

第8章 相量法

本章重点

8.1

复数

8.2

正弦量

8.3

相量法的基础

8.4

电路定律的相量形式



● 重点:

1. 正弦量的表示、相位差
2. 正弦量的相量表示
3. 电路定理的相量形式



8.1 复数

1. 复数的表示形式

$$F = a + jb$$

代数式

($j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位)

$$F = |F| e^{j\theta}$$

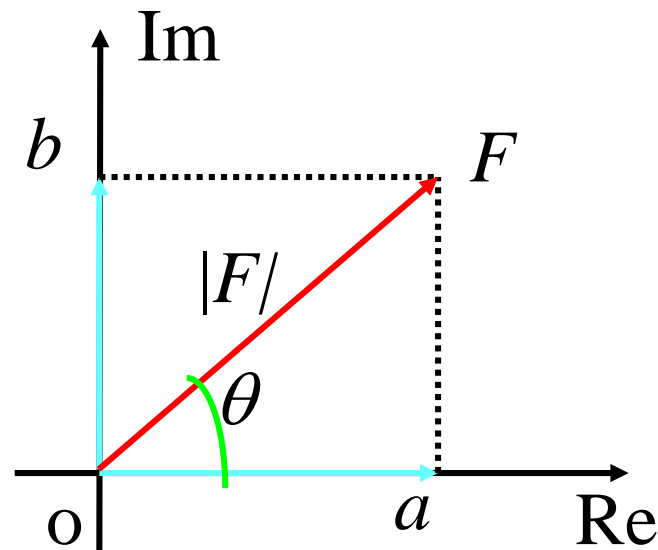
指数式

三角函数式

$$F = |F| e^{j\theta} = |F| (\cos \theta + j \sin \theta) = a + jb$$

$$F = |F| e^{j\theta} = |F| \angle \theta$$

极坐标式



几种表示法的关系:

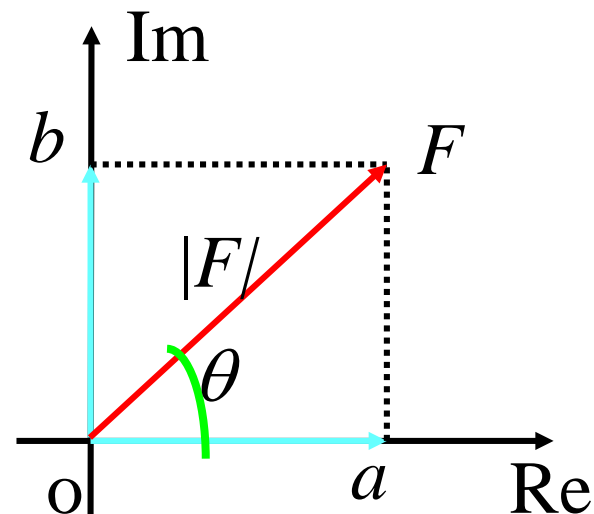
$$F = a + jb$$

$$F = |F| e^{j\theta} = |F| \angle \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |F| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan \frac{b}{a} \end{array} \right.$$

或

$$\left\{ \begin{array}{l} a = |F| \cos \theta \\ b = |F| \sin \theta \end{array} \right.$$



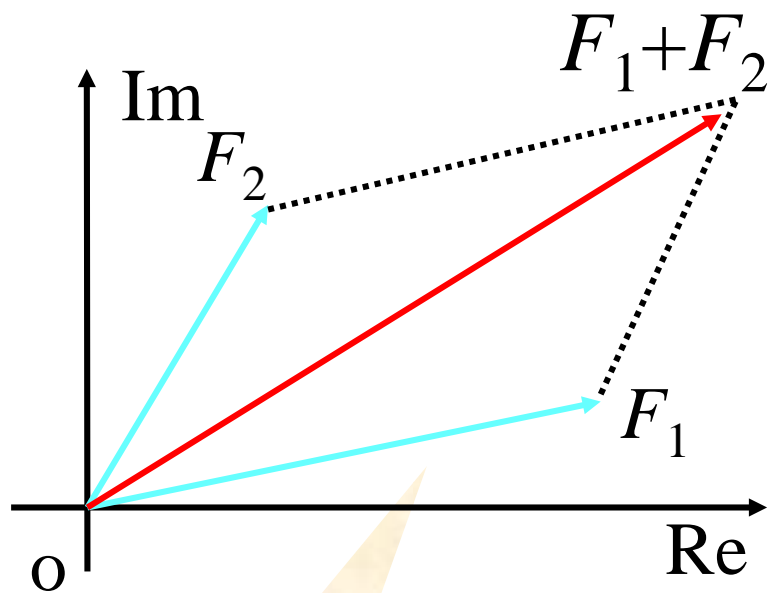
2. 复数运算

① 加减运算 —— 采用代数式

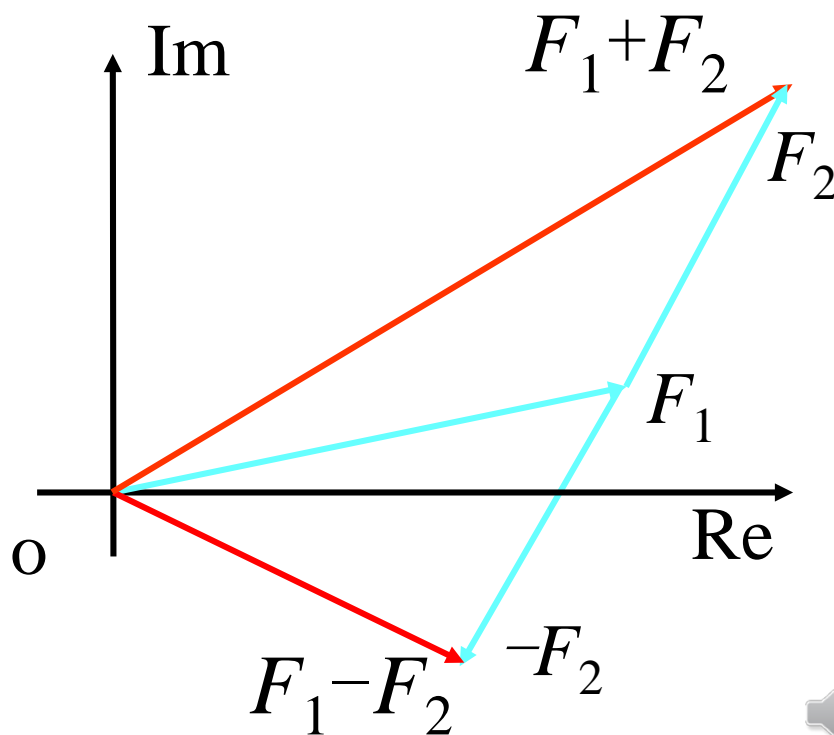
若 $F_1 = a_1 + jb_1$, $F_2 = a_2 + jb_2$

则 $F_1 \pm F_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

$|F_1|e^{j\theta_1}$
 $\pm |F_2|e^{j\theta_2}$



图解法



②乘除运算 —— 采用极坐标式

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + a_2jb_1 + a_1jb_2 + j^2b_1b_2$$

若 $F_1 = |F_1| \angle \theta_1$, $F_2 = |F_2| \angle \theta_2$

则: $F_1 \cdot F_2 = |F_1|e^{j\theta_1} \cdot |F_2|e^{j\theta_2} = |F_1||F_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$$= |F_1||F_2| \angle \theta_1 + \theta_2$$

模相乘
角相加

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1| \angle \theta_1}{|F_2| \angle \theta_2} = \frac{|F_1| e^{j\theta_1}}{|F_2| e^{j\theta_2}} = \frac{|F_1|}{|F_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$= \frac{|F_1|}{|F_2|} \angle \theta_1 - \theta_2$$

模相除
角相减



例1 $5\angle 47^\circ + 10\angle -25^\circ = ?$

解 原式 $= (3.41 + j3.657) + (9.063 - j4.226)$
 $= 12.47 - j0.569 = 12.48\angle -2.61^\circ$

例2 $220\angle 35^\circ + \frac{(17 + j9)(4 + j6)}{20 + j5} = ?$

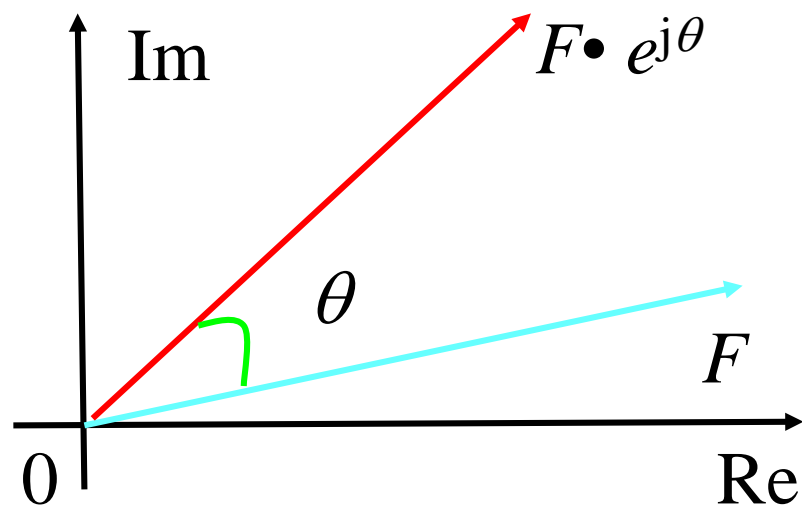
解 原式 $= 180.2 + j126.2 + \frac{19.24\angle 27.9^\circ \times 7.211\angle 56.3^\circ}{20.62\angle 14.04^\circ}$
 $= 180.2 + j126.2 + 6.728\angle 70.16^\circ$
 $= 180.2 + j126.2 + 2.238 + j6.329$
 $= 182.5 + j132.5 = 225.5\angle 36^\circ$



