Chpt.6 Sampling and Distribution

第六章 样本及抽样分布

Introduction

概率论：

- 假设(已知)随机变量服从某一分布，研究它的性质、特点与规律，如数字特征、分布函数的特性；
- 人类客观对实践的总结形成了概率论；

但是我们可以问：

- 概率所描述的知识是如何获取的？
  比如，假如X服从正态分布，如何获取其参数？
- 实际中，如何判断一个随机变量是否服从某一分布。
  比如，如何判断X是否为正态分布？

Introduction

数理统计：

- 随机变量其分布未知或者不完全知道(如：是正态分布，但不知参数)，期望通过重复的、独立的观察得到许多数据，以概率论为理论基础，通过对这些数据的分析，估计分布的参数，乃至推断出随机变量的分布。

- 统计要进行抽样、需要推断，这些工作形成了一定的理论：统计推断理论.

统计推断的理论基础：

- 概率论

  描述了一些随机现象，以及研究随机现象的手段；

- 大数定理

  1 频率稳定性：事件A发生的频率以概率收敛到概率p

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{p} p \ (n \to \infty)$$

  2 算术均值稳定性：$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \xrightarrow{p} \mu \quad (n \to \infty)$

- 中心极限定理

  大量相互独立的随机因素的综合影响，尽管这诸多的因素之分布是未知的，但是他们的和服从正态分布。

6.1 样本概念--总体、个体

[定义]:

- 对某一数量（或几个）指标进行随机实验、观察，将试验的全部可能的观察值称为<u>总体</u>。
- 每个可能的观察值称为<u>个体</u>
- 总体中所包含的个体的总数称为总体的<u>容量</u>。容量有限的称为<u>有限总体</u>，容量为无限的称为<u>无限总体</u>。

总体是对对象某些指标的所有观察的值:
观察全校本科生的身高，得到12000个身高观测值；
扔硬币10000次，观察反正面的情况，得到10000个数值。
由此见到这些值有些会相同的，数目也可以是无限种的。

随机变量与总体的区别：

[1] 随机变量与基本随机事件相对应，随机变量显然只是一组互异的值，进一步对应每个值(或一个区间)出现的可能性大小

总体是从另一个角度，所有试验结果一一罗列出，所以可能出现大量相等的值。

Example: 随机抛一枚硬币，X表示随机变量，正面为0，反面为1

X	0	1
p	0.5	0.5

对此试验进行观察10000次，总体为

序号	1	2	3	4	…	10000
取值	0	1	0	0	…	1

随机变量与总体的区别：

[2] 总体中的每个值是对随机变量X的观察值，这样一个总体对应一个随机变量；

总体的研究 ⟷ 随机变量的X的研究

随机变量的分布、数字特征就称为总体的分布、数字特征

[3] 总体是从统计的角度看

随机变量是从概率角度看的

问题：在实际中总体的分布是未知的，如何解决？

途径一：逐个观察总体中的每个个体

不现实、不可行（具有破坏性、无限则不可能）

途径二：选取有代表性的个体

不知道总体，难以选择有代表性的个体

抽样：对总体进行一次观察并记录其结果（取值是多种可能），称为一次抽样；对X独立进行n次观察，并将结果按顺序记为 $X_1, \cdots, X_n$

样本：随机抽取部分个体，以用于推断总体的特性。

这是从理论上将抽样，实际中一经完成，得到一组实数值，

$x_1, \ x_2, \ \cdots, x_n$ 称为样本值。

从总体中抽取样本必须满足：

(1) 随机性　为使样本具有充分的代表性，抽样必须是随机的，应使总体中的每一个个体都有同等的机会被抽取到.

(2) 独立性　各次抽样必须是相互独立的，即每次抽样的结果既不影响其它各次抽样的结果，也不受其它各次抽样结果的影响.

称这种随机的、独立的抽样为简单随机抽样

由此得到的样本称为简单随机样本.

从总体中抽取样本必须满足：

若从总体中进行放回抽样，属于简单随机抽样，得到的样本就是简单随机样本；

若从有限总体中进行不放回抽样，则不是简单随机抽样。

当总体容量N很大而样本容量n较小($n/N \le 10\%$) 时，可近似看作放回抽样，从而可近似看作简单随机抽样，得到的样本也可近似地作为简单随机样本.

