

第五章 线性变换

第三节 矩阵的对角化

从上一节分析知道：同一线性变换在不同基底下的矩阵一般不同，但它们**相似**。

问题：是否存在一组基底，使得线性变换 T 在该基底下的矩阵**最简单**？(**对角形**矩阵)

或者说，对于 n 阶矩阵 A 是否存在可逆矩阵 M ，使 $M^{-1}AM$ 是一个**对角矩阵**？

预备知识

§ 5.3.1 矩阵的特征根与特征向量

一、定义与求法

定义1 设 A 是 n 阶方阵，若数 λ 和 n 维**非零**(列)向量 X 满足

$$AX = \lambda X$$

则称 λ 为 A 的**特征根(特征值)**， X 称为 A 的**对应于(属于)**特征根 λ 的**特征向量**。

说明：

- 1) 特征向量是对**方阵**而言的，且特征向量**非零**。
- 2) 若 X 为 A 的对应于特征根 λ 的特征向量，则 kX ($k \neq 0$) 也为 A 的对应于特征根 λ 的特征向量。
- 3) 一个特征向量**只能属于一个**特征值。



怎样来求解一个方阵的特征值和特征向量呢？

把 $AX = \lambda X$ 写成

$$(\lambda E - A)X = O \quad (*)$$

这是一个齐次线性方程组，由于 $X \neq O$ ，因此 λ 是矩阵 A 的特征根。

\Leftrightarrow 使得齐次线性方程组 $(*)$ 有非零解。

而 $(*)$ 的任意非零解都是矩阵 A 的对应于特征根的特征向量。

再由方程组理论，我们得到如下定理

定理1 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵，则 λ 是 A 的特征根

$$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0.$$

定义2 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵，方程 $|\lambda E - A|=0$ 称为
 A 的特征方程，多项式

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|\end{aligned}$$

称为矩阵 A 的特征多项式，这是数域 F 上的
一个 n 次多项式。

因此，也可以说 A 的特征根就是 A 的特征方程的根。

现在来看特征多项式 $\varphi_A(\lambda)$ ，它是 λ 的 n 次多项式，在复数范围内有 n 个根. 设为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则 λ_i 就是 A 的特征值.

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= |\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n\end{aligned}\quad (a)$$

又

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| \quad (b)$$

比较(a)和(b)的 $n-1$ 次项和常数项得到

1) A 的全体特征根的和为 A 的迹, 即

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

2) A 的全体特征根的积为 $|A|$, 即: $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$

求矩阵A的特征根与特征向量的步骤

1. 计算A的特征多项式 $|\lambda E - A|$;
2. 求特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的**全部根** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 也就是A的全部特征值;
3. 对于特征值 λ_i , 求齐次方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的非零解, 也就是对应于 λ_i 的特征向量.
[求一组**基础解系**, 即为对应于 λ_i 的**线性无关**特征向量, 其所有**非零线性组合**即为属于该 λ_i 的全部特征向量.]

例1 求矩阵A的特征根与特征向量

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

解：由于

$$\begin{aligned} \varphi_A(\lambda) &= |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 1 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -3 + (\lambda - 1)(\lambda - 3) & 2\lambda - 8 \\ -1 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 3\lambda - 2 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \lambda^2 - 4\lambda & 2\lambda - 8 \\ 3\lambda - 2 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 3\lambda - 2 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - 4)(\lambda^2 + 4)
 \end{aligned}$$

所以A的特征根为 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$

对于 $\lambda_1 = 4$, $(\lambda E - A)X = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 4-3 & -3 & -2 \\ -1 & 4-1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

解得基础解系 $\eta_1 = (-1, -1, 1)$, 所以A的对应于特征根 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量为

$$k_1 \eta_1 = k_1 (-1, -1, 1), \text{ 其中 } k_1 \neq 0.$$

对于 $\lambda_2 = 2i$, $(\lambda E - A)X = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 2i-3 & -3 & -2 \\ -1 & 2i-1 & 2 \\ 3 & 1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

解得基础解系 $\eta_2 = (-i, i, 1)$, 所以A的对应于特征根 $\lambda_2 = 2i$ 的全部特征向量为 $k_2\eta_2 = k_2(-i, i, 1)$, 其中 $k_2 \neq 0$.

