



离散数学第一部分之一

集合论


高维志



第一章 集合论

- 集合论是现代数学的基础，几乎与现代数学的各个分支都有着密切联系，并且渗透到所有科技领域，是不可缺少的数学工具和表达语言。
- 集合论的起源可以追溯到16世纪末期，为了追寻微积分的坚实基础，开始时，人们仅进行了有关数集的研究。1976～1983年，康托尔(Georg Cantor)发表了一系列有关集合论研究的文章，奠定了集合论的深厚基础，以后策墨罗(Zermelo)在1904～1908年列出了第一个集合论的公理系统，并逐步形成公理化集合论。

在此处键入文本

- 
- 集合不仅可以表示数、而且还可以象数一样进行运算，更可以用于非数值信息的表示和处理，如数据的增加、删除、排序以及数据间关系的描述集合论在程序语言、数据结构、编译原理、数据库与知识库、形式语言和人工智能等领域都得到了广泛的应用，并且还得到了发展。
 - 本章内容:集合、子集的基本概念及相关性质；集合间的各种运算和它们满足的运算性质；有限集、无限集以及粗糙集的基本概念。

1 集合

集合（Set）由指定范围内的某些特定对象聚集在一起构成。



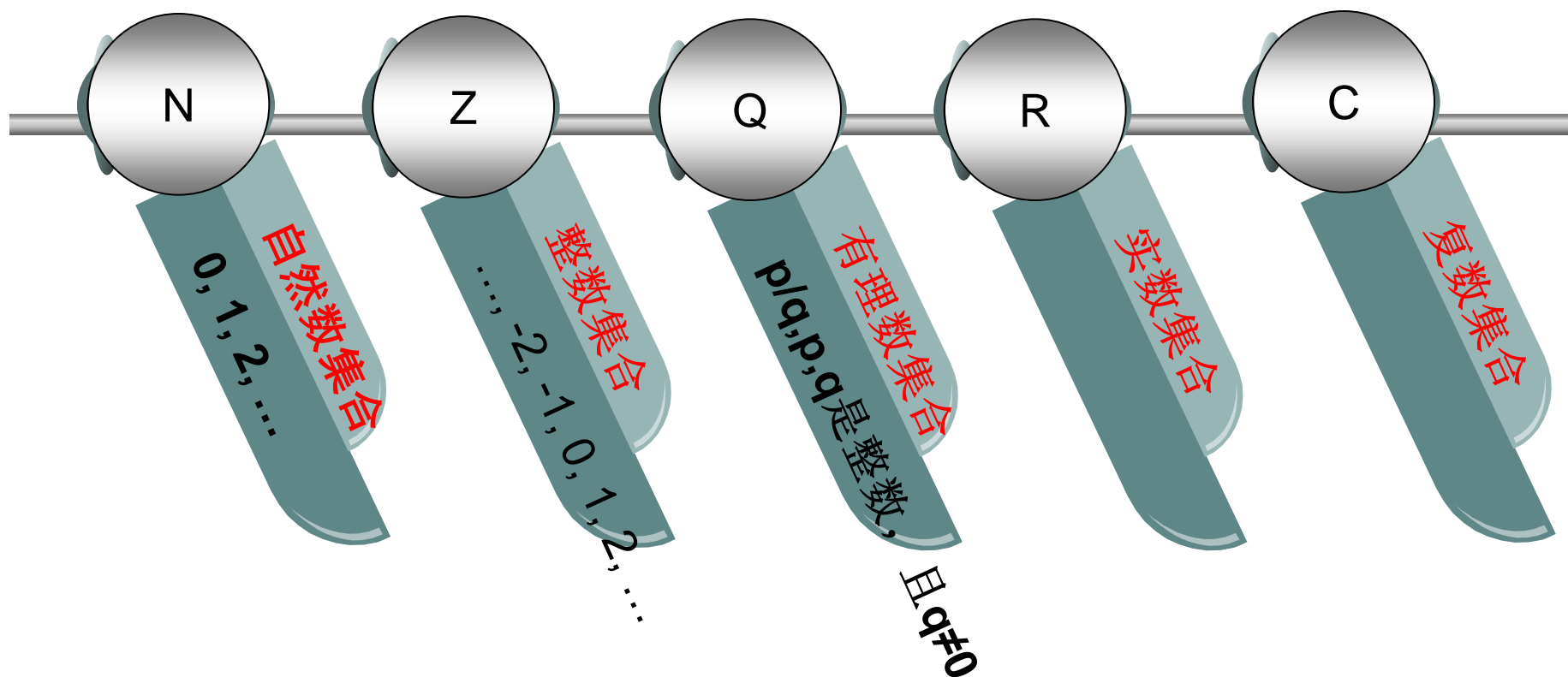
指定范围内的每一个对象称为这个集合的元素 (element)



