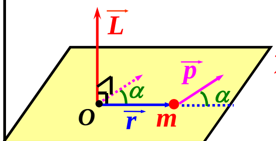
质点的角动量



质点 m 对惯性系中的固定点O 的角动量定义为：

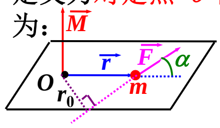
$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})}$$

大小：$L=rp\sin\alpha=rmv\sin\alpha$，单位：$\mathrm{kg-m^2/s}$

方向：⊥于$\vec{r}$，$\vec{p}$（$\vec{v}$）决定的平面（右螺旋）

二、质点的角动量定理，力矩

定义力对定点 O 的力矩（moment of force）为：



$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

$$M=rF\sin\alpha=r_0F$$

$r_0=r\sin\alpha$ 称力臂

$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

— 质点角动量定理（微分形式）

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$

—质点角动量定理（积分形式）

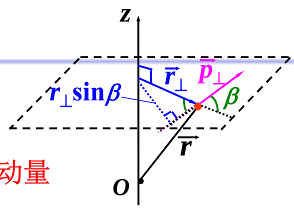
$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t$ 称冲量矩

——力矩对时间的积累作用

作用于质点的合外力对参考点 O 的力矩，等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率.

质点对轴的角动量

$$L_z=(\vec{r}_\perp\times\vec{p}_\perp)\cdot\vec{k}$$
$$=p_\perp r_\perp\sin\beta$$



—— 质点对轴的角动量

对轴的角动量定理

$$\vec{M}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}\cdot\vec{k})$$

即 $\boxed{M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}}$ —— 质点对轴的角动量定理

角动量守恒定律

$\boxed{\text{若 }\vec{M}=0\text{，则 }\vec{L}=\text{常矢量}}$

— 质点角动量守恒定律

$\boxed{\text{若 }M_z=0\text{，则 }L_z=\text{常量}}$

—质点对轴的角动量守恒定律

质点系的角动量

$\boxed{\vec{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$ — 质点系角动量定理

$\boxed{\text{若 }\vec{M}_{外}=0\text{，则 }\vec{L}=\text{常矢量}}$

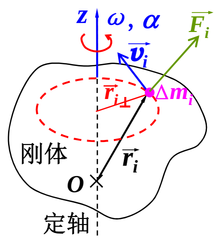
—质点系角动量守恒定律

小结：动量与角动量的比较

动量 $\vec{p}=\sum_i m_i\vec{v}_i$	角动量 $\vec{L}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i$
矢量	矢量
与固定点无关	与固定点有关
与内力无关	与内力矩无关
守恒条件 $\sum_i\vec{F}_i=0$	守恒条件 $\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i=0$

第五章 刚体定轴转动

—刚体的定轴转动定律



$$\vec{M}_{外} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (对\ O\ 点)$$

$$M_{外z} = \frac{dL_z}{dt} \quad (对\ z\ 轴)$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i v_i r_{i\perp}$$

$$= (\sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2)\cdot\omega$$

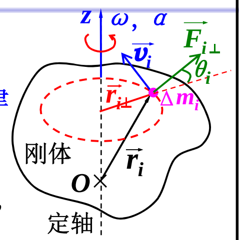
令 $\boxed{J_z = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2}$ —转动惯量（对z轴）

（rotational inertia）

则 $\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$

$$M_{外z} = \frac{dL_z}{dt} = J_z\frac{d\omega}{dt}$$

即 $\boxed{M_{外z} = J_z\alpha}$ —转动定律



其中 $M_{外z} = \sum_i F_{i\perp} r_{i\perp}\cdot\sin\theta_i$

定轴情况下，可不写下标 z，

记作： $\boxed{M = J\alpha}$

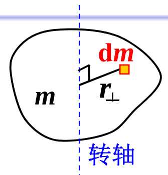
与牛顿第二定律相比，有：

M 相应 F， J 相应 m， α 相应 a。

转动惯量的计算

质点系 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体 $J = \int_m r_\perp^2 \cdot dm$



（1）与刚体的体密度 ρ 有关.

（2）与刚体的几何形状(及体密度 ρ 的分布)有关.

（3）与转轴的位置有关.

