南开大学

第四章 动量与角动量

(Momentum and Angular)

本章目录

前言

前言

牛顿定律是瞬时的规律。

在有些问题中， 如：碰撞（宏观）、 散射（微观）… 我们往往只关心过程中力的效果

——力对时间和空间的积累效应。

力在时间上的积累效应：

- 平动 ⟶ 冲量 ⟶ 动量的改变
- 转动 ⟶ 冲量矩 ⟶ 角动量的改变

力在空间上的积累效应

⟶ 功 ⟶ 改变能量

Δ 4.1 冲量，动量，质点动量定理

定义：力的冲量（impulse）—— $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, \mathrm{d}t}$

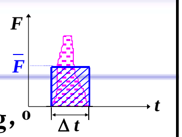
质点的动量（momentum）—— $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$ ⟹ 质点动量定理：(theorem of momentum of a particle)

$\boxed{\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}}$ （微分形式）

$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$ （积分形式）

平均冲力 $$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$



Δ[例]已知：一篮球质量 $m = 0.58\mathrm{kg}$，从 h=2.0m的高度下落，到达地面后，以同样速率反弹，接触地面时间 $\Delta t = 0.019\mathrm{s}$。

求：篮球对地的平均冲力 $\overline{F}$

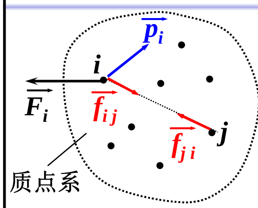
解：篮球到达地面的速率

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 9.80\times 2} = 6.26\,\mathrm{m/s}$$

$$\overline{F} = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2\times 0.58\times 6.26}{0.019} = 3.82\times 10^2\ \mathrm{N}$$

§ 4.2 质点系动量定理

(theorem of momentum of particle system)



$\vec{F}_i$ 为质点 i 受的合外力，

$\vec{f}_{ij}$为质点 i 受质点 j 的内力，

$\vec{p}_i$ 为质点 i 的动量。

对质点 i ： $(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i$

对质点系： $\sum_i (\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$

由牛顿第三定律有： $\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = 0$

所以有： $(\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t=\sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$

令 $\sum_i \vec{F}_i=\vec{F}_{\text{外}}$， $\sum_i \vec{p}_i=\vec{P}$

则有： $\boxed{\vec{F}_{\text{外}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}}$

或 $\boxed{\vec{F}_{\text{外}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}}$

质点系动量定理（微分形式）

$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{\text{外}}\cdot\mathrm{d}t=\vec{P}_2-\vec{P}_1}$ —质点系动量定理（积分形式）

系统总动量由 外力的冲量决定，与内力无关。
用质点系动量定理处理问题可避开内力。

7

§ 4. 3动量守恒定律

（law of conservation of momentum）

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量不随时间改变。这就是质点系的动量守恒定律。

即 $\boxed{\vec{F}_{\text{外}}=0\text{时，}\vec{P}=\text{常矢量}}$

几点说明：

1. 动量守恒定律是牛顿第三定律的必然推论。

（只要牛顿第三定律成立，则动量守恒必成立，但是反之？）

2. 动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系。

8

3. 动量若在某一惯性系中守恒，则在其它一切惯性系中均守恒。

4. 若某个方向上合外力为零，则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

5. 当外力<<内力，且作用时间极短时（如碰撞），可认为动量近似守恒。

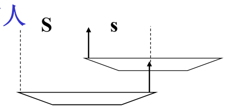
6. 动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律，它在宏观和微观领域均适用。

