南開大學

电磁学

（Electromagnetism）

电势（Electric Potential）

功能的问题始终是物理学所关注的问题。

本章此部分研究电场力作功的性质，

给出静电场的环路定理，揭示静电场的有势性，

进而研究静电场的能量。

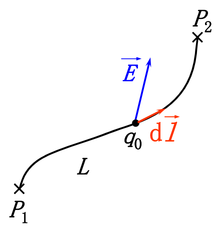
本章目录（8-14）

8.8 静电场的环路定理

（circuital theorem of electrostatic field）

一. 静电力作功的特点

移动实验点电荷q_0，电场力作功：

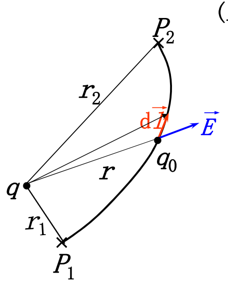


$$A_{12}=\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

要搞清静电力作功的规律，

就要研究 $\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 的特点：

- 对点电荷： $\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\frac{q\vec{e}_r\cdot d\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



$\boxed{d\vec{l}=d\vec{r}}$

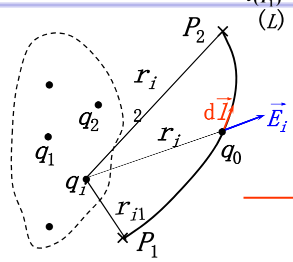
$$=\int_{r_1}^{r_2}\frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

—— 只与P_1、P_2位置有关，

而与L无关。

- 对点电荷系： $\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}(\sum_i\vec{E}_i)\cdot d\vec{l}$



$$=\sum_i\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}$$

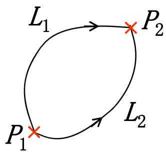
$$=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{i1}}-\frac{1}{r_{i2}}\right)$$

——只与P_1、P_2位置有关，

而与L无关。

- 对任意电荷系：$\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 也应与L无关。

二．环路定理（circuital theorem）



$$\int_{(P_1)\,(L_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \int_{(P_1)\,(L_2)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

$$= -\int_{(P_2)\,(L_2)}^{(P_1)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

$\therefore$ $\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = 0}$ — 静电场的环路定理

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的“环流”（circulation）。

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \iint (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{s} = 0$$

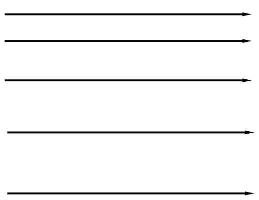
S具有任意性且可以任意缩小，故

$$\Rightarrow \quad rot\ \vec{E} = \nabla\times\vec{E} = 0$$

- 环路定理表明电场力对电荷做功与路径无关，静电场是保守力场。
- 一般结论：无旋场是保守力场。
- 静电场是无旋场，电力线不能闭合。
- 积分形式和微分形式均对于变化的电场不成立。

思考

电场线平行但不均匀分布是否可能？



静电场的 $\vec{E}$ 线？

Δ 8.9 电势差　电势

一．电势差（electric potential difference）

由 $\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$ 与路径无关，可引入电势差的概念。

定义 P_1 对 P_2 的电势差：

$$\boxed{\varphi_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{l}}$$

φ_{12} 为移动单位正电荷由 $P_1 \to P_2$ 电场力作的功。

二．电势（electric potential）

设 P_0 为电势参考点，即 $\varphi_0 = 0$，则任一点 P_1 处电势为：

$$\varphi_1 = \varphi_{10} = \int_{(P_1)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

$$\therefore \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{(P_2)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi_{12}$$

这说明 P_0 点的不同选择，不影响电势差。

P_0 选择有任意性，习惯上如下选取电势零点。

理论中：对有限电荷分布，选 $\varphi_\infty = 0$。

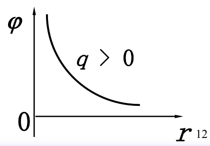
对无限大电荷分布，选有限区域中的某适当点为电势零点。

实际中：选大地或机壳、公共线为电势零点。

利用电势定义可以求得如下结果：

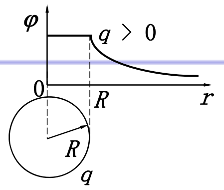
1）点电荷

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \propto \frac{1}{r},\quad \varphi_\infty = 0$$