对于 $\lambda_3 = -2i$, 解

$$\begin{pmatrix} -2i-3 & -3 & -2 \\ -1 & -2i-1 & 2 \\ 3 & 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

得基础解系 $\eta_3 = (i, -i, 1)$, 所以A的对应于特征根 $\lambda_3 = -2i$ 的全部特征向量为 $k_3\eta_3$, 其中 $k_3 \neq 0$.

例2 求矩阵A的特征根与特征向量. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解:

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & -2 \\ \lambda - 5 & \lambda - 1 & -2 \\ \lambda - 5 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)^2(\lambda - 5) \end{aligned}$$

所以, A的特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$

(或 $\lambda_1 = -1$ (二重), $\lambda_2 = 5$)

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, 代入 $(\lambda E - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} -1-1 & -2 & -2 \\ -2 & -1-1 & -2 \\ -2 & -2 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{或} \quad \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解得基础解系 $\eta_1 = (1, 0, -1)^T$, $\eta_2 = (0, 1, -1)^T$

(作为行、列向量都可以)

因此, A 的对应于特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的特征向量为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中 k_1, k_2 为不同时为零的任意数.

对于 $\lambda_3 = 5$, 代入 $(\lambda E - A)X = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

解得基础解系 $\eta_3 = (1, 1, 1)^T$, 故 A 的对应于特征根 $\lambda_3 = 5$ 的特征向量为

$k_3\eta_3$, 其中 k_3 为不为零任意数.

例3 在线性空间 $P_{n-1}[x]$ 中，微商变换定义为

$$Df(x) = f'(x)$$

取一组基底为 $\left[1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$ ，求微商变换 D 的矩阵 A 和矩阵 A 的特征根、特征向量。

解：

$$D \left[1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] = \left[0, 1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \right]$$

$$= \left[1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \left[1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] A$$

故在该基底下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$

故 A 的特征根为 $\lambda=0$ (n 重)

把 $\lambda=0$ 代入 $(\lambda E - A)X = 0$ 得基础解系 $\xi_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$

因此, A 的属于特征根 $\lambda=0$ 的特征向量为

$k\xi_1$, k 为不为零任意数.

例4 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 的特征根为1, 3, 5,

求 x, y, z 的值。

解：利用 A 的所有特征根的和为 A 的迹，积为 A 的行列式，有

$$\begin{cases} 1 + y + 1 = 1 + 3 + 5 \\ |A| = y - 2x = 1 \cdot 3 \cdot 5 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \\ z \in R \end{cases}$$

【 z 取任意值，验证：当 z 取任意值时， A 的特征根都是1, 3, 5】

例5 设 $A^2=A$ ，证明矩阵 A 的特征根只可能为1或0.

证：设 λ 是 A 的特征根， X 是 A 的对应于特征根 λ 的特征向量，那么有

$$AX = \lambda X$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } AX &= A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) \\ &= \lambda(\lambda X) = \lambda^2X\end{aligned}$$

故有 $\lambda X = \lambda^2 X$ ， 即 $(\lambda - \lambda^2)X = 0$.

由于 $X \neq 0$ ， 故只能 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

例6 设 A 是 n 阶矩阵, λ 是 A 的特征根, 证明 $1+\lambda$ 是 $E+A$ 的特征根.

证: 设 X 是 A 的对应于特征根 λ 的特征向量, 则

$$AX = \lambda X$$

于是 $(E+A)X = EX + AX = X + \lambda X = (1+\lambda)X$
故 $1+\lambda$ 是 $E+A$ 的特征根.

例7 试证: n 阶矩阵 A 是奇异矩阵 $\Leftrightarrow A$ 有一个特征根为零.

证: 设 A 的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则有

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$$

因此 A 是奇异矩阵

$$\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A \text{ 有一个特征根为零.}$$

二、特征根与特征向量的性质

设 n 阶矩阵 $A \sim B$ ，即存在可逆矩阵 M ，使得 $B = M^{-1}AM$

那么我们得到

$$\begin{aligned}\varphi_B(\lambda) &= |\lambda E - B| = |\lambda E - M^{-1}AM| \\ &= |\lambda M^{-1}EM - M^{-1}AM| \\ &= |M^{-1}(\lambda E - A)M| \\ &= |M^{-1}| \cdot |(\lambda E - A)| \cdot |M| \\ &= |(\lambda E - A)| \\ &= \varphi_A(\lambda)\end{aligned}$$

这说明： A, B 有相同的特征多项式，也就是有相同的特征根.