刚体是连续分布的情况下，其质量亦是连续分布的

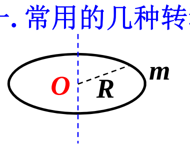
$$J_z = \lim_{N\to\infty}\sum_i m_i R_i^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_i \Delta m_i R_i^2 = \int_V R^2 dm$$

体分布 $dm = \rho dv$

面分布 $dm = \sigma ds$

线分布 $dm = \lambda dl$

一. 常用的几种转动惯量表示式

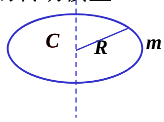


细圆环： $\boxed{J_O = mR^2}$

例. 质量为 m，半径为R的均匀平面圆环，

对垂直于平面的对称轴的转动惯量

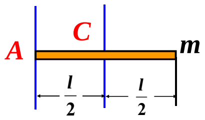
解：



$$dm = \lambda dl$$

$$\therefore J_z = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi R}\frac{m}{2\pi R}R^2 dl$$

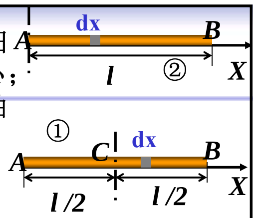
$$= mR^2$$



均匀细杆：

$\boxed{J_C = \frac{1}{12} ml^2}$ $\boxed{J_A = \frac{1}{3} ml^2}$

例 长为 l，质量为 M 的细长均质均匀棒，绕①过质心；②过端点，而垂直于棒的轴的 。J

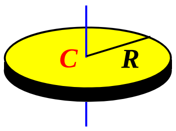


解：设其线密度为λ

① $dJ = x^2 dm = x^2 \lambda dx = x^2 \frac{M}{l} dx$

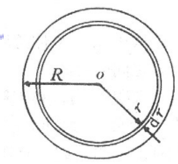
$$\therefore J_0 = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{M}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} Ml^2$$

② $J_0' = \int_0^l x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{1}{3} Ml^2$



m 均匀圆盘： $\boxed{J_C = \frac{1}{2} mR^2}$

解：设其体密度为ρ



$$M = (\pi R^2 \cdot h)\rho$$

$$dm = 2\pi r h \rho dr$$

$$dJ = dm \cdot r^2 = 2\pi r h \rho r^3 dr$$

$$J = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr = \frac{1}{2} \pi R^4 h \rho = \frac{1}{2} MR^2$$

讨论：

①若为实心圆柱体绕中心轴转动 $J = \frac{1}{2} MR^2$

②若一空心圆柱体绕中心轴转动

$$J = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi h \rho r^3 dr = \frac{1}{2}(\pi R_2^2 h \rho) R_2^2 - \frac{1}{2}(\pi R_1^2 h \rho) R_1^2$$

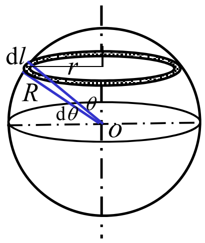
$$= \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \qquad M = \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho$$

薄球壳绕直径的 $J = \frac{2}{3} mR^2$

实心球绕直径的 $J = \frac{2}{5} mR^2$

求质量 m，半径 R 的薄球壳对直径的转动惯量



解：取离轴线距离相等的点的集合为积分元

$$ds = 2\pi r dl = 2\pi R\sin\theta \cdot R d\theta$$

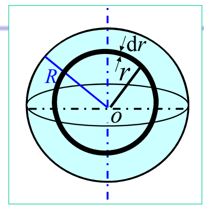
面密度 $\sigma = \frac{m}{4\pi R^2}$

$$dm = \sigma ds = \frac{1}{2} m \sin\theta d\theta$$

$$dJ = r^2 dm = (R\sin\theta)^2 dm = \frac{1}{2} mR^2 \sin^3\theta d\theta$$

$$J = \int dJ = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} mR^2 \sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3} mR^2$$

求质量 m，半径 R 的球体对直径的转动惯量



解：以距中心 r，厚 dr 的球壳为积分元

$$\left.\begin{aligned} dV &= 4\pi r^2 dr \\ \rho &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \end{aligned}\right\} dm = \rho\, dV$$

$$dJ = \frac{2}{3} dm \cdot r^2 = \frac{2mr^4 dr}{R^3}$$

$$J = \int dJ = \int_0^R \frac{2mr^4 dr}{R^3} = \frac{2}{5} mR^2$$

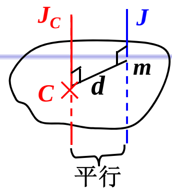
二. 计算转动惯量的几条规律

1. 对同一轴J具有可叠加性(如空心圆柱体)

$$\boxed{J = \sum J_i}$$

2. 平行轴定理

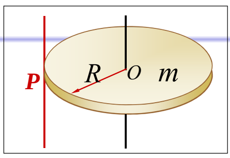
$$\boxed{J = J_C + md^2}$$



$\therefore \quad J_C = J_{min}$

质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为 J_C，则对任一与该轴平行，相距为 d 的转轴的转动惯量

