例　质量为 0.10 kg 的物体，以振幅 1.0×10^{2} m 作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，求：

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

已知 $m=0.10\ \mathrm{kg}$，$A=1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$，$a_{\max}=4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 求：(1) T；(2) $E_{k,\max}$

解（1）$a_{\max}=A\omega^2$　$\omega=\sqrt{\dfrac{a_{\max}}{A}}=20\ \mathrm{s^{-1}}$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\ \mathrm{s}$$

（2）$E_{k,\max}=\dfrac{1}{2}mv_{\max}^2=\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2$

$$=2.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

已知 $m=0.10\ \mathrm{kg}$，$A=1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$，$a_{\max}=4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 求：(3) 总能量 E；(4) 何处动势能相等?

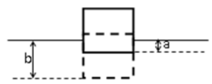
解（3）$E=E_{k,\max}=2.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$

（4）$E_k=E_p$ 时　$E_p=1.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$

由　$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$

$$x^2=\frac{2E_p}{m\omega^2}=0.5\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}\Rightarrow x=\pm0.707\ \mathrm{cm}$$

【例】一立方体木块浮于静水中，开始时浸入部分的高度为**a**。今用手指沿竖直方向将其慢慢压下，使其浸入部分的高度为**b**，然后放手任其运动. 若不计水对木块的粘滞阻力，试证明木块的运动是谐振动，并写出振动表达式，求出振动的周期和振幅。



解：已知木块作简谐振动，

其回复力为：　$f=-kx$

回复力是重力和浮力的合力。

木块的平衡条件为：　$m_木 g=Sa\rho_水 g$　$\therefore m_木=Sa\rho_水$

以静浮时下底面所在位置为坐标原点，**x**轴向下为正，当下底面有位移**x**时木块所受回复力为：

$$f=-S\rho_水(x+a)g+m_木 g=-S\rho_水 gx=-kx$$

其动力学方程为：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$　ω²=g/a，证明为谐振动

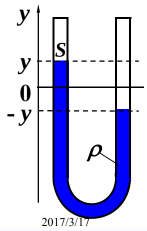
运动学方程：　$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\therefore T=2\pi/\omega=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

取刚放手时为初始时刻，则：

$x_0=b-a$　　$v_0=0$　　$A=\sqrt{x_0+\dfrac{v_0}{\omega^2}}=b-a$

[例] 已知：**U** 形管内液体质量为**m**，密度为**ρ**，管的截面积为**S**。开始时，造成管两边液柱面有一定的高度差，忽略管壁和液体间的摩擦。试判断液体柱振动的性质。

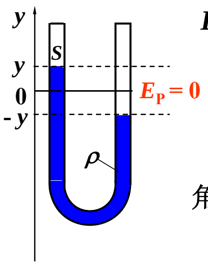


分析：方法一 ，分析受力规律

恢复力　$F=-2\rho gSy\overset{令}{=}-ky$ 　$k=2\rho gS=\mathrm{const}$. } **SHM**

角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

方法二，分析能量



$E_p=(\rho gSy)\cdot y=\frac{1}{2}ky^2$

$k=2\rho gS$

无损耗 $E=\text{const}.$

} SHM

角频率 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{2g\rho S}{m}}$

方法三，建立微分方程（自己完成）

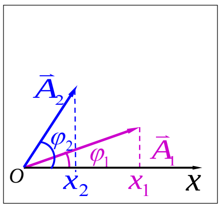
6. 2简谐振动的合成

一 两个同方向同频率简谐运动的合成

设一质点同时参与两独立的同方向、同频率的简谐振动：

$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

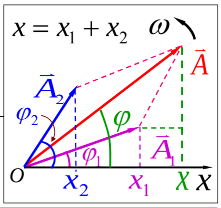
$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$



两振动的位相差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$=常数

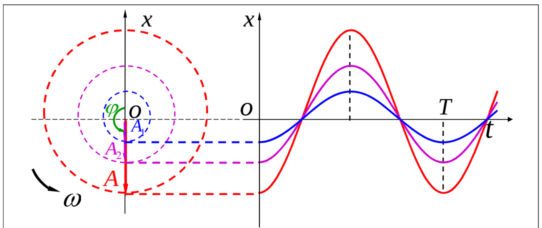
$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$

$$\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \tan\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$



