
   (1) $s(x)$所满足的一阶微分方程；　　(2) $s(x)$的表达式。

4. 若二阶常系数线性齐次微分方程$y''+ay'+by=0$的通解为$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，则非齐次方程$y''+ay'+by=x$ 满足条件$y(0)=2,y'(0)=0$的特解$y=$

5. 设$f(x)$具有二阶连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$，且满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$，求$f(u)$.

6. 已知$y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$, $y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$, $y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程。

二、无穷级数

7. 设a为常数，判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$的敛散性。

8. 设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则　( )
   (A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛　　(B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散
   (C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛　　(D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散

9. 设$u_n\ne 0\ (n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$　　( )
   (A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 收敛性根据所给条件不能判定

10. 设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$
    (1) 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$的值；　　(2) 试证：对任意的常数$\lambda>0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

11. 设$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ n=1,2,\ldots$，证明
    (1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在；　　(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛。

12. 已知幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为3，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为

13. 求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$的和函数.

14. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间$(-1,1)$内的和函数。

15. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 之和。

16. 将$f(x)=\ln(1+x-2x^2)$展开为麦克林级数。

17. 将函数$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$展开为$x$幂级数，并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和。

18. 将函数$f(x)=1-x^2\ (0\leq x\leq\pi)$展开成余弦级数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

三、广义积分

19. 下列结论中正确的是　　( )

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$与$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$都收敛　　(B) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$与$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$都发散

(C) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$发散，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛　　(D) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$收敛，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$发散

20. 设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e},\\ \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geq\mathrm{e},\end{cases}$ 若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则　　( )

(A) $\alpha<-2$　　(B) $\alpha>2$　　(A) $-2<\alpha<0$　　(A) $0<\alpha<2$

21. $\int_0^2\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\mathrm{d}x$

22. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$

23. $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$

24. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$

25. 求位于曲线$y=\mathrm{e}^x$下方，该曲线过原点的切线的左方以及x轴上方之间的图形的面积。