2 集合的表示

- 通常用带(不带)标号的大写字母 A 、 B 、 C 、...、 A_1 、 B_1 、 C_1 、...、 X 、 Y 、 Z 、...表示集合；
- 通常用带（不带）标号的小写字母 a 、 b 、 c 、...、 a_1 、 b_1 、 c_1 、...、 x 、 y 、 z 、...表示元素。

一些固定的符号表示





2.1 集合的表示方法

- 集合是由它包含的元素完全确定的，为了表示一个集合，通常有：
 - 枚举法
 - 隐式法（叙述法）
 - 归纳法
 - 递归指定
 - 文氏图



枚举法（显示法）

- 一一列出集合中全部元素或部分元素的方法叫**枚举法**

适用场景：

- ◆ 一个集合仅含有限个元素
- ◆ 一个集合的元素之间有明显关系

例1.2.1

(1) $A = \{a, b, c, d\}$

(2) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$



枚举法的特点

- 是一种显式表示法
- 优点：具有透明性
- 缺点：在表示具有某种特性的集合或集合中元素过多时受到了一定的局限，而且，从计算机的角度看，显式法是一种“静态”表示法，如果一下子将这么多的“数据”输入到计算机中去，那将占据大量的“内存”。

在此处键入文本



隐式法（叙述法）

- 通过刻画集合中元素所具备的某种特性来表示集合的方法称为叙述法（隐式法）
- 一般表示方法： $A = \{x | \underline{P(x)}\}$
- 适用场景：
 - 一个集合含有很多或无穷多个元素；
 - 一个集合的元素之间有容易刻画共同特征
- 其突出优点是原则上不要求列出集合中全部元素，而只要给出该集合中元素的特性。



例

1. $A = \{x | x \text{ 是 “discrete mathematics” 中的所有字母}\};$
2. $Z = \{x | x \text{ 是一个整数}\};$
3. $S = \{x | x \text{ 是整数, 并且 } x^2 + 1 = 0\};$
4. $Q^+ = \{x | x \text{ 是一个正有理数}\}。$



递归指定集合

■ 通过计算规则定义集合中的元素

例: 设 $a_0 = 1$,

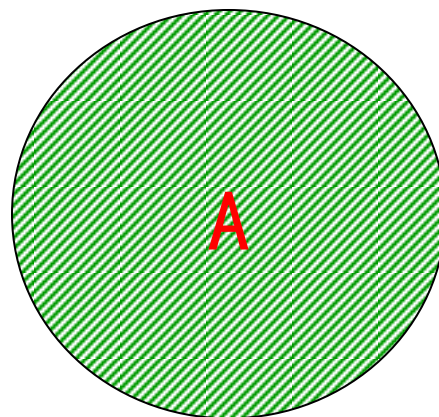
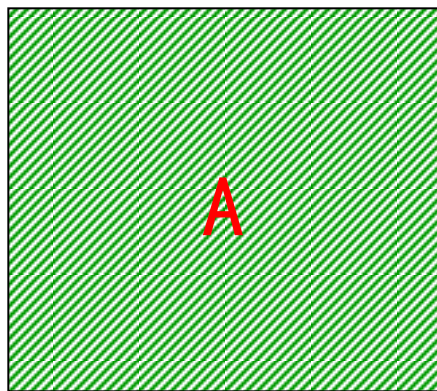
$$a_{i+1} = 2a_i \quad (i \geq 0)$$