两个同方向同频率简谐运动合成后仍为同频率的简谐运动

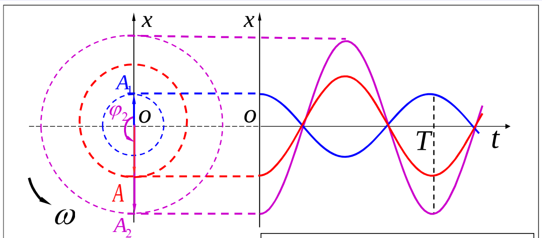
（1）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$



$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$

（2）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$



$$\begin{cases} A=|A_1-A_2| \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+(2k+1)\pi \end{cases}$$

$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\varphi)}$

小结

（1）相位差 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\cdots)$

$A=A_1+A_2$ 加强

（2）相位差 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\cdots)$

$A=|A_1-A_2|$ 减弱

（3）一般情况

$A_1+A_2>A>|A_1-A_2|$

二 两个相互垂直的同频率的简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

质点运动轨迹 （椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

讨论

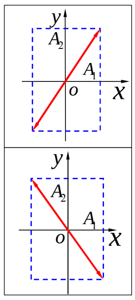
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

（1）$\varphi_2-\varphi_1=0$或 2π

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

（2）$\varphi_2-\varphi_1=\pi$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$



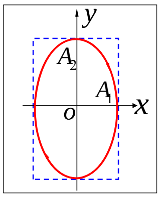
讨论

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

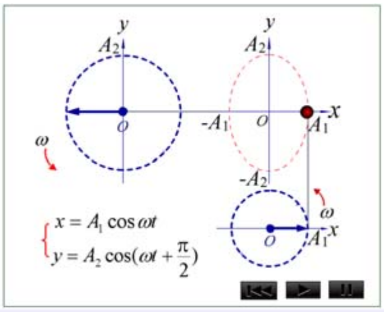
（3）$\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

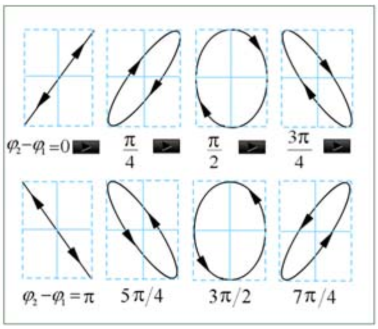
$$\begin{cases} x=A_1\cos\omega t \\ y=A_2\cos(\omega t+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



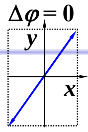
用旋转矢量描绘振动合成图



两相互垂直同频率不同相位差简谐运动的合成图

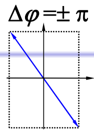


$\Delta\varphi=0$



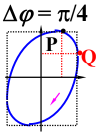
Ⅰ、Ⅲ象限SHM

$\Delta\varphi=\pm\pi$



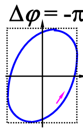
Ⅱ、Ⅳ象限SHM

$\Delta\varphi=\pi/4$



y超前x—右旋

$\Delta\varphi=-\pi/4$

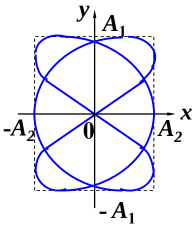


y落后x—左旋

（以π为界，决定超前、落后）

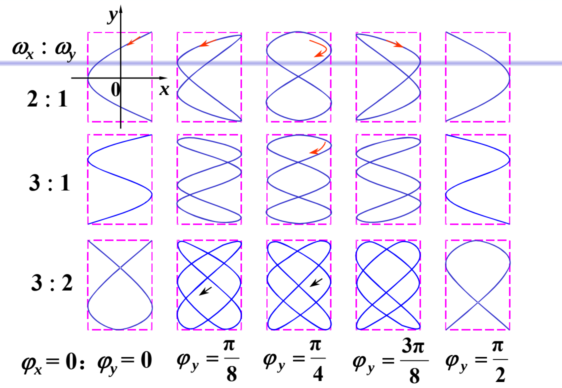
两振动的频率成**整数比**

轨迹称为利萨如图形



例如左图：$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{3}{2}$

应用：测定未知频率

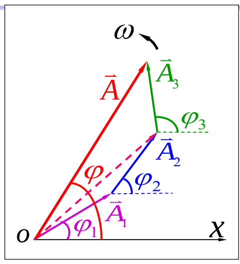


*三 多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t+\varphi_n) \end{cases}$$

