Chpt.3 Multi-Dimensional Random Variables and Their Distributions

第三章 多维随机变量及其分布

3.1.1 多维随机变量的定义

(1)很多随机现象中涉及多个变量，试验结果要用多个随机变量来表示。

发射一枚炮弹，需要同时研究弹着点的几个坐标；

考察一个人的健康时，需要检测身高、体重、血压、血糖、...等多种因素，且这些因素本身还存在着关联.

(2)另外，当我们研究统计问题时也涉及到多个变量，比如，类似均值 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$，均方 $\dfrac{1}{n}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)$

3.1 多维随机变量

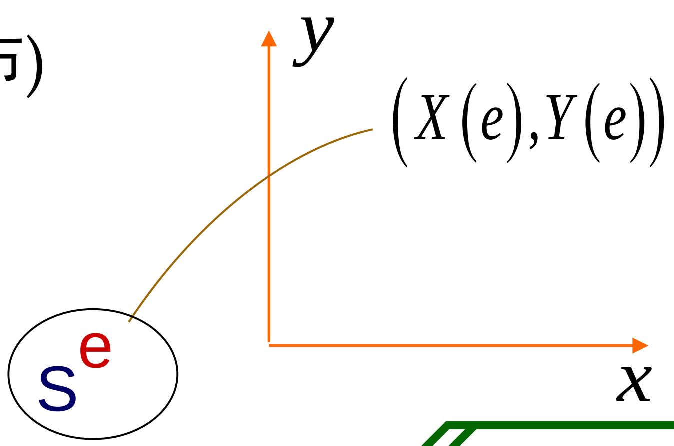
[定义] 若随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$定义在同一样本空间S上，就称这n个随机变量的整体$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 为<u>n维随机向量</u>或<u>n维随机变量</u>(n-dimensional random variable).

对n维随机向量的研究从两个方面着手：

- 研究整体特性；
- 研究个体之间、个体与整体之间的关联与相互关系。

  (遂有联合分布与边缘分布)

着重研究二维情形



3.1.2 多维随机变量的联合分布

多维随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$，对于任意n个实数 $x_1, x_2,\ldots, x_n$ 或实向量$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$，称n元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

为随机向量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的(联合)分布函数.

注意：记

$$P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

$$\stackrel{\Delta}{=} P\{(X_1\le x_1)\bigcap(X_2\le x_2)\bigcap\cdots\bigcap(X_n\le x_n)\}$$

Remark：注意到多维随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$是针对同一试验而言的，是在同一个样本空间S上定义的随机变量。

联合分布的性质

- $0 \le F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le 1$
- $F(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, \cdots x_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n$
- $F(\infty, \infty, \cdots, \infty) = 1$
- $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的不减函数，即对任意的两个向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$，只要 $x_i \le x_i' \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$，总有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le F(x_1', x_2', \cdots, x_n')$$

注意到联合分布的定义，以及

$$\{(X_1 \le x_1) \cap (X_2 \le x_2) \cap \cdots \cap (X_n \le x_n)\}$$

$$\subseteq \{(X_1 \le x_1') \cap (X_2 \le x_2') \cap \cdots \cap (X_n \le x_n')\}$$

$$P\{(X_1 \le x_1) \cap (X_2 \le x_2) \cap \cdots \cap (X_n \le x_n)\}$$

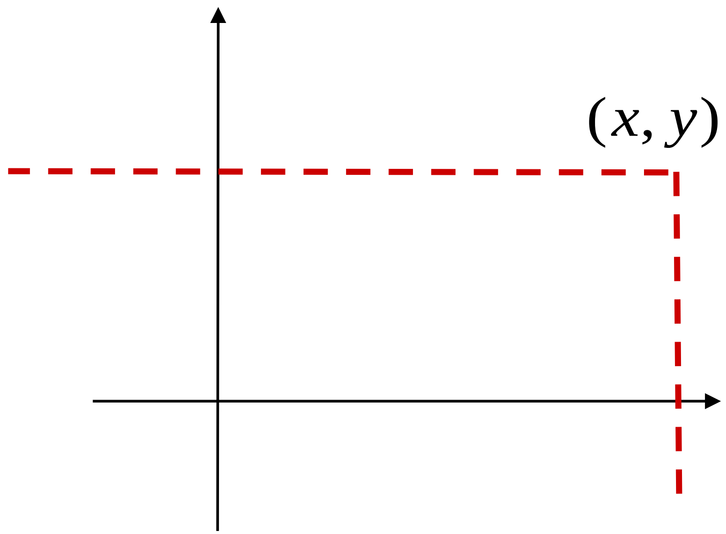
$$\le P\{(X_1 \le x_1') \cap (X_2 \le x_2') \cap \cdots \cap (X_n \le x_n')\}$$

即

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le F(x_1', x_2', \cdots, x_n')$$

3.1.2 多维随机变量的联合分布

对二维随机向量(X, Y)，分布函数 $F(x, y)=P\{X \le x, Y \le y\}$ ，其中$(x, y) \in \mathbf{R}$ 表示随机向量 (X, Y)落在 (x, y) 为顶点的位于该点左下方的无穷矩形内的概率.



