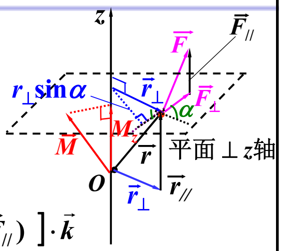
三. 质点对轴的角动量

1. 力对轴的力矩

把对O点的力矩向过O点的轴（如 z 轴）投影：



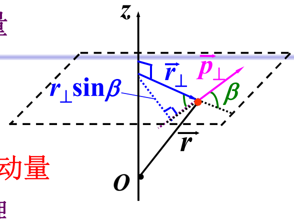
$$M_z = \vec M\cdot\vec k = (\vec r\times\vec F)\cdot\vec k$$
$$=[\,(\vec r_\perp+\vec r_{//})\times(\vec F_\perp+\vec F_{//})\,]\cdot\vec k$$
$$=(\vec r_\perp\times\vec F_\perp)\cdot\vec k$$
$$=F_\perp r_\perp\sin\alpha$$ ——力对轴的力矩。

68

2. 质点对轴的角动量

$$L_z=(\vec r_\perp\times\vec p_\perp)\cdot\vec k$$
$$=p_\perp r_\perp\sin\beta$$

—— 质点对轴的角动量



3. 对轴的角动量定理

$$\vec M\cdot\vec k=\frac{\mathrm d\vec L}{\mathrm dt}\cdot\vec k=\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}(\vec L\cdot\vec k)$$

即 $$\boxed{M_z=\frac{\mathrm dL_z}{\mathrm dt}}$$ —— 质点对轴的角动量定理

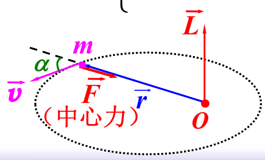
69

§4.8 角动量守恒定律

（law of conservation of angular momentum）

$\boxed{\text{若 } \vec M=0\text{，则 } \vec L=\text{常矢量}}$ — 质点角动量守恒定律

$$\vec M=0\begin{cases}\vec F=0\,,\\ \vec F\text{过}O\text{点：中心力（如行星受中心恒星的万有引力）}\end{cases}$$



$$\vec L=\vec r\times(m\vec v)=\text{常矢量}$$

（1） $mv\,r\sin\alpha=\text{const.}$，

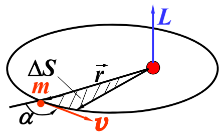
（2）轨道在同一平面内。

70

$\boxed{\text{若 } M_z=0\text{，则 } L_z=\text{常量}}$ ⟶ 质点对轴的角动量守恒定律

角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，而且在高速低速范围均适用。

角动量守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律：



$$L=mv\cdot r\sin\alpha=\text{常量}$$
$$ds=\frac{1}{2}rvdt.\sin\alpha \quad \text{（时间足够小）}$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{\mathrm dS}{\mathrm dt}=\text{常量}$$

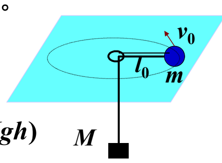
行星相对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。

在近日点转得　，在远日点转得　。

71

例 如图，桌面水平光滑，初m作半径为l_0的圆运动，速率v_0，重物M 静止，后放手，M 下落。

求：下落$h(< l_0)$时重物速度。



解： （m+M）机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2+(-Mgh)$$

对孔的角动量守恒

$$l_0mv_0=(l_0-h)mv_\theta$$

又由运动学关系：

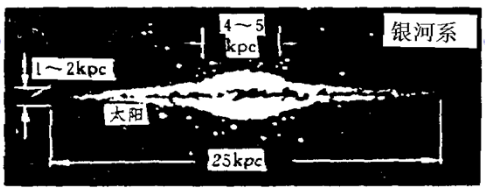
$$v^2=v_r^2+v_\theta^2,\ V=v_r$$

联立解出

$$V^2=\frac{m}{m+M}\{1-\frac{l_0^2}{(l_0-h)^2}\}v_0^2+\frac{2Mgh}{m+M}$$

72

▲星云具有盘形结构：

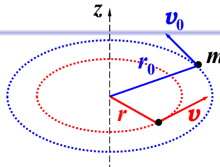


pc — 秒差距，$1\text{pc}=3.086\times10^{16}\text{m}$

旋转的星云

73

粗略的解释：星球具有原始角动量 $r_0 m v_0 \vec{k}$



$M_z = 0 \rightarrow L_z = \text{const}$.