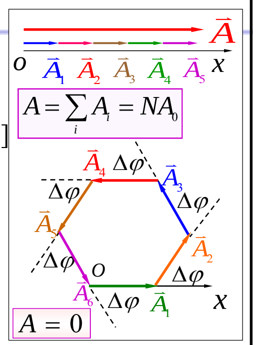
$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

$$\begin{cases} x_1 = A_0\cos\omega t \\ x_2 = A_0\cos(\omega t+\Delta\varphi) \\ x_3 = A_0\cos(\omega t+2\Delta\varphi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N = A_0\cos[\omega t+(N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$



讨论

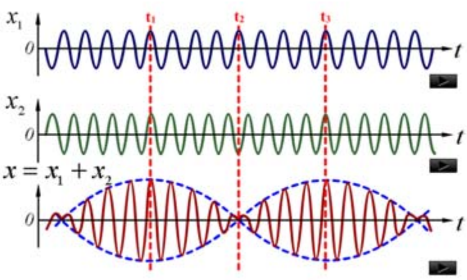
(1) $\Delta\varphi = 2k\pi$

$(k = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(2) $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

$(k'\neq kN,\ k'=\pm1,\pm2,\cdots)$

四 两个同方向不同频率简谐运动的合成



频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.

双簧管就是利用这个原理产生的颤音。

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos\omega_1 t = A_1\cos 2\pi\nu_1 t \\ x_2 = A_2\cos\omega_2 t = A_2\cos 2\pi\nu_2 t \end{cases}$$

$\boxed{x = x_1 + x_2}$

讨论 $A_1 = A_2$，$|\nu_2-\nu_1| << \nu_1+\nu_2$ 的情况

◆ 方法一

$x = x_1 + x_2 = A_1\cos 2\pi\nu_1 t + A_1\cos 2\pi\nu_2 t$

$$x = \underbrace{(2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t)}_{\text{振幅部分}}\cos 2\pi\underbrace{\frac{\nu_2+\nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}}t$$

振动频率 $\nu = (\nu_1+\nu_2)/2$

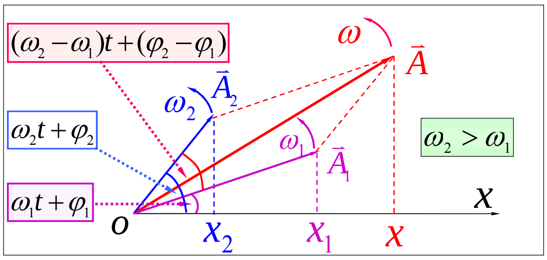
振幅 $A = \left|2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right|$

$A_{max} = 2A_1$

$A_{min} = 0$

2017/3/17 73

◆ 方法二：旋转矢量合成法



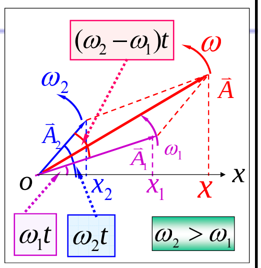
$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ $\Delta\varphi = 2\pi(\nu_2-\nu_1)t$

2017/3/17 74

振幅 $A = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$

$= \left|2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\right|$

拍频 ⇨ $\nu = \nu_2-\nu_1$



振动圆频率

$\cos\omega t = \frac{x_1+x_2}{A}$ $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

