南開大學

力学

力学模型：质点、刚体和质点系

➢质点：只有质量而无大小的物体。

在下面两种情况下，可以把物体视为质点：

- 物体作平移的时候；
- 当物体的运动范围远远大于它自身的尺寸、忽略其大小对问题的性质无本质影响的时候。

➢质点系：由若干个质点组成的、有内在联系的系统。

➢刚体：有质量、不会变形的物体。

力学的总框架

力学
- 运动学
- 动力学
  - 牛顿定律
  - 守恒定律
    - 动量守恒定律
    - 机械能守恒定律
    - 角动量守恒定律

力学 → 最初模型为质点 → 质点系 → 特殊质点系（刚体）

质点系 → 质点之间的弹性力（振动） → 振动在介质中的传播（波动）

运动学的两类问题

1 ）正问题： 已知运动方程，求质点的速度和加速度 → 求导数 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt},\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

2) 反问题： 已知质点的速度(或加速度)和初始条件，求质点运动方程及其它未知量

动力学：动力学研究物体的机械运动与作用在该物体上的力之间的关系。

在研究动力学问题中一般选取牛顿的运动三定律作为动力学的基础，并称之为牛顿定律或动力学基本定律。

变力问题的处理方法

（1）力随时间变化：F＝f（t）

在直角坐标系下，以x方向为例，由牛顿第二定律

$$m\frac{dv_x}{dt}=f(t)$$

且：t＝t_0 时，v_x＝v_0； x＝x_0

则： $$dv_x=\frac{1}{m}f(t)dt$$

直接积分得： $$v_x=\int dv_x=\int\frac{1}{m}f(t)dt$$

$$=v(t)+c$$ 其中c由初条件确定。

由速度求积分可得到运动学方程：

$$x=\int v_x dt = x(t)+c_2$$

其中c_2由初条件确定。

例：飞机着陆时受到的阻力为F＝－ct（c为常数）且t＝0时，$v=v_0$。求：飞机着陆时的速度。

解： 根据牛顿第二定律：

－ct＝m dv / dt

$$v=\int dv=\int -\frac{c}{m}tdt$$

$$=-\frac{c}{2m}t^2+c_1$$

当t＝0时，$v=v_0$，代入得：$v_0=c_1$

$$v=v_0-\frac{c}{2m}t^2$$

(2) 力随速度变化：F＝f（v）

直角坐标系中，x方向f（v）＝m dv/dt

经过移项可得：

$$dt=m\frac{dv}{f(v)}$$

等式两边同时积分得：

$$t-t_0=\int dt=\int\frac{m}{f(v)}dv=m\int\frac{1}{f(v)}dv$$

具体给出f（v）的函数试就可进行积分运算

例：质量为m的物体以速度v_0投入粘性流体中，受到阻力f＝－cv （c为常数）而减速，若物体不受其它力，求：物体的运动速度。

解： 根据牛顿第二定律：

$$-cv=m\frac{dv}{dt}$$

移项变换： －c/m dt＝dv/v

积分得

$$\int -\frac{c}{m}dt=\int\frac{dv}{v}$$

$$-\frac{c}{m}t=\ln v+c_1$$

(3) 力随位移变化：F＝f（x）

直角坐标系中，x方向：

$$f(x)=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=mv\frac{dv}{dx}$$

经过移项可得：f（x）dx＝mv dv

等式两边同时积分得：

$$\int f(x)dx=\int mvdv=\frac{1}{2}m(v^2-v_0{}^2)$$

第三章 功和能 机械能守恒

第四章 动量和角动量

功 $dW=\vec{F}\bullet d\vec{r}=F\cos\theta\left|d\vec{r}\right|=F\cos\theta ds$

$$W=\int_a^b dW=\int_a^b \vec{F}\bullet d\vec{r}$$

$$W=\int_a^b(F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

当质点同时受到几个力作用时

$$\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots$$

$$A=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{r_A}^{r_B}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots)\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{r_A}^{r_B}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}+\int_{r_A}^{r_B}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}+\cdots=A_1+A_2+\cdots$$

