概率论与数理统计

第八章　假设检验

练习：

1、某织物强力指标X的均值 μ_0=21公斤. 改进工艺后生产一批织物，今从中取30件，测得$\overline{X}$ =21.55公斤. 假设强力指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 且已知σ =1.2公斤，问在显著性水平α =0.01 下，新生产织物比过去的织物强力是否有提高?

解:提出假设: $H_0: \mu \le 21 \Leftrightarrow H_1: \mu > 21$

取统计量 $Z = \dfrac{\bar{X} - 21}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

拒绝域为： $Z > z_{0.01}$ =2.33

代入 $\boldsymbol{\sigma}$ =1.2, $\boldsymbol{n}$=30，并由样本值计算得统计量 $\boldsymbol{Z}$ 的实测值

$$Z = \frac{21.55 - 21}{1.2/\sqrt{30}} = 2.51 > 2.33$$

落入拒绝域

故拒绝原假设$\boldsymbol{H_0}$，即新生产织物比过去的织物的强力有提高。

2、设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu,100)$的一个样本，要检验 $H_0: \mu = 0\ (H_1: \mu \neq 0)$，在下列两种情况下，分别确定常数 d，使得以W_1为拒绝域的检验犯第一类错误的概率为0.05.

(1) $n=1, W_1 = \{x_1 \mid |x_1| > d\}$;

(2) $n=25, W_1 = \{(x_1, \cdots, x_{25}) \mid |\overline{x}| > d\}$，其中 $\overline{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i$.

解 (1) $n=1$时，若 H_0 成立，则 $\frac{X_1}{10} \sim N(0,1)$,

$$P(X_1 \in W_1) = P(|X_1| > d) = P\left(\left|\frac{X_1}{10}\right| > \frac{d}{10}\right) = \Phi\left(-\frac{d}{10}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{10}\right)\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{d}{10}\right)\right) = 0.05,$$

能否理解？

$$\Phi\left(\frac{d}{10}\right) = 0.975,\quad \frac{d}{10} = 1.96,\ d = 19.6;$$

(2) $n=25$时, 若H_0成立, 则 $\sqrt{25}\,\dfrac{\bar{X}}{10}\sim N(0,1)$,

$$P\left(\left(X_1,\cdots X_{25}\right)\in W_1\right)=P\left(\left|\bar{X}\right|>d\right)$$

$$=P\left(\left|\frac{\bar{X}}{2}\right|>\frac{d}{2}\right)=\Phi\left(-\frac{d}{2}\right)+\left(1-\Phi\left(\frac{d}{2}\right)\right)$$

$$=2\left(1-\Phi\left(\frac{d}{2}\right)\right)=0.05,$$

$$\Phi\left(\frac{d}{2}\right)=0.975,\quad \frac{d}{2}=1.96,\ d=3.92.$$

3、 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu, 9)$的一个样本，其中μ为未知参数,检验 $H_0: \mu = \mu_0$ $(H_1: \mu \neq \mu_0)$, 拒绝域

$$W_1 = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid |\bar{x} - \mu_0| \geq C\},$$

确定常数C, 使显著性水平为0.05;

解 (1) 若H_0成立, 则 $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{3} \sim N(0,1)$,

$$P((X_1, \cdots X_n) \in W_1) = P(|\bar{X} - \mu_0| \geq C)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - \mu_0|}{3} \geq \frac{\sqrt{n}C}{3}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}C}{3}\right)\right) = 0.05,$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}C}{3}\right) = 0.975, \ \frac{\sqrt{n}C}{3} = 1.96, \ C = \frac{5.88}{\sqrt{n}};$$

§2 正态总体均值的假设检验

- 单个正态总体均值的检验
- 两个正态总体均值差的检验
- 基于成对数据的检验（t 检验）

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验

1. σ^2 已知，关于 μ 的检验（***Z* 检验**）

在上一小节中已讨论过正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$, 当 σ^2 已知时关于 $\mu=\mu_0$ 的检验问题.在这些检验问题中，我们都是利用 H_0 在为真时服从 $N(0,1)$ 分布的统计量 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域。这种检验法常称为 *Z* 检验法。

左边假设拒绝域的推导：

形如 $H_0: \mu \ge \mu_0$ ，$H_1: \mu < \mu_0$ 的假设检验，称为左边检验.