$\rightarrow r_0 m v_0 = r m v$

$\therefore v = \dfrac{v_0 r_0}{r} \propto \dfrac{1}{r}$

星球所需向心力：$F_{向} = m\dfrac{v^2}{r} \propto \dfrac{1}{r^3}$

可近似认为引力：$F_{引} \propto \dfrac{1}{r^2}$ 开始时 $F_{引} > F_{向}$

引力使 $r\downarrow$ 到一定程度 $\rightarrow F_{引} = F_{向}$，$r$ 就不变了，引力不能再使 r 减小，但在 z 轴方向却无此限制可以在引力作用下不断收缩。

74

§ 4.9 质点系的角动量

质点系的角动量 $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$$= \sum_i \left(\vec{M}_{i外} + \vec{M}_{i内}\right) = \vec{M}_{外} + \vec{M}_{内}$$

$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{M}_{i外} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{内} = \sum_i \vec{M}_{i内} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) = 0$$

于是有：$\boxed{\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}}$ — 质点系角动量定理

75

$\boxed{若\ \vec{M}_{外} = 0，则\ \vec{L} = 常矢量}$

——质点系角动量守恒定律

思考

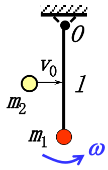
质点系角动量守恒和动量守恒是否相互独立？

（行星运动：动量和角动量都守恒么？）

76

[例] 一长为 l 的轻质杆端部固结一小球 m_1，另一小球 m_2 以水平速度 v_0 碰杆中部并与杆粘合。

求：碰撞后杆的角速度 ω



解：选 m_1（含杆）+ m_2 为系统

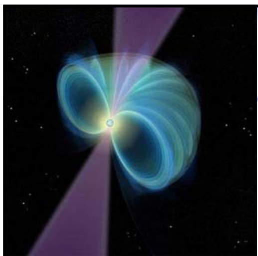
碰撞时重力和轴力都通过 O，对 O 力矩为零，故角动量守恒。

有 $\dfrac{l}{2} m_2 v_0 = l m_1 \omega l + \dfrac{l}{2} m_2 \omega \dfrac{l}{2}$

解得：$\omega = \dfrac{2m_2}{4m_1 + m_2} \cdot \dfrac{v_0}{l}$

思考 （$m_1 + m_2$）的水平动量是否守恒？

77

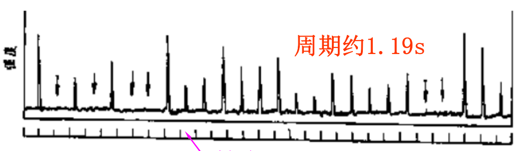


▲ 脉冲星的角动量守恒

由于恒星在坍缩的时候角动量守恒，坍缩成半径很小的中子星后自转速度往往非常快。

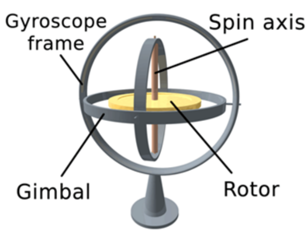
1967年10月，剑桥大学卡文迪许实验室的安东尼·休伊什教授的研究生——24岁的乔丝琳·贝尔（“小绿人一号”）

脉冲星是20世纪60年代天文的四大发现之一。至今，脉冲星已被我们找到了不少于1620多颗，并且已得知它们就是高速自转着的中子星



脉冲星的精确周期性信号（“宇宙中精准的时钟”

陀螺仪（gyroscope）
——角动量守恒



导航——导弹，手机，空间方向

79

＊§4.10 质心系中的角动量定理

一．质心系中的角动量

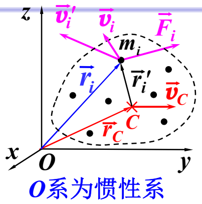
O 是惯性系中的一个定点

C 是质心兼质心坐标系原点

对质心 $\vec{L}'=\sum \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_i')$

对O点 $\vec{L}=\sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$

C 对O $\vec{L}_C=\vec{r}_C \times (\sum m_i)\vec{v}_C$



O系为惯性系

利用关系：$\vec{r}_i=\vec{r}_i'+\vec{r}_C$， $\sum m_i \vec{r}_i'=0$（$\because \vec{r}_C'=0$），

