第一章 行列式

第三节 行列式按行（列）展开

求解行列式除了利用行列式的性质，还可以采用一定手段把高阶的行列式化成低阶行列式的方法来进行。

一、余子式与代数余子式

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定义

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫做元素a_{ij}的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别 对应着一个余子式和一个代数余子式.

引理　若 n 阶行列式D第 i 行除 a_{ij}外都为零，则D等于 a_{ij}与其代数余子式乘积，即 $D = a_{ij} A_{ij}$.

例如 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

证 当 a_{ij} 位于第一行第一列时的特殊情况,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们前面的章节已经证明出结论成立，即

$$D = a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把D的第i行依次与第$i-1$行,第$i-2$行,$\cdots$,第1行对调,

得 $$D=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再把D的第j列依次与第$j-1$列,第$j-2$列,$\cdots$,第1列对调,

得

$$
D=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}
a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{1,j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=a_{ij}(-1)^{(i+j)-2}M_{ij}=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}
$$

证毕.

二、行列式按行（列）展开法则

有了该引理，我们来看*n*阶行列式：【把第*i*行看成*n*项的和】

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}
$$

$$
(i = 1,2,\cdots,n)
$$

对列也有类似结论。

定理1 行列式$D=|a_{ij}|$等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj},$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

例1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

解：（按第5列展开）

原式$=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

（再按第一列展开）

$$=-2(-1)^{1+1}5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

（第1行的合适倍数分别加到第2行和第3行）

$$=-10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$= -10\times(-2)\times(-7\times6-2\times6)$

$= -1080$

根据代数余子式定义，行列式第i行（j列）元的代数余子式与该行（列）无关。

将行列式$|A|$的第i行元换成第k ($k\neq i$) 行元得到新行列式 $|B|=|b_{ij}|$。即

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad |B|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ k\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

显然$|B|$=0，且$|B|$的第i行元的代数余子式与$|A|$的第i行元的代数余子式相等。由定理1得：

$$|B| = b_{i1}B_{i1}+b_{i2}B_{i2}+\cdots+b_{in}B_{in}$$

$$= a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}$$

于是有：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0 \quad (k\neq i)$$

即：在行列式中，一行的元与另一行相应元的代数余子式乘积之和为零。

对于列，也有类似的性质。

定理2 $n(n\geq 2)$阶行列式的任一行（列）元与另一行（列）对应元的代数余子式乘积之和为零。即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{ks}=0, \quad (i\neq k, \quad i,k=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\sum_{s=1}^{n}a_{sj}A_{st}=0, \quad (j\neq t, \quad j,t=1,2,\cdots,n)$$

两个重要公式:

行

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\boxed{\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}|A|, & 当k=i\\ 0, & 当k\neq i\end{cases}}$$

列

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\boxed{\sum_{s=1}^{n}a_{sj}A_{st}=\begin{cases}|A|, & 当j=t\\ 0, & 当j\neq t\end{cases}}$$

例2. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

求： $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$， $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}$

解：

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=16$$

$$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$$

例3 证明范德蒙(*Vandermonde*)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).\qquad(1)$$

证 用数学归纳法

$$\because\quad D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j),$$

$\therefore$ 当 $n=2$ 时（1）式成立.

假设（1）对于$n-1$阶范德蒙行列式成立，

对(1)式，由下而上依次从每一行减去上一行的x_1倍，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公 因子$(x_i - x_1)$提出，就有

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

***n*-1**阶范德蒙行列式

$$\therefore \quad D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n \ge i > j \ge 2}(x_i - x_j)$$
$$= \prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j).$$

范德蒙行列式为零的充分必要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 这n个数至少有两个相等。

三、k阶子式及其余子式和代数余子式

定义 在n阶行列式D中任选k行k列，位于这k行k列的交叉点处的k^2个元素按原来的位置组成的k阶行列式M叫做D的一个k阶子式。在D中划去M所在的行与列，剩下的元素按原来的位置组成的n-k子式N叫做M的余子式。

我们称这一对子式M与N互为余子式。

设M所在的行数与列数依次为$i_1<i_2<\ldots<i_k$，$j_1<j_2<\ldots<j_k$，M的余子式N乘以 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$

叫做M的代数余子式，记作A。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$M=\begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \qquad N=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A=(-1)^{(4+5)+(4+5)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在D中， M 是 的一个2阶子式，N是 M 的余子式，A 是 M 的代数余子式.

