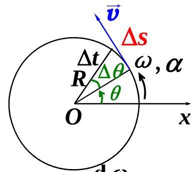
1.5 圆周运动（circular motion）

一. 描述圆周运动的物理量

1.角位移（angular displacement）

2.角速度（angular velocity）

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}$$



3.角加速度（angular acceleration） $\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\ddot{\theta}$

4.线速度（linear velocity） $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{R\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega$

5. 线加速度（linear acceleration）

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\cdot\vec{e}_t)$$

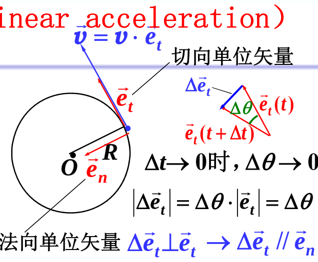
$$=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t+v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n$$

$$=\omega\,\vec{e}_n=\frac{v}{R}\vec{e}_n$$

$$\therefore\quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t+\frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$$=a_t\cdot\vec{e}_t+a_n\cdot\vec{e}_n$$

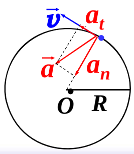


$\Delta t\to 0$时，$\Delta\theta\to 0$

$|\Delta\vec{e}_t|=\Delta\theta\cdot|\vec{e}_t|=\Delta\theta$

$\Delta\vec{e}_t\perp\vec{e}_t\ \to\Delta\vec{e}_t\,//\,\vec{e}_n$

$\to\Delta\vec{e}_t=\Delta\theta\cdot\vec{e}_n$



$$\boxed{a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$ —— 切向加速度（tangential acceleration）

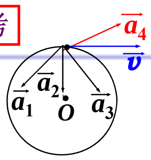
a_t是引起速度大小改变的加速度。

$$\boxed{a_n=\frac{v^2}{R}}$$ —— 法向加速度（normal acceleration）

或 向心加速度（centripetal acceleration）

a_n是引起速度方向改变的加速度。

思考



左图中分别是什么情形？

$\vec{a}_4$情形是否存在？

二. 角量与线量的关系

线量 $\left\{\begin{aligned} v&=R\omega\\ a_t&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\alpha\\ a_n&=\frac{v^2}{R}=R\omega^2\end{aligned}\right\}$ 角量

匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动

1 匀速率圆周运动

$\omega=$常量， 故 $a_t=0$， $a_n=r\omega^2$

$\therefore\vec{a}=a_n\vec{e}_n=r\omega^2\vec{e}_n$

由$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$， 有 $\mathrm{d}\theta=\omega\mathrm{d}t$，

如$t=0$时， $\theta=\theta_0$

可得： $\theta=\theta_0+\omega t$

2 匀变速率圆周运动

$\alpha =$常量， 故 $a_t = r\alpha$， $a_n = r\omega^2$

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} =$常量， 又 $d\omega = \alpha dt$

$d\theta = \omega dt$，

如 $t=0$ 时，$\theta = \theta_0$，$\omega = \omega_0$

可得：$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

匀变速率圆周运动与匀变速率直线运动类比

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \end{cases}$$

例1　半径为1*m*的轮子以匀角加速度从静止开始转动，20*s*末角速度为100*rad/s*。求(1) 角加速度及20*s*内转过的角度；(2) 第20*s*末轮边缘上一点的切向和法向加速度。

➢解　$\omega = \omega_0 + \alpha t$

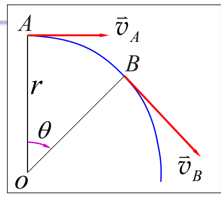
$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{100-0}{20} = 5(rad/s^2)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\times 5\times 20^2 = 1000\ (rad)$$

(2) $a_t = R\alpha = 1\times 5 = 5(m/s^2)$

$$a_n = R\omega^2 = 1\times 100^2 = 10{,}000(m/s^2)$$

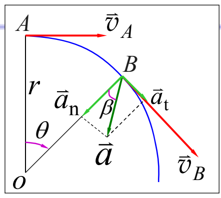
例2　一歼击机在高空点*A*时的水平速率为1940 km·h^{-1}，沿近似圆弧曲线俯冲到点*B*，其速率为2192 km·h^{-1}，经历时间为3 s，设 $\widehat{AB}$ 的半径约为 3.5 km，飞机从*A*到*B*视为匀变速率圆周运动，不计重力加速度的影响，求：(1) 飞机在点*B*的加速度；(2) 飞机由点*A*到点*B*所经历的路程.