定义 $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_k \mid k \geq 0\}$,

试写出集合 S 中的所有元素。

文氏图解法

- 文氏图解法是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的圆形或方形表示一个集合。





3. 集合与元素的关系

- 元素与集合之间的“属于关系”是“明确”的。

- 对某个集合A和元素a来说，

a属于集合A，记为 $a \in A$

- 或者

a不属于集合A，记为 $a \notin A$

- 两者必居其一且仅居其一。

例如，对元素2和N，就有2属于N，即 $2 \in N$ ，

对元素-2和N，就有-2不属于N，即 $-2 \notin N$ 。




■ 集合特征

- 1、**互异性**—集合中的元素都是不同的，凡是相同的元素，均视为同一个元素；

$$\{1,1,2\}=\{1,2\}$$

- 2、**确定性**—能够明确加以“区分的”对象；
- 3、**无序性**—集合中的元素是没有顺序的。

$$\{2,1\}=\{1,2\}$$



设 $E = \{x | (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}, x \in \mathbb{R}$

$F = \{x | (x \in \mathbb{Z}^+) \text{ 且 } (x^2 < 12)\}.$

试指出集合E和F中的元素。

解 集合 $E = \{1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 3\}.$

集合E, F中的元素完全相同, 我们称这样的两个集合相等。



设

$$A = \{\text{BASIC}, \text{PASCAL}, \text{ADA}\},$$

$$B = \{\text{ADA}, \text{BASIC}, \text{PASCAL}\},$$

请判断A和B的关系。

解 根据集合元素的 性质

$$A = B。$$



4 包含和真包含关系

定义1.2.1 设A,B是任意两个集合，如果

B的每个元素都是A的元素，

则称B是A的子集合，简称子集(Subset)，

这时也称A包含B，或B被A包含，记作 $A \supseteq B$ 或 $B \subseteq A$ ，

称“ \subseteq ”或“ \supseteq ”为包含关系(Inclusion Relation)。

如果B不被A所包含，则记作 $B \not\subseteq A$ 。



设 $A = \{\text{BASIC}, \text{PASCAL}, \text{ADA}\}$,

$B = \{\text{ADA}, \text{BASIC}, \text{PASCAL}\}$,

请判断A和B之间的包含关系。

解 根据集合间包含关系的定义知, $A \supseteq B$ 且 $A \subseteq B$ 。

定理1.2.2 设A、B是任意两个集合, 则

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$



定义1.2.2 设A,B是任意两个集合，如果

$$B \subsetneq A \text{ 并且 } A \neq B$$

则称B是A的**真子集**(Proper Subset)，记作 **$B \subsetneq A$** ，

称“ **\subsetneq** ”为**真包含关系**(Properly Inclusion Relation)。

如果B不是A的真子集，则记作 **$B \not\subsetneq A$** 。



判断下列集合之间是否具有真包含关系。

(1) $\{a, b\}$ 和 $\{a, b, c, d\}$;


(2) $\{a, b, c, d\}$ 和 $\{a, b, c, d\}$ 。

解 根据真子集的定义，有

(1) $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$;

(2) 因为 $\{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$,

所以 $\{a, b, c, d\}$ 不是 $\{a, b, c, d\}$ 的真子集。



设 $A = \{a\}$ 是一个集合, $B = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$, 试问
 $\{A\} \in B$ 和 $\{A\} \subseteq B$

同时成立吗?