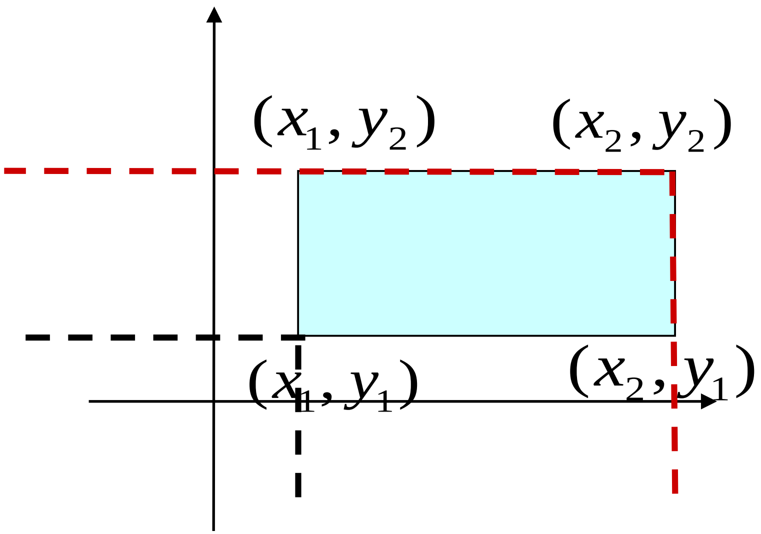
3.1.2 多维随机变量的联合分布

依照上述解释，(X, Y)落在$[x_1 < x \leq x_2,\ y_1 < y \leq y_2]$ 的概率为

$$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1)$$

$$+ F(x_1, y_1)$$



3.1.3 离散多维随机变量的联合分布

随机向量只取有限组或可列组值，就称为**离散型随机向量**.

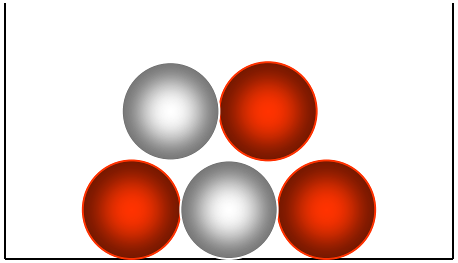
列出所有各组可能值及取这些值的概率，就可得其概率分布.

Example 口袋中有2白球3红球, 连取两次，每次任取一球. 设X为第一次得白球数，Y为第二次得白球数. 对

(1)有放回

(2)无放回

求：两种情况 (X,Y)的联合分布.



解 (1) X与Y可能取的值都是0(红球)与1（白球），各种情况搭配及相应概率如下（注意直观看待独立与否）：

{X=0, Y=0} 表示第一次取红球且第二次也取红球，因为有放回，两次取球相互独立的，其概率都是3/5，故

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0\} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

同理 $P(X=0, Y=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$

$$P(X=1, Y=0) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \qquad P(X=1, Y=1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$$

表1：有放回时的(X,Y)联合分布

X \ Y	0	1
0	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$
1	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$

(2) X与Y可能取的值与(1)相同，但因为无放回，两次结果是不独立的, 利用第一章乘积事件概率公式，得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$$

同理 $P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4} \qquad P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$$

表2：无放回时的(X,Y)联合分布

X \ Y	0	1
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$
1	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$

3.1.3 离散多维随机变量的联合分布

一般，离散型的二维联合分布列为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \qquad (i,j=1,2,\dots \qquad)$$

或写成表格的形式如下表

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_j	…
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…
…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…
…	…	…	…	…	…

他们必须满足

$$p_{ij} \geq 0$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \qquad (i, j=1,2,\ldots)$$

n维离散型随机向量的联合分布是

$$P\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

$$i_1, i_2, \cdots\cdots, i_n = 1,2,\cdots\cdots$$

Example: 从数1，2，3，4中任取一个数，记为X，再从1，…，X中任取一个数，记为Y，计算P (Y=2) 。

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

P(Y＝2)

3.1.4 N维连续型随机变量的分布函数

[Definition] 对n维随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 若存在n元可积的非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,对于任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(y_1,y_2,\cdots,y_n)dy_1dy_2\cdots dy_n$$

则 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是n维的连续随机变量，F 称为它的连续型分布，称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为(联合)密度函数.

3.1.4 N维连续型随机变量的分布函数

[1] 显然，密度函数满足如下条件：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2, \cdots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n = 1$$

[2] 对连续型随机向量，分布函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对每一变量都是连续的，且在密度函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的连续点，有偏导数

$$\frac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

[3] G是 R^n 中的任意一个区域，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 落入区域G内的概率为

$$P\{X \in G\} = \int_G \cdots \int f(y_1, y_2, \cdots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

Example 设二维随机向量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-2(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

1) 确定常数A；

2) 求分布函数

3) 计算 $P\{X<1, Y<2\}$；

4) 计算概率$P\{X+Y<1\}$

解 1) 由联合密度的性质，应有

$$1=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} Ae^{-2(x+y)}dxdy = A/4$$

故 A=4

2) 分布函数 $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y Ae^{-2(u+v)}dudv$，我们来分块计算它.