解 (1) $v_A = 1940\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

$v_B = 2192\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

$t = 3\,\mathrm{s}$，$r = 3.5\times 10^3\,\mathrm{m}$



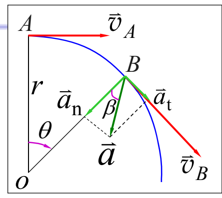
$$\int_{v_A}^{v_B} dv = a_t \int_0^t dt$$

$$a_t = \frac{v_B - v_A}{t} \qquad 而B点\ a_n = \frac{v_B^2}{r}$$

解得：$a_t = 23.3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，$a_n = 106\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 109\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\beta = \arctan\frac{a_t}{a_n} = 12.4^\circ$$

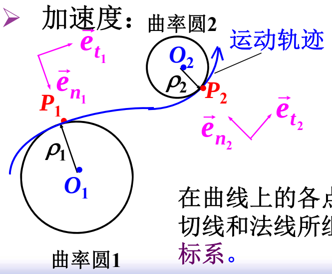


(2) 矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 $\theta = \omega_A t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_t t^2 = 1722\,\mathrm{m}$$

1.6 平面曲线运动（plane curvilinear motion）

- 一个任意的平面曲线运动，可以视为由一系列小段圆周运动所组成。
- 加速度：



加速度：

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\cdot\vec{e}_n}$$

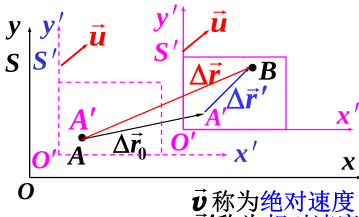
ρ—曲率半径

在曲线上的各点固结一系列由当地的切线和法线所组成的坐标系称自然坐标系。

1.7 相对运动（relative motion）

- 相对运动是指不同参考系中观察同一物体的运动。

仅讨论参考系 S' 相对参考系 S 以速度 $\vec{u}$ 平动的情形：



$$\boxed{\Delta\vec{r}=\Delta\vec{r}\,'+\Delta\vec{r}_0}$$

速度关系：

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u}}$$

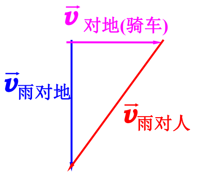
$\vec{v}$ 称为绝对速度（absolute velocity）

$\vec{v}\,'$称为相对速度（relative velocity）

$\vec{u}$ 称为牵连速度（connected velocity）

$\boxed{\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u}}$ 称为伽利略速度变换

（Galilean velocity transformation）



[例] 雨天骑车人只在胸前铺一块塑料布即可遮雨。

$\vec{v}_{雨对地}=\vec{v}_{雨对人}+\vec{v}_{人对地(骑车)}$

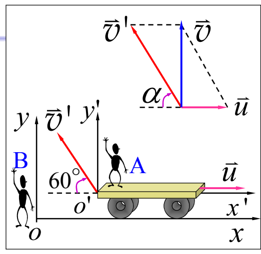
（$\vec{v}$ ）（$\vec{v}\,'$）（$\vec{v}$ ）

加速度关系：在 S' 相对于S平动的条件下

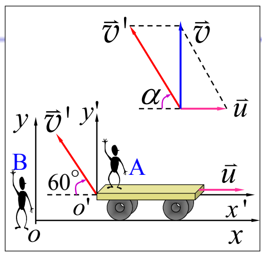
$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}\,'+\vec{a}_0}$$

$\vec{v}=\mathrm{const}$． 则$\vec{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=0$，有$\vec{a}=\vec{a}\,'$

例 实验者A 在以$10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速率沿水平轨道前进的平板车上控制一台射弹器，射弹器以与车前进方向呈60°斜向上射出一弹丸．此时站在地面上的另一实验者 B 看到弹丸铅直向上运动，求弹丸上升的高度．



解 地面参考系为 S 系，平板车参考系为S'系



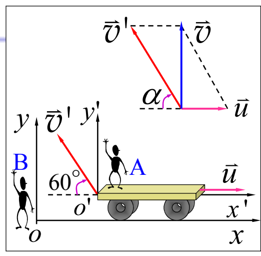
$$\tan\alpha=\frac{v'_y}{v'_x}$$

速度变换

$$v_x=u+v'_x$$

$$v_y=v'_y$$

$$\because v_x=0 \qquad \therefore v'_x=-u=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$



$$|v_y|=|v'_y|$$

$$=|v'_x\tan\alpha|$$

$$|v_y|=17.3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

弹丸上升高度

$$y=\frac{v_y^2}{2g}=15.3\ \mathrm{m}$$

几点说明：

1. 以上结论是在绝对时空观下得出的：

只有假定“长度的测量不依赖于参考系”（空间的绝对性），才能给出位移关系式：

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}_0}$$

只有 “时间的测量不依赖于参考系”（时间的绝对性），才能进一步给出关系式：

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}} \quad 和 \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0}$$

绝对时空观只在 $u \ll c$ 时才成立。

2. 不可将速度的合成与分解和伽利略速度变换关系相混淆。

速度的合成是在同一个参考系中进行的，总能够成立；

伽利略速度变换则应用于两个参考系之间，只在$u \ll c$时才成立。

3. $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,'$只适用于相对运动为平动的情形。

小结速度和加速度的性质：

- 相对性：必须指明参考系
- 矢量性：有大小和方向，可进行合成与分解，合成与分解遵守平行四边形法则
- 瞬时性：大小和方向可以随时间改变
- 在 $u \ll c$时，有伽利略速度变换和加速度变换

第一章结束

作业

- **P49：1.5、1.6、1.10、1.21、1.26、1.28**
- 所有例题课下都要看