7. 用守恒定律作题，应注意分析过程、系统和条件。

9

书中例题4.7 （p154）已知：长L＝4m，质量M＝150kg的船静止在湖面上，人的质量m＝50kg，人从船头走到船尾。不计水的阻力。

求：人和船相对岸各移动的距离。（设船和人速度分别为V，v；S和s分别表示船和人相对岸移动的距离 ）



解：人与船组成系统

MV＝mv

$$M\int_0^t Vdt=m\int_0^t vdt$$

S和s分别表示船和人相对岸移动的距离

$$S=\int_0^t Vdt \qquad s=\int_0^t vdt$$

10

得：MS＝sm

∵ S＋s＝L 将 S＝L－s 代入 得

$$S=\frac{m}{M+m}L=\frac{50}{150+50}\times 4=1(m)$$

s＝L－S＝4－1＝3（m）

11

3. 9 碰撞

一、碰撞

1. 定义

两物体或质点在相互接近时，在较短的时间内通过相互作用，它们的运动状态（包括物质的性质）发生显著变化的现象，称为碰撞。

2. 种类

$\begin{cases}\text{接触碰撞}\\ \text{非接触碰撞}\end{cases}$

12

①接触碰撞：

这种碰撞就是两个物体直接接触。接触前后没有相互作用，接触时相互作用极为强烈，接触时间极短。

如：宏观物体的碰撞

②非接触碰撞：

这种碰撞就是两个物体没有直接接触。接触前、“中”、后均有相互作用。

如：微观粒子间的散射。

二、接触碰撞

由于接触时的相互作用极为强烈，所以接触过程中可以忽略外力的作用，认为两体系统的总动量守恒。

碰撞的结果：

碰撞前后两体系统的质心速度、动能均不改变，碰撞过程可能改变的只是两体的相对动能。

1. 完全弹性碰撞

特点：碰撞过程中没有能量损耗、相对动能守恒。

碰撞前后相对速度分别为：

$$\vec{u}_0 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}\text{，}\quad \vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\because E_{kr0} = E_{kr} \qquad \therefore \left|\frac{\vec{u}}{\vec{u}_0}\right| = 1$$

系统内动量和机械能均守恒

2. 完全非弹性碰撞

特点:碰撞过程中相对动能全部损耗。

碰撞后相对速度为： $\vec{u} = 0$

系统内动量守恒，机械能不守恒

3. 非完全弹性碰撞

介于完全弹性碰撞与完全非弹性碰撞之间的碰撞。

系统内动量守恒，机械能不守恒

恢复系数

$$e = \left|\frac{\vec{u}}{\vec{u}_0}\right| = \left|\frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}}\right|$$

$e = 1$ 完全弹性碰撞

$e = 0$ 完全非弹性碰撞

$0 < e < 1$ 非完全弹性碰撞

从以上三种碰撞情况看到，动量总是守恒的，实质是作用力等于反作用力

四、例题分析

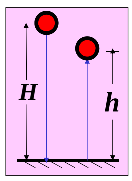
1. 如图所示，将一种材料制成小球，另一种材料制成平板，并水平放置。令小球从一定高度H自由下落，测得其反跳高度为h。试求这两种材料之间的恢复系数e。

[解]质量为m_1的小球与平板相撞，可看成是与质量为m_2的地球相撞。

$$\because m_1/m_2 \to 0 \therefore v_2 \approx 0$$

$$\text{而} v_{10} = \sqrt{2gH}\text{，}v_1 = \sqrt{2gh}$$

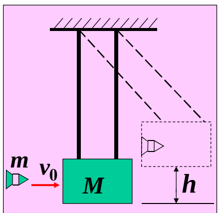
$$\text{故} e = -\frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$



2. 如图所示，为一冲击摆。摆长为l，木块质量为M，在质量为m 的子弹击中木块后，冲击摆摆过的最大偏角为θ ，试求子弹击中木块时的初速度。

[解] ①子弹射入木块内停止下来的过程为非弹性碰撞，在此过程中动量守恒而能量不守恒。

$$\therefore v = v_c = \frac{mv_0}{m+M}$$



冲击摆测子弹速度

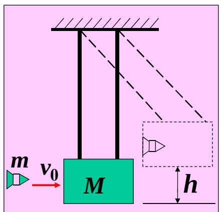
② 摆从平衡位置摆到最高位置的过程。重力与张力合力不为零。系统动量不守恒，而机械能守恒。