分析

- $\because \{A\} = \{\{a\}\}, \{\{a\}\} \in B$
- $\therefore \{A\} \in B$ 成立;
- $\because \{A\} = \{\{a\}\}, \{a\} \in B$
- $\therefore \{A\} \subseteq B$ 成立。

解 $\{A\} \in B$ 和 $A \subseteq B$ 同时成立。



5 几个特殊集合

1、空集

定义1.2.3 不含任何元素的集合叫做空集(Empty Set), 记作 Φ 。

空集可以符号化为

$$\Phi = \{x|x \neq x\}$$

空集是客观存在的。

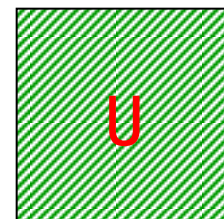
例1.2.10 设 $A = \{x | (x \in \mathbb{R}) \text{ 且 } (x^2 < 0)\}$,
试列举集合A中的所有元素。

解 $A = \Phi$ 。

全集

定义 在一个相对固定的范围内，包含此范围内所有元素的集合，称为全集或论集(Universal Set)，用U或E表示。

用文氏图描述如下：



- ① 在立体几何中，全集是由空间的全体点组成；
- ② 在我国的人口普查中，全集是由我国所有人组成。

全集是相对唯一的.



有限集和无限集

- 集合A中元素的数目称为集合A的基数 (base number), 记为 $|A|$ 。
- 如 $|A|$ 是有限的, 则称集合A为有限集,
- 如 $|A|$ 是无限的, 则称集合A为无限集。

例1.2.13 求下列集合的基数。

(1) $A = \Phi$; (2) $B = \{\Phi\}$;

(3) $C = \{a, b, c\}$; (4) $D = \{a, \{b, c\}\}$ 。

解 $|A| = 0$, $|B| = 1$, $|C| = 3$, $|D| = 2$ 。



m元子集

定义1.2.6 如果一个集合A含有n个元素，则称集合A为n元集，称A的含有m个($0 \leq m \leq n$)元素的子集为A的m元子集。

例1.2.14 设 $A=\{1,2\}$ ，求出A的全部m元子集。

$$\because n=|A|=2, \quad m \leq n$$


$$\therefore m=0,1,2。$$

\therefore 当 $m=0$ 时，得到0元子集： Φ ；

当 $m=1$ 时，得到1元子集： $\{1\}, \{2\}$ ；

当 $m=2$ 时，得到2元子集： $\{1, 2\}$ 。

解 A的全部m元子集是 Φ 、 $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 和 $\{1, 2\}$ 。

- 
-
- 一般来说，对于n元集A，它的m（ $0 \leq m \leq n$ ）元子集有 $C(n,m)$ 个，所以不同的子集总数有：

$$C(n,0) + C(n,1) + \dots + C(n,n) = (1+1)^n = 2^n$$

所以，n元集共有 2^n 个子集。




幂集

幂集： 设A为任意集合，把A的所有不同子集构成的集合叫做A的**幂集**(power set)，记为**P(A)**或 **2^A** 。

其符号化表示为

$$P(A) = \{x | \text{一切 } x \subseteq A\}$$

该集合又称为**集族**(family of set)。



计算下列幂集

(1) $P(\Phi)$; (2) $P(\{\Phi\})$; (3) $P(\{a, \{b, c\}\})$ 。

解 (1) $P(\Phi) = \{\Phi\}$;

(2) $P(\{\Phi\}) = \{\Phi, \{\Phi\}\}$;

(3) $P(\{a, \{b, c\}\}) = \{\Phi, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}$ 。

显然，若集合 A 有 n 个元素，则集合 A 共有 $2^{|A|}$ 个子集，即：
 $|P(A)| = 2^{|A|}$ 。

6. 集合的运算

定义1.2.8 设A、B是两个集合，

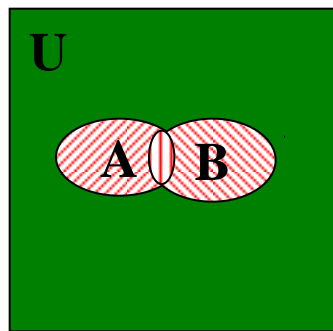
(1) 并集 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