$\vec{v}_i=\vec{v}_i'+\vec{v}_C$， $\sum m_i \vec{v}_i'=0$（$\because \vec{v}_C'=0$）。

可以证明： $\boxed{\vec{L}'=\vec{L}-\vec{L}_C}$

二．质点系对质心的角动量定理：

$$\frac{d\vec{L}'}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{L}-\vec{L}_C)=\frac{d}{dt}(\vec{L}-\vec{r}_C \times \vec{P})$$

$$=\frac{d\vec{L}}{dt}-(\frac{d\vec{r}_C}{dt}\times \vec{P}+\vec{r}_C \times \frac{d\vec{P}}{dt})$$

$$=\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i-(0+\vec{r}_C \times \sum \vec{F}_i)$$

$$=\sum(\vec{r}_i-\vec{r}_C)\times \vec{F}_i=\sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i=\vec{M}_{外}'$$

即有 $\boxed{\vec{M}_{外}'=\frac{d\vec{L}'}{dt}}$

—— 质心系中质点对质心的角动量定理

尽管质心系可能不是惯性系，但对质心来说，角动量定理仍然成立。这再次显示了质心的特殊之处和选择质心系来讨论问题的优点。

若质心系是非惯性系，则外力矩中应包括惯性力对质心的力矩：$\vec{M}'+\vec{M}_{惯C}=\frac{d\vec{L}'}{dt}$

设质心加速度为$\vec{a}_C$， 则有

$$\vec{M}_{惯C}=\sum_i \vec{r}_i' \times (-m_i \vec{a}_C)=-(\sum_i m_i \vec{r}_i')\times \vec{a}_C=0$$

这正是即使质心系为非惯性系，但质点系对质心的角动量仍能满足角动量定理的原因。

小结：动量与角动量的比较

动量 $\vec{p}=\sum_i m_i \vec{v}_i$	角动量 $\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
矢量	矢量
与固定点无关	与固定点有关
与内力无关	与内力矩无关
守恒条件 $\sum_i \vec{F}_i=0$	守恒条件 $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i=0$

3.8 守恒定律的意义

自然界中许多物理量如动量、角动量、机械能、电荷、质量等等，都具有相应的守恒定律。

物理学特别注意对守恒量和守恒定律的研究，这是因为：

第一，从方法论上看：

利用守恒定律研究问题，可避开过程的细节，而对系统始、末态下结论（特点、优点）。

第二，从适用性来看：

守恒定律适用范围广，宏观、微观、高速、低速均适用。

第三，从认识世界来看：

守恒定律是认识世界的很有力的武器。

在新现象研究中，若发现某守恒定律不成立，则往往做以下考虑：

（1）寻找被忽略的因素，从而使守恒定律成立，如中微子的发现。（β衰变——泡利假说——中微子）

（2）引入新概念，使守恒定律更普遍化(补救)。

（3）当无法补救时，则宣布该守恒定律不成立，如弱相互作用宇称（parity）不守恒。

不论哪种情况，都是对自然界的认识上了新台阶。因此守恒定律的发现、推广、甚至否定，都能对人类认识自然起到巨大的推动作用。

第四，从本质上看：

守恒定律揭示了自然界普遍的属性—对称性。

对称 — 在某种“变换”下的不变性。

每一个守恒定律都相应于一种对称性：

动量守恒相应于空间平移的对称性；

能量守恒相应于时间平移的对称性；

角动量守恒相应于空间转动的对称性；

86

- 物理学中的守恒律归根到底是由时空对称性所决定的，这就是为什么在由牛顿力学推导出（历史上的顺序是这样的）的守恒律在相对论体系下仍然成立.
- 牛顿三定律是有局限的，但守恒律却是普遍成立的。
- 从根本上说明了质点系角动量守恒是和动量守恒是相互独立的。

87

作业

- 4.12， 4.16， 4.19， 4.22， 4.25， 4.26

88