③旋转因子

复数 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta = 1 \angle \theta$

旋转因子



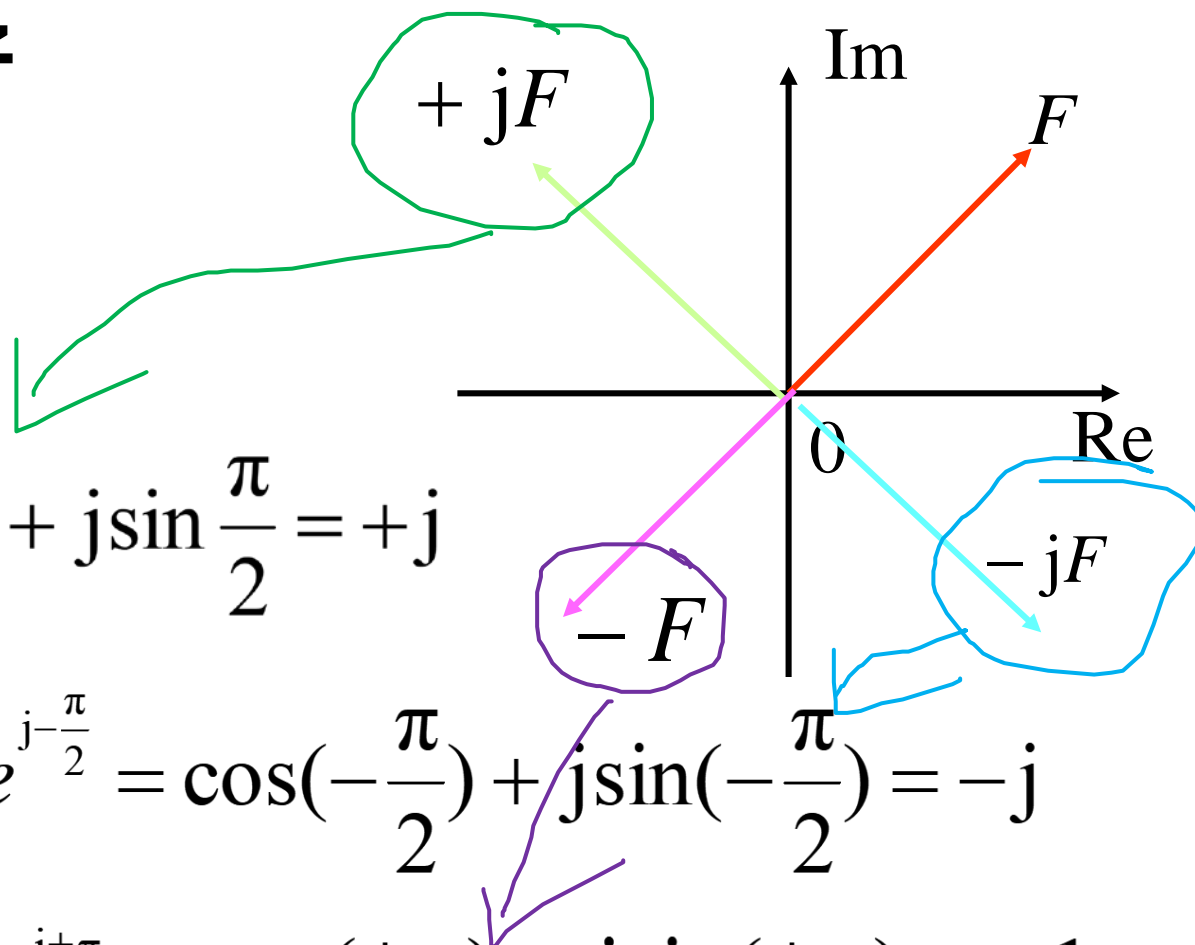
特殊旋转因子

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = +j$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad e^{j-\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = -j$$