由 $P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\} = P_{\mu \in H_0}\left\{\bar{X} \le k\right\}$

$$= P_{\mu \ge \mu_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} \le P_{\mu \ge \mu_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

要控制 $P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\} \le \alpha$,

只需令 $P_{\mu \ge \mu_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \alpha.$

因为 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 所以 $\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -z_\alpha$,

故左边检验的拒绝域为 $\bar{x} \le \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$, 即 $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -z_\alpha.$

Z 检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ $\sim N(0,1)$	$\lvert Z\rvert\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$Z\leq -z_{\alpha}$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$Z\geq z_{\alpha}$

2. σ^2未知，关于μ 的检验（t 检验）

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2未知，我们来求检验问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

的拒绝域（显著性水平为α）。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自正态总体**X** 的样本，

由于σ^2 未知，现在不能利用 $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域了。

注意到 S^2 是 σ^2 的无偏估计，我们用 S 来代替 σ，采用 $t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 作为检验统计量。当 $|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|$ 过分大时就拒绝 H_0, 拒绝域的

形式为 $$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\ge k$$

已知当 H_0 为真时，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，故由

$$P\{拒绝 H_0|H_0为真\}=P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\ge k\right\}=\alpha,$$

得 $k = t_{\alpha/2}(n-1)$， 即拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

对于正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ ，当σ^2未知时，关于μ的单边检验得拒绝域下表中已给出。

上述利用 t 统计量得出得检验法称为 t 检验法。在实际中，正态总体的方差常为未知，所以我们常用 t 检验法来检验关于正态总体均值的检验问题。

t 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leq -t_{\alpha}(n-1)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geq t_{\alpha}(n-1)$

例1 某种电子元件的寿命 X（以小时计）服从正态分布，μ, σ^2均未知。现测得16只元件的寿命如下：

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225（小时）？

解：　按题意需检验

$$H_0: \mu \le \mu_0 = 225, H_1: \mu > 225.$$

取 $\alpha = 0.05$。由表**8.1**知检验问题的拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)$$

现在$\boldsymbol{n}$ **=16,**$t_{0.05}(15) = 1.7531.$　又算得 $\bar{x} = 241.5, s = 98.7259$
即得

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 0.6685 < 1.7531.$$

$\boldsymbol{t}$不落在拒绝域，故接受H_0，即认为元件的平均寿命不大于**225**小时。

二.两个正态总体均值差的检验（*t* 检验）

我们还可以用t检验法检验具有相同方差的两个正态总体均值差的假设。

设$x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}$是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的样本，$y_1,y_2,\cdots,y_{n_2}$是来自正态总体$N(\mu_2,\sigma^2)$的样本且设两样本独立。又分别记它们的样本均值为$\overline{x},\overline{y}$，记样本方差为$s_1^2,s_2^2$。设$\mu_1,\mu_2,\sigma^2$均为未知，要特别引起注意的是，在这里假设两总体的方差是相等的。

现在来求检验问题：

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta.$$

（δ 为已知常数）的拒绝域，取显著性水平为

α 引用下述 t 统计量作为**检验统计量**：

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

其中

$$s_w^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

当 H_0 为真时，已知 $t \sim t(n_1+n_2-2)$与单个总体

的 t 检验法相仿，其拒绝域的形式为

$$\left|\frac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right| \geq k$$

$\mathbf{P}\{$拒绝 $H_0 \mid H_0$为真$\}$

$$= P_{\mu_1-\mu_2=\delta}\left\{\left|\frac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right| \geq k\right\} = \alpha$$

可得 $k = t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$. 于是得拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$$

关于均值差的其它两个检验问题的拒绝域在下表中给出。常用的是 $\delta = 0$ 的情况。

当两种正态总体的方差均为已知时，我们可用*Z*检验法来检验两正态总体均值差的假设问题。

关于均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$ (σ_1^2， σ_2^2 已知)	$\lvert Z\rvert\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1-\mu_2\geq\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$		$Z\leq -z_\alpha$
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$		$Z\geq z_\alpha$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}S_w}$ $\sim t(n_1+n_2-2)$ $\left(\begin{array}{c}\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{未知}\\ \sigma_1^2=\sigma_2^2\end{array}\right)$	$\lvert t\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
$\mu_1-\mu_2\geq\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$		$t\leq -t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$		$t\geq t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