6.1 样本概念

从总体中抽取容量为n的样本，就是对代表总体的随机变量X随机地、独立地进行n次观测，每次观测的结果仍可以看作一个随机变量。

n次观测的结果就是n个随机变量：$X_1......X_n$，它们相互独立，并与总体X服从相同的分布.

若将样本$X_1......X_n$看作一个 n 维随机变量$(X_1......X_n)$, 则

(1) 当总体X是离散随机变量, 且概率分布为p(x)时，$(X_1......X_n)$的概率分布

$$p(x_1,\cdots,x_n)=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$$

(2) 当总体X是连续随机变量, 且概率密度为f(x)时，$(X_1......X_n)$的概率密度

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

6.2 统计量

背景：为了对总体X的某些概率特征(分布、均值、方差)作出推断，需要考虑各种适用的样本的，由函数满足的性质进一步得到一定的推断。

如大数定理（辛钦）：$X_1 \ldots\ldots X_n$独立同分布，且$E(X_i)=\mu$，

则 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

样本是总体X的代表和反映，容量为n的样本$X_1 \ldots\ldots X_n$，可以看作是一个n维随机变量$(X_1 \ldots\ldots X_n)$，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$

如果有一组样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，那么我们可以估计得到 $$\mu \approx \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)$$

6.2 统计量

来自总体X的n个样本X_1……X_n 构成n维随机变量 $(X_1…X_n)$，其函数 $g(X_1,\cdots,X_n)$ ，若其中不含任何未知量，则称其为统计量。

统计量都是随机变量，由样本X_1……X_n的观测值x_1……x_n，算得的函数值 $g(x_1,\cdots,x_n)$是统计量 $g(X_1,\cdots,X_n)$ 的观测值.

研究规律得用随机变量

实际应用可以直接用观测值了

常用统计量及其观测值：

(1) 样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 观测值为 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$

(2) 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

观测值为 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

(3) 样本标准差 $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

观测值为 $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

常用统计量及其观测值：

(4) 样本k阶原点矩 $$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$$

观测值为 $$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$$

(5) 样本k阶中心矩 $$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$$

观测值为 $$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k$$

我们来比较一下

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad Y_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

假 $\quad E(X_i)=\mu \qquad D(X_i)=\sigma^2$

则 $\quad \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad E(\bar{X})=\mu,\ D(\bar{X})=\frac{1}{n}\sigma^2$

$$S^2\xrightarrow{P}\sigma^2 \qquad Y_n^2\xrightarrow{P}\sigma^2$$

$$s^2\approx\sigma^2 \qquad y_n^2\approx\sigma^2$$

假如我们要用样本估计σ²时，用 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

而不用 $Y_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 。盖因前者均值为σ²

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i + \frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\frac{n}{n-1}\overline{X}^2 + \frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

$$E(X_i^2) = D\left(X_i\right) + \left(EX_i\right)^2$$

$$E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + \left(E\overline{X}\right)^2$$

$$E(\overline{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \frac{n}{n-1}E(\overline{X}^2)$$

$$= \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2\right)$$

$$= \sigma^2$$

$$Y_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{n-1}{n} \bullet \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{n-1}{n} S^2$$

$$E(Y_n^2) = \frac{n-1}{n} ES^2$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

6.3 抽样分布

样本是随机变量

统计量是样本的函数，从而统计量也是随机变量

统计量的分布称为抽样分布

为什么要研究抽样分布：

- 一般而言，总体分布已知，抽样分布也是知道的，但是确切得到是困难的；
- 从另外一个角度，我们希望由统计量的分布（特别是在观测值得到后），估计、推断出总体的一些特征。我们希望研究统计分布，以便作出统计推断。

几类抽样分布

- 样本均值分布 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$
- t分布 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S\big/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
- χ^2分布 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- *F*分布 $\dfrac{S_1^2\big/\sigma_1^2}{S_2^2\big/\sigma_2^2} \sim F\left(n_1-1, n_2-1\right)$