$$\theta = \pm\pi, \quad e^{j\pm\pi} = \cos(\pm\pi) + j\sin(\pm\pi) = -1$$



注意 $+j, -j, -1$ 都可以看成旋转因子。



8.2 正弦量

1. 正弦量

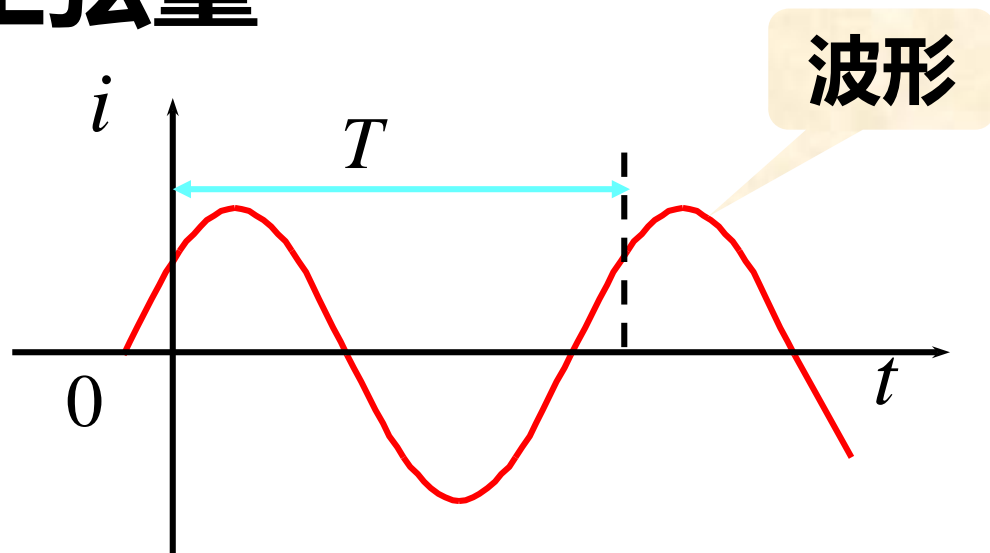
●瞬时值表达式

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

正弦量为周期函数

$$f(t) = f(t + kT)$$

$$f = \frac{1}{T}$$



●周期 T 和频率 f

周期 T : 重复变化一次所需的时间。单位: 秒s
频率 f : 每秒重复变化的次数。单位: 赫(兹)Hz



●正弦电流电路



激励和响应均为同频率的正弦量的线性电路
(正弦稳态电路) 称为正弦电路或交流电路。

●研究正弦电路的意义

1. 正弦稳态电路在电力系统和电子技术领域占有十分重要的地位。



优点

① 正弦函数是周期函数，其加、减、求导、积分运算后仍是同频率的正弦函数；

② 正弦信号容易产生、传送和使用。



2. 正弦信号是一种基本信号，任何非正弦周期信号可以分解为按正弦规律变化的分量。

$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega t + \theta_k)$$



对正弦电路的分析研究具有重要的理论价值和实际意义。



2. 正弦量的三要素

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

(1) 幅值 (振幅、最大值) I_m

→ 反映正弦量变化幅度的大小。

(2) 角频率 ω

→ 相位变化的速度，反映正弦量变化快慢。

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

单位： rad/s ， 弧度/秒

(3) 初相位 ψ

→ 反映正弦量的计时起点，常用角度表示。

相位

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

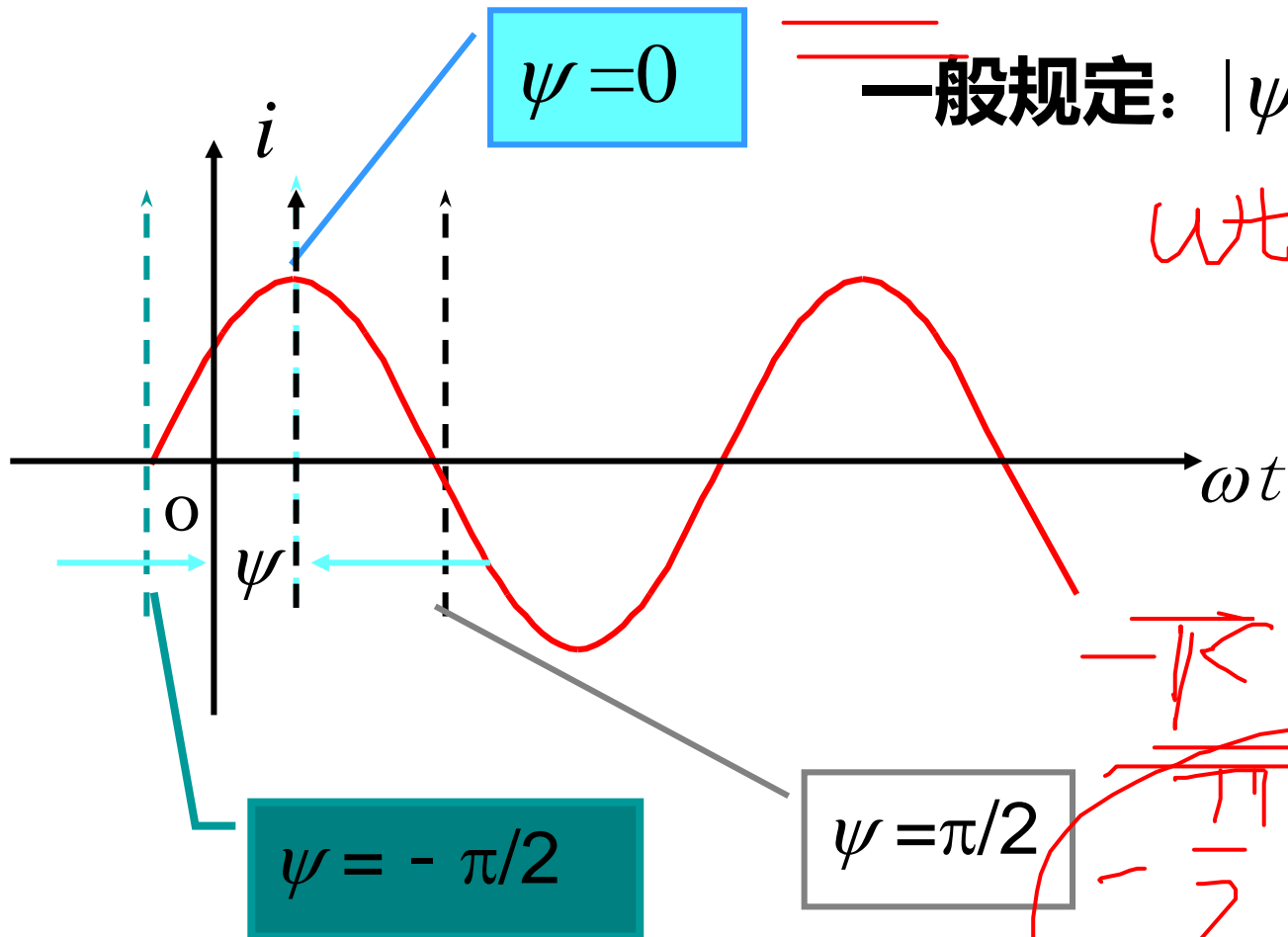




注意 同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

一般规定： $|\psi| \leq \pi$ 。



$$\omega t + \psi = 0$$
$$\psi = -\omega t$$

$$-\pi < \psi < \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \pi$$



例 已知正弦电流波形如图, $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$,

1. 写出 $i(t)$ 表达式; 2. 求最大值发生的时间 t_1

解 $i(t) = 100 \cos(10^3 t + \psi)$

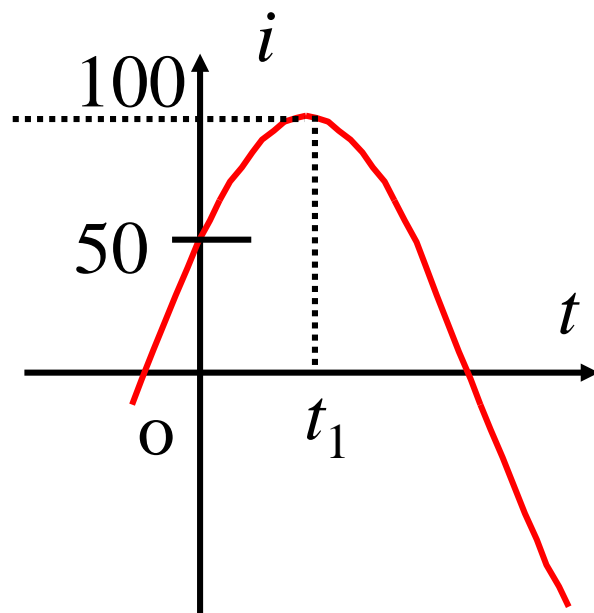
$$t = 0 \rightarrow 50 = 100 \cos \psi$$

$$\rightarrow \psi = \pm \pi/3 \rightarrow \psi = -\frac{\pi}{3}$$

由于最大值发生在计时起点右侧

$$i(t) = 100 \cos\left(10^3 t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{当 } 10^3 t_1 = \pi/3 \text{ 有最大值} \rightarrow t_1 = \frac{\pi/3}{10^3} = 1.047 \text{ ms}$$



3. 同频率正弦量的相位差

设 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi_u)$, $i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi_i)$

相位差： $\varphi = (\omega t+\psi_u) - (\omega t+\psi_i) = \psi_u - \psi_i$

规定： $|\varphi| \leq \pi$ (180°)

等于初相位之差

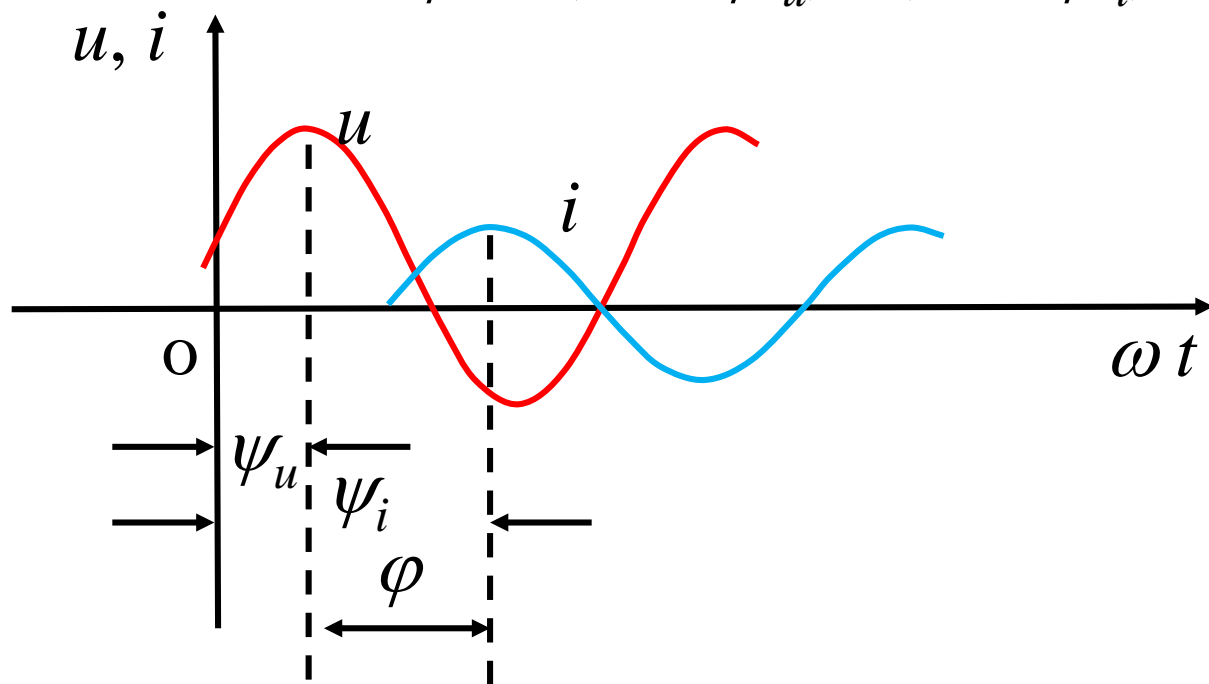
$$-\pi < \varphi < \pi$$

$$0 < \varphi < 2\pi$$



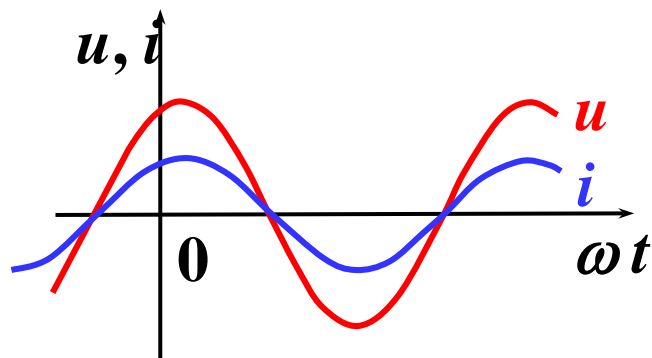
- $\varphi > 0$, u 超前 i φ 角, 或 i 滞后 u φ 角, (u 比 i 先到达最大值);
- $\varphi < 0$, i 超前 u φ 角, 或 u 滞后 i φ 角, (i 比 u 先到达最大值)。

