第二章 矩阵代数

习题自测

目的：掌握矩阵代数运算的定义、条件及运算性质.

一、基本概念

1. 矩阵的定义

由$m\times n$个数 a_{ij} (i=1,2,$\cdots$,m;j=1,2,$\cdots$,n)排成的m行n列的数表:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为m行n列的矩阵. 简称 $m\times n$ 矩阵.简记为:

$$A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}).$$

这$m\times n$个数a_{ij}称为矩阵A的元素.

元素是实数的矩阵称为实矩阵, 元素是复数的矩阵称为复矩阵.

2. 特殊矩阵

(1) 行数与列数都等于n的矩阵A, 称为n阶方阵. 也可记作A_n,

(2) 形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵, 称为对角矩阵

(或对角阵), 其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$不全为零. 记作

$$\mathrm{ding}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

(3) 如果E_n=diag($\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$)=diag(1,1,$\cdots$,1), 则称$E_n$为($n$阶)单位矩阵, 或简称单位阵. 简记为$E$.

(4) 元素全为零的矩阵称为零矩阵, $m\times n$ 阶零矩阵记作$O_{m\times n}$或O.

(5) 只有一行(列)的矩阵称为行(列)矩阵(或行(列)向量).

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix},$$

3. 同型矩阵和相等矩阵

1. 两个矩阵的行, 列数对应相等, 称为同型矩阵.

2. 两个矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$为同型矩阵, 并且对应元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots, n)$$

则称矩阵A与B相等, 记作$A=B$.

4. 矩阵的加法

设有两个同型的 $m\times n$ 矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$,那末矩阵A与B的和定义为$(a_{ij}+b_{ij})$, 记作$A+B$, 即

矩阵加法的运算规律

(1) 交换律: $A+B=B+A$.

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

矩阵$A=(a_{ij})$, 称 $-A=(-a_{ij})$为矩阵A的负矩阵.

$A+(-A)=O$, $A-B=A+(-B)$.

5. 数与矩阵相乘

数λ与矩阵$A=(a_{ij})$的乘积定义为(λa_{ij}), 记作λA或$A\lambda$, 简称为数乘.

数乘矩阵的运算规律

设A, B为同型的$m\times n$ 矩阵, λ, μ为数:

(1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

(2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$.

(3) $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$.

矩阵的加法与数乘运算, 统称为矩阵的线性运算.

6. 矩阵与矩阵相乘

设$A=(a_{ij})$是一个$m\times s$ 矩阵, $B=(b_{ij})$是一个$s\times n$ 矩阵, 定义矩阵A与矩阵B的乘积$C=(c_{ij})$是一个$m\times n$矩阵, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

($i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$). 并把此乘积记作$C=AB$.

矩阵乘法的运算规律

(1) 结合律: $(AB)C=A(BC)$;

(2) 分配律: $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$;

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$, 其中$\lambda$为数;

(4) $A_{m\times n}E_n=E_mA_{m\times n}=A$;

7. 转置矩阵

把矩阵A的行列互换, 所得到的新矩阵, 叫做矩阵A的转置矩阵, 记作A^T.

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$;

8. 方阵的运算

若A是n阶方阵, 则A^k为A的k次幂, 定义为

$$A^1 = A,\ A^{k+1} = A^k A^1, \ (\ k\text{为正整数}\ )$$

方阵的幂满足幂运算律: $A^k A^m = A^{k+m}$, $(A^m)^k = A^{mk}$, 其中k, m为正整数.

由n阶方阵A的元素所构成的行列式叫做方阵A的行列式，记作$|A|$或$\det A$.

方阵行列式的运算性质

(1) $|A^T| = |A|$;

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$.

9. 一些特殊的矩阵

设A为n阶方阵:

(1) 如果 $A^T = A$, 称A为对称矩阵;

(2) 如果 $A^T = -A$, 称A为反对称矩阵;

(3) 如果 $AA^T = A^T A = E$, 称A为正交矩阵;

(6) 主对角线以下(上)的元素都为零的方阵称为上(下)三角矩阵;

(7) 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

性质: $AA^* = A^*A = |A|E$.

10. 逆矩阵

对于 n 阶方阵 A, 如果存在一个 n 阶方阵 B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 是可逆的(非奇异的, 非退化的), 并称矩阵 B 为 A 的逆矩阵. A 的逆矩阵记作 A^{-1}.

(1) 若A是可逆矩阵, 则A的逆矩阵是唯一的.

(2) 矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$.

(3) 若A是可逆矩阵, 则 $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

(4) 若 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 $B = A^{-1}$.

(5) 若矩阵A可逆, 且$\lambda \neq 0$, 则 λA 亦可逆, 且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

(6) 若A, B为同阶可逆方阵, 则AB亦可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(7) 若矩阵A可逆, 则A^T亦可逆, 且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

(8) 若矩阵A可逆, 则有$|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

逆矩阵的计算方法:

(1)待定系数法;

(2)伴随矩阵法: $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*};$$

(3)初等变换法.