注意：以上是对X~N(μ，σ²)而言的；取得 n 个样本

一. 样本均值分布

假设总体分布的均值与方差都是已知的，那么我们可以对来自总体的多个样本的均值做出估计。

假设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体X的独立样本, 样本均值为 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 。一般情况下我们知道 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,\ 1)$

假设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的独立样本, 则样本均值 $\bar{X}$ 服从正态分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，标准量服从标准正态分布 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

二. t分布

当总体均值与方差已知 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$ ， $\{X_i\}$ 是来自总体的独立样本，我们知道 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 近似为标准正态分布 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$

由此可以估计 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 或 $\bar{X}$ 。

如果其中已知σ 我们就可以估计μ，或者反过来, 知道μ估计σ 。

如果X是正态分布，那就可以确切得到 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$

二. t分布

但是如果我们不知道σ时，尽管 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 可以估计，但还是无法由此估计μ

可以想到用样本标准差S来代替σ，即得到 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

但是一般我们根本不知道此服从何种分布，除非是正态分布。

二. t分布

[定理6.1] 若总体服从正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，$\{X_i\}, S$ 分别是来自总体的样本与样本标准差, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

那么随机变量 $t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 服从自由度为n-1的t分布，记为 $t \sim t(n-1)$ ，其概率密度为：

$$f_t(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{(n-1)\pi}}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad -\infty<t<+\infty$$

Remark1: 其中伽玛函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}du \qquad (\alpha>0)$，

有如下性质：

$$(1)\quad \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$(2)\quad \Gamma(n)=(n-1)!$$

$$(3)\quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

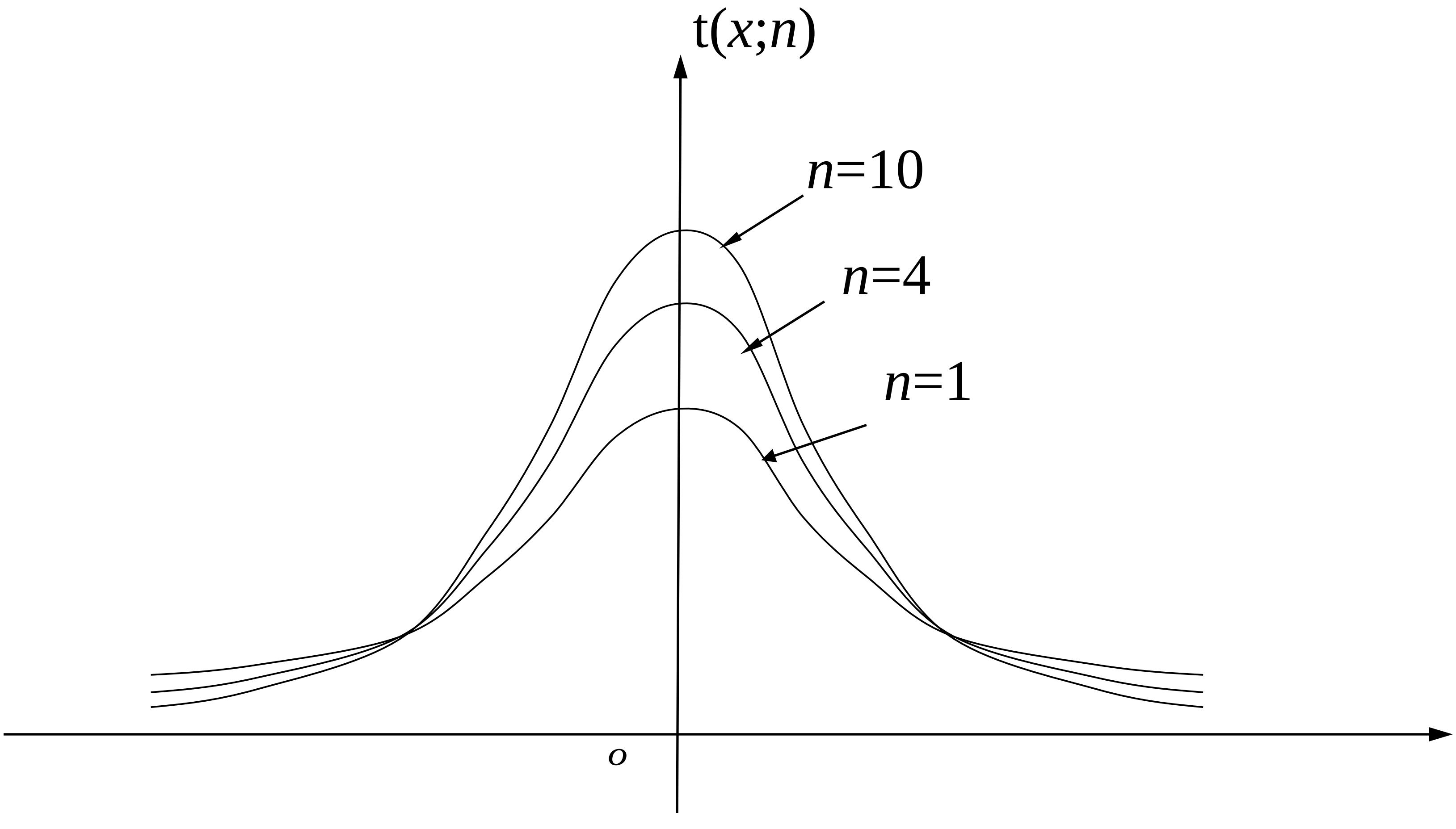
Remark2: 由定理可以知道总体为正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,