定理2 相似矩阵有相同的特征根和特征多项式.

注意：定理2的逆是不成立的，如矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征多项式都为 $(\lambda - 1)^2$ ，但是 A 与 B 不相似.

同时：如 $A \sim \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 就是 A 的全部特征根.

定理3 设矩阵 A 为分块对角形矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$,

则 A_1, A_2, \dots, A_s 的所有特征根就是 A 的全部特征根.

定理4 属于不同特征根的特征向量是线性无关的.

即: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是矩阵 A 的 m 个互不相同的特征根,
 p_1, p_2, \dots, p_m 是 A 的分别对应于这 m 个特征根的特征向量,
则 p_1, p_2, \dots, p_m 线性无关.

证明: (法1)对 m 做数学归纳法 (见课本160页).

法2 设有常数 x_1, x_2, \dots, x_m 使

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m = 0.$$

则 $A(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m) = 0$, 即

$$\lambda_1 x_1 p_1 + \lambda_2 x_2 p_2 + \dots + \lambda_m x_m p_m = 0,$$

类推之, 有 $\lambda_1^k x_1 p_1 + \lambda_2^k x_2 p_2 + \dots + \lambda_m^k x_m p_m = 0.$

$$(k = 1, 2, \dots, m-1)$$

把上列各式合写成矩阵形式, 得

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \dots, x_m p_m) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0)$$

由于矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

的行列式 $|B|$ 为范得蒙行列式, 由 λ_i 互不相等知 $|B| \neq 0$, 因此 B 为可逆矩阵. 于是得到

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m) = (0, 0, \cdots, 0),$$

即 $x_j p_j = 0 (j = 1, 2, \cdots, m)$.

但 $p_j \neq 0$, 故 $x_j = 0 (j = 1, 2, \cdots, m)$.

所以向量组 p_1, p_2, \cdots, p_m 线性无关.

定理4的推广：

定理5 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 n 阶矩阵 A 的 k 个互异的特征根。

又 $X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jr_j}$ 是 A 对应于特征根 λ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) 的 r_j 个线性无关的特征向量，则向量组

$$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1r_1}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2r_2}, \dots, X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kr_k}$$

(共 $r_1 + r_2 + \dots + r_k$ 个向量)必线性无关。

定理6 设 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的 k 重特征根，则 A 对应于 λ_0 的特征子空间的维数不超过 k 。

即：当 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的 k 重特征根时，齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的基础解系所含向量的个数不多于 k 。

例1 n 阶数量矩阵 kE ($k \neq 0$) 的特征方程为 $|\lambda E - kE| = (\lambda - k)^n$.

因为 $\lambda = k$ 为 kE 的 n 重特征根, 代入 $(\lambda E - kE)X = O$ 得

$OX = O$. 其系数矩阵为零矩阵, 故任意 n 个线性无关的向量都是它的基础解系. 而每个非零向量都是它的

特征向量, 基础解系所含向量个数不大于重数 n .

例2 设 A 为 n 阶矩阵, X_1, X_2 分别是 A 对应于两个不同特征根 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明 $X_1 + X_2$ 不是 A 的特征向量.

证: 用反证法, 假设 $X_1 + X_2$ 是 A 的对应于特征根 λ 的特征向量, 则有

$$A(X_1 + X_2) = \lambda(X_1 + X_2)$$

又由已知条件知 $AX_1 = \lambda_1 X_1, AX_2 = \lambda_2 X_2$, 故又得到

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$

于是有

$$\lambda(X_1 + X_2) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$

即 $(\lambda - \lambda_1)X_1 + (\lambda - \lambda_2)X_2 = 0$

因为 X_1, X_2 对应于不同特征根, 故它们线性无关,

于是得到 $\lambda - \lambda_1 = 0, \lambda - \lambda_2 = 0$

得到 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. 这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾.