当$x\le 0$或$y\le 0$时，$f(x,y)=0$，故$F(x,y)=0$

当$x>0$且$y>0$时

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4e^{-2(u+v)}dudv+\iint\limits_{elsewhere} 0dudv$$

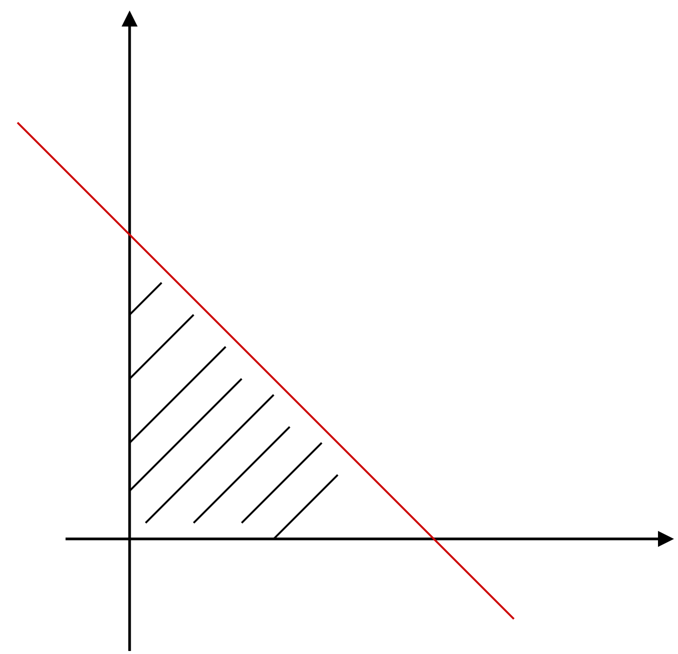
$$=(1-e^{-2x})(1-e^{-2y})$$

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-2y}) & x>0,y>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

3) $P\{X<1, Y<2\} = F(1,2) = (1-e^{-2})(1-e^{-4})$

4) $P\{X+Y<1\} = \iint\limits_{x+y<1} Ae^{-2(x+y)}dxdy$

$$= \iint\limits_{\substack{x+y<1 \\ x>0,\ y>0}} 4e^{-2(x+y)}dxdy$$



$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} 4e^{-2(x+y)}dy \right] dx$$

$$= 1-3e^{-2}$$

3.2 边际（边缘）分布

3.2.1 边缘分布的定义

n维随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，具有联合分布 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，每一个随机变量 X_i 又有其自身的分布函数 $F_{X_i}(x_i)$，称之为边缘分布函数。

<u>边缘分布与联合分布的关系</u>

$$F_{X_i}(x_i)=P\{X_i\le x_i\}$$

$$=P\{\{X_1\le\infty\}\bigcap\{X_2\le\infty\}\bigcap\cdots\bigcap\{X_{i-1}\le\infty\}\bigcap\{X_i\le x_i\}\bigcap\{X_{i+1}\le\infty\}\cdots\{X_n\le\infty\}\}$$

$$=P\{X_1\le\infty,X_2\le\infty,\cdots,X_{i-1}\le\infty,X_i\le x_i,X_{i+1}\le\infty,\cdots X_n\le\infty\}$$

$$=F(\infty,\cdots,\infty,x_i,\infty,\cdots,\infty)$$

3.2.2 离散随机变量的边缘分布

以二维随机变量(X,Y)为例

$$F_X(x) = F(x,\infty) = \sum_{\substack{x_i \le x \\ y_j < \infty}} p_{ij} = \sum_{x_i \le x} \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \right)$$

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \overset{\Delta}{=} p_{i\bullet}$$ --称为(X,Y)关于X的边缘分布

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \overset{\Delta}{=} p_{\bullet j}$$ --称为(X,Y)关于Y的边缘分布

Remark 1：这里$p_{i\bullet}$表示对第二个足标j求和，$p_{\bullet j}$表示对第一个足标 i求和.

Remark 2：上两式分别表示X与Y的分布列，它们恰好为二维随机变量分布表按行相加与按列相加的结果，把它们分别写在表1中两表的右边和下边，称为边际分布(marginal distribution).

3.2.2 离散随机变量的边缘分布

Y / X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P(Y=1)=\frac{25}{48}\quad P(Y=2)=\frac{13}{48}\quad P(Y=3)=\frac{7}{48}\quad P(Y=4)=\frac{3}{48}$$

Example 求例1的边际分布.

$$P\{X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$$ 类似得其它各概率，如下面两表.

Y \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

Y \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

Remark (1)与(2)的联合分布不同，但边际分布相同，这说明如果边际分布给定，联合分布却不能惟一确定，还要考虑分量间的相互关系.

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

以二维连续型随机变量(X,Y)为例，设其密度函数为f(x,y)，分布函数为F(x,y)，则X的边际分布函数

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy \quad = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right]dx$$

对x求导得， $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

同理，Y的边际分布函数为 $$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right]dy$$

对y求导得， $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

根据连续型随机变量的定义，由式可见，X是连续型随机变量，它的密度函数就是$f_X(x)$. 同理Y是连续型随机变量，其密度函数为$f_Y(y)$。$f_X(x)$和$f_Y(y)$称为(X, Y) (或$f(x, y)$)的边际密度.

由此，也可以看出边际密度的两种求法：

[1] 由联合分布函数$F(x, y)$

计算$F(x,+\infty)$得$F_X(x)$，计算$F(+\infty, y)$得$F_Y(y)$，而后微分得到

$$f_X(x) = F_X'(x), \quad f_Y(y) = F_Y'(y)$$

[2] 由联合分布密度$f(x, y)$

对y积分得到

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

对x积分得到

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

Example 设二维随机向量(X,Y)的密度函数如下，求边际密度

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

[解] 由前知道

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-2y}) & x>0,y>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

可先求得边际分布函数，再计算边际密度。X的边际分布和密度函数为

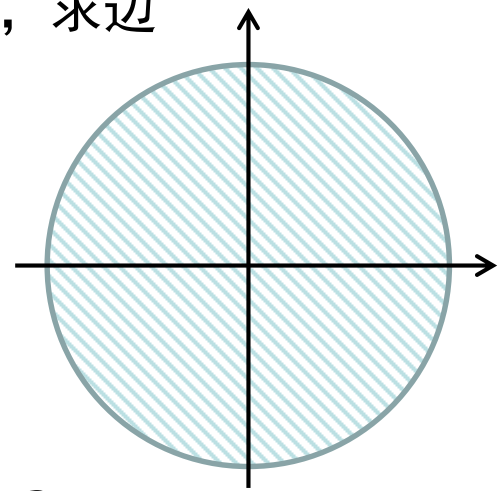
$$F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

同理Y的边际分布函数和边际密度函数分别为

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

Example (X,Y)在圆形区域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布，求边际密度.