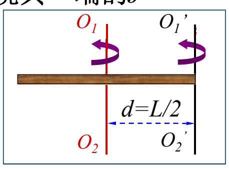
$$J = J_c + md^2$$



圆盘对P 轴的转动惯量

$$J_P = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2$$

质量为m，长为L的细棒绕其一端的J

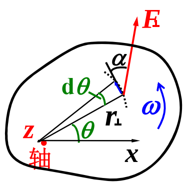


$$J_c = \frac{1}{12} mL^2$$

$$J = J_c + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} mL^2$$

定轴转动中的功能关系

一. 力矩的功



力矩的空间积累效应：

$$\begin{aligned} dW &= F_\perp \cos\alpha (r_\perp d\theta) \\ &= (F_\perp \cos\alpha \cdot r_\perp) d\theta \\ &= M d\theta \end{aligned}$$

力矩的功： $\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta}$

二. 定轴转动动能定理

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

令转动动能： $\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$ （$\omega\uparrow\rightarrow E_k\uparrow\uparrow$）（飞轮储能）

（可证：$\frac{1}{2}J\omega^2=\sum\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$）

刚体定轴转动动能定理： $\boxed{W=E_{k2}-E_{k1}}$

刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

讨论力矩对时间的积累效应。

质点系：对点 $\vec{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ ，$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$

对轴 $\int_{t_1}^{t_2}M_{外z}\,\mathrm{d}t=L_{2z}-L_{1z}$

刚体 $L_z=J_z\omega$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}M_{外z}\,\mathrm{d}t=J_z\omega_2-J_z\omega_1}$$

—— 刚体定轴转动的角动量定理

刚体定轴转动的角动量守恒定律：

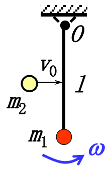
$\boxed{M_{外z}=0，\ 则\ J_z\omega=\text{const.}}$ $\begin{cases}大小不变\\正、负不变\end{cases}$

对刚体系，$M_{外z}=0$ 时，$\sum J_{iz}\omega_i=\text{const.}$，

此时角动量可在系统内部各刚体间传递，而却保持刚体系对转轴的总角动量不变。

[例] 一长为 l 的轻质杆端部固结一小球 m_1，另一小球 m_2 以水平速度 v_0 碰杆中部并与杆粘合。

求：碰撞后杆的角速度 ω



解：选 m_1（含杆）+ m_2 为系统

碰撞时重力和轴力都通过 O，对 O 力矩为零，故角动量守恒。

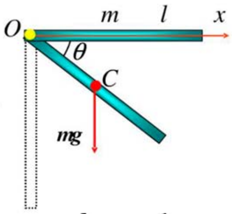
有 $\frac{l}{2}m_2v_0=lm_1\omega l+\frac{l}{2}m_2\omega\frac{l}{2}$

解得： $\omega=\frac{2m_2}{4m_1+m_2}\cdot\frac{v_0}{l}$

思考 在转动过程中如果受到恒定阻力矩，则杆和小球转过的角度？

一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置.

求 它由此下摆 θ 角时的 ω.



解：用机械能守恒定律

直棒竖直时的最低点为零势能点

因为只有保守内力作功，机械能守恒

$E_1=mgl$

$E_2=\frac{1}{2}J\omega^2+mg(l-\frac{l}{2}\sin\theta)$

$\because E_1=E_2$

$\therefore mgl=\frac{1}{2}J\omega^2+mg(l-\frac{l}{2}\sin\theta)$

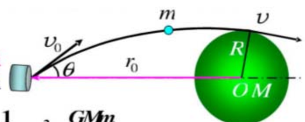
即 $mg\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}J\omega^2$

$J=\frac{1}{3}ml^2$

$\omega=(\frac{3g\sin\theta}{l})^{1/2}$

角加速度？

发射一宇宙飞船去考察一 质量为 M，半径为 R 的行星.当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时，以速度 v_0 发射一质量为 m 的仪器。要使该仪器恰好掠过行星表面。求 θ 角及着陆滑行时的速度多大?



