离散数学第一部分之四

求解递推关系

递推关系

利用递推关系，即序列之间的关系式进行求解

定义1. 序列的递推关系是一个等式，它把a_n用序列中a_n前面的一项或者多项来表示，如果一个序列的项满足递推关系，这个序列就是递推关系的解。

例：1. 令$\{a_n\}$是一个序列，它满足关系：$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，$n=2, 3, \ldots$且$a_0=3$, $a_1=5$, 求a_2, a_3?

2. 确定序列$\{a_n\}$是否为递推关系：$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$, $n=2,3,..$

的解。对$a_n=2^n$和$a_n=5$?

分析略。

注：序列的初始条件和递推关系决定了序列的每一项，只要实施一定步骤的递推，序列的任何一项均可得到。

用递推关系构造模型

例：1. 假设一个人在银行的储蓄账户上存了10 000美元，复合年息是11%。那么在30年后帐上将有多少钱？

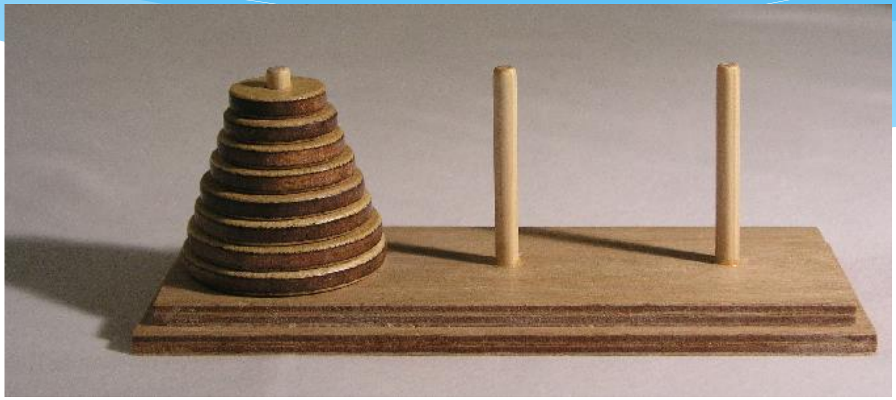
分析：令p_n表示n年后帐上的钱，显然，它等于n-1年后帐上的钱加上第n年的利息，易见：