随机变量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 服从自由度为n-1的 t 分布。

$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 中如μ是非统计量(未知)，由对 t 的分析可以

估计出μ，而且是在σ也未知的情况下

Remark 3：t 分布的分布曲线关于 $t=0$ 对称；



Remark 3： t 分布的形式如上所言。之所以叫做 t 分布是因为在1900年代，Dublin城的W.S.Gosset用笔名“Student” 发表了一篇文章提出了该分布。

Remark 5：由 t 分布的出处，我们可以知道它是对 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的一个近似，而后者在n无限大时趋近于标准正态分布。故此，可以推测当自由度n无限增大时, t分布将趋近于标准正态分布 $N(0,1)$ ，或者

$$f_t(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

分位点

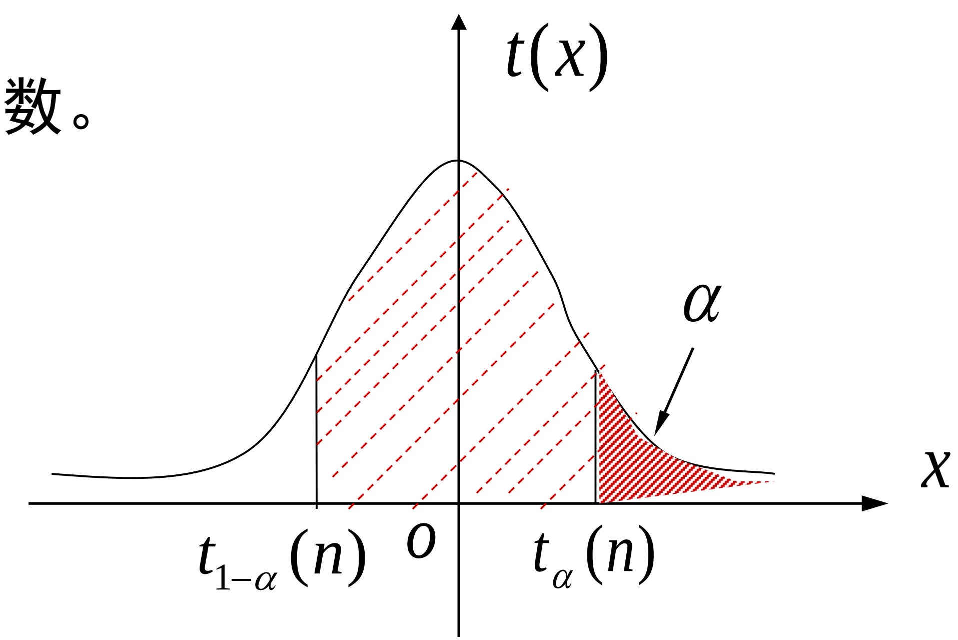
[分位点] 随机变量X, 对一个正数α (0< α <1) , 满足

$P\{X > x_\alpha\} = \alpha$ 的值 X $_\alpha$称为X分布的α分位数.