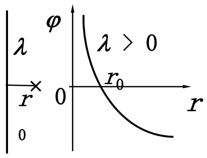
2）均匀带电球壳

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & （壳内）\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & （壳外）\end{cases}\qquad \varphi_\infty=0$$



3）无限长均匀带电直线

$$\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r},\quad \varphi_{r_0}=0$$



通常

理论计算有限带电体电势时选无限远为参考点

实际应用中或研究电路问题时取大地、仪器外壳等

✸电势的量纲

SI制：单位 V（伏特）

量纲 $[U]=\dfrac{[W]}{[q]}=L^2MT^{-3}I^{-1}$

✸电势是一个长程物理量

Δ 8.10 电势叠加原理

(principle of superposition of electric potential)

由 $\varphi=\int_{(P)}^{(P_0)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 及 $\vec{E}=\sum_i\vec{E}_i$，得：

$$\varphi=\int_{(P)}^{(P_0)}(\sum_i\vec{E}_i)\cdot d\vec{l}=\sum_i\int_{(P)}^{(P_0)}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_i\varphi_i$$

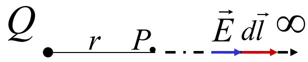
注意：电势零点P_0必须是共同的。

- 对点电荷系：$\varphi=\sum\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$，$\varphi_\infty=0$
- 对连续电荷分布：$\varphi=\int_q\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$，$\varphi_\infty=0$

三. 电势的计算

1. 点电荷场电势公式

$$U_P=\int_{(P)}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$d\vec{l}=d\vec{r}$

☞球对称

$$\boxed{U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

☞标量

正负以Q的正负而定

（以无限远为电势零点）

2. 任意带电体电势

1）由定义式出发

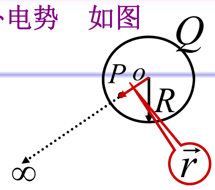
$$\boxed{U=\int_{(P)}^{P(0)}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

2）电势叠加原理

$$U=\int_{(P)}^{P(0)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(P)}^{P(0)}\sum_i\vec{E}_i\cdot d\vec{l}_i=\sum_i\int_{(P)}^{P(0)}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}_i$$

$$\boxed{U=\sum_i U_i}\qquad \boxed{U=\int_{(Q)}dU}$$

例1 计算均匀带电球面的内外电势 如图



解：

均匀带电球面电场的分布为

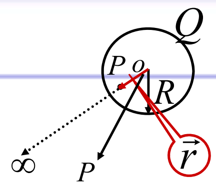
$$\boxed{\begin{array}{ll} r<R & E=0\\ r>R & \vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\end{array}}$$

若场点在球内 即$r<R$ 如图

$$U=\int_{(P)}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^R odl+\int_R^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \int_r^R o\,dl + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



场点在球面外　　即　$r > R$

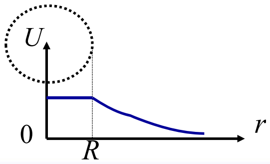
$$U = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

★电势分布

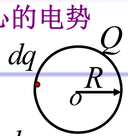
$U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$　$r < R$　等势体

$U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$　$r > R$　与电量集中在球心的点电荷的电势分布相同

★图示



例2　计算电量为Q的带电球面球心的电势



解：

在球面上任取一电荷元 dq

则电荷元在球心的电势为 $dU = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$

由电势叠加原理

球面上电荷在球心的总电势

$$U = \int_{(Q)} dU = \int_{(Q)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

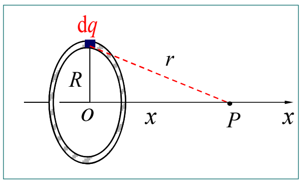
例3　正电荷q均匀分布在半径为R的细圆环上.　求环轴线上距环心为x处的点P的电势.

解　$\mathrm{d}U_P = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{r}$

$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{d}q$$

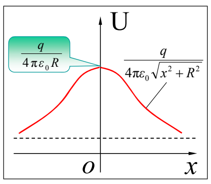
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

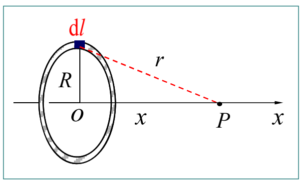
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$



讨 论　$U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$

$x=0$，$U_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$　　$x>>R$，$U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$





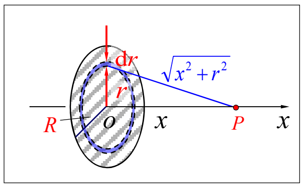
例4 通过一均匀带电圆平面中心且垂直平面的轴线上任意点的电势.　$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r\mathrm{d}r$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2} - x)$$