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i$$

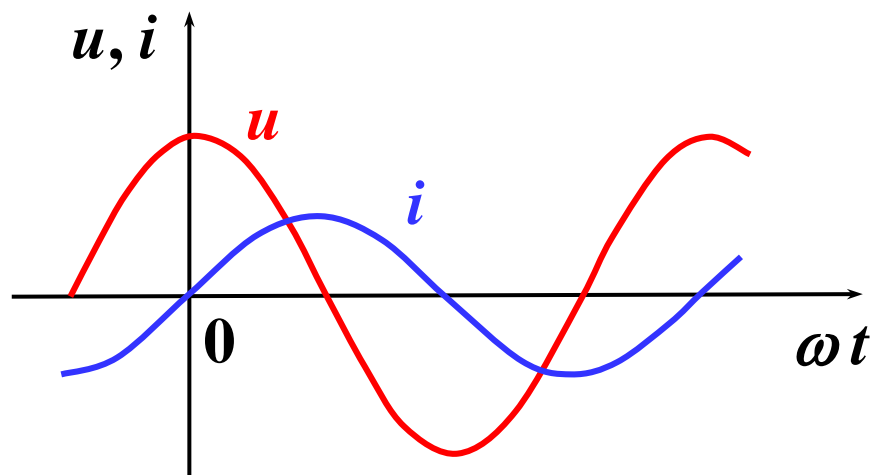
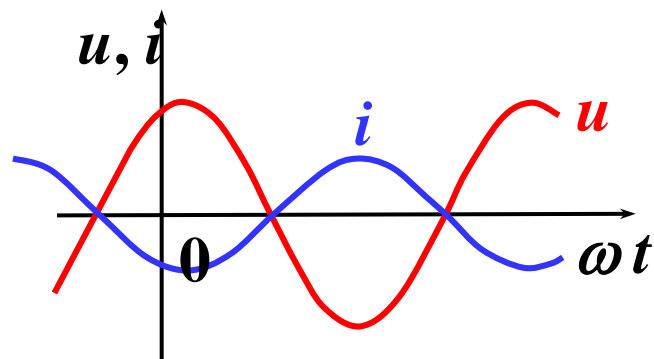


特殊相位关系

$\varphi = 0$, 同相



$\varphi = \pm \pi$ ($\pm 180^\circ$), 反相



$\varphi = 90^\circ$

u 领先 i 90°
或 i 落后 u 90°
不说 u 落后 i 270°
或 i 领先 u 270°

规定: $|\varphi| \leq \pi$ (180°)

同样可比较两个电压或两个电流的相位差。



例 计算下列两正弦量的相位差。

解

$$i_2(t) = 10 \cos(100\pi t - 105^\circ)$$

$$\rightarrow \varphi = 30^\circ - (-105^\circ) = 135^\circ$$

$$(2) \quad i_1(t) = 10 \cos(100\pi t + 30^\circ)$$

$$i_2(t) = 10 \cos(100\pi t - 15^\circ)$$

$$i_2(t) = 3 \cos(100\pi t - 150^\circ)$$

$$\rightarrow \varphi = -30^\circ - (-150^\circ) = 120^\circ$$

$$(4) \quad i_1(t) = 5 \cos(100\pi t - 30^\circ)$$

$$i_2(t) = -3 \cos(100\pi t + 30^\circ) \rightarrow 180^\circ = 210^\circ$$

$\rightarrow \pi < \pi \quad = -150^\circ$



结论

两个正弦量
进行相位比
较时应满足
同频率、同
函数、同符
号，且在主
值范围比较。



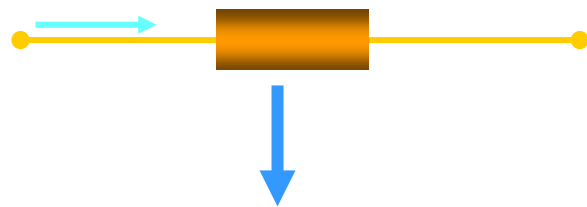
4. 周期性电流、电压的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效果，工程上采用有效值来表示。

● 周期电流、电压有效值定义

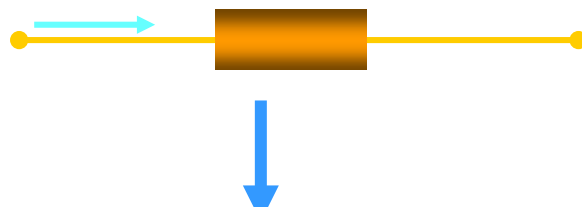
物理意义

直流 I



$$W = RI^2T$$

交流 i



$$W = \int_0^T Ri^2(t)dt$$



$$W = RI^2T \quad \underline{\underline{=}} \quad W = \int_0^T Ri^2(t)dt$$

方均根值

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)dt}$$

定义电压有效值：

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t)dt}$$



● 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \Psi)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \Psi) dt}$$

$$\because \int_0^T \cos^2(\omega t + \Psi) dt = \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \Psi)}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} t \Big|_0^T = \frac{1}{2} T$$

$$I_m = \sqrt{2} I$$

$$\therefore I = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \cdot \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \Psi) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \Psi)$$



同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m \quad \text{或} \quad U_m = \sqrt{2} U$$

若交流电压有效值为 $U=220V$, $U=380V$
其最大值为 $U_m \approx 311V$ $U_m \approx 537V$



注意



① 工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。



②测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

③区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

$$\textcircled{i}, I_m, I, \quad \textcircled{u}, U_m, U$$

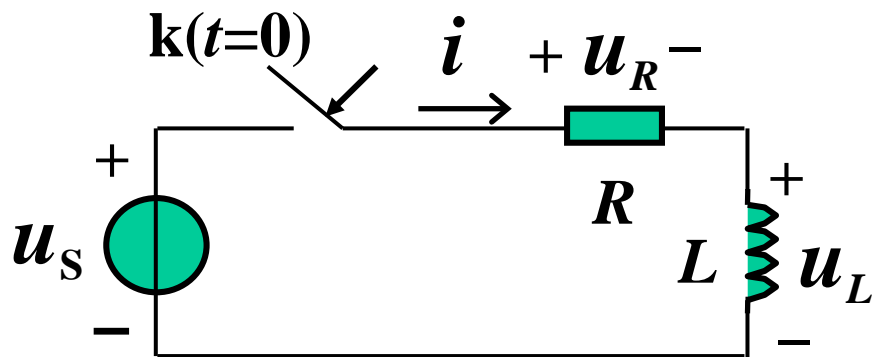
$$i(t)$$

$$u(t)$$



正弦稳态分析的关键 → 相量(phasor)

(1) 问题



$$u_s = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求: $i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$ 的稳态解。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

一阶常系数线性微分方程

$$i = i' + i''$$

强制分量 (非齐次特解)

自由分量 (齐次通解)

$t \rightarrow \infty$: 稳态

$t \rightarrow \infty$: 0

$$i'' = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$



求特解

查表寻找特解的函数类型

激励 $\sin \omega t$ $\xrightarrow{\text{查表}}$ 特解类型 $C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ 或 $A \sin(\omega t + B)$

设特解为 $i = A \sin(\omega t + B)$

$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ $\xrightarrow{\text{代入}}$

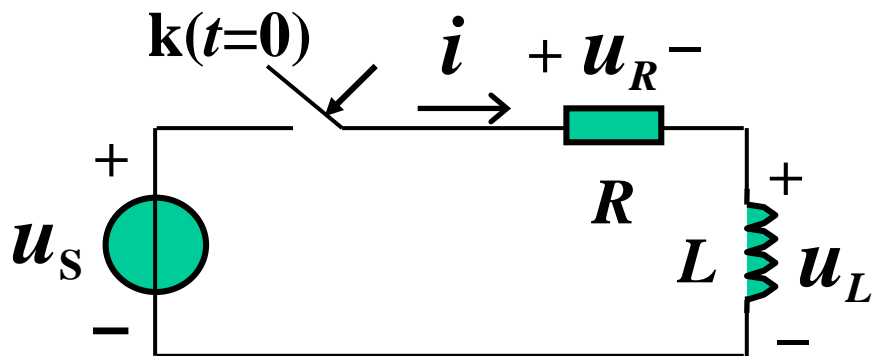
\downarrow

$$LA\omega \cos(\omega t + B) + RA \sin(\omega t + B) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

\downarrow

$$A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + B) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + B) \right)$$
$$= U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$





$$i'(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

$$u'_L(t) = \frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} + 90^\circ)$$

$$u'_R(t) = \frac{RU_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

3个支路量有何特点?

所有支路电压电流均以相同频率变化!!



接下来……

$$i(t) = \underline{I_m} \sin(\cancel{\omega} t + \underline{\psi})$$

所有支路电压电流均以
相同频率变化!!

复数!!

(b) 幅值 (I_m)

(c) 初相角 (ψ)

用什么可以同时表示幅值和相位?

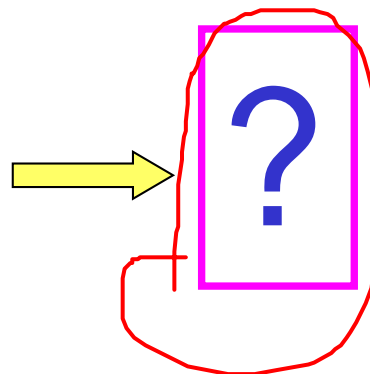
问题1: 如何用复数表示正弦量?