解 引力场（有心力）

系统的机械能守恒

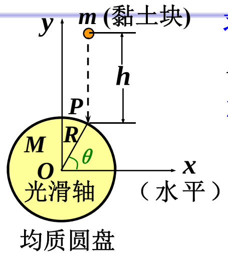
质点的角动量守恒

$$\begin{cases}\frac{1}{2}m\upsilon_0^2-\frac{GMm}{r_0}=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{GMm}{R}\\ m\upsilon_0r_0\sin(\pi-\theta)=m\upsilon R\end{cases}$$

$\Rightarrow\ \upsilon=\frac{\upsilon_0r_0\sin\theta}{R}=4\upsilon_0\sin\theta$

$$\sin\theta=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3GM}{2R\upsilon_0^2}\right)^{1/2}\qquad \upsilon=\upsilon_0\left(1+\frac{3GM}{2R\upsilon_0^2}\right)^{1/2}$$

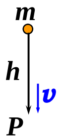
[例3] 如图示,已知：h，R，M=2m，ω=60°



求：碰撞后的瞬间盘 $\omega_0 = ?$

P 转到 x 轴时盘 $\omega = ?$，$\alpha = ?$

解：　m下落：



$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

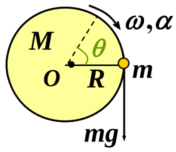
$$\upsilon = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

对（m+盘），碰撞中重力对O 轴力矩可忽略，

系统角动量守恒：　$m\upsilon R\cos\theta = J\omega_0$　(2)

（m+盘）角动量 $J = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = 2mR^2$ (3)

由(1)(2)(3)得：　$\omega_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta$　(4)



对（m + M +地球）系统，

只有重力作功，E守恒。

令P、x 重合时 E_P = 0，则：

$$mgR\sin\theta + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (5)$$

(3)(4)(5)得：

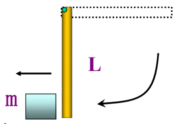
$$\omega = \sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta + \frac{g}{R}\sin\theta} = \frac{1}{2R}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}(h+4\sqrt{3}R)}$$

$(\theta = 60^\circ)$

$$\alpha = \frac{M_{外}}{J} = \frac{mgR}{2mR^2} = \frac{g}{2R}$$

例4：长为L，质量为M的均匀杆，一端悬挂，由水平位置无初速度地下落，在铅直位置与质量为m的物体A做完全非弹性碰撞，碰后，物体A沿摩擦系数为μ的水平面滑动。

求：物体A滑动的距离。



解：整个过程分为三个阶段

1、杆由水平位置绕端点的轴转动：机械能守恒

2、与A作完全非弹性碰撞：角动量守恒

3、A滑动：动能被摩擦力耗散掉。

第一阶段：机械能守恒

	动能	势能
初：	0	Mg（L/2）
终：	（1/2）$J_z\omega^2$	0

∴　（1/2）$J_z\omega^2$＝Mg（L/2）

其中J_z＝(1/3)ML^2

∴　ω^2＝3g/L

第二阶段：角动量守恒

初：　$J_z\omega$

终：　$J_z\omega' + mL^2\omega'$

∴　$J_z\omega = J_z\omega' + mL^2\omega'$

代入J_z和ω值得：

$$\frac{1}{3}ML^2\sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{3}ML^2\omega' + mL^2\omega'$$

$$\omega' = \frac{M\sqrt{\frac{3g}{L}}}{M+3m}$$

第三阶段，动能定理

A的速度：ω'L ；摩擦力mgμ

$$\frac{1}{2}m(l\omega')^2 = mg\mu s$$

$$s = \frac{3LM^2}{2\mu(M+3m)^2}$$

第六章 振动

振动：
- 受迫振动 ⟶ 共振
- 自由振动：
  - 阻尼自由振动
  - 无阻尼自由振动：
    - 无阻尼自由非谐振动
    - 无阻尼自由谐振动（简谐振动）

本章重点：简谐振动

（理想化模型）

1. 简谐振动是某些实际振动的近似
2. 简谐振动可用来研究复杂振动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