例2　在平炉进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率，试验是在同一只平炉上进行的。每炼一炉钢时除操作方法外，其它条件都尽可能做到相同。先用标准方法炼一炉，然后用建议的新方法炼一炉，以后交替进行，各炼了10炉，其得率分别为

标准方法　78.1 72.4 76.2 74.3 77.4 78.4 76.0 75.5 76.7 77.3

新方法　　79.1 81.0 77.3 79.1 80.0 79.1 79.1 77.3 80.2 82.1

设这两个样本相互独立，且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$， μ_1,μ_2,σ^2 均未知。问建议的新操作方法能否提高得率？（取 $\alpha=0.05$ ）

解：需要检验假设 $H_0:\mu_1-\mu_2\ge 0, H_1:\mu_1-\mu_2<0.$ 分别求出标准方法和新方法的样本均值和样本方差如下：

$$n_1=10, \overline{x}=76.23, s_1^2=3.325,$$

$$n_2=10, \overline{y}=79.43, s_2^2=2.225.$$

又，

$$s_w^2=\frac{(10-1)s_1^2+(10-1)s_2^2}{10+10-2}=2.775, t_{0.05}(18)=1.7341,$$

故拒绝域为

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}\leq -t_{0.05}(18)=-1.7341,$$

现在由于样本观察值 t=**-4.295<-1.7341**,所以拒绝 H_0，

即认为建议的新操作方法较原来的方法为优。

小结

在这一节中我们学习了正态总体均值的检验法，有以下两种：单个正态总体 均值的检验以及两个正态总体均值差的检验.

作业：课后习题 4、6、7

练习：

1、在对单个正态总体均值的假设检验中，当总体方差已知时，选用（　）

（A）t 检验法　　（B）Z 检验法

（C）F 检验法　　（D）χ^2 检验法

B

2、设 0.5, 1.25, 0.8, 2 是来自总体X的样本，已知

$$Y = \ln X \sim N(\mu,1)$$

（1）求X的数学期望E(X)=b；（4分）
（2）求μ的置信度为0.95的置信区间（4分）
（3）利用上述结果，求b的置信度为0.95的置信区间；（4分，查表 $z_{0.025}=1.96$ **）**

解：(1) 因为 $Y \sim N(\mu,1)$，所以 $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}},-\infty<y<\infty$

由 $X = e^Y$，所以

$$b = E(X) = E(e^{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{u+\frac{1}{2}} e^{-\frac{[y-(\mu+1)]^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{u+\frac{1}{2}} e^{-\frac{[y-(\mu+1)]^2}{2}} d[y-(u+1)]$$

$$= e^{\mu+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bullet \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= e^{\mu+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bullet \sqrt{2\pi}$$

$$= e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

(2)此为求单个正态总体 σ^2 已知的条件下 μ 在 $\alpha = 0.05$下的置信区间

由 $P\{\left|\dfrac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{0.025}\} = 0.95$

得置信区间为 $\{\overline{y} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}\}$ （**2**分）

而 $\overline{y} = \dfrac{1}{4}(\ln 0.5 + \ln 0.8 + \ln 1.25 + \ln 2) = \dfrac{1}{4}\ln 1 = 0$

和 $z_{0.025} = 1.96$（**1**分）

可得置信区间为 $(-0.98, 0.98)$ （**1**分）

(3)因为 $x=e^y$ 为单调增函数，而 $b=e^{\mu+\frac{1}{2}}$（**1**分）

由 $-0.98<\mu<0.98$ 得 $-0.98+\frac{1}{2}<\mu+\frac{1}{2}<0.98+\frac{1}{2}$

即 $-0.48<\mu+\frac{1}{2}<1.48$ （**2**分）

所以**b**的置信度为**0.95**的置信区间为

$$(e^{-0.48},e^{1.48})$$ （**1**分）

2010-2011学年期末考试题