$$p_n=p_{n-1}+0.11p_{n-1}$$

而初始$p_0=10000$。

$$p_n=1.11p_{n-1};\ p_1=1.11p_0;\ p_{30}=1.11^{30}\times 10000;$$

2. 汉诺塔问题：



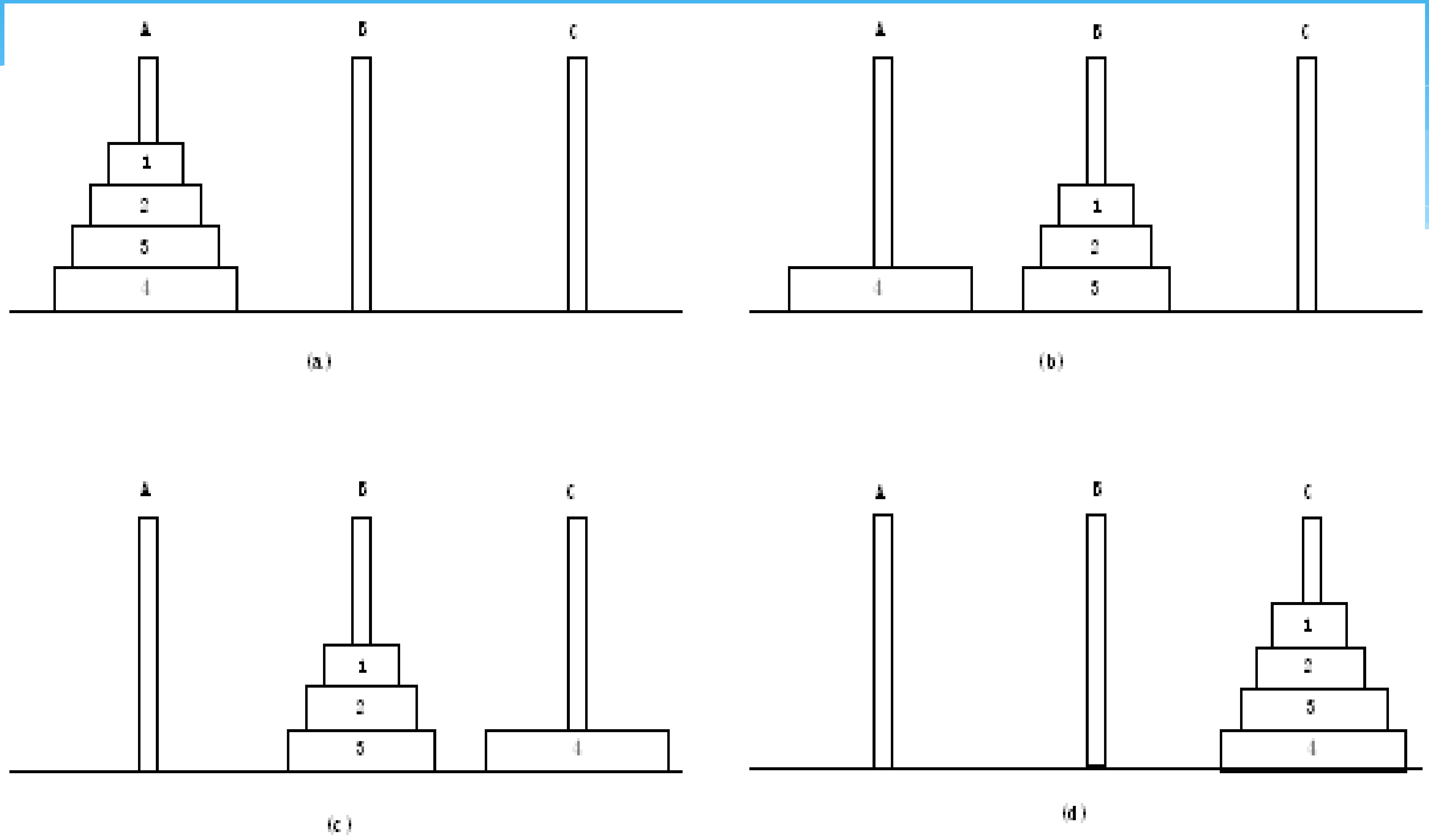
设有3根标号为A，B，C的柱子，在A柱上放着n个盘子，每一个都比下面的略小一点，要求把A柱上的盘子全部移到C柱上，移动的规则是：（1）一次只能移动一个盘子；（2）移动过程中大盘子不能放在小盘子上面；（3）在移动过程中盘子可以放在A，B，C的任意一个柱子上。

改问题源于印度，最早n=64.

该问题可以用递归算法求解。

分析：

1个盘子的汉诺塔问题可直接移动。n个盘子的汉诺塔问题可递归表示为，首先把上边的n-1个盘子从A柱移到B柱，然后把最下边的一个盘子从A柱移到C柱，最后把移到B柱的n-1个盘子再移到C柱。4个盘子汉诺塔问题的递归求解示意图如下。



汉诺塔问题的递归求解示意图

算法设计：首先，盘子的个数n是必须的一个输入参数，对n个盘子,我们可从上至下依次编号为1,2,…,n；其次，输入参数还需有3个柱子的代号,我们令3个柱子的参数名分别为fromPeg，auxPeg和toPeg；最后，汉诺塔问题的求解是一个处理过程，因此算法的输出是n个盘子从柱子fromPeg借助柱子auxPeg移动到柱子toPeg的移动步骤，我们设计每一步的移动为屏幕显示如下形式的信息：

