第一章 行列式习题课

二、计算（证明）行列式

例２　用行列式定义计算

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

例３　设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

证明: $D_1 = D_2$.

例４　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

例5

$$D=\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

例６　计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

例 7　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

例８　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}.$$

例９　证明

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$=\cos n\alpha.$$

二、计算（证明）行列式

1　用定义计算（证明）

例２　用行列式定义计算

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 设 D_5 中第1,2,3,4,5行的元素分别为 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}, a_{5p_5}$,那么，由 D_5 中第1,2,3,4,5行可能的非零元素分别得到

$$p_1 = 2,3; \qquad p_2 = 1,2,3,4,5;$$

$$p_3 = 1,2,3,4,5; \quad p_4 = 2,3; \quad p_5 = 2,3.$$

因为 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 在上述可能取的代码中，一个5元排列也不能组成，

故 $D_5 = 0.$

例3　设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

证明：$D_1 = D_2$.

证明　由行列式的定义有

$$D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中t是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

$$D_2=\sum(-1)^t(a_{1p_1}b^{1-p_1})(a_{2p_2}b^{2-p_2})\cdots(a_{np_n}b^{n-p_n})$$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)},$$

其中t是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

而 $$p_1+p_2+\cdots+p_n=1+2+\cdots+n,$$

所以 $$D_2=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=D_1.$$

评注 本题证明两个行列式相等，即证明两点，一是两个行列式有完全相同的项，二是每一项所带的符号相同．这也是用定义证明两个行列式相等的常用方法.

2　利用范德蒙德行列式计算

利用范德蒙德行列式计算行列式，应根据范德蒙德行列式的特点，将所给行列式化为范德蒙德行列式，然后根据范德蒙德行列式计算出结果。

例４　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解 D_n中各行元素分别是一个数的不同方幂,方幂次数自左至右按递升次序排列，但不是从0变到$n-1$,而是由1递升至n.若提取各行的公因子，则方幂次数便从0增至$n-1$，于是得到

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为n阶范德蒙德行列式，由范德蒙德行列式知

$$D_n = n!\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i - x_j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)$$

$$\bullet(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

３　用化三角形行列式计算

例5
$$D=\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解
$$D\,\underset{i=2,3,4}{\overset{r_i-r_1}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x & x-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x & 0 & x-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x & 0 & 0 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\frac{c_i}{x-a_i}}{\underset{i=1,\cdots,n}{=\!=\!=}}\prod\left(x-a_i\right)\begin{vmatrix} \frac{x}{x-a_1} & \frac{a_2}{x-a_2} & \frac{a_3}{x-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+\sum c_i}{\underset{i=2,\cdots,n}{=\!=\!=}}\prod\left(x-a_i\right)\begin{vmatrix} 1+\sum\frac{a_i}{x-a_i} & \frac{a_2}{x-a_2} & \frac{a_3}{x-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x-a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod\left(x-a_i\right)\left(1+\sum\frac{a_i}{x-a_i}\right)$$

４　用降阶法计算

例６　计算

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

解　将 D_4的第2、3、4行都加到第1行，并从第1行中提取公因子$a+b+c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&a&d&c\\c&d&a&b\\d&c&b&a\end{vmatrix},$$

再将第2、3、4列都减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\b&a-b&d-b&c-b\\c&d-c&a-c&b-c\\d&c-d&b-d&a-d\end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}.$$

把上面右端行列式第2行加到第1行，再从第1行中提取公因子$a-b-c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix},$$

再将第2列减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d-c & a-d & b-c \\ c-d & b-c & a-d \end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\bullet[(a-d)^2-(b-c)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet(a+b-c-d)(a-b+c-d)$$

5　加边法

例 7　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

解 将 D_n 添加一行一列得：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$$

６　用递推法计算

例８　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}.$$

解　依第n列把D_n拆成两个行列式之和

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & 0 \\ a & a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

右端的第一个行列式,将第n列的(-1)倍分别加到第$1,2,\cdots,n-1$列,右端的第二个行列式按第n列展开,得

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + x_n D_{n-1},$$

从而 $D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_n D_{n-1}.$

由此递推，得

$$D_{n-1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a + x_{n-1} D_{n-2},\text{于是}$$

$$D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n + x_n x_{n-1} D_{n-2}.$$

如此继续下去，可得

$$D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n + \cdots + x_1 x_2 a x_4 \cdots x_n + x_n x_{n-1} \cdots x_3 D_2$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n$$

$$+ \cdots + x_1 x_2 a x_4 \cdots x_n$$

$$+ x_n x_{n-1} \cdots x_3 (a x_1 + a x_2 + x_1 x_2)$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_n + a(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + \cdots$$

$$+ x_1 x_3 \cdots x_n + x_2 x_3 \cdots x_n).$$

当 $x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$ 时，还可改写成

$$D_n = x_1 x_2 \cdots x_n [1 + a(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n})].$$

７　用数学归纳法

例９　证明

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$=\cos n\alpha.$$

证 对阶数n用数学归纳法

因为 $D_1=\cos\alpha,$

$$D_2=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ 1 & \cos 2\alpha\end{vmatrix}=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha,$$

所以,当$n=1,n=2$时,结论成立.

假设对阶数小于n的行列式结论成立,下证对于阶数等于n的行列式也成立.现将 D_n 按最后一行展开,得

$$D_n=2\cos\alpha\, D_{n-1}-D_{n-2}.$$

由归纳假设，$D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha$,

$$D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha,$$

$$\begin{aligned}D_n&=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha\\&=[\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha]-\cos(n-2)\alpha\\&=\cos n\alpha;\end{aligned}$$

所以对一切自然数n结论成立.

例11 证明平面上三条不同的直线

$$ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$$

相交于一点的充分必要条件是$a+b+c=0$.

证 必要性 设所给三条直线交于一点$M(x_0, y_0)$,

则$x=x_0, y=y_0, z=1$可视为齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ bx+cy+az=0, \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$

的非零解.从而有系数行列式.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2})(a+b+c)$$

$$\bullet[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

因为三条直线互不相同,所以a,b,c也不全相同,故$a+b+c=0$.

充分性　如果$a+b+c=0$,将方程组

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \\ cx+ay=-b \end{cases} \qquad （1）$$

的第一、二两个方程加到第三个方程，得

$$\begin{cases} ax + by = -c, \\ bx + cy = -a, \qquad （2） \\ \qquad 0 = 0. \end{cases}$$

下证此方程组（2）有唯一解.

如果$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 0$，则$ac = b^2 \geq 0$。由

$b = -(a + c)$得$ac = [-(a + c)]^2 = a^2 + 2ac + c^2$，于是

$ac = -(a^2 + c^2) \leq 0$，从而有$ac = 0$.

不妨设$a=0$,由$b^2=ac$得$b=0$.再由$a+b+c=0$得$c=0$，与题设矛盾.故

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0.$$

由克莱姆法则知，方程组(2)有唯一解.从而知方程组(1)有唯一解，即三条不同直线交于一点.