概率论与数理统计

第三章　多维随机变量及其分布

§4 相互独立的随机变量

- 随机变量的相互独立性
- 二维随机变量的推广

一、相互独立的随机变量

1.定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布 函数. 若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的 .

2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\Longleftrightarrow P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}$

(2) 设连续型随机变量 (X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

(3) X 和 Y 相互独立 ,则 $f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

例1　对于第一节例2中的随机变量 X和Y，由于

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

得

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

因而X和Y是相互独立的．

例2 若X,Y具有联合分布率

$Y \backslash X$	0	1	$P\{Y=j\}$
1	$1/6$	$2/6$	$1/2$
2	$1/6$	$2/6$	$1/2$
$P\{x=i\}$	$1/3$	$2/3$	1

则有 $P\{X=0,Y=1\}=1/6=P\{X=0\}P\{Y=1\},$

$P\{X=0,Y=2\}=1/6=P\{X=0\}P\{Y=2\},$

$P\{X=1,Y=1\}=2/6=P\{X=1\}P\{Y=1\},$

$P\{X=1,Y=2\}=2/6=P\{X=1\}P\{Y=2\},$

考察二维正态随机变量 (X,Y).

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$$f_X(x)f_Y(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

结论:

对于二维正态随机变量 (X,Y), X和Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho=0$.

例3 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟 (1/12小时)的概率.

解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间,

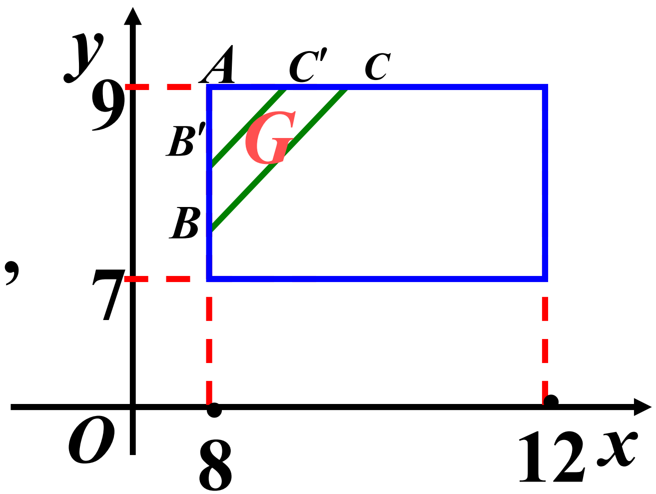
由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & 8 < x < 12, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

因为 X,Y 相互独立，故 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{8}, & 8 < x < 12, 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



按题意需要求概率 $P\{|X-Y| \le 1/12\}$.画出区域:

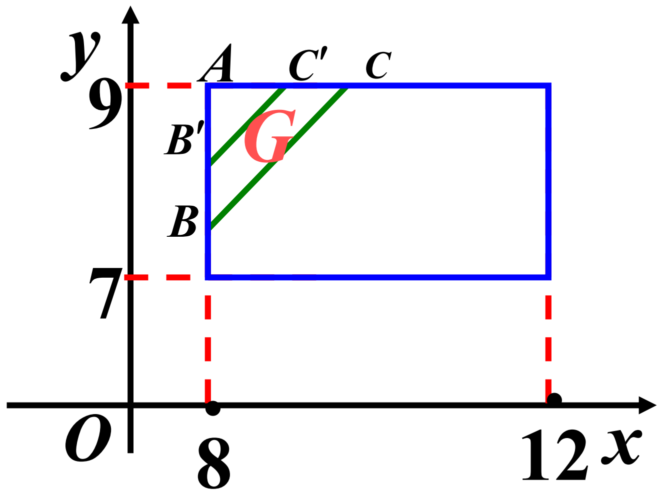
$|x-y| \le 1/12$, 以及长方形 $[8 < x < 12; 7 < y < 9]$, 它们的公共部分是四边形 $BCC'B'$,记为G.

显然仅当(X,Y)取值于G内，他们两人到达的时间相差才不超过 $1/12$小时. 因此, 所求的概率为

$$P\{|X-Y| \le \frac{1}{12}\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{8} \times (G \text{ 的面积}).$$



而　G的面积

$=$三角形ABC的面积$-$三角形$AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$

于是　$P\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\}=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积})=\frac{1}{48}.$

即负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为$\frac{1}{48}$.

二、二维随机变量的推广

1.分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数 .

2.概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使对于任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数.

3.边缘分布函数

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为已知，则$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的$k(1\le k<n)$维边缘分布函数就随之确定. 例如$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$关于X_1、关于(X_1,X_2)的边缘分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\infty,\cdots,\infty)$$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\infty,\infty,\cdots,\infty).$$

4.边缘概率密度函数

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1,关于 (X_1,X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n.$$

同理可得 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 $k(1 \le k < n)$ 维边缘概率密度．

5. 相互独立性

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的．

若对于所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

$$=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

其中F_1,F_2,F依次为随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$、$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 和 $(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 的分布函数, 则称随机变量$(X_1,\cdots,X_m)$和$(Y_1,\cdots,Y_n)$是相互独立的.

6.重要结论

定理　设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立，则 $X_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j (j = 1,2,\cdots,n)$ 相互独立. 又若 h, g 是连续函数，则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

小 结

1. 若离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$f(x,y)$, 边缘概率密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$, 则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

3. X 和 Y 相互独立 ,则 $f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立 .

作业：课后习题 18、20

练习:

1、已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件；

(2) 若 X 与 Y 相互独立，求 α 与 β 的值.

解　将 (X,Y) 的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\bullet j}=P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	$\frac{2}{3}+\alpha+\beta$

(1)由分布律的性质知 $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \frac{2}{3}+\alpha+\beta=1,$

故α与β应满足的条件是：$\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$ 且 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}.$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立，所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \ (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$，得 $\beta = \dfrac{1}{9}$.

2、设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 服从 $N(a,\sigma^2)$，Y 在 $[-b,b]$ 上服从均匀分布，求 (X,Y) 的联合概率密度.

解　由于 X 与 Y 相互独立,

所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

又 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<x<\infty;$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & -b\le y\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$f(x,y)=\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 $-\infty<x<\infty,\quad -b\le y\le b.$

当 $|y|>b$ 时，$f(x,y)=0.$

3、设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X,Y) 的分布律.

解　因为X与Y相互独立，所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

$$P\{X=1, Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=0.3\times 0.6=0.18,$$

$$P\{X=1, Y=4\}=P\{X=1\}P\{Y=4\}=0.3\times 0.4=0.12,$$

$$P\{X=3, Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\}=0.7\times 0.6=0.42,$$

$$P\{X=3,Y=4\}=P\{X=3\}P\{Y=4\}=0.7\times 0.4=0.28.$$

因此 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28