求微分方程特解

问题2:

正弦量微分/积分

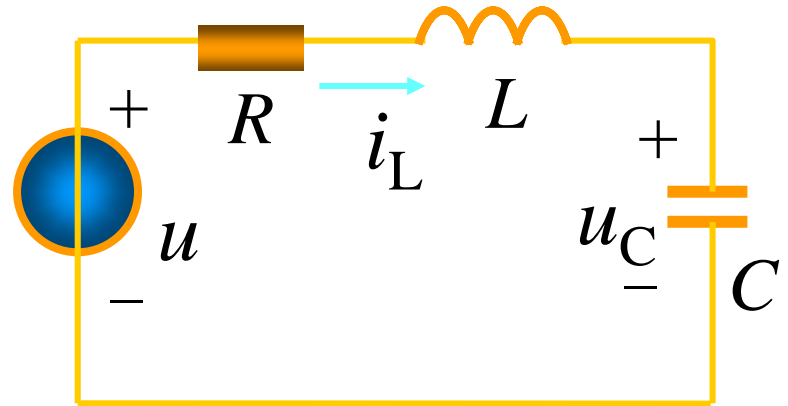
正弦量加减



8.3 相量法的基础

1. 问题的提出

电路方程是微分方程：



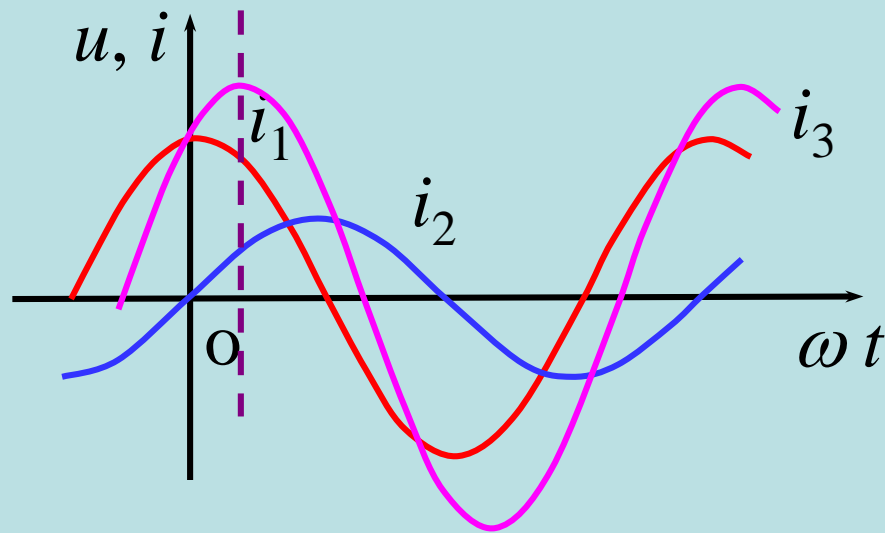
$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t)$$

两个正弦量的相加：如KCL、KVL方程运算：

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t + \psi_1) \\ i_2 &= \sqrt{2} I_2 \cos(\omega t + \psi_2) \end{aligned} \quad \bigg\rangle \quad +$$



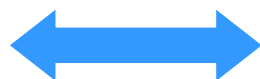
$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t + \psi_1) \\ i_2 &= \sqrt{2} I_2 \cos(\omega t + \psi_2) \end{aligned} \quad \text{> } +$$



	<u>\dot{i}_1</u>	<u>\dot{i}_2</u>	$\dot{i}_1 + \dot{i}_2 \rightarrow \dot{i}_3$
角频率	ω	ω	ω
有效值	I_1	I_2	I_3
初相位	ψ_1	ψ_2	ψ_3

 **结论** 同频的正弦量相加仍得到同频的正弦量，
所以，只需确定初相位和有效值。因此采用

正弦量



复数

变换的思想




3. 正弦量的相量表示

~~无物理意义~~

造一个复函数 $F(t) = \sqrt{2}Ie^{j(\omega t + \Psi)}$

$$= \sqrt{2}I\cos(\omega t + \Psi) + j\sqrt{2}I\sin(\omega t + \Psi)$$

对 $F(t)$ 取实部 $\text{Re}[F(t)] = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \Psi) = i(t)$

 **结论** 任意一个正弦时间函数都有
唯一与其对应的复数函数。

是一个正弦量
有物理意义

$$i = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \Psi) \leftrightarrow F(t) = \sqrt{2}Ie^{j(\omega t + \Psi)}$$



$F(t)$ 还可以写成 **复常数**

$$F(t) = \sqrt{2} I e^{j\psi} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}$$

$F(t)$ 包含了三要素: I 、 Ψ 、 ω ,
复常数包含了两个要素: I 、 Ψ 。

正弦量对
应的相量

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \Psi) \Leftrightarrow \dot{I} = I \angle \Psi$$



注意

相量的模表示正弦量的有效值

相量的幅角表示正弦量的初相位



同样可以建立正弦电压与相量的对应关系：

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta) \Leftrightarrow \dot{U} = U \angle \theta$$

例1 已知 $i = \underline{141.4} \cos(314t + \underline{30^\circ}) \text{ A}$

$$u = \underline{311.1} \cos(314t - 60^\circ) \text{ V}$$

试用相量表示 i, u .

解

$$\dot{I} = \underline{100} \angle \underline{30^\circ} \text{ A}, \quad \dot{U} = \underline{220} \angle \underline{-60^\circ} \text{ V}$$

例2 已知 $\dot{I} = 50 \angle 15^\circ \text{ A}, f = 50 \text{ Hz}$.

试写出电流的瞬时值表达式。

解

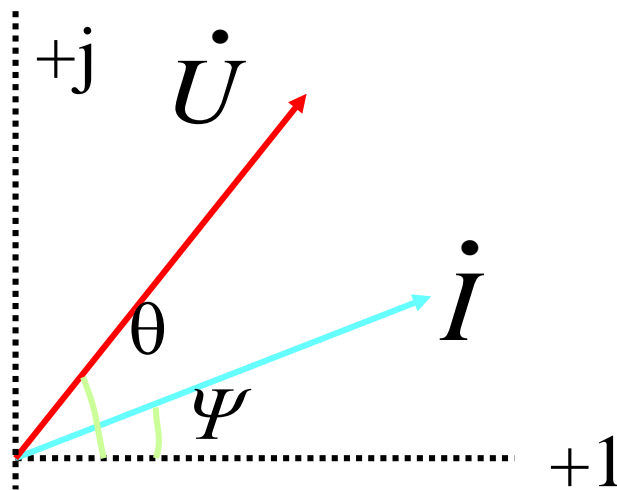
$$i = 50\sqrt{2} \cos(314t + 15^\circ) \text{ A}$$



● 相量图 → 在复平面上用向量表示相量的图

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \Psi) \rightarrow \dot{I} = I\angle\Psi$$

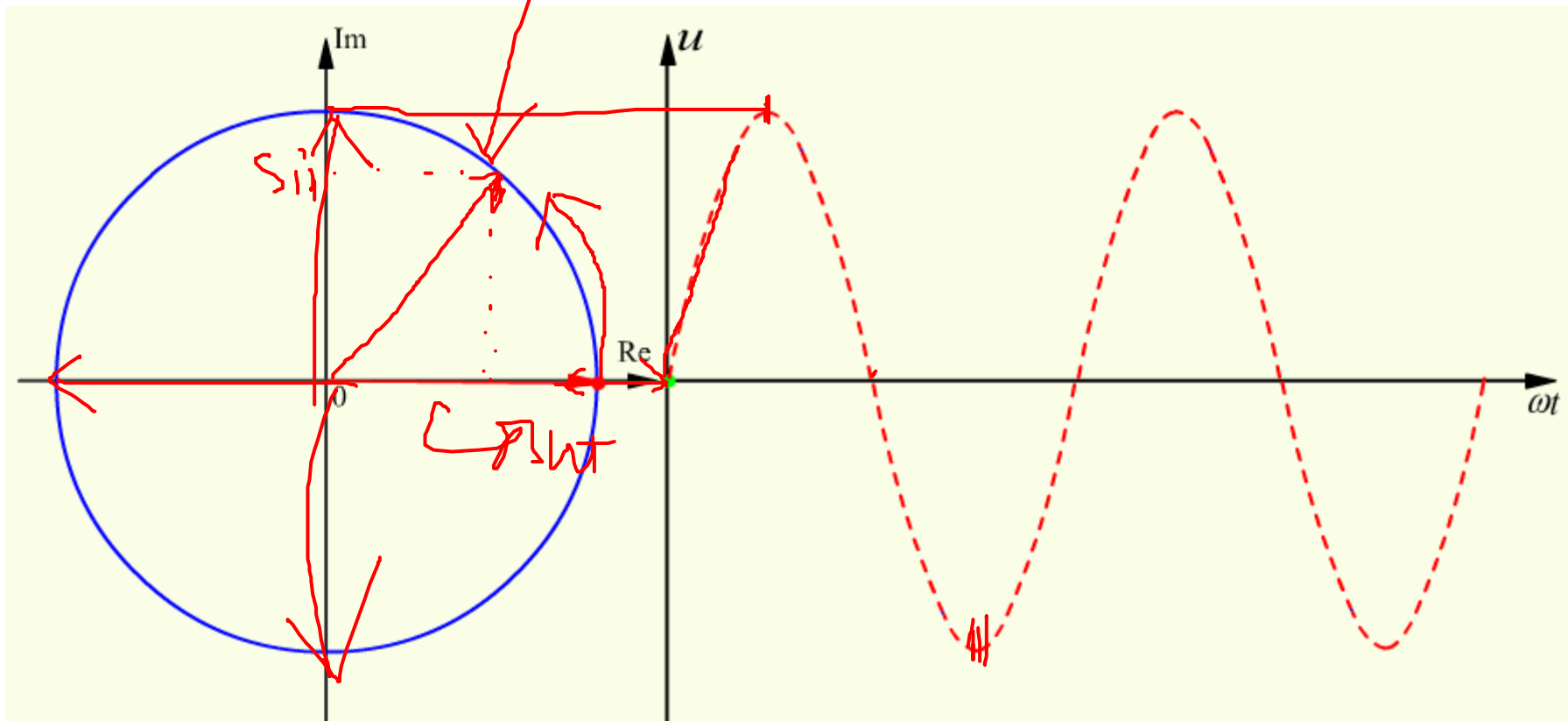
$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \theta) \rightarrow \dot{U} = U\angle\theta$$



$$A(t) = \sqrt{2} U e^{j\psi} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}$$