所以 $(m+M)gh = (m+M)v^2/2$

而 $h = (1-\cos\theta)l$

$$\therefore v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

$$= \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$



冲击摆测子弹速度

非弹性碰撞是测量子弹速度的古老方法

Δ 4. 4变质量系统、火箭飞行原理

低速（v << c）情况下的两类变质量问题：

▲ 粘附 — 主体的质量增加（如滚雪球）

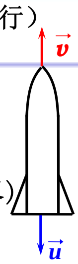
▲ 抛射 — 主体的质量减少（如火箭发射）

还有另一类变质量问题是在高速（v ~ c）情况下，这时即使没有粘附和抛射，质量也可以随速度改变 — $m = m(v)$，这是相对论情形，不在本节讨论之列。

下面仅以火箭飞行为例，讨论变质量问题。

一. 火箭不受外力情形（在自由空间飞行）

1. 火箭的速度



系统： 火箭壳体 + 尚存燃料

条件：燃料相对箭体以恒速u 喷出

总体过程：i（点火）→ f（燃料烧尽）

先分析一微过程： $t \to t+\mathrm{d}t$

初态：系统质量 M，速度v (对地)，动量 Mv

末态：喷出燃料后

喷出燃料的质量：$\mathrm{d}m = -\mathrm{d}M$，

喷出燃料速度(对地)： $v - u$

火箭壳体 +尚存燃料的质量： $M - \mathrm{d}m$

火箭壳体 +尚存燃料的速度(对地)：$v + \mathrm{d}v$

系统动量： $(M - \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + [\,\mathrm{d}m(v - u)\,]$

由动量守恒，有

$$Mv = \mathrm{d}m(v - u) + (M - \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v)$$

经整理得： $M\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}M$

$$\longrightarrow \mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}M}{M} \longrightarrow \int_i^f \mathrm{d}v = -u\int_{M_i}^{M_f}\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

速度公式：$\boxed{v_f = v_i + u\ln\frac{M_i}{M_f}}$

引入火箭质量比： $N = \dfrac{M_i}{M_f}$

得 $\boxed{v_f = v_i + u\ln N}$

提高 v_f 的途径：

(1) 提高 u（现可达 $u = 4.1$ km/s）

(2) 增大 N（单级火箭N 提得很高不合算）

为有效提高N，采用多级火箭（如2级、3级）

$v = u_1\ln N_1 + u_2\ln N_2 + u_3\ln N_3$

资料：长征三号（3级大型运载火箭）

全长：43.25m， 最大直径：3.35m，

起飞质量：202吨，起飞推力：280吨力。

2. 火箭所受的反推力

研究对象：喷出气体 dm

t 时刻：速度 v（和主体速度相同），动量 $v\mathrm{d}m$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻：速度 $v-u$， 动量 $\mathrm{d}m(v-u)$

由动量定理，$\mathrm{d}t$ 内喷出气体所受冲量

$$F_{箭对气}\mathrm{d}t = \mathrm{d}m(v-u) - v\mathrm{d}m = -F_{气对箭}\mathrm{d}t$$

由此得火箭所受燃气的反推力为

$$\boxed{F = F_{气对箭} = u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$

二. 重力场中的火箭发射

忽略地面附近重力加速度 g 的变化，

可得 t 时刻火箭的速度：

$$\boxed{v(t) = v_i - gt + u\ln\frac{M_i}{M_t}}$$

M_t： t 时刻火箭壳和尚余燃料的质量

§ 4.5 质心（center of mass）

- 当我们讨论的物体具有不可忽视的尺寸大小；是一个多粒子系统，则质量中心的观念就很重要了。
- 质量中心的两个特性：

  （1）每一个多粒子系统（或物体）都只有一个质量中心

  （2）质量中心的运动轨迹可以代表整个多粒子系统（或物体）的平移运动。

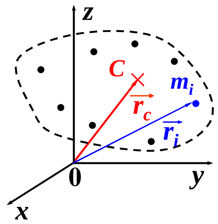
一. 质心的概念和质心位置的确定

为便于研究质点系总体运动，引入质心概念。

定义质心 C 的位矢为：

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}} \quad (m = \sum m_i)$$

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C = \dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases}$$