对不同的自由度n及不同的数 α (0< α <1) , 满足

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} f_t(t)dt = \alpha$$

的 $t_\alpha(n)$ 值称为t分布的α分位数。



由 $f_t(t)$ 的对称性知:

$$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$$

[定义] 若随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$ ，

则 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$，概率密度

$$f_t(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad -\infty < t < +\infty$$

注意到：此与前面的定理有相似之处。

前面定理说 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Problem：两者有什么关系吗？

三. χ^2 分布

前面我们更多地讨论了样本均值的分布，关于样本方差有何种分布？

一般的总体不会得到很直接的结果;

对于正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则统计量 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 服从自由度为n的 χ^2 分布. 事实上

$$Y_i = (X_i - \mu)/\sigma \sim N(0,1) \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

且相互独立，由以下定理知

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2 \sim \chi^2(n)$$

三. χ^2 分布

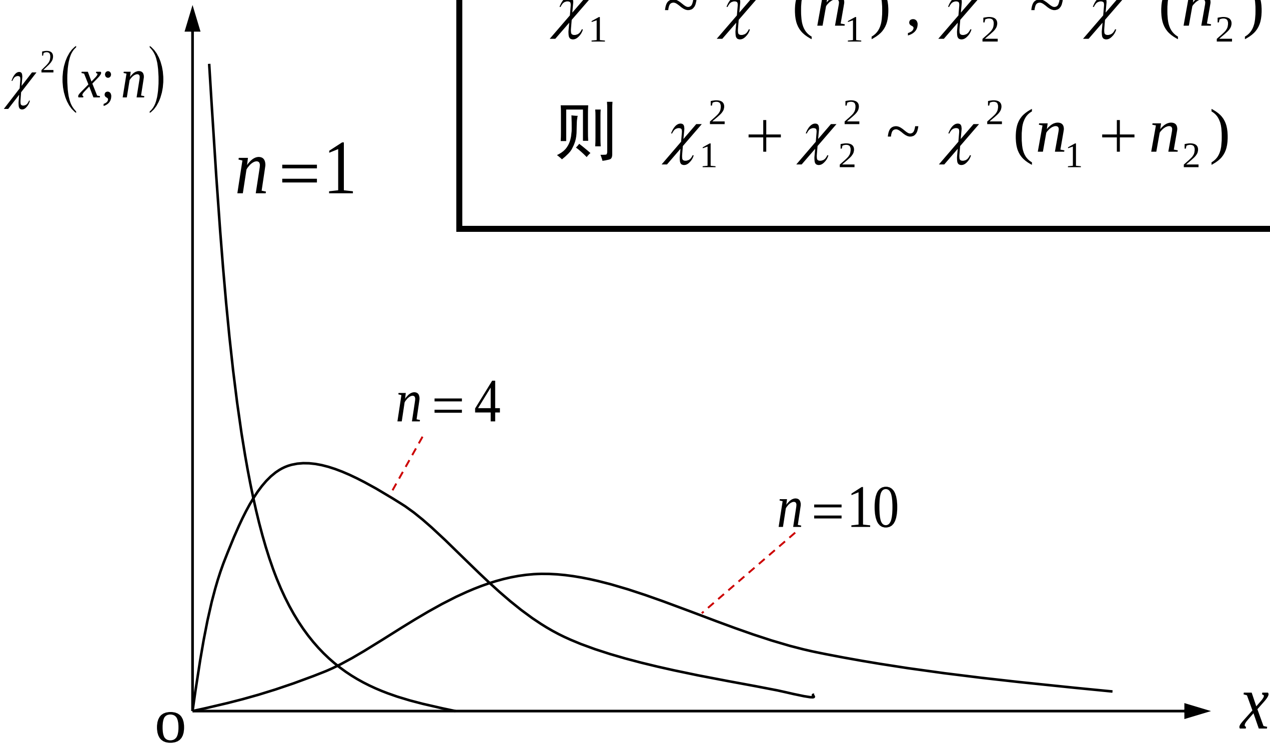
[定义6.3] 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自标准正态总体 $X\sim N(0,1)$ 的独立样本。则随机变量 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为n的 χ^2 分布，记为 $\chi^2(n)$，其概率密度：

$$f_{\chi^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0\qquad\qquad, & x\le 0\end{cases}$$