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \psi)$$

相量和矢量的联系与区别



4. 相量法的应用

①同频率正弦量的加减

$$u_1(t) = \sqrt{2} U_1 \cos(\omega t + \Psi_1) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \dot{U}_1 e^{j\omega t})$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} U_2 \cos(\omega t + \Psi_2) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \dot{U}_2 e^{j\omega t})$$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \dot{U}_1 e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\sqrt{2} \dot{U}_2 e^{j\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}(\sqrt{2} \dot{U}_1 e^{j\omega t} + \sqrt{2} \dot{U}_2 e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \underbrace{(\dot{U}_1 + \dot{U}_2)}_{\dot{U}} e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

相量关系为：

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$



结论

同频正弦量的加减运算变为对应相量的加减运算。



$$\begin{array}{c} i_1 \pm i_2 = i_3 \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = \dot{I}_3 \end{array}$$

例

$$\begin{array}{l} u_1(t) = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ) \text{ V} \\ u_2(t) = 4\sqrt{2}\cos(314t + 60^\circ) \text{ V} \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{cases} \dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ \text{ V} \\ \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \text{ V} \end{cases}$$

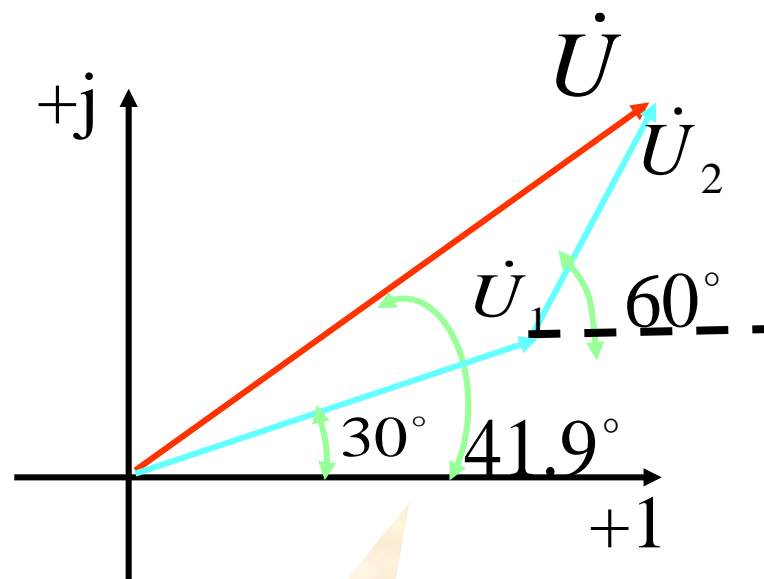
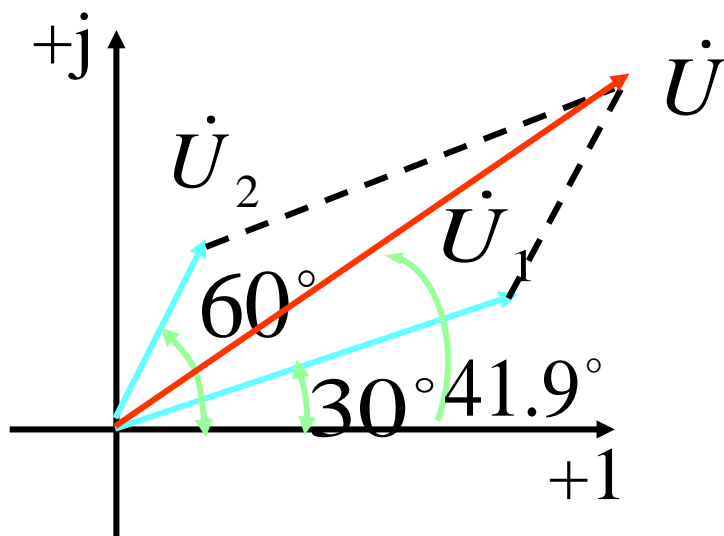
$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ \\ &= 5.19 + j3 + 2 + j3.46 = 7.19 + j6.46 \\ &= 9.64\angle 41.9^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\therefore u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 9.64\sqrt{2}\cos(314t + 41.9^\circ) \text{ V}$$



借助相量图计算

$$\dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \text{ V}$$



首尾相接



②正弦量的微分、积分运算

$$i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i) \leftrightarrow \dot{I} = I \angle \psi_i$$

微分运算 $\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2} \dot{I} \cdot \underline{j\omega} e^{j\omega t}]$

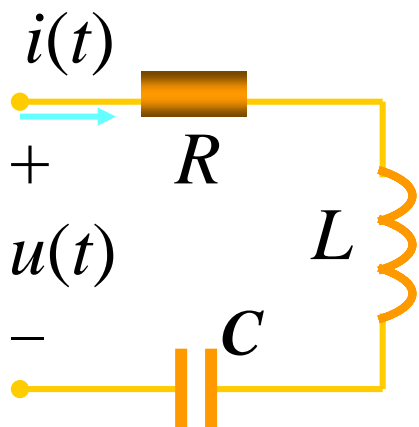
积分运算 $\int i dt = \int \operatorname{Re}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}] dt = \operatorname{Re}\left[\sqrt{2} \frac{\dot{I}}{\underline{j\omega}} e^{j\omega t}\right]$

$$\frac{di}{dt} \rightarrow j\omega \dot{I} = \omega I \angle \psi_i + \pi/2$$

$$\int i dt \rightarrow \frac{\dot{I}}{j\omega} = \frac{I}{\omega} \angle \psi_i - \pi/2$$



例



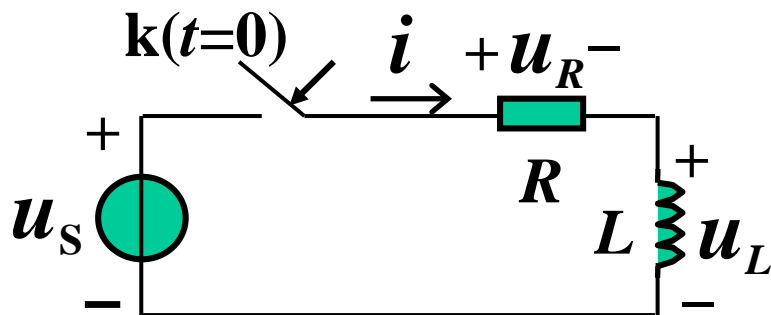
$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

用相量运算：

$$\dot{U} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{\dot{I}}{j\omega C}$$





$$u_s = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求: $i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$ 的稳态解。

$$u_s(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_s = R\dot{I} + j\omega L\dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{U \angle \psi_u}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \arctan \frac{\omega L}{R}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = \frac{\omega LU}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} + 90^\circ)$$

$$u_R = Ri_L \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_R = R\dot{I} = \frac{RU}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} + 90^\circ)$$

搞定!!!