解 联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1/\pi & x^2+y^2\le 1\\ 0 & elsewhere\end{cases}$

因为 $|x|>1$时，$f(x,y)=0$, 此时 $f_X(x)=0$;

$|x|\le 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\pi}dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & |y|\le 1\\ 0 & |y|>1\end{cases}$$

这里，虽然(X,Y)的联合分布是均匀分布，但边际分布却不是均匀分布.

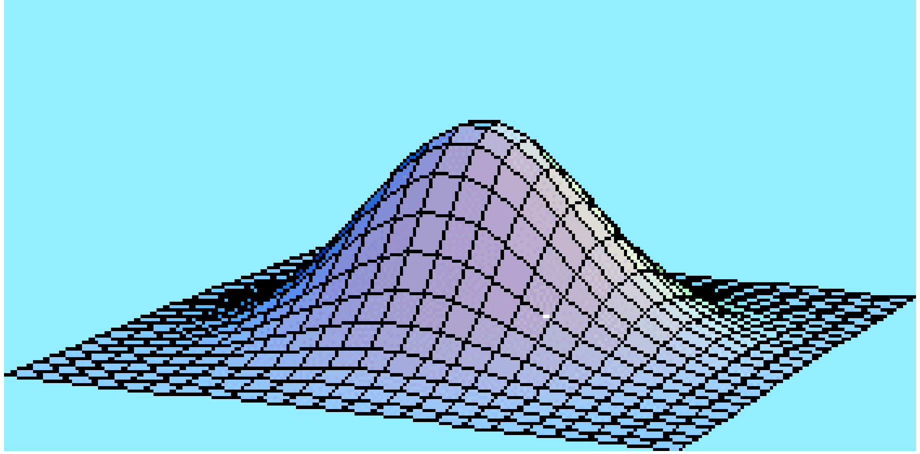
Example 设计二维随机变量（X,Y）的分布概率密度是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

称(X,Y)为服从参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二元正态分布，记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 。

求其边缘概率密度。



[解]：在上式的指数上对y配方，

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

$$=\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$=\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$=(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] dy$$

$$\Downarrow \qquad t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right), \text{则} dy=\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

$$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

上述结论是说，二元正态分布的边际分布仍是正态分布，并且与ρ无关.

但反过来不正确，即若(X,Y)的边际分布都是正态分布，其联合分布却未必是二元正态分布.

下面举一反例。

Example (X,Y)的联合密度为 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)$

$-\infty<x,y<+\infty$ 求边际分布.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\sin x\sin ydy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\sin ydy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$$

因此X,Y都服从标准正态分布N(0,1)，但联合分布不是正态的.

边缘分布不能反映联合分布，也就是说边缘分布少了点什么。那么，什么可以与边缘分布共同来描述联合分布呢?

（以下可以仅仅从事件的角度而非随机变量的角度看）

$$F(x_1,x_2)=P\{\{X_1\le x_1\}\bigcap\{X_2\le x_2\}\}$$

$$=P\{X_2\le x_2\mid X_1\le x_1\}P\{X_1\le x_1\}$$

$$=P\{X_2\le x_2\mid X_1\le x_1\}F_{X_1}(x_1)$$

当 $\{X_1\le x_1\}$独立于$\{X_2\le x_2\}$

$$F(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

此时，边缘分布函数完全界定了联合分布函数。

[定义] 随机变量 X_1, X_2， $F(x, y), F_X(x), F_Y(y)$ 分别是分布函数和边缘分布函数，如果对于任意的 (x_1, x_2) 满足

$$F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$$

则称随机变量是 X_1, X_2 相互独立的。

当 (X_1, X_2) 是连续型随机向量时，X_1, X_2 联合概率密度为 $f(x_1, x_2)$ ，边缘概率密度分别是 $f_{X_1}(x_1), f_{X_2}(x_2)$，则 X_1, X_2 独立的条件等价于

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$

Proof： $F(x_1, x_1) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$

$$\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(u)du \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_2}(v)dv = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1}(u) f_{X_2}(v)dudv$$

由 $x_{1,} x_2$ 的任意性知道，必须有 $f(u,v) = f_{X_1}(u) f_{X_2}(v)$

例如上例中的二维正态随机分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$ 的边缘分布概率密度是 $f_X(x), f_Y(y)$，如果要使得 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，必有 $\rho=0$ 。即二维正态随机变量 (X,Y) 中 X,Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$ 。

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

Example (pp.74) 一负责人到办公室的时间是8~12点，服从均匀分布X~U(8,12), 其秘书到达办公室的时间是7~9点，服从均匀分布Y~U(7,9)，二人到达的时间X,Y独立。