Remark 1：χ^2分布具有可加性，也就是说，

$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$，$\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$ 且它们相互独立，

则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$



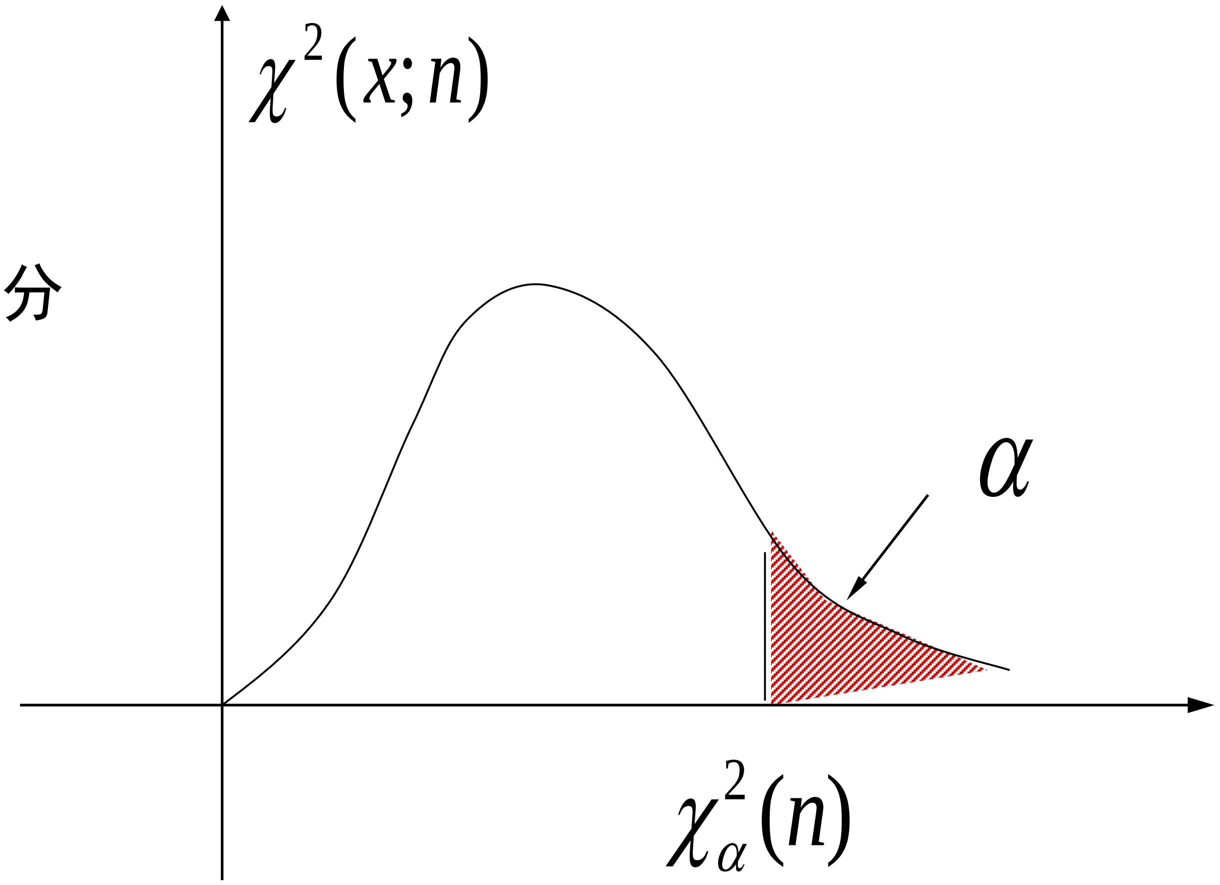
Remark 2：$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

则 $E(\chi^2) = n$ ，$D(\chi^2) = 2n$

对不同的自由度n及不同的数$\alpha(0<\alpha<1)$ ，满足的

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty} f(x)dx = \alpha$$

值 $\chi_\alpha^2(n)$ 称为χ^2分布的α分位数。



上面结果的作用：

假设正态分布X~N(μ，σ²)，N个样本 $X_1,\cdots,X_n$ ，观测值为 x_1，x_2，$\cdots,x_n$，知道 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从χ^2分布