一、填空题

1. 设A为n阶方阵，A^*为其伴随矩阵，$\det A=\frac{1}{3}$，则

$$\det\left(\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-15A^*\right)=\_\_\_\_\_\_$$

2. 设3阶方阵$A\neq O$，$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&t\\3&5&3\end{pmatrix}$，且$AB=O$，则

$t=\_\_\_\_\_\_$

3. 已知$A^3=E$，则$A^{-1}=______$

4. 矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&5&0\\8&0&0\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}=______$

5. 设4阶矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\-1&2&2&5\\2&-1&1&3\end{pmatrix}$

则A的逆矩阵$A^{-1}=______$

6. 若n阶矩阵A满足方程$A^2+2A+3E=0$，则

$A^{-1}=\_\_\_\_\_\_$

7. 设A为三阶矩阵，且$|A|=1$，$\left|2A^{-1}+3A^*\right|=\_\_$

8. 设$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，则$A^n=______$

9 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求$A^k$ $(k\geq1)$.

10 设 $A=\frac{1}{2}(B+E)$. 证明：$A^2=A$当且仅当$B^2=E$.

11 设$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$求$A^k$ $(k\geq 2)$.

一、填空题

1. 设A为n阶方阵，A^*为其伴随矩阵，$\det A=\frac{1}{3}$，则

$$\det\left(\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-15A^*\right)=\underline{\qquad\qquad}$$

2. 设3阶方阵$A\neq O$，$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&t\\3&5&3\end{pmatrix}$，且$AB=O$，则

$t=\underline{\qquad\qquad}$

3. 已知$A^3 = E$,则$A^{-1} =$________

4.矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1} =$________

5. 设4阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

则A的逆矩阵 $A^{-1} =$________

6. 若n阶矩阵A满足方程$A^2+2A+3E=0$,则

$A^{-1}=$________

7. 设A为三阶矩阵,且$|A|=1$,$|2A^{-1}+3A^*|=$________

8. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,则$A^n=$______________

9 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$**, 求$A^k$ ($k \geq 1$).**

10 设 $A=\dfrac{1}{2}(B+E)$**. 证明：$A^2=A$当且仅当$B^2=E$.**

11 设 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 求 $A^k \quad (k \geq 2)$.

测试题答案

一、1.$(-1)^n 3$; 2.$t=4$; 3.A^2; 4.$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$5.A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 24 & -35 & 3 & -5 \\ -9 & 13 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$6.\ -\frac{1}{3}\left(A+2E\right);$$

$$7.\ 125; \qquad 8.\ \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

9 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求 A^k $(k\geq 1)$.

解：

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$=4E=2^2E$$

因此，当k为偶数时，$k/2$为整数，则

$$A^k=A^{2\times\frac{k}{2}}=(A^2)^{\frac{k}{2}}=(2^2E)^{\frac{k}{2}}=2^{2\times\frac{k}{2}}E=2^kE.$$

当k为大于1奇数时，k-1为偶数，此时由上面结论知

$$A^k=A^{(k-1)+1}=A^{k-1}A=2^{k-1}EA=2^{k-1}A.$$

此结论对于k=1情况也成立.

10 设 $A=\frac{1}{2}(B+E)$. 证明：$A^2=A$当且仅当$B^2=E$.

充要条件

证：充分性 若$B^2=E$，则

$$A^2=\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{4}(E+2B+E)$$

$$=\frac{1}{4}(2B+2E)\quad=\frac{1}{2}(B+E)=A$$

必要性 若已知$A^2=A$, 由于

$$A^2=\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E),\quad A=\frac{1}{2}(B+E)$$

故 $\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)$，化简得 $\frac{1}{4}B^2=\frac{1}{4}E$,

即 $B^2=E$.

11 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ 求 $A^k \quad (k \geq 2)$.

解1

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^2 & 6\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

由此归纳出

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (k \ge 2)$$

用数学归纳法证明

当 $k=2$ 时，显然成立.

假设 $k=n$ 时成立，则 $k=n+1$ 时，

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$
= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n} & \frac{(n+1)n}{2}\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n} \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix},
$$

所以对于任意的 $k \geq 2$ 都有

$$
A^{k} = \begin{pmatrix} \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k} \end{pmatrix}.
$$

解2 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda E+B$，其中 $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

数量矩阵λE和同阶矩阵B可交换. 且

$$B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B^k=0,(k\geq 3)$$

由二项式定理得:

$$\begin{aligned}A^k&=(\lambda E+B)^k\\ &=C_k^0\lambda^k E+C_k^1\lambda^{k-1}B+C_k^2\lambda^{k-2}B^2+\cdots+C_k^k B^k\\ &=\lambda^k E+k\lambda^{k-1}B+\frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2}B^2\end{aligned}$$

$$= \lambda^k E + k\lambda^{k-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

本次作业

第二章习题

- 14. (2)
- 15. (1) (3) (6)
- 16. (2)
- 17; 20; 21(1); 23
- 24; 25; 29

27