四、拉普拉斯定理 (Laplace)

定理（拉普拉斯定理）：在n阶行列式$|A|$中，任意选定k个行（列）（$1\le k<n$），则$|A|$等于位于这k个行（列）中的一切k阶子式 $M_i(i=1,2,\cdots,C_n^k)$ **与对应的代数余子式** A_i **乘积之和。即**

$$|A|=\sum_{i=1}^{C_n^k} M_i A_i$$

例4　设
$$D=\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

（一个很重要的结论）

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

另外，对应的其转置 $\begin{vmatrix} *_1 & *_2 \\ 0 & *_3 \end{vmatrix}=\left|*_1\right|\cdot\left|*_3\right|$

小结

1. 行列式按行（列）展开法则是**把高阶行列式的计算化为低阶行列式**计算的重要工具.

2. $$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} |A|, & 当k = i \\ 0, & 当k \neq i \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{st} = \begin{cases} |A|, & 当j = t \\ 0, & 当j \neq t \end{cases}$$

3.记住范德蒙和*Laplace*定理的结论。

n阶行列式的定义

定义 由n^2个数（实数或复数）排成一个n行n列的表，并在两边各画一条竖线的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所表示的数称为n阶行列式。

有时简记为 $|a_{ij}|$, $|A|$, $\det(a_{ij})$, $\det(b_{ij})$

类似二、三阶行列式可得 （称为n阶行列式的展开式）

$$|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

表示对1, 2, …, n的一切排列求和

行列式的性质

- 性质1 行列式的行与列的顺序互换，其值不变

  （行列互换值不变）

- 性质2 交换行列式任意两行（或两列），行列式仅改变符号.

  (两行互换变号)

- 性质3 行列式中某行（列）的元有公因子k，则k可以提到行列式符号外边.

  (一行的公因子可以提出)

(以一数k乘行列式的一行就相当于用k乘此行列式。)

性质4 若行列式某行（如第 i行）的元均可表为两项之和

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

则此行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行（第 i行）的元分别为 b_{ij} 和 c_{ij} 外，其余各行与原行列式的一样。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（某行项为两项和，则为两行列式和）

注：可以推广到某一行为多组数的和的情形。

27

性质5　若行列式的

（1）某行(列)元全为零,

（2）两行(列)元对应相等,

（3）两行(列)元对应成比例,

则行列式的值为零.

性质６ 把行列式的某列（行）的k倍加到另一列(行)上，行列式值不变.

（某行倍数加到另一行，值不变。）

行列式性质总结：

- 行列互换（转置）值不变（性质1）
- 两行互换，反号（性质2）
- 一行的公因子可以提出（性质3）
- 某行元为两项和，则等于两行列式和（性质4）
- 某行为零、两行相同或成比例，值为零（性质5）
- 某行倍数加到另一行，值不变（性质6）

思考题

1. 计算$n(n>1)$阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$$

思考题解答

1． 解：按第一列展开（其它可按第n行展开）

$$|A| = a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

（n−1阶）　　　　（n−1阶）

$$= aa^{n-1} + (-1)^{n+1} bb^{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

2. $$\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$$

解：原式＝ $$\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+3+1+3+5} \begin{vmatrix} ab & bc \\ cd & da \end{vmatrix}$$

$$= -abd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & c \\ c & a \end{vmatrix}$$

$$= -abd(c-b)(d-b)(d-c)(a^2-c^2)$$

$$= abd(c-b)(d-b)(d-c)(c^2-a^2)$$