相量法的优点

- ①把时域问题变为复数问题；
- ②把微积分方程的运算变为复数方程运算；
- ③可以把直流电路的分析方法直接用于交流电路。





注意

① 正弦量



相量

时域

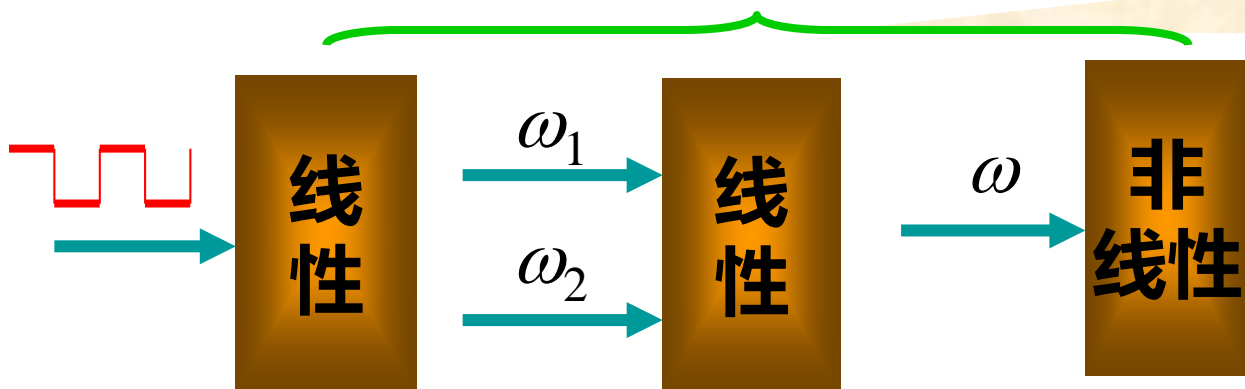
频域

正弦波形图



相量图

② 相量法只适用于激励为同频正弦量的非时变线性电路。



不适用

③ 相量法用来分析正弦稳态电路。



求解顺序

- 列写动态电路时域方程
- 将动态电路时域方程变换为复系数代数方程
- 求解复系数代数方程
- 反变换得到时间表达式

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$



$$\dot{U} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I}$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

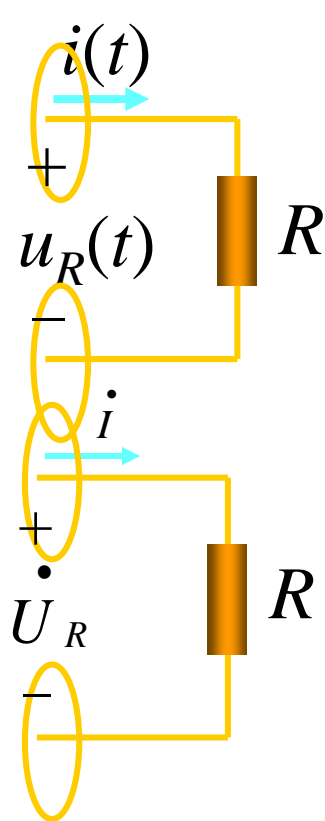


$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle(\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$



8.4 电路定律的相量形式

1. 电阻元件VCR的相量形式

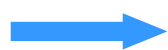


时域形式: $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \Psi_i)$
 $u_R(t) = Ri(t) = \sqrt{2} \underbrace{RI}_{\dot{U}_R} \cos(\omega t + \underbrace{\Psi_i}_{\Psi_u})$

相量形式: $\dot{I} = I \angle \Psi_i \quad \dot{U}_R = RI \angle \Psi_i$

相量关系: $\dot{U}_R = R \dot{I}$

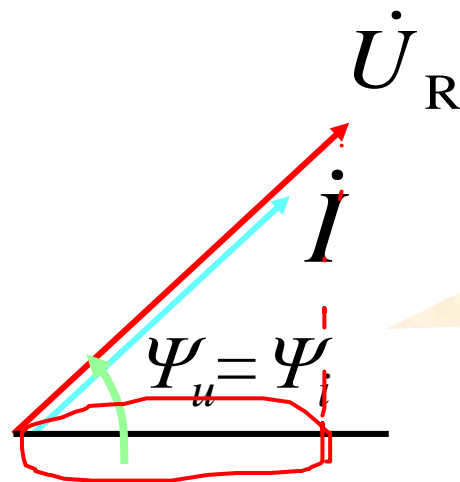
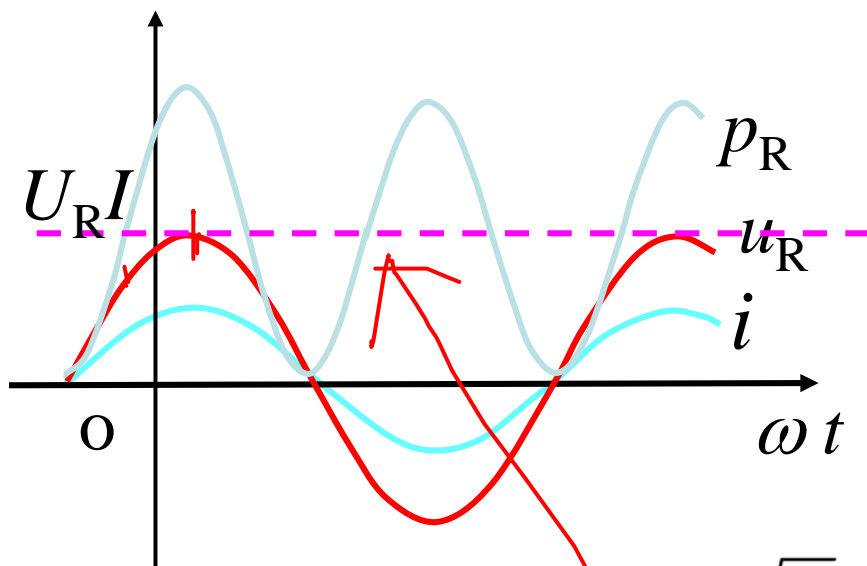
相量模型



$\left\{ \begin{array}{l} \underline{U_R = RI} \quad \text{有效值关系} \\ \underline{\Psi_u = \Psi_i} \quad \text{相位关系} \end{array} \right.$



波形图及相量图



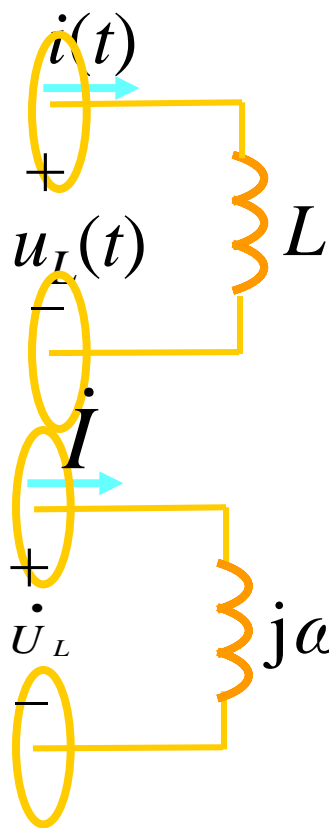
同相位

$$\begin{aligned}\text{瞬时功率} &= \sqrt{2}U_R \sqrt{2}I \cos^2(\omega t + \Psi_i) \\ &= U_R I [1 + \cos 2(\omega t + \Psi_i)]\end{aligned}$$

瞬时功率以 2ω 交变，始终大于零，表明电阻始终吸收功率



2. 电感元件VCR的相量形式



时域形式: $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$

$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\sqrt{2}\omega L I \sin(\omega t + \psi_i)$
 $= \sqrt{2}\omega L I \cos(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})$

相量形式:

$\dot{I} = I \angle \psi_i$ $\dot{U}_L = \omega L I \angle \psi_i + \pi/2$

相量关系: $\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} = jX_L \dot{I}$

相量模型

有效值关系: $U = \omega L I$
相位关系: $\psi_u = \psi_i + 90^\circ$

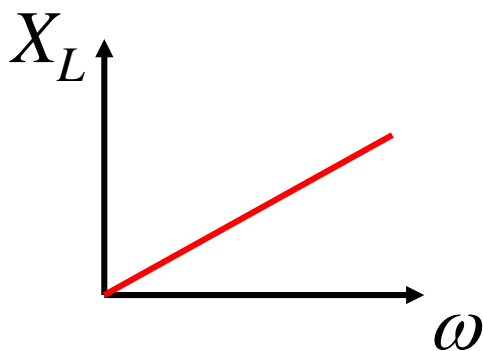


感抗和感纳

$X_L = \omega L = 2\pi fL$, 称为感抗, 单位为 Ω (欧姆)

$B_L = -1/\omega L = -1/2\pi fL$, 称为感纳, 单位为 S

感抗的性质



相量表达式

①表示限制电流的能力;

②感抗和频率成正比。

$\omega = 0$ (直流), $X_L = 0$, 短路;

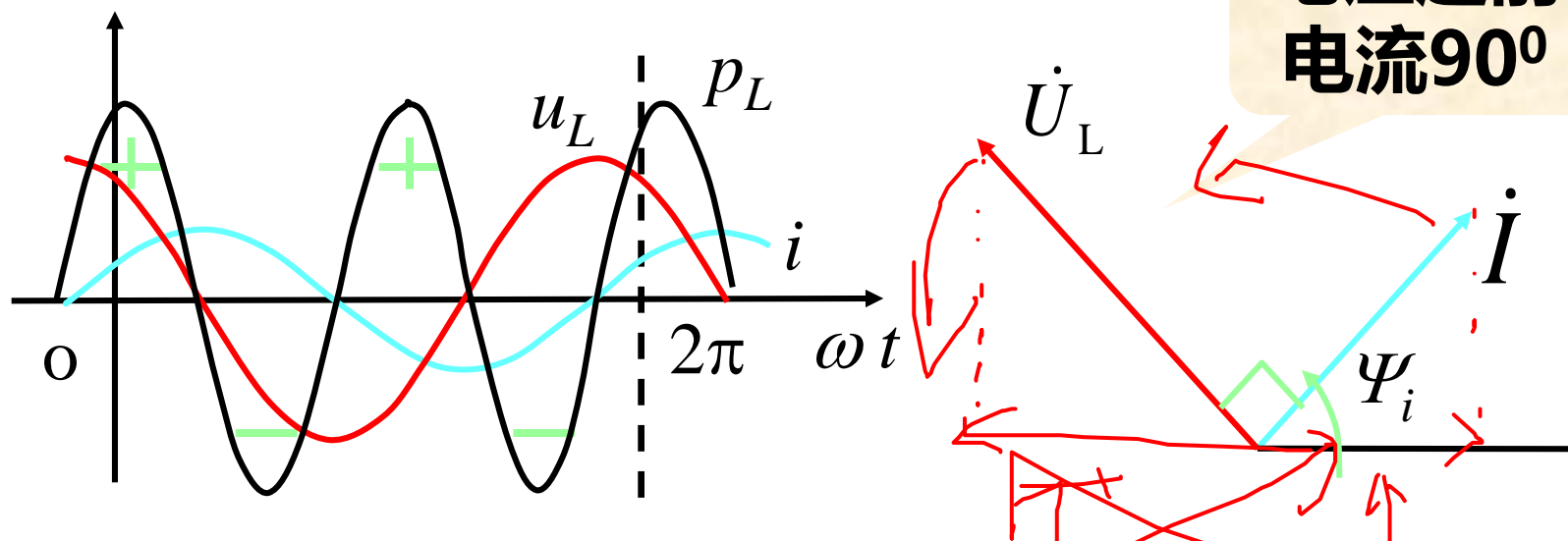
$\omega \rightarrow \infty$, $X_L \rightarrow \infty$, 开路;