所以 $X_1 + X_2$ 不是 A 的特征向量.

小 结

- 求矩阵特征值与特征向量的步骤(重点)
- 特征根与特征向量的性质(重点)
(定理2——定理6)
- 用反证法来证明一些问题

§ 5.3.2 矩阵的对角化

先看一个矩阵若可以对角化，应满足什么条件

设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 与对角形矩阵 $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似, 即存在可逆矩阵 M 使得 $D=M^{-1}AM$. 于是, 有 $AM=MD$.

将 M 按列分块为 $M=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 并代入 $AM=MD$ 得

$$A(X_1, X_2, \dots, X_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{即有} \\ AX_j = \lambda_j X_j \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

而由 M 可逆知它的列向量 X_1, X_2, \dots, X_n 都不为零且线性无关. 这说明 A 有 n 个线性无关的特征向量.

定理1 n 阶复矩阵 A 与对角形矩阵相似的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 A 的 n 个线性无关的特征向量, 且 $AX_j = \lambda_j X_j$, 令 $M = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, 则有 $M^{-1}AM = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (可相同)是 A 的全部特征根.

注:

- (1) 与 A 相似的对角形矩阵, 其主对角线上的元除排列顺序外, 是唯一的.
- (2) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的顺序应和 M 中的 X_1, X_2, \dots, X_n 顺序对应.
- (3) M 不唯一.

定理2 n 阶复矩阵 A 的特征根都是单根，则 A 必相似于对角形矩阵。

定理3 n 阶复矩阵 A 相似于对角形矩阵的充要条件是，对每个 $k_i(1 \leq k_i \leq n)$ 重特征根 λ_i ，矩阵 $\lambda_i E - A$ 的秩为 $n - k_i$ 。

对于上述三个定理，若限定在数域 F 上讨论 A 的对角化问题，则只需在定理1—3中将“ n 阶复矩阵”该为“ F 上的 n 阶矩阵”，并在假设条件中补充“ A 的全部特征根都是数域 F 中的数”。

例1 判断下列实矩阵能否化为对角化？

$$(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

解(1)

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 9)$$

$$\text{得 } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = -1$$

因为A有三个不同的特征值，所以由定理2知A可对角化。

解(2)

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3$$

所以A的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

把 $\lambda = -1$ 代入 $(\lambda E - A)x = 0$, 解之得基础解系 $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

故A不能化为对角矩阵.

例2 将实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ **对角化.**

解：(1)求A的特征根

由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda + 2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 & -2 \\ \lambda - 2 & -6 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

得A的特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -4$

或 $\lambda_1 = 2$ (二重), $\lambda_2 = -4$

(2) 对每个特征根, 求对应特征向量的极大线性无关组, 即求 $(\lambda E - A)X = 0$ 的基础解系.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 解方程组 $(2E - A)X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

得基础解系 $X_1 = (-2, 1, 0)^T$, $X_2 = (1, 0, 1)^T$

对 $\lambda_3 = -4$, 解方程组

$$(-4E - A)X = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

得基础解系 $X_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)^T$ 或 $X_3 = (1, -2, 3)^T$

(3) 构造矩阵 M 化 A 为对角形

令
$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1/3 \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ 为对角形.

注意：由于求方程组基础解系可有多种结果，故会得到不同的 M ，均可将 A 化成对角形. 同时， M 构造顺序不同，得到的最终对角形矩阵也不同.

例如，取 $M = (X_1, X_3, X_2)$ ，则

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

例：求上面矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ 的100次幂，即 A^{100} 。

解：若 A 相似于对角形矩阵 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，即存在可逆矩阵 M ，使得 $D = M^{-1}AM$ ，即 $A = MDM^{-1}$ ，则

$$A^k = (MDM^{-1})^k = MDM^{-1} \cdot MDM^{-1} \cdot \dots \cdot MDM^{-1} = MD^k M^{-1}$$

前面例子我们已经知道存在矩阵 $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1/3 \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，使得

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = D$$

为对角形，故先求出 M^{-1} 后，再由

$$[\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$$

即可求出 A^k 。

小结

- 方矩可对角化的充要条件(重点).
- 方阵对角化的过程(重点).