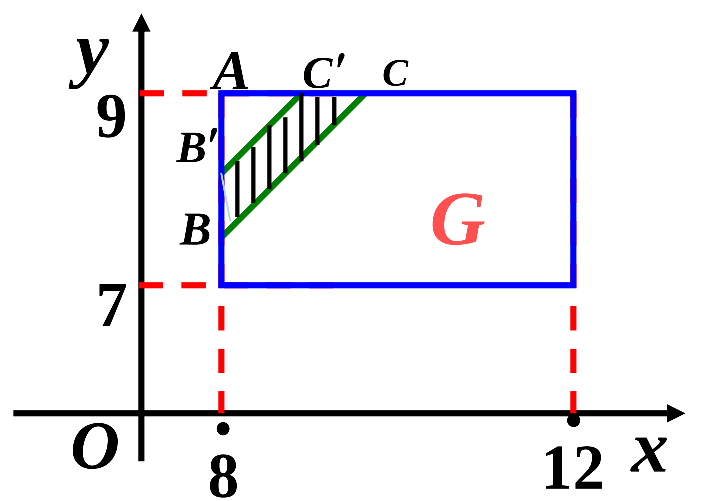
求：他们达到办公室时间相差不超过5分钟的概率。

$$G=\{(x,y)\,|\,8<x<12, 7<y<9\}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1/4 & 8<x<12\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1/2 & 7<x<9\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

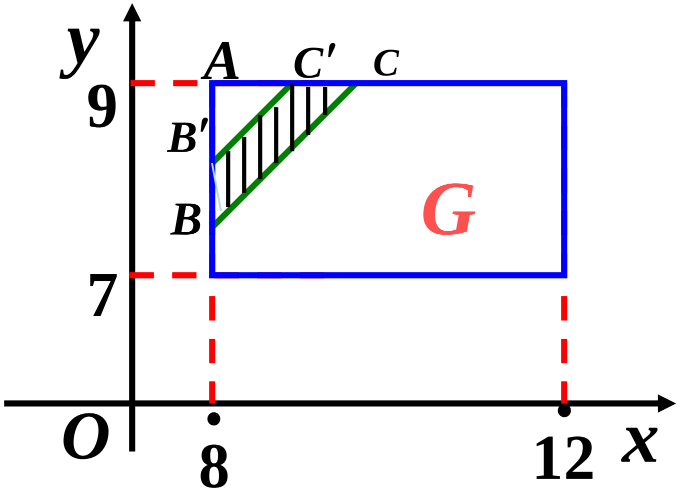
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$
$$=\begin{cases}1/8 & (x,y)\in G\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$



$$P\{|X-Y|<\frac{1}{12}\}=\iint\limits_{\substack{|x-y|<\frac{1}{12}\\(x,y)\in G}} f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{8}\{|x-y|\le\frac{1}{12}\text{的面积},(x,y)\in G\}$$

$$=1/48$$



3.3 相互独立的随机变量

关于多维随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 其联合分布$F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$，边缘分布为 $F_{X_i}(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$ ，如果对所有的 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 成立

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是**相互独立的**。

假设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 有联合分布$F_X(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_m)$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 有联合分布$F_Y(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)$

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ ， $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 的联合分布为$F(x_1,\ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$

如果 $F(x_1,\ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \equiv F_X(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_m)\ F_Y(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)$

则称 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 与$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是**独立的**。

3.3 相互独立的随机变量

[定理] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立，则：

（1） $X_i \, (i=1,2,\cdots,m)$ 与 $Y_j \, (j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立；

（2）如果 h, g 是连续函数，则 $H=h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 与 $G=g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 独立。

$$F_{ij}(x_i, y_j) = F(\infty, \cdots, \infty, x_i, \infty, \cdots, \infty, \infty, \cdots \infty, y_j, \infty, \cdots \infty)$$

$$= F_x(\infty, \cdots, \infty, x_i, \infty, \cdots, \infty) F_y(\infty, \cdots \infty, y_j, \infty, \cdots \infty)$$

$$= F_{x_i}(x_i) F_{y_j}(y_j)$$

$$F(h,g) = P\{H \le h, G \le g\}$$

$$= P\{h(X_1, X_2, \cdots, X_m) \le h, g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \le g\}$$

$$= P\{h(X_1, X_2, \cdots, X_m) \le h\} P\{g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \le g\}$$

$$= F_H(h) F_G(g)$$

3.4 条件分布(Conditional Distribution)

当多个随机变量不满足独立性，他们之间存在着关联性，一变量的存在影响到另一个变量的存在。可类似条件概率定义条件分布。

3.4.1 离散随机变量的条件分布

设二维离散随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\ldots$$

设

$$p_{i\bullet}>0, \qquad p_{\bullet j}>0$$

考虑在事件 $\{Y=y_j\}$ 发生的条件下$\{X=x_i\}$ 发生的概率，即事件 $\{X=x_i|Y=y_j\}$ 的概率。

3.4.1 离散随机变量的条件分布

$$P\left(X=x_i \mid Y=y_j\right)=\frac{P\left(X=x_i, Y=y_j\right)}{P\left(Y=y_j\right)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \qquad (i=1,2,\cdots)$$

$$P\left(Y=y_j \mid X=x_i\right)=\frac{P\left(X=x_i, Y=y_j\right)}{P\left(X=x_i\right)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \qquad (j=1,2,\cdots)$$

容易知道上述满足：

$$P(X=x_i \mid Y=y_j) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i \mid Y=y_j)=1$$

3.4.1 离散随机变量的条件分布

[定义] 对于固定的j，$P(Y=y_j)>0$，则称

$$P\left(X=x_i \mid Y=y_j\right)=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \qquad (i=1,2,\cdots)$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量 X 的条件分布律。

$P\left(X=x_i \mid Y=y_j\right)=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$ 与前面Chpt.1中的条件概率是一致的;

把所有的这样的条件概率写出就得到了条件分布律.