功与功率

功： $A=\int_{s_1}^{s_2}\vec{f}\cdot d\vec{s}$

功率： $P=\frac{dA}{dt}=\vec{f}\cdot\vec{v}$

功与能：做功可以改变能量。

功是过程量，能是状态量。

动能：是运动状态的函数。$E_k=\frac{1}{2}mv^2$

势能：是位置的函数。

$E_p(r)=-\frac{GMm}{r}$　　$E_p(h)=mgh$

$E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2$

功能原理

对质点系有： $W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1}$

$W_{内}=W_{内保}+W_{内非}=-(E_{p2}-E_{p1})+W_{内非}$

$W_{外}+W_{内非}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$

引入系统的机械能 $\boxed{E=E_k+E_p}$

功能原理
$\boxed{W_{外}+W_{内非}=E_2-E_1}$ （积分形式）
$\boxed{\mathrm{d}W_{外}+\mathrm{d}W_{内非}=\mathrm{d}E}$ （微分形式）

机械能守恒定律

机械能　动能和势能统称机械能.

$E_M=E_k+E_p$

机械能守恒定律　$E_M=E_k+E_p=const.$

保守力： $\oint_l \vec{f}\cdot d\vec{s}=0$,或$\nabla\times\vec{f}=0$

保守系：所有非保守内力都不做功的系统。

保守系的机械能守恒，即若系统仅受保守力作用，则该系统机械能守恒。

若 $\mathrm{d}W_{外}=0$ 且 $\mathrm{d}W_{内非}=0$，则 $E=$常量

保守内力作功是系统势能与动能相互转化的手段和度量。

能量守恒定律：

$E=E_k+E_p+$内能$=$不变量

如果考虑各种物理现象，计及各种能量，则　一个孤立系统不管经历何种变化，系统所有能量的总和保持不变。

—— 普遍的能量守恒定律

机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现。

由势能函数求保守力

$$f_{保l}=-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}l}$$

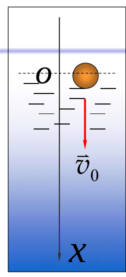
一维势能曲线

1. 保守力 f 指向势能下降的方向，大小正比于曲线的斜率： $f=-dU(x)/dx$

2. 只有势能低于总机械能的地段才可达到，二者的差值等于动能。

3. 势能曲线的极小值对应于稳定平衡点，势能曲线的极大值对应于不稳定平衡点。

例　一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为 v_0．设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力为 $F_r=-bv$，b 为一常量．求阻力对球作的功与时间的函数关系．

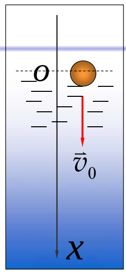


解　建立如右图所示的坐标系

$$W=\int \vec F\cdot d\vec r=\int -bv\,dx$$

$$=-\int bv\frac{dx}{dt}dt=-b\int v^2 dt$$

$$\because\quad -bv=m\frac{dv}{dt}$$



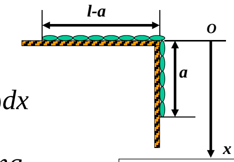
对此式移相并积分，结合t=0, $v=v_0$

$$v=v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\therefore W=-bv_0^2\int_0^t e^{-\frac{2b}{m}t}dt \qquad W=\frac12 mv_0^2(e^{-\frac{2b}{m}t}-1)$$

例、一链条总长为L，质量为m。放在桌面上并使其下垂，下垂的长度为a，设链条与桌面的滑动摩擦系数为μ，令链条从静止开始运动，则：（1）到链条离开桌面的过程中，摩擦力对链条做了多少功？（2）链条离开桌面时的速率是多少？