Move Disk i from Peg X to Peg Y

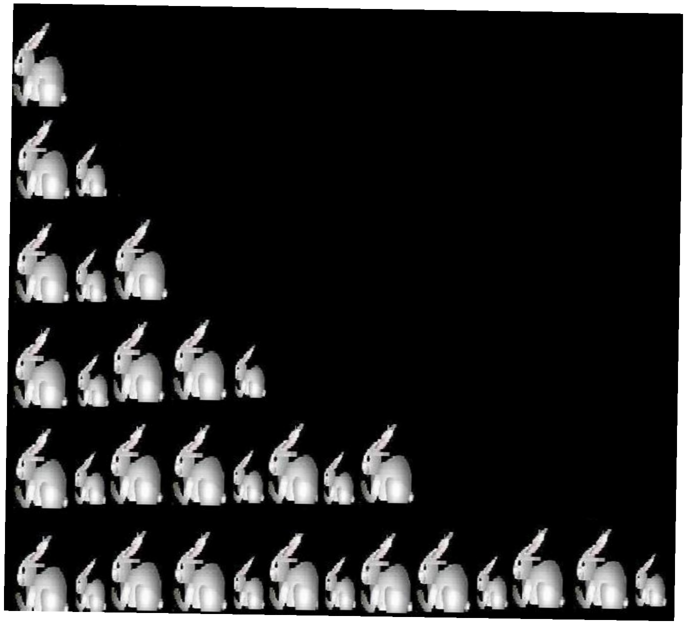
这样，汉诺塔问题的递归算法可设计如下：

```
void towers(int n, char fromPeg, char toPeg, char auxPeg)
{           if(n==1)            //递归出口
            {    printf("%s%c%s%c\n", "move disk 1 from peg ",
                             fromPeg, " to peg ", toPeg);
                      return;
            }
      //把n-1个圆盘从fromPeg借助toPeg移至auxPeg
            towers(n-1,fromPeg,auxPeg,toPeg);
      //把圆盘n由fromPeg直接移至toPeg
            printf("%s%d%s%c%s%c\n", "move disk ", n,
                      " from peg ", fromPeg, " to peg ", toPeg);
      //把n-1个圆盘从auxPeg借助fromPeg移至toPeg
            towers(n-1,auxPeg,toPeg,fromPeg);
}
```

3. 斐波纳契-关于兔子繁殖的问题

斐波纳契是中世纪的意大利数学家。他引进了阿拉伯数字及其运算法则来代替复杂的罗马数字.斐波纳契在他的《算盘书》中给出了许多实际问题的解决办法。由于家庭影响，他相对注重实用性.

将一对兔子放进一个四周都是墙的地方。假定一对兔子每月生一对小兔，新生的小兔子过两个月之后又开始生小兔子，那么一年之后这墙内应该有多少对兔子？



某月大兔子的数目等与上月大兔子的数目加上在这个月成熟的上月小兔子数目。上月小兔子的数目恰好为上上个月大兔子的数目。因此，任何一个月里大兔子的数目恰好是本月前两个月大兔子数目的和。这个数目符合如下数列：1，1，2，3，5，8，13，…

每月小兔子数目恰好为上个月大兔子的数目。除去第一个月的数字之外，从第二个月起，它符合大兔子数目的序列：1，1，2，3，5，8，13，…

这两个数列，除前两项之外每一项都等于前两项的和，被称为斐波纳契数列。

因此，任何一月墙内兔子数目应该为：

1，2，3，5，8，13，21，…

递推关系为：$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$

斐波纳契应用

一个孩子要爬楼梯，他每次最多爬两阶，如果有n阶台阶，那么他有多少种方法 可以爬上楼梯?

n=1时有一种方法， =1: 1;

n=2时有两种方法， =2： 11，2;

n=3时有三种方法， =3：111，12，21;

n=4时有五种方法， =5：1111，112，121，211，22;

n=5时有八种方法， =8：11111， 1112，1121，1211，2111，122，212，221 ;

依次往下我们发现这些可能的数字，恰好会构成斐波纳契数列。

求解递推关系

我们先讨论一元常系数线性齐次递推关系的求解。

定义：一个常系数的k阶线性齐次递推关系是形如：

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ka_{n-k}$$

其中c_1，c_2，…，c_k是常数；$c_k\neq 0$的递推关系。

特点： 线性

齐次

k阶

例：

递推关系：$P_n=1.11P_{n-1}$ 是一阶线性齐次递推关系。

$a_n=a_{n-5}$ 是5阶线性齐次递推关系。

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$$ 不是线性递推关系

- 求解常系数线性齐次递推关系

特征方程：$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ka_{n-k}$的解是$a_n=r^n$当且仅当$r^n=c_1r^{n-1}+c_2r^{n-2}+\ldots.+c_kr^{n-k}$ (1)

变换式（1）得到：

$r^k-c_1r^{k-1}-c_2r^{k-2}-\ldots.-c_k=0$

因此 序列$\{a_n\}$以$a_n=r^n$为解当且仅当r是最后一个方程的解。该方程称递推关系的特征方程，方程的解为特征根

定理1 设c_1和c_2是实数，假设方程$r^2-c_1r-c_2=0$有两个不相等的根r_1和r_2，那么序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$的解，当且仅当$a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$，n=1, 2, ….，$\alpha_1$，$\alpha_2$ 为常数.