Example (pp.69，例2) 一射击手单发击中目标的概率为p (p>0), 射击到击中两次目标为止，设 X 为首次射中目标所进行的射击次数，Y 为总的射击次数，求（X,Y）的联合分布与条件分布。

解： $$P(X=m,\ Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$$

$$n=2,3,\cdots;\quad m=1,2,\cdots,n-1$$

$$P(X=m)=\sum_{n>m}P(X=m,Y=n)$$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-p)^{n-2}$$

$$=p^2(1-p)^{m-1}\frac{1}{1-(1-p)}$$

$$=p(1-p)^{m-1}$$

注意：

我们事实上可以很简单地计算得到P{X＝m}

$$P(Y=n)=\sum_{m<n}P(X=m,Y=n)$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2} \qquad (n\geq 2)$$

$$P(X=m|Y=n)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(Y=n)}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$$

$$P(Y=n|X=m)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(X=m)}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}=p(1-p)^{n-m-1}$$

以上二式子都可以进行直接的解释：

- 第一式 $P(X=m|Y=n)=\dfrac{1}{n-1}$

  在知道第n次为射中的话，前n-1次里射中一次，第m次射中的概率为 1/(n-1)；

- 第二式 $P(Y=n\,|\,X=m)=p(1-p)^{n-m-1}$

  在第m次射击时为第一次中，随后的第n次射击才射中的概率为 $p(1-p)^{n-m-1}$ (m+1,m+2, …,n-1为不中，n为中)

3.4 条件分布(Conditional Distribution)

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

在连续型的情况，因为对任何y, $P(Y=y)=0$，故只能借助于密度函数定义条件密度。$Y=y$时X 的条件分布函数, 可采取极限方式定义：

$$P(X \le x \mid Y = y) = \lim_{\varepsilon \to 0+} P\left(X \le x \mid y-\varepsilon \le Y \le y+\varepsilon\right)$$

记为 $F_{X|Y}(x \mid y)$

假设（X,Y）的联合分布函数为$F(x,y)$，概率密度为$f(x,y)$，那么

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \lim_{\varepsilon \to 0+} P\left(X \le x \mid y-\varepsilon \le Y \le y+\varepsilon\right)$$

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

$$F_{x|y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to 0+}P\left(X\le x\,|\,y-\varepsilon\le Y\le y+\varepsilon\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{P(X\le x, y-\varepsilon\le Y\le y+\varepsilon)}{P(y-\varepsilon\le Y\le y+\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\dfrac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{2\varepsilon}}{\dfrac{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}{2\varepsilon}}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{dF_Y(y)}{dy}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dx}{f_Y(y)}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Example 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求条件密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

解 $F_X(x)$ 为正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\dfrac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]+\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

$$\sigma=\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2$$

$$\mu=\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

前面求得条件密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

它表明:

已知X= x条件下，二维正态分布的对于Y的条件分布是正态分布

$$N\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\quad \left(\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2\right)^2\right)$$

其中第一参数 $\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)$是$x$的线性函数，第二参数与$x$无关.

此结论在一些统计问题中很重要.

条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}\,y=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}\,y$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下

3.5.1 基本概念

n维随机变量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

定义随机变量 $Y_i=g_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)(i=1,2,\cdots m)$。

记随机向量 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 的分布函数$F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)$

$$C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le y_i,i=1,2,\cdots m\}$$

则

$$\begin{aligned}
&F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)\\
&=P\left(Y_1\le y_1,Y_2\le y_2,\cdots,Y_m\le y_m\right)\\
&=P\left(g_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le y_1,\cdots,g_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le y_m\right)\\
&=P\left((X_1,\cdots,X_n)\in C\right)
\end{aligned}$$

如果X有联合概率密度$f_X(x_1,\cdots,x_n)$，则

$$F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)=\int\cdots\int_C f_X(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

这就归结为一个求解n重积分的问题。

下面就一些具体的函数形式求解。

[一]　Z＝X＋Y

[二]　Z＝X/Y

[三]　$Z=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

3.5.2 几个具体的随机变量的函数

[一]　Z=X+Y

设（X,Y）的联合分布概率密度为 $f(x, y)$，Z的分布函数为$F_z(z)$,

概率密度为$f_z(z)$

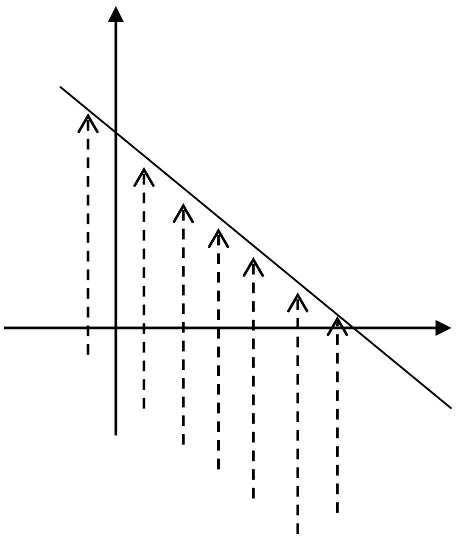
$$F_z(z) = P(Z \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy$$

$$t = y + x$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x)dx \right] dt$$