三. 描述谐振动的物理量

1. 振幅： A
2. 角频率： $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
3. 频率： $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$
4. 周期： $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
5. 相位： $\omega t + \varphi$
6. 初相位： φ

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

四. 谐振动中的速度和加速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$
$$= v_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$
$$= a_m \cos(\omega t + \varphi \pm \pi)$$

一. 弹簧振子和弹性力 （其他如单摆、复摆）弹性力： $\vec{f} = -k\vec{x}$

二. 谐振动的特征

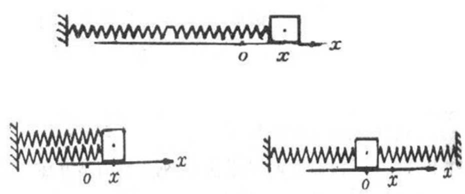
1. 动力学特征： $\vec{f} = -k\vec{x}$ 且 $\vec{f} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$
2. 运动学特征

特征方程： $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

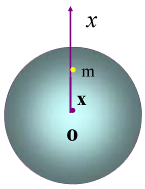
方程的解： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 谐振子的运动学方程

振动方程、振动函数

两弹簧劲度系数都为 k，（1）串联后与质量为m的质点相连，（2）并联后与该质点相连，（3）将质点串在两弹簧中间。在坐标原点两弹簧正好无形变，分别求振动体系的固有角频率。



例. 设地球为密度均匀的球，密度为 ρ ，在其内沿直径隧道放一质点，若只考虑万有引力，求小质点作何种运动?



解：从动力学进行分析

（1）地球球心为坐标原点作ox轴，当质点于某位置x时，其受力

$$F=-G\frac{M'm}{x^2}$$

式中 M'为半径为 x 的地球质量，若地球质量密度为 ρ，则

$$M'=\frac{4}{3}\pi x^3\rho$$

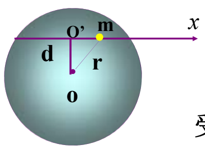
所以 $F=-G\dfrac{\frac{4}{3}\pi x^3\rho m}{x^2}=-Gm\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)x=-kx$

$\therefore$ 质点作简谐振动

振动周期及频率

$$T=2\pi/\omega \qquad \omega^2=\frac{Gm\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{m}=G\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

如果隧道不是沿直径，而是沿一条弦，设想在离地心d距离处开一条内壁光滑的小孔道，则再解此题



解：从动力学进行分析

（1）地球球心为坐标原点作oo'垂直于弦， om距离为r, 设o'm为x时，

受万有引力为 $-\frac{4}{3}Gm\pi r\rho$

其x分量为: $-\frac{4}{3}Gm\pi r\rho\cdot\frac{x}{r}=-\frac{4}{3}\pi Gm\rho x$

x方向微分方程: $-\frac{4}{3}\pi Gm\rho x=m\frac{d^2x}{dt^2}$

质点作简谐振动 $\omega=\sqrt{4\pi G\rho/3}$

振动周期及频率

$$T=2\pi/\omega \qquad \omega^2=\frac{Gm\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{m}=G\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

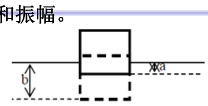
这种情况得到的周期与通过地心的情况相同

设 $t=0$ 时 $x=x_0$ $v=v_0$

$$\begin{cases}x_0=A\cos\varphi\\ v_0=-\omega A\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$tg\varphi=-v_0/\omega x_0\Rightarrow\varphi=tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

一立方体木块浮于静水中，开始时浸入部分的高度为a。今用手指沿竖直方向将其慢慢压下，使其浸入部分的高度为b，然后放手任其运动. 若不计水对木块的粘滞阻力，试证明木块的运动是谐振动，并写出振动表达式，求出振动的周期和振幅。



解：已知木块作简谐振动，其回复力必取：

$f=-kx$ 的形式，回复力是重力和浮力的合力。

块的平衡条件为: $m_{木}g=Sa\rho_{水}g \quad \therefore m_{木}=Sa\rho_{水}$

以静浮时下底面所在位置为坐标原点，x 轴向下为正，

当下底面有位移 x 时木块所受回复力为:

$$f=-S\rho_{水}(x+a)g+m_{木}g=-S\rho_{水}gx=-kx$$

其动力学方程为:

$$\therefore\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

$\omega^2=g/a$

证明为谐振动

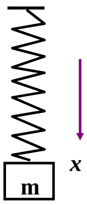
运动学方程

$$x=A\cos(\omega t+\phi)$$

$$k=S\rho_{水}g$$

$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{Sa\rho_{水}}{S\rho_{水}g}}=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