证明分析：

(1) 必须证明：如果r_1和r_2是特征方程$r^2-c_1r-c_2=0$两个不相等根，那么$a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$是递推关系$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$的解；

(2) 必须证明：递推关系$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$的解可以写成$a_n=\alpha_1r_1^n+c\alpha_2r_2^n$的形式.

证明:

1.如果r_1和r_2是特征方程$r^2-c_1r-c_2=0$两个不相等根,且 $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$，则$a_n$序列是递推关系$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$的解;

方法：将r_1和r_2带入方程，验证：

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$$是否成立即可。

2.递推关系$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$的解可以写成

$$a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$$的形式

需要证明递推关系的每一个解都有$a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$的形式，假设{an}是递推关系的解，满足初始条件$a_0=C_0$, $a_1=C_1$, 找到 α_1和α_2 即可。

例：求下列递推关系的解

$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$, 其中$a_0=2$, $a_1=7$.

解：

a） 列出递推关系的特征方程 $r^2-r-2=0$

b） 求特征根：2，-1

c） 写出解：$a_n=\alpha_1 2^n+\alpha_2(-1)^n$

d） 求出α_1，α_2

$a_0=\alpha_1+\alpha_2$; $a_1=2\alpha_1+\alpha_2(-1)$； $\alpha_1=3$； $\alpha_2=-1$

e） 写出全解.

例 求解Fibonacci数列的递推关系

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & (n \geq 3) \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

解：这个递推关系为常系数线性齐次递推关系，其特征方程是$x^2-x-1=0$，

特征根是

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

所以通解是

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

因为，代入初值来确定c1和c2，得到方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} c_2 = 1 \end{cases}$$

解这个方程组得

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

所以满足初值条件的特解是

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

n=0,1, ….

对于k阶常系数线性齐次递推关系，当特征根r1, r2, …, rk都不相等时，我们已经给出了求通解的方法。但是当r1, r2, …, rk中有重根时，这种方法就不适用了。

定理 设c_1和c_2是实数．假设$r^2-c_1r-c_2=0$只有一个特征根．

$a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2}$， $a_0 = 1$ $a_1 = 6$，求 $\{a_n\}$ 的解，当且仅当

为常数

例：

解：特征方程 $r^2 - 6r + 9 = 0$ 的根为 r=3

$\therefore a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$

又由 $a_0 = 1$ $a_1 = 6$ 得

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$\therefore a_n = 3^n + n \cdot 3^n$

例 求解递推关系：

$$\begin{cases} H(n) = 4H(n-1) - 4H(n-2) \\ H(0) = 1, H(1) = 3 \end{cases}$$

解： 它的特征方程是$x^2-4x+4=0$，特征根是$q1=q2=2$。由定理6.15可知2^n是它的解。但必须找一个与2^n线性无关的解，不妨尝试$n2^n$，把它代入原递推关系得

$n2^n-4(n-1)\,2^{n-1}+4(n-2)2^{n-2}$

$=n2^n-(n-1)2^{n+1}+(n-2)\,2^n$

$=2^n\,[n-2(n-1)+(n-2)]$

$=0.$

这说明$n2^n$也是解，且它与递推关系的另一解2^n 线性无关，所以原递推关系的通解是

$H(n)=c12^n+c2n2^n$

定理 3 .设c_1，$c_2,\ldots,c_k$是实数，假设特征方程$r^k-c_1r^{k-1}-\ldots-c_k=0$有k个不相等的根$r_1,\ldots r_k$,那么序列$\{a_n\}$是递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ka_{n-k}$$

的解,当且仅当

$a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n+\ldots+\alpha_kr_k^n$, n=1, 2, ….，$\alpha_1$，… α_k为常数.

已知 $a_0=2,\ a_1=5,\ a_2=15,\ a_n=6a_{n-1}-11a_{n-2}+6a_{n-3}$,

求 $\{a_n\}$

解: 特征方程为 $r^3-6r^2+11r-6=0 \Longleftrightarrow (r-1)(r-2)(r-3)=0$

$\therefore\ r_1=1,\ r_2=2,\ r_3=3$

$\therefore\ a_n=\alpha_1\cdot 1^n+\alpha_2\cdot 2^n+\alpha_3\cdot 3^n$

$$\text{且}\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 2=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ a_1 & = & 5=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 \\ a_2 & = & 15=\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & 1 \\ \alpha_2 & = & -1 \\ \alpha_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