[一] Z=X+Y的分布函数

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx \;=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

当(X,Y)相互独立时， $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

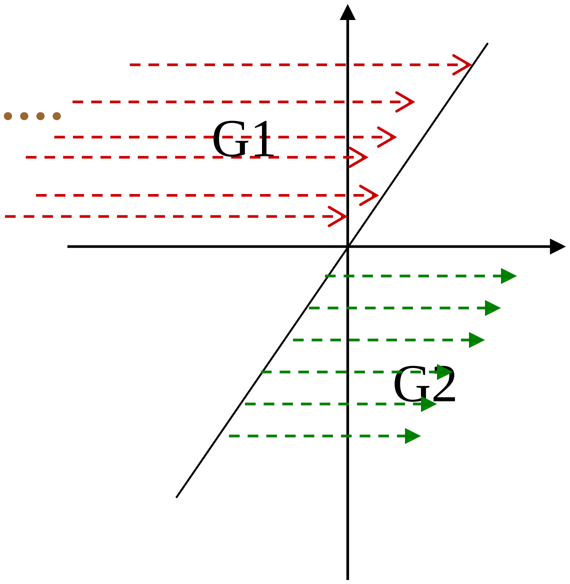
$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

这两个公式称为卷积公式(convolution)

$Z=X+Y$	$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$
$Z=X-Y$	$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y,y)dy$

[二] Z=X/Y



$$F_z(z) = P\left(\frac{X}{Y} \le z\right)$$

$$= \iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$\Downarrow \quad \boxed{x = yu}$$

[二] Z=X/Y

$$\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$x = yu$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} yf(yu,y)dy + \int_{z}^{-\infty} du \int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)dy$$

第二部分y＜0

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} yf(yu,y)dy - \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} |y| f(yu,y)dy + \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} |y| f(yu,y)dy$$

注意：密度函数不为负

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yu,y)dy \qquad f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz,y)dy$$

[三] 次序量的分布（极值分布）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，联合分布函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$.

把 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 每取一组值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都按大小次序排列，所得随机变量 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$ 称为次序统计量 (order statistic), 它们满足

$$X_1^* \le X_2^* \le \cdots \le X_n^*$$

因此

$$X_1^* = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

$$X_n^* = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

$Z = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$F_z(z) = P\left(\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le z\right)$$

$$= P\left(X_1 \le z, X_2 \le z, \cdots, X_n \le z\right)$$

$$= F(z, z, \cdots, z)$$

如 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，则有

$$F_Z(z) = F_{X_1}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，分布函数为 $F_X(x)$

$$F_Z(z) = \left[F_X(z)\right]^n$$

$Z = \min(X_1, \cdots, X_n)$

$$F_Z(z) = P\left(\min(X_1, \cdots, X_n) \le z\right)$$
$$= 1 - P\left(\min(X_1, \cdots, X_n) \ge z\right)$$
$$= 1 - P\left(X_1 \ge z, \cdots, X_n \ge z\right)$$

如果 $X_1, \cdots, X_n$ 独立，则有

$$F_Z(z) = 1 - P\left(X_1 \ge z\right)P\left(X_2 \ge z\right)\cdots P\left(X_n \ge z\right)$$
$$= 1 - [1 - P\left(X_1 \le z\right)]\cdots[1 - P\left(X_n \le z\right)]$$
$$= 1 - [1 - F_{X_1}(z)]\cdots[1 - F_{X_n}(z)]$$

对于多个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 如有独立同分布$F_X(x)$ ，则

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n$$

Example X,Y独立同分布，都服从N (0,1)，求 Z＝X+Y 的分布密度

解: 用卷积公式， 对任意 $z\in\mathbf{R}$

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\cdot f_y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2+2x^2-2xz}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2/2+2\left(x-z/2\right)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-z/2\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$t=x-\frac{z}{2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}\sqrt{\pi}\quad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}$$

这说明 $\mathbf{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\sim N(0,2)$.

以后会用更简单的方法证明：若$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$相互独立，$X_1\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$
$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 则 $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.本例是其特殊情况. 与本节的例对照，可知正态分布对两个参数都有再生性.

Example (pp.100, 例4)

设系统 L 由两个相互独立的子系统L_1，L_2链接而成，连接的方式分别为（1）串联；（2）并联；（3）备用（当系统之一损坏时，另一个开始工作）。设L_1， L_2的寿命分别为X,Y，已知他们的概率密度分别服从指数分布

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

其中α>0，β>0。

求: 三种情况下，系统寿命L的概率分布。

解:

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases} \qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

[1] 串联情况

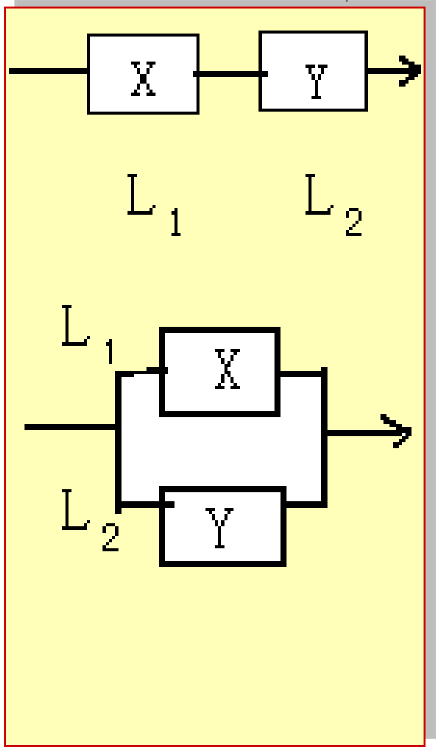
$$Z = \min(X, Y)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_x(z)][1 - F_y(z)]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