一根原长为L，劲度系数为K的轻质弹簧竖直悬挂，下端系一质量为m的重物，如图所示。求：
（1）忽略空气阻力，写出系统振动的动力学方程；
（2）证明该系统为一简谐振动系统；
（3）求系统的固有角频率。



解：（1）选重物的平衡位置为坐标原点，向下为正方向的x轴坐标系，设重物平衡时，弹簧的伸长量为X_0，则重物在X坐标处时：

$$mg=kx_0$$

$$m\frac{dx^2}{dt^2}=mg-k(x_0+x)$$

即 $$m\frac{dx^2}{dt^2}=-kx$$

（2）令 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$

则 $$\frac{dx^2}{dt^2}=-\omega^2 x$$

其解为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

证明该运动为简谐振动

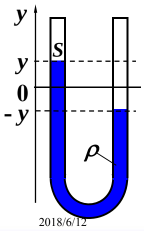
（3）系统的固有角频率为：

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

另一解法：也可选弹簧自然长度时重物位置为坐标原点

[例]已知：*U* 形管内液体质量为*m*，密度为ρ，管的截面积为*S*。开始时，造成管两边液柱面有一定的高度差，忽略管壁和液体间的摩擦。

试判断液体柱振动的性质。



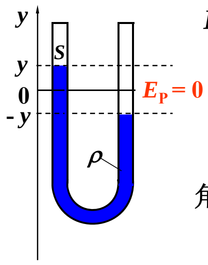
分析：方法一 ，分析受力规律

恢复力 $F=-2\rho gSy \overset{令}{=} -ky$

$k = 2\rho gS = \text{const}$. } SHM

角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

方法二，分析能量



$E_p=(\rho gSy)\cdot y=\dfrac{1}{2}ky^2$

$k = 2\rho gS$

无损耗 $E = \text{const}$.

} SHM

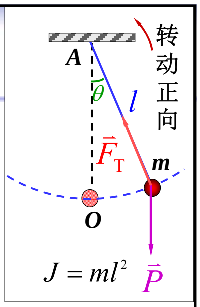
角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

方法三，建立微分方程（自己完成）

还有其他类型的简谐振动（作业题也要看）

2、单摆

摆线偏角以竖直方向向右为正



$$\vec{M}_z=[\vec{r}\times(m\vec{g}+\vec{T})]_Z=(\vec{r}\times m\vec{g})_z$$

$$=-mgl\sin\theta\approx mgl\theta$$

$\theta<5^\circ$ 时, $\sin\theta\approx\theta$

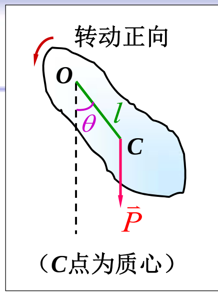
$\boxed{M_{外z}=J_z\alpha}$ —转动定律

$$-mgl\theta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgl\theta=ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$$

$\omega^2=g/l$ $\quad\theta=\Theta\cos(\omega t+\varphi)\quad T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

3、复摆 （$\theta<5^\circ$）



$$\vec{M}=\vec{l}\times\vec{F}$$

$$M=-mgl\sin\theta$$

$$=J\beta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgl\,\theta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

令 $\omega^2=\dfrac{mgl}{J}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega^2\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega^2\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$\theta=\Theta\cos(\omega t+\varphi)$ 角谐振动

简谐振动，定义如下

（1）动力学定义：凡是受弹性力或准弹性力作用而引起的运动，是简谐振动。也是凡是运动微分方程为的运动 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$

是简谐振动

（2）运动学定义：一个物理量随时间的变化规律为 $A\cos(\omega t+\varphi)$

其中 ω 由系统本身性质决定。则这个物理量描述的运动为简谐振动。

第七章 波动

一、产生机械波的条件

1、波源　2、弹性媒质

二、机械波的分类

横波：质点的振动方向和波的传播方向垂直

特点：具有波峰和波谷（如绳子上的波）

纵波：质点的振动方向和波的传播方向平行

特点：具有疏密相间的区域（如声波）

波的特征量及其几何描述

特征量：波长　波的周期和频率　波速

1　波长　λ

波传播方向上相邻两振动状态完全相同的质点间的距离（一完整波的长度）.