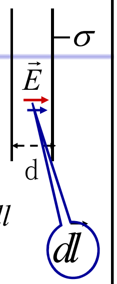
$x >> R$

$$\sqrt{x^2+R^2} \approx x + \frac{R^2}{2x}$$

$$U \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$



例5. 平行板电容器两板间的电势差



解：

平行板电容器内部的场强为 $\boxed{E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}$

两板间的电势差

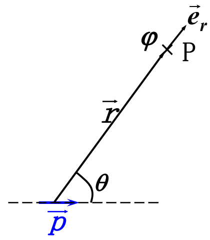
$$\Delta U=\int_{(+)}^{(-)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(+)}^{(-)}Edl=E\int_{(+)}^{(-)}dl$$

$\vec{E},d\vec{l}$ 方向一致

均匀场

$$\boxed{\Delta U=Ed}$$

教材P316 例8.17 给出了电偶极子电势：



$$\varphi=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\propto\frac{1}{r^2}$$

对比，点电荷的电势 $\propto\dfrac{1}{r}$

8.11 电势梯度（electric potential gradient）

一 等势面

电场中电势相等的点所构成的面.

电荷沿等势面移动时，电场力做功为零.

$$W_{AB}=q(U_A-U_B)=\int_a^b q\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

$$\boxed{\therefore\quad \vec{E}\perp d\vec{l}}$$

某点的电场强度与通过该点的等势面垂直.

电力线与等势面的关系

1. 电力线处处垂直等势面

在等势面上任取两点 a、b，则

$$\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}=U_a-U_b\xrightarrow{\text{等势}}=0$$

∵a、b 任取

∴ 处处有 $\boxed{\vec{E}\perp d\vec{l}}$

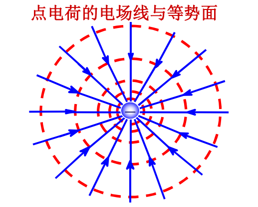
2. 电力线指向电势降的方向

◆ 用等势面的疏密表示电场的强弱.

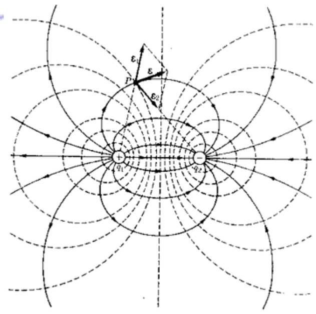
任意两相邻等势面间的电势差相等.

等势面越密的地方，电场强度越大.

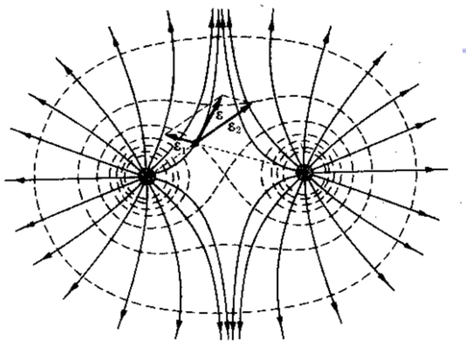
点电荷的电场线与等势面



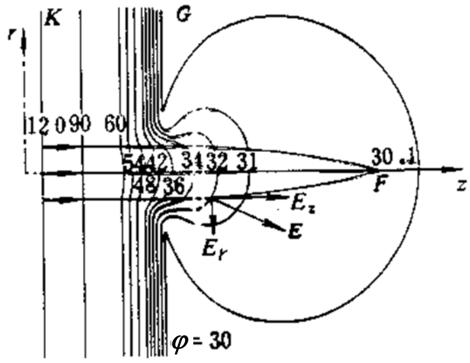
▲ 某些等势面：



电偶极子的电场线和等势面

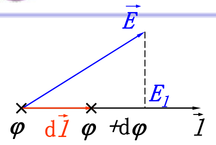


两个等量的正电荷的电场线和等势面



静电透镜的等势面

二、场强与电势梯度



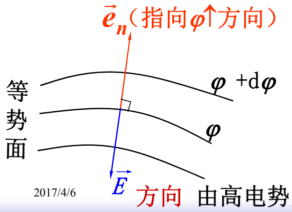
场强与电势的微分关系：

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}\varphi$$

$$E_l \cdot \mathrm{d}l = -\mathrm{d}\varphi$$

$\vec{e}_n$（指向φ↑方向）

$$\boxed{E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}}$$ —— φ 的方向导数



$$E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

$$\vec{E} = E_n \vec{e}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot \vec{e}_n$$