仍然服从指数分布。



[2] 并联情况

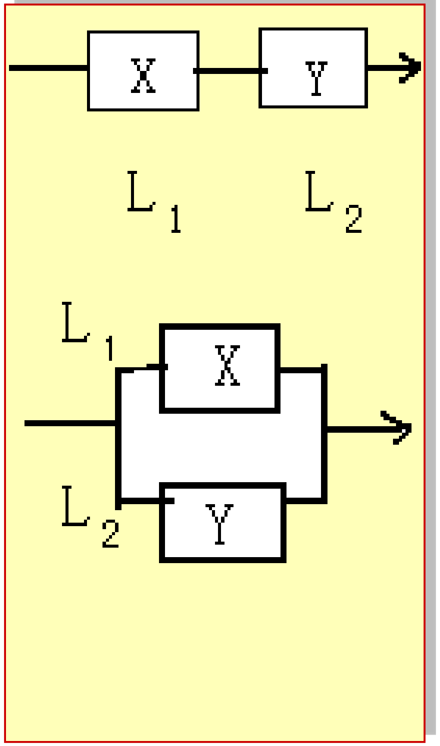
$$Z = \max(X, Y)$$

$$F_{\max}(z) = P(Z \le z) = P(\max(X, Y) \le z)$$

$$= P(X \le z, Y \le z)$$

$$= F_X(z) F_Y(z)$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}) & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$



$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta) z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

[3] 备用情况 $Z = X + Y$

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$= \int_0^z f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy$$

$$= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right]$$

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right] & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

1. Γ分布

对于(α>0, β>0)，如果随机变量X的概率密度满足下式，则称X服从参数α,β的伽玛分布，记作X~Γ(α, β)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du$$

[定理]（Γ分布的可加性）Γ 分布 Γ(α, β) 对第一个参数具有可加性：

若X_1, X_2相互独立，$X_1\sim\Gamma(\alpha_1,\beta)$，$X_2\sim\Gamma(\alpha_2,\beta)$, 则

$X_1+X_2\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$

证 由卷积公式求Z=X+Y 的密度：当$z<0$时, $f_z(z)=0$； 当 $z>0$ 时,

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)dx$$

$$=\int_0^z \frac{1}{\beta^{\alpha_1}\Gamma(a_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta} \quad \frac{1}{\beta^{\alpha_2}\Gamma(a_2)}(z-x)^{\alpha_2-1} e^{-(z-x)/\beta} \quad dx$$

$$=\frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}dx$$

$$\Big\Downarrow \quad \boxed{x=zt}$$

$$=\frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^1 z^{\alpha_1-1}t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}z^{\alpha_2-1}zdt$$

$$=\frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$$

$$\frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$$

记成为

$$\equiv\equiv\equiv Az^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}$$

其中 $A=\dfrac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$

现在求***A***，或者证明 $A=\dfrac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$

注意到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_z(z)dz=A\int_{-\infty}^{+\infty}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}dz$$

$$1 = A\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(z/\beta\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta} d\left(z/\beta\right)$$

$$\Big\downarrow \; u = z/\beta$$

$$= A\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-u} du$$

$$= A\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$A = \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$f_z(z) = \frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1+a_2)}$$

所以$X_1+X_2 \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$

Remark 1：此处，我们事实上应该说X_1+X_2还是连续随机变量，而后才能利用 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_z(z)dz = A\int_{-\infty}^{+\infty} z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}dz$ 去推导A。

Remark 2：我们说 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ 是密度函数，需要证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

几种特殊情况

[1] 当 α=1时，$\Gamma(1,\beta)$为指数分布.

此时 $$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} u^{1-1}e^{-u}du=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}=\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

[2] 另一特殊情况是 $\Gamma\left(\dfrac{n}{2},2\right)$

称 $\Gamma\left(\dfrac{n}{2},2\right)$ 为参数为n的χ^2分布，记为X~$\chi^2(n)$

2. χ^2分布

称 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ 为$\chi^2(n)$分布，其中称n为它的自由度(DOF, degree of freedom). 它的密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

[定理] χ^2分布具有可加性，也就是说，设$X_1\sim\chi^2(n_1)$, $X_2\sim\chi^2(n_2)$，则$X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$;

χ^2分布是特殊的 Γ 分布，第二个参数相同（都为2），由Γ分布对第一参数的可加性即得χ^2分布的可加性.

[定理] 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，都服从$N(0,1)$，则

$$Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

证 记 $Y_i = X_i^2 (i = 1,2,\cdots,n)$，由 $\{X_i\}$ 相互独立，可知 $\{Y_i\}$ 相互独立. 直接算得Y_i 的密度，

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du \overset{t=\sqrt{2u}}{=\!=\!=\!=\!=} \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\pi}$$

$$f_{Y_i}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

故 $Y_i \sim \Gamma(\frac{1}{2},\ 2) \sim \chi^2(1)$

再由$\chi^2(1)$分布的可加性质，知道 $X_1^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi^2(n)$

上述定理显示了χ^2分布的本质属性，χ^2分布中的自由度 n 即是 $X_1^2+\cdots+X_n^2$ 中独立正态变量X_i的个数.