解：(1)建坐标系如图



$$f=\mu mg(l-x)/l$$

$$W_f=\int_a^l \vec f\bullet d\vec r=\int_a^l -\frac{\mu mg}{l}(l-x)dx$$

$$=-\left[\frac{\mu mg}{l}(lx-\frac12x^2)\right]_a^l=-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$$

注意：摩擦力作负功！

(2)对链条应用动能定理：

$$\sum W=W_P+W_f=\frac12mv^2-\frac12mv_0^2$$

$$\because v_0=0\ \therefore W_P+W_f=\frac12mv^2$$

$$W_P=\int_a^l\vec P\bullet d\vec r=\int_a^l\frac{mg}{l}xdx=\frac{mg(l^2-a^2)}{2l}$$

前已得出：　$W_f=-\frac{\mu mg(l-a)^2}{2l}$

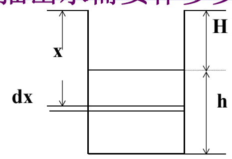
$$\therefore \frac{mg(l^2-a^2)}{2l}-\frac{\mu mg(l-a)^2}{2l}=\frac12mv^2$$

得 $v=\sqrt{g/l}\,[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2]^{\frac12}$

例3.4　（P135，3.5）

蓄水池面积S，水深h，水面距地面H。

求：抽出水需要作多少功？



S变

解：离地面x处，深dx的一层水的质量dm＝ρSdx

将dm水提到路面所需作的功：

dA＝dm g x ＝ρSgxdx

$$A=\int_H^{H+h}\rho Sgxdx=\frac12\rho Sgx^2\Big|_H^{H+h}$$

例3.5　风力F作用于向北运动的船，风力方向变化的规律是：θ＝BS，其中S为位移，B为常数，θ为F与S间的夹角。如果运动中，风的方向自南变到东，求：风力作的功

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2B}}FdS\cos\theta$$

解：元功：

dA＝Fdscosθ；

其中 **θ＝BS**

积分限：

风向由南变到东，则θ由0变到π/2；S由0变到π/2B

θ变

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2B}}F\cos(BS)d(BS)\frac1B$$

$$=\frac FB\sin(BS)\Big|_0^{\frac{\pi}{2B}}$$

$$=\frac FB\sin\frac\pi2$$

$$=\frac FB$$

动量与冲量

牛顿定律是瞬时的规律。

在有些问题中，如：碰撞（宏观）、散射（微观）… 我们往往只关心过程中力的效果

——力对时间和空间的积累效应。

力在时间上的积累效应：

平动 ⟶ 冲量 ⟶ 动量的改变

转动 ⟶ 冲量矩 ⟶ 角动量的改变

力在空间上的积累效应

⟶ 功 ⟶ 改变能量

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

质点及质点系动量定理：

$$\boxed{\mathrm{d}\,\vec{I}=\vec{F}\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{d}\,\vec{p}}$$ （微分形式）

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1}$$ （积分形式）

$$(\sum_i \vec{F}_i)\,\mathrm{d}\,t=\sum_i \mathrm{d}\,\vec{p}_i$$

$$\sum_i \vec{F}_i=\vec{F}_{外}，\quad \sum_i \vec{p}_i=\vec{P}$$

系统总动量由外力的冲量决定，与内力无关。

用质点系动量定理处理问题可避开内力。

动量守恒定律

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量不随时间改变。这就是质点系的动量守恒定律。

即 $\boxed{\vec{F}_{外}=0\text{ 时，}\vec{P}=\text{常矢量}}$

几点说明：

1. 动量守恒定律是牛顿第三定律的必然推论。
2. 动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系。

3. 动量若在某一惯性系中守恒，则在其它一切惯性系中均守恒。
4. 若某个方向上合外力为零，则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。
5. 当外力<<内力，且作用时间极短时（如碰撞），可认为动量近似守恒。
6. 动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律，它在宏观和微观领域均适用。
7. 用守恒定律作题，应注意分析 过程、系统和条件。