2017/3/17 75

*五 谐振分析

利用付里叶分解，可将任意振动分解成若干SHM的叠加。

对周期性振动：T — 周期， $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)]$$

$k=1$ 基频（ω） 决定音调

$k=2$ 二次谐频（2ω）

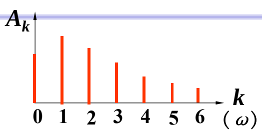
$k=3$ 三次谐频（3ω）

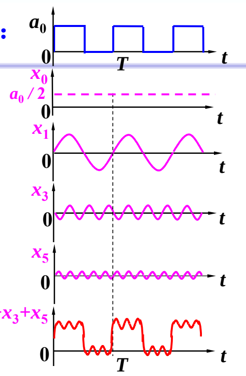
……

高次谐频 决定音色

2017/3/17 76

分立谱： 例如对方波：





$x_{2n} = 0$， $n = 1, 2, 3, \ldots$

思考

有时赞誉一歌唱家：

“声音洪亮，音域宽广，音色甜美”。这各指什么物理因素？

2017/3/17

6.3 阻尼振动，受迫振动和共振

一 阻尼振动

现象：振幅随时间减小

原因：阻尼

阻力系数

动力学分析： 阻力 $F_r = -Cv$

$-kx - Cv = ma$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

2017/3/17 78

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

固有角频率

$$\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\\ \delta=C/2m\end{cases}$$

阻尼系数

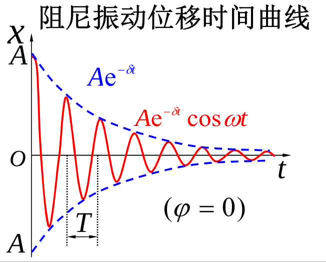
此式为典型的常系数二阶齐次线性微分方程

$$x=\underbrace{\boxed{Ae^{-\delta t}}}_{振幅}\cos(\underbrace{\boxed{\omega}}_{角频率}t+\varphi)$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi/\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

$$x=Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)\qquad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

阻尼振动位移时间曲线

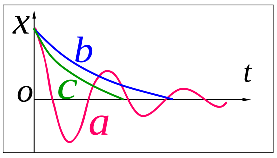


三种阻尼的比较

(a) 欠阻尼 $\omega_0^2>\delta^2$

(b) 过阻尼 $\omega_0^2<\delta^2$

(c) 临界阻尼 $\omega_0^2=\delta^2$



二　受迫振动

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+kx=F\cos\omega_p t$$

驱动力

此式为非齐次的常系数二阶线性微分方程

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad 2\delta=C/m\qquad f=F/m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega_p t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega_p t$$

驱动力的角频率

$$x=\cancel{A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)}+A\cos(\omega_p t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\delta^2\omega_p^2}}\qquad \tan\psi=\frac{-2\delta\omega_p}{\omega_0^2-\omega_p^2}$$

三　共振

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega_p t$$

$$x=A\cos(\omega_p t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\delta^2\omega_p^2}}\qquad \frac{dA}{d\omega_p}=0$$

$$x=A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)+A\cos(\omega_p t+\psi)$$

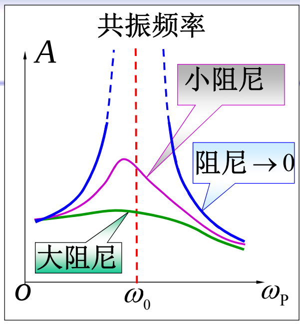
共振频率

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

共振振幅

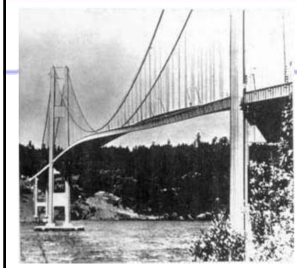
$$A_r = \frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

应 用：声、光、电、原子内部、工程技术…同时要注意避免共振造成破坏。



在弱阻尼即$\beta \ll \omega_0$的情况下，当$\omega_r = \omega_0$时，系统的振动速度和振幅都达到最大值 — 共振。

小号发出的声波足以使酒杯破碎



1940年美国塔科曼海峡大桥在大风中产生振动

随后在大风中因产生共振而断塌

我国四川綦江彩虹桥的断裂：

质量太差， 武警跑步（引起共振）

我国古代对“共振”的认识：

公元五世纪《天中记》记载

蜀人有铜盘，早、晚鸣如人扣，

问张华。张华曰：此盘与宫中钟相谐，

故声相应， 可改变其薄厚。

作业

- P272 7.8,7.11, 7.13,7.15, 7.17