$\vec{E}$ 方向 由高电势处指向低电势处

数学上，若某一标量函数对某一方向有最大变化率（方向导数最大），则定义此方向上的导数为该标量函数的梯度（ gradient）。

电势梯度：$\mathrm{grad}\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{e}_n$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi \equiv -\nabla \varphi$$

在直角坐标中：$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \varphi = \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

 电场强度等于电势梯度的负值

利用电势求场强

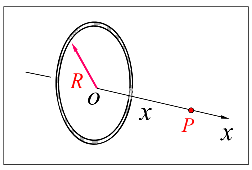
例1 用电场强度与电势的关系，求均匀带电细圆环轴线上一点的电场强度.

解 $$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}$$

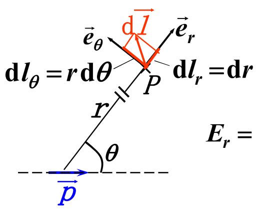
$$E = E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$



［例2］由偶极子的电势求场强



$$\varphi(\theta, r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

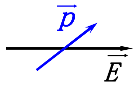
$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial l_r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{//}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial l_\theta} = -\frac{\partial \varphi}{r\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_\perp$$

Δ 8.12 点电荷在外电场中的电势能

点电荷的电势能：$\boxed{W=q\varphi}$

电偶极子的电势能：$\boxed{W=-\vec{p}\cdot\vec{E}}$



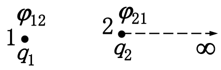
$\vec{p}\parallel\vec{E}$ 时电势能最低。

8.13 电荷系的静电能

一. 点电荷系的相互作用能（电势能）

相互作用能$W_{互}$：把各点电荷由当前的位置分散至相距无穷远的过程中，电场力作的功。

两个点电荷： $W_{互}=\int_{(2)}^{\infty}q_2\vec{E}_1\cdot d\vec{l}=q_2\cdot\varphi_{21}$



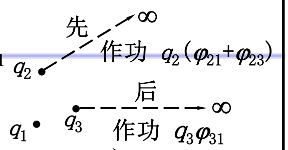
同理： $W_{互}=q_1\cdot\varphi_{12}$

（注意，这里必须规定$\varphi_{\infty}=0$）

写成对称形式： $W_{互}=\frac{1}{2}(q_1\varphi_{12}+q_2\varphi_{21})$

三个点电荷：

$$
\begin{aligned}
W_{互}&=q_2(\varphi_{21}+\varphi_{23})+q_3\varphi_{31}\\
&=\frac{1}{2}(q_2\varphi_{21}+q_1\varphi_{12})+\\
&\quad+\frac{1}{2}(q_2\varphi_{23}+q_3\varphi_{32})+\frac{1}{2}(q_3\varphi_{31}+q_1\varphi_{13})\\
&=\frac{1}{2}q_1(\varphi_{12}+\varphi_{13})+\frac{1}{2}q_2(\varphi_{21}+\varphi_{23})+\frac{1}{2}q_3(\varphi_{31}+\varphi_{32})\\
&=\frac{1}{2}(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2+q_3\varphi_3)
\end{aligned}
$$



推广至一般点电荷系：$\boxed{W_{互}=\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i}$

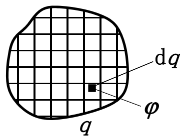
φ_i —— 除 q_i 外，其余点电荷在 q_i 所在处的电势

二. 连续带电体的静电能（自能）

静电能W：把电荷无限分割，并分散到相距无穷远时，电场力作的功。

- 只有一个带电体

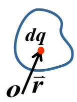
$$W=W_{自}=\frac{1}{2}\int_q\varphi\,dq$$



连续带电体的静电能

$W=\frac{1}{2}\int_q U dq$ 如果用U代表电势

$W=\frac{1}{2}\iiint_V U\cdot\rho_e dV$ ρ_e为电荷的体密度。



$W=\frac{1}{2}\iint_S U\cdot\sigma_e dS$ σ_e为电荷的面密度。

$W=\frac{1}{2}\int_L U\cdot\eta_e dl$ η_e为电荷的线密度。

点电荷的自能无限大，所以是无意义的。