- 在μ已知，可估计σ；或反之。
- 当均值μ未知时，考虑用 $(n-1)S^2=\sum_{k=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 来代替 $\sum_{k=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，一方面得到分布估计，另一方面可以估计σ。

[定理6.4] **S^2**是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的n个样本的方差，那么 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

四．二个正态总体的统计量的分布

有时，需要比较来自两个总体的样本的方差，$F = S_1^2 / S_2^2$

[定理6.5] 如果 S_1^2 和 S_2^2 是两个 n_1, n_2 独立样本的方差，来自两个具有相同方差（但是未知）的独立正态总体，那么 S_1^2 / S_2^2 服从参数为 $n_1 - 1, n_2 - 1$ 的F分布，记为 $F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

四．二个正态总体的统计量的分布

[定理6.6] 若随机变量$U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$,　U与V独立, 则

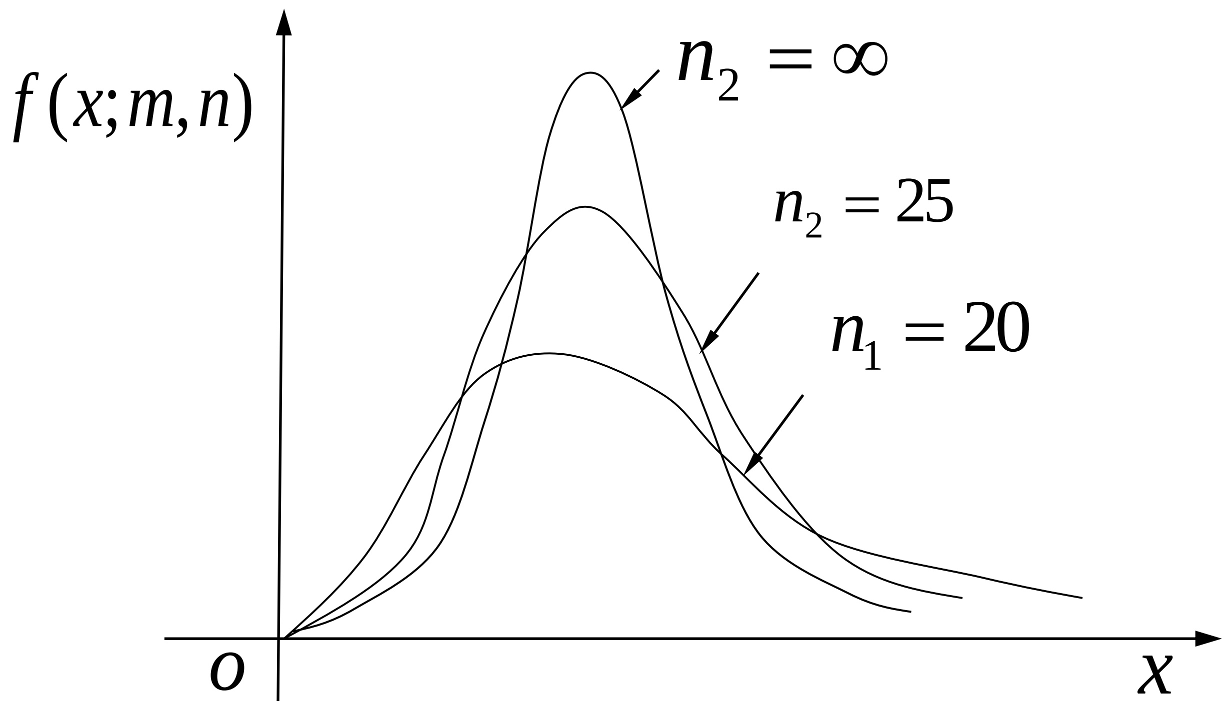
随机变量 $F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为（n_1, n_2）的 F 分布，记

为 $F \sim F(n_1, n_2)$ ，其概率密度为

$$f_F(z)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \dfrac{z^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 z+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & z>0 \\ 0 & z \le 0\end{cases}$$