2　周期　T

波传过一波长所需的时间，或一完整波通过波线上某点所需的时间.

$T=\lambda/u$

3　频率 ν

单位时间内波向前传播的完整波的数目.

(s1　内向前传播了几个波长)

4　波速

波在介质中传播的速度

四个物理量的联系

$\nu=1/T$　　$u=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu$　　$\lambda=\frac{u}{\nu}=Tu$

周期或频率只决定于波源的振动，

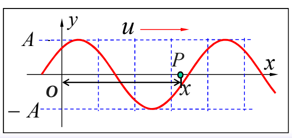
波速只决定于介质的性质

设有一平面简谐波沿 轴正方向传播，波速为 ，坐标原点 处质点的振动方程为

$$y_O=A\cos(\omega t+\varphi)$$

y_0表示质点 O 在 t 时刻离开平衡位置的距离.

考察波线上 P 点(坐标 x)，P 点比 O 点的振动落后 $\Delta t=\frac{x}{u}$，P 点在 t 时刻的位移是 O 点在 $t-\Delta t$ 时刻的位移，由此得



$$y_P = y_O(t-\Delta t) = A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi]$$

$$= A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

由于P为波传播方向上任一点，因此上述方程能描述波传播方向上任一点的振动，具有一般意义，即为沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的波函数，又称波动方程.

利用 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ 和 $\lambda = uT$

可得波动方程的几种不同形式：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right]$$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

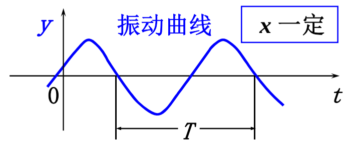
质点的振动速度，加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

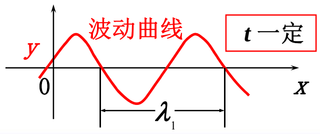
$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

3. 波函数的意义 $y(x,t) = A\cos[(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)+\varphi_0]$

（1） x 一定，$y \sim t$ 给出 x 点的振动方程。



（2） t 一定， $y \sim x$ 给出 t 时刻空间各点位移分布



[例] 一平面简谐波沿 O轴正方向传播，已知振幅 $A=1.0\text{ m}$，$T=2.0\text{ s}$，$\lambda=2.0\text{ m}$. 在t=0时坐标原点处的质点在平衡位置沿 Oy轴正向运动. 求：(1)波动方程；(2)$t=1.0\text{ s}$波形图；

(3) $x=0.5\text{ m}$ 处质点的振动规律并作图.

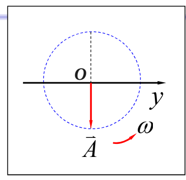
解 (1) 写出波动方程的标准式

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi_0}]$$

$t=0 \quad x=0$

$$y=0,\ v=\frac{\partial y}{\partial t}>0 \quad \boxed{\varphi_0=-\frac{\pi}{2}}$$



$$y = \cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]\ \textbf{(m)}$$

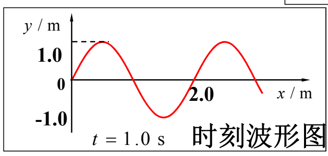
(2) 求 $t=1.0\text{s}$ 波形图

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

$$y=1.0\cos[\frac{\pi}{2}-\pi x]$$

$$=\sin \pi x\ \ \textbf{(m)}$$

$t=1.0$ s
波形方程



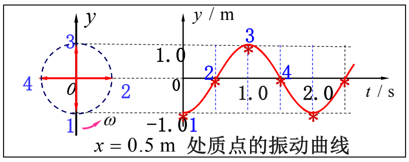
时刻波形图

(3) $x=0.5\text{m}$ 处质点的振动规律并作图

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

$x=0.5\text{m}$ 处质点的振动方程

$y=\cos[\pi t-\pi]$ (m)



$x=0.5$ m 处质点的振动曲线

7.4 波的能量

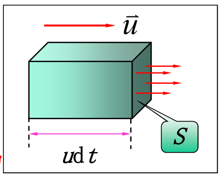
能流密度（波的强度）I:

通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流.

$$\overline{P}=\overline{w}uS$$

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\overline{w}u$$

$$I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$$



推广：任何形式的周期性波动其能量正比于振幅A^2和速度u