(2) 交集 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

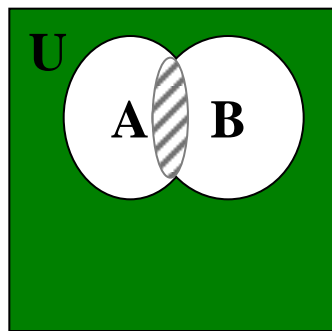
(3) 差集 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

(4) 补集 $= U - A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ (A' , $\sim A$, A^c)

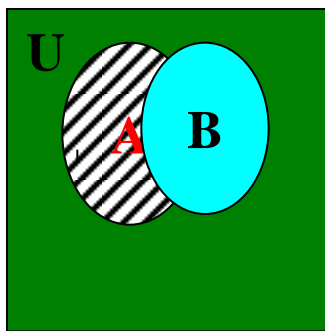
(5) 对称差集 $A \oplus B = \{x | (x \in A \text{ 且 } x \notin B) \text{ 或 } (x \in B \text{ 且 } x \notin A)\}$



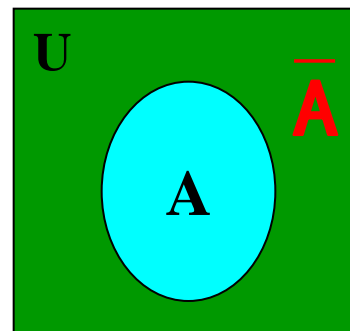
并集



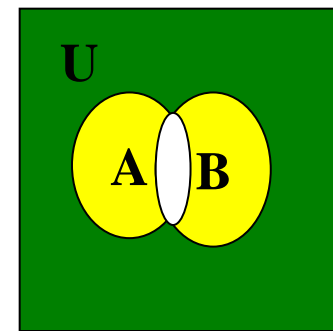
交集



差集



补集



对称差集



7. 基本定理

幂等律: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

恒等律: $A \cup \Phi = A$; $A \cap U = A$;

零律: $A \cup U = U$; $A \cap \Phi = \Phi$;

分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

吸收律: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$;



$$A - A = \Phi;$$

$$A - B = A - (A \cap B);$$

$$(A - B) - C = A - (B \cup C);$$

$$A \cup (B - A) = A \cup B;$$

$$A - B = A \cap \overline{B};$$

否定律: $\overline{\overline{A}} = A$

DeMorgan律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

矛盾律: $A \cap \overline{A} = \Phi;$

排中律: $A \cup \overline{A} = U。$



无限集

无限集合无法用确切的个数来描述，因此，无限集合有许多有限集合所没有的一些特征，而有限集合的一些特征也不能任意推广到无限集合中去，即使有的能推广，也要做某些意义上的修改。



可数集合与不可数集合

问题 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 与 $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ 哪个集合的元素更多？

引入：自然数集合

二十世纪初，集合成为数学的基本概念之后，由冯·诺依曼（Von Neumann, J）用集合的方式来定义自然数取得了成功，提出了用序列 $\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}, \dots$ 来定义自然数。



自然数集合N的定义

$\Phi \in N$,

若 $n \in N$, 则 $n' := n \cup \{n\} \in N$ 。

也即: $0 := \Phi$,

$1 := \{\Phi\} = \{0\}$,

$2 := \{\Phi, \{\Phi\}\} = \{0, 1\}$

...

$n := \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$

...

故 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$




8 集合的应用

例：用H代表硬币正面，T代表硬币反面。试写出当扔出三个硬币时可能出现的结果所组成的集合。

解：8种可能：{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}。但这三个硬币没有顺序之分，即HHT和HTH是同一个元素，所以

$$A = \{HHH, HHT, HTT, TTT\}。$$



在20个大学生中，有10人爱好音乐，有8人爱好美术，有6人既爱好音乐又爱好美术。问既不爱好音乐又不爱好美术的学生有多少个？

答案是： 既不爱好音乐又不爱好美术的学生有8个。



总结：

集合是一种数学上最常用的概念，高中时讲的也很多，需要掌握集合的表示方法，以及常用的运算如：交、并、补、差等。