$\therefore\ a_n=1-2^n+2\cdot 3^n$

定理6. 16 设$r_1, r_2, \ldots, r_t$是递推关系 $a_n=c_1a_{n-1}+\ldots+c_ka_{n-k}$ 的互不相等的特征根，则这个递推关系的通解中对应于r_i(i=1, 2, …, t)的部分是

$$a_{in}= c_{i1}r_i^n + c_{i2}nr_i^n + \cdots + c_{ie_i}n^{e_i-1}r_i^n$$

其中ei是r_i的重数。而

$$a_n=a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{tn}$$

是该递推关系的通解。

课本写法:

$$\begin{aligned} a_n &= (\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}n+\cdots+\alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n \\ &+ (\alpha_{2,0}+\alpha_{2,1}n+\cdots+\alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n+\cdots \\ &+ (\alpha_{t,0}+\alpha_{t,1}n+\cdots+\alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned}$$

例 求解递推关系

$$\begin{cases} H(n)+H(n-1)-3H(n-2)-5H(n-3)-2H(n-4)=0 \\ H(0)=1, H(1)=0, H(2)=1, H(3)=2 \qquad n\geq 4 \end{cases}$$

解： 该递推关系是常系数线性齐次递推关系，其特征方程是$x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$

求它的特征根是-1，-1，-1，2。由定理，对应于三重特征根-1的解是

$$H_1(n)=c_1(-1)^n+c_2n(-1)^n+c_3n^2(-1)^n,$$

对应于特征根2的解是

$$H_2(n)=c_4 2^n$$

递推关系的通解是

H(n)=H1(n)+H2(n）代入初值得到以下方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 1 \\ -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1 \\ -c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 9c_4 = 2 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{7}{9} \quad c_2 = -\frac{1}{3} \quad c_3 = 0 \quad c_4 = \frac{2}{9}$$

$a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$,

求 $\{a_n\}$

解: 特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \ \Rightarrow \ (r+1)^3 = 0 \ \Rightarrow \ r = -1$

$\therefore \ a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$

且 $\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha_{1,0} \\ a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} \\ a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_{1,0} = 1 \\ \alpha_{1,1} = 3 \\ \alpha_{1,2} = -2 \end{cases}$

$\therefore \ a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$

对于不是常系数线性齐次递推关系，至今还没有得出任何一种普遍运用的方法，或不存在通用的求解公式。而迭代和归纳法是求解递推关系的另一种方法。对于非常系数线性齐次递推关系，不妨用迭代和归纳法来作尝试。

例 求解Hanoi问题

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_0 = 0 \qquad (n \geq 1) \end{cases}$$

解一: 用归纳法（或从特殊到一般）因为

$T_0=0$，$T_1=2T_0+1=1$，$T_2=2T_1+1=3$，$T_3=2T_2+1=7$，

$T_4=2T_3+1=15$，$T_5=2T_4+1=31$，$T_6=2T_5+1=63$, …

从特殊到一般，似乎有$T_n=2^n-1$ （$n\geq0$）

下面用数学归纳法证：$T_n=2^n-1$ （$n\geq0$）

当$n=0$，$T_0=2^0-1=0$，结论成立，

归纳假设，$n-1$时结论成立，即$T_{n-1}=2^{n-1}-1$

证n时，$T_n=2T_{n-1}+1$ (由归纳假设$T_{n-1}=2^{n-1}-1$)

$=2(2^{n-1}-1)+1=2^n-2+1=2^n-1$

结论成立。

所以$T_n=2^n-1$（$n\geq0$）。

用迭代法（或从一般到特殊）

$T_n=2T_{n-1}+1=2(2T_{n-2}+1)+1$

$=2^2T_{n-2}+2+1$

$=2^2\ (2T_{n-3}+1)+2+1$

$=2^3T_{n-3}+2^2+2+1$

$=2^nT_{n-n}+2^{n-1}+\ldots+2+1$

$=2^nT_0+2^{n-1}+\ldots+2+1\ (T_0=0)$

$=2^{n-1}+\ldots+2+1$

$=2^n-1$ （$n\geq 0$）

如果n=64，则至少要移动18 446 744 073 709 551 615 次，即使每移动一次只需一微秒，则至少需要500世纪来完成这个任务。于是编了一个神话：64层的黄金圆盘，上帝叫一群神父去移动金盘，一旦他们完成任务时，塔则将粉碎，世界将毁灭。

总结：

重点掌握递推关系的求解