F分布

$F \sim F(n_1, n_2)$ 其中分子的自由度 n_1 为第一自由度；分母的自由度 n_2 为第二自由度。

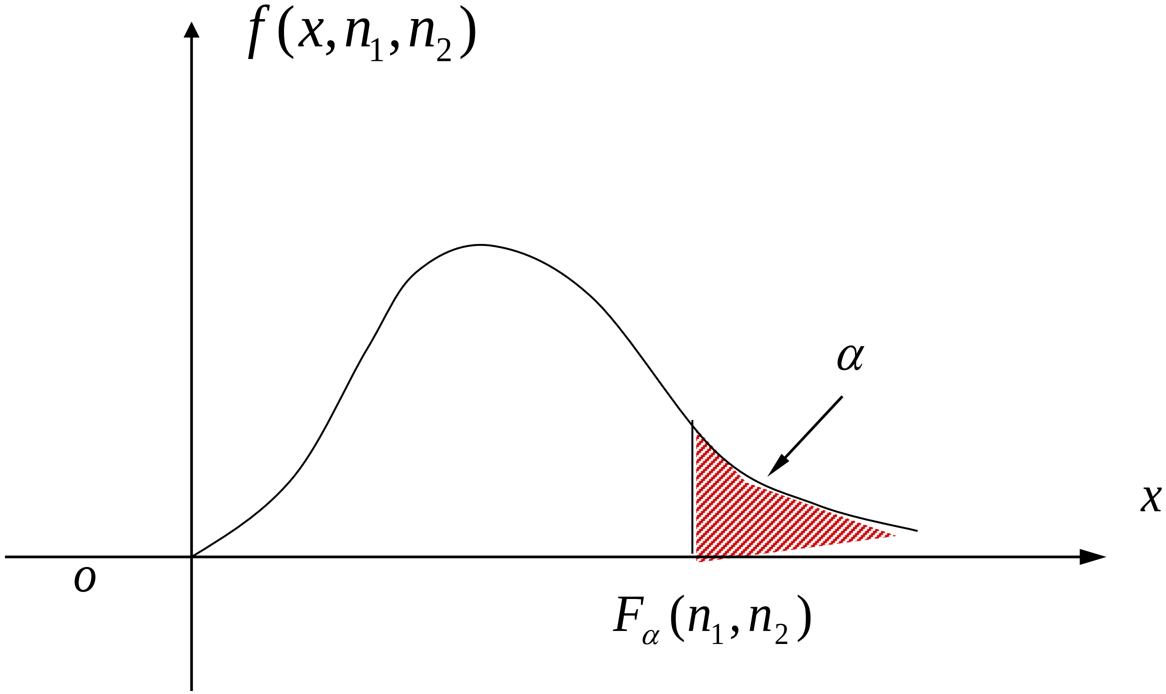


Remark 1：如果 $X \sim F(m, n)$，则 $\frac{1}{X} \sim F(n, m)$。

F分布

满足 $\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty} f(x;n_1,n_2)dx=\alpha$， $0<\alpha<1$

称 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为F分布的α分位点。



Remark 2：

$$F_\alpha(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}.$$

[定理6.7] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且两个样本独立。

$\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$，$\bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$ 分别是两个样本的样本均值

$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2$，$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}\left(Y_j - \bar{Y}\right)^2$ 是各样本方差

则有：

[1]

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

[2] $$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

[3] 当$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$时

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中 $S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

证明：

[1] 由 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是来自两个总体的简单样本

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$的线性组合 $\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$ 服从正态分布 $N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$

同理 $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

又由于 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 独立，其组合是正态分布，所以

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

其标准化随机变量 $\dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

[2] $$\chi_1^2=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)$$

$$\chi_2^2=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

由于S_1^2 与S_2^2 独立,

$$\frac{\chi_1^2/(n_1-1)}{\chi_2^2/(n_2-1)}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

[3] 随机变量$U=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$，由上知，统计量

$$\chi_1^2=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$$

$$\chi_2^2=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

又由于S_1^2 与 S_2^2 独立，利用χ^2分布的可加性知随机变量

$$V=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

随机变量U,V独立, 因此

$$\frac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n_1+n_2-2}}}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

[定理6.8] 假设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的独立样本，则样本均值 $\overline{X}$ 与样本方差 S^2 独立。

考研的试题中出现过本定理的应用！