质心位置是质点位置以质量为权重的平均值。

例：由m_1和m_2组成的质点组（系统），坐标分别为x_1，y_1；x_2，y_2；求其质心坐标。计算当

（1）m_1＝1，m_2＝9；x_1＝0，y_1＝0，x_2＝10，y_2＝0

（2） m_1＝9，m_2＝1；x_1＝0，y_1＝0，x_2＝10，y_2＝0

时的质心坐标

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}$$

代入具体数值：

（1）

x_c＝（1×0＋9×10）/（1＋9）＝9

（2）

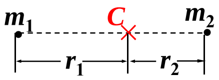
x_c＝（9×0＋1×10）/（1＋9）＝1

- 由此可直观地看到，质心靠近质量大的质点一侧。
- 质心不限于质点组，连续的物体可看成是有无限多的质点组成，这时求和变成了积分。
- 质心与重心：

  在地球表面附近的小物体，质心和重心是一致的；在太空中有质心的概念，没有重心的概念；对于一座大山，各处的重力加速度的大小和方向都不能看成常量，这时质心和重心就不重合了。

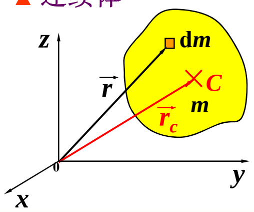
二. 几种系统的质心

▲ 两质点系统



$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

▲ 连续体



$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$

$$x_C = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{m}$$

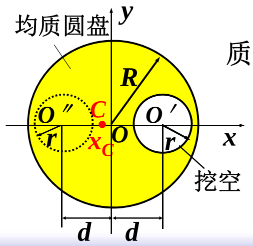
……

▲均匀杆、圆盘、圆环、球，质心为其几何中心

▲“小线度”物体的质心和重心是重合的

Δ[例1]如图示，求挖掉小圆盘后系统的质心坐标。

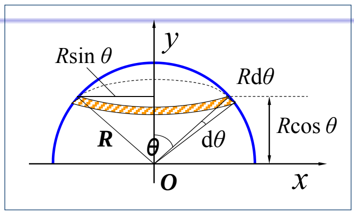
解：由对称性分析，质心C应在x轴上。



令σ 为质量的面密度，则质心坐标为：

$$x_C = \frac{0 + (-d \cdot \sigma \cdot \pi r^2)}{\sigma \cdot \pi R^2 - \sigma \cdot \pi r^2} = -\frac{d}{(R/r)^2 - 1}$$

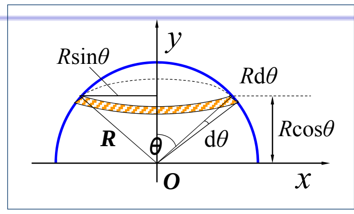
例2　求半径为 R 的匀质半薄球壳的质心.



解　选如图所示的坐标系.

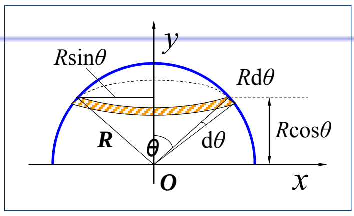
在半球壳上取一如图圆环

➢ 圆环的面积 $\mathrm{d}s = 2\pi R\sin\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$



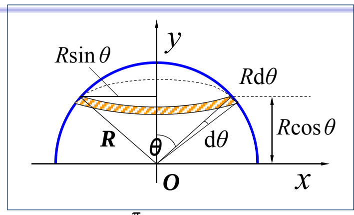
➢ 圆环的质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

由于球壳关于y 轴对称，故$x_c = 0$



$$y_C = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m = \frac{\int y \cdot \sigma 2\pi R^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sigma 2\pi R^2}$$

而 $y = R\cos\theta$



所以 $y_C = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = R/2$

其质心位矢：$\vec{r}_C = R/2\,\vec{j}$