$$\dot{U} = jX_L \dot{I} = j\omega L \dot{I},$$

$$\dot{I} = jB_L \dot{U} = j \frac{-1}{\omega L} \dot{U} = \frac{1}{j\omega L} \dot{U}$$



波形图及相量图



功率

$$p_L = u_L i = U_{Lm} I_m \cos(\omega t + \Psi_i) \sin(\omega t + \Psi_i)$$
$$= U_L I \sin 2(\omega t + \Psi_i)$$

瞬时功率以 2ω 交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消，表明电感只储能不耗能。



3. 电容元件VCR的相量形式

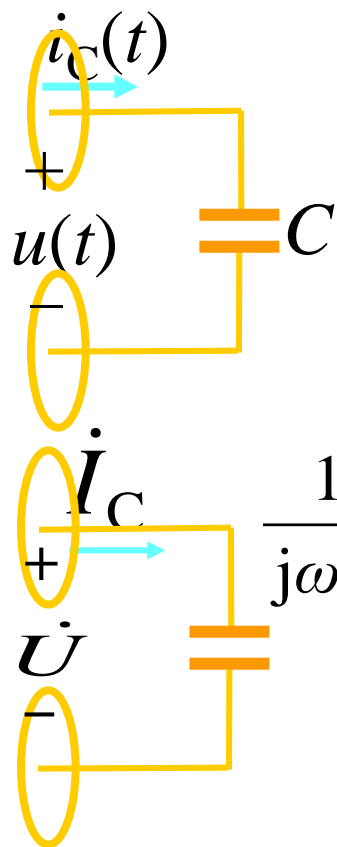
时域形式: $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \Psi_u)$

$$i_c(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -\sqrt{2}\omega CU \sin(\omega t + \Psi_u) \\ = \sqrt{2}\omega CU \cos(\omega t + \Psi_u + \frac{\pi}{2})$$

相量形式:

$$\dot{U} = U \angle \Psi_u \quad \dot{I}_c = \omega CU \angle \Psi_u + \pi/2$$

相量关系: $\dot{U} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = jX_c \dot{I}$



相量模型

$$\begin{cases} \text{有效值关系: } I_c = \omega CU \\ \text{相位关系: } \Psi_i = \Psi_u + 90^\circ \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{\omega C} I_c$$



容抗与容纳

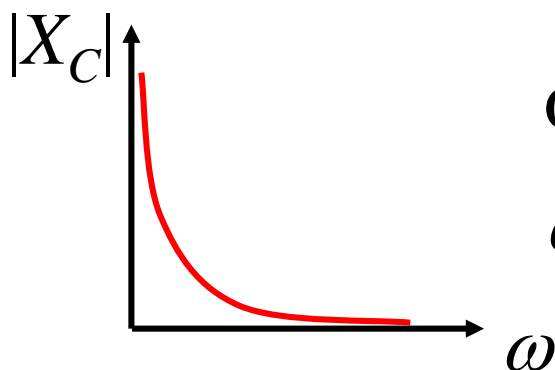
$X_C = -1/\omega C$, 称为容抗, 单位为 Ω (欧姆)

$B_C = \omega C$, 称为容纳, 单位为 S

容抗和频率成反比

$\omega \rightarrow 0$, $|X_C| \rightarrow \infty$ 直流开路(隔直)

$\omega \rightarrow \infty$, $|X_C| \rightarrow 0$ 高频短路



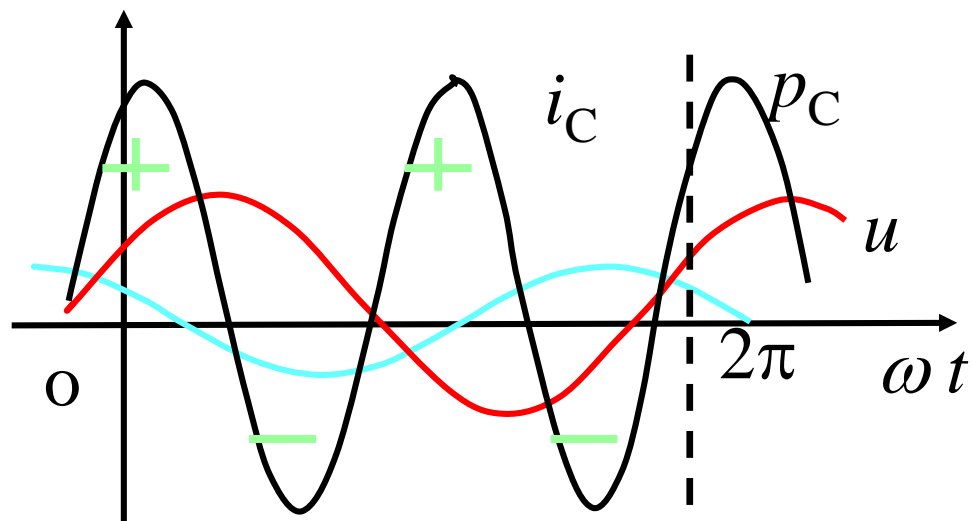
$$\dot{U} = jX_C \dot{I} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}$$

$$\dot{I} = jB_C \dot{U} = j\omega C \dot{U}$$

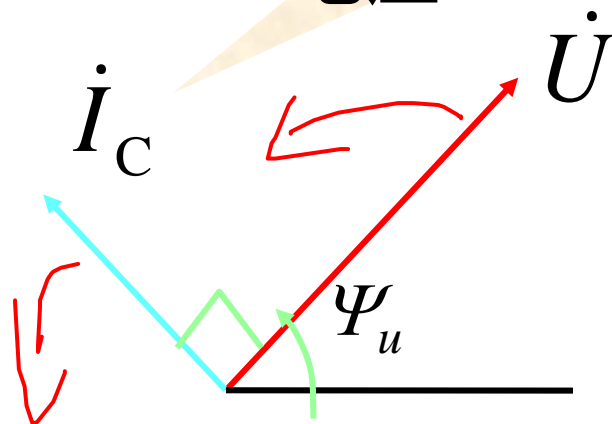
相量表达式



波形图及相量图



电流超前
电压 90°



功率 $p_C = ui_C = 2UI_C \cos(\omega t + \Psi_u) \sin(\omega t + \Psi_u)$
 $= UI_C \sin 2(\omega t + \Psi_u)$

瞬时功率以 2ω 交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消，表明电容只储能不耗能。



4. 基尔霍夫定律的相量形式

同频率的正弦量加减可以用对应的相量形式来进行计算。因此，在正弦电流电路中，KCL和KVL可用相应的相量形式表示：

$$\sum i(t) = 0 \rightarrow \sum i(t) = \sum \operatorname{Re} \sqrt{2} [\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots] e^{j\omega t} = 0$$

$$\rightarrow \sum \dot{I} = 0$$

$$\sum u(t) = 0 \rightarrow \sum \dot{U} = 0$$



表明

流入某一结点的所有正弦电流用相量表示时仍满足KCL；而任一回路所有支路正弦电压用相量表示时仍满足KVL。



相量形式的电路定律和电路的相量模型

(1) 相量形式的基尔霍夫定律

$$\begin{aligned}\sum i(t) = 0 &\Rightarrow \sum \dot{I} = 0 \\ \sum u(t) = 0 &\Rightarrow \sum \dot{U} = 0\end{aligned}$$

(2) 电路元件电压与电流的相量关系

$$\begin{aligned}u &= Ri \Rightarrow \dot{U} = R\dot{I} \\ u &= L \frac{di}{dt} \Rightarrow \dot{U} = j\omega L\dot{I} \\ u &= \frac{1}{C} \int i dt \Rightarrow \dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}\end{aligned}$$



频 域

电感元件

错误的写法

$$\dot{I} = I \angle 0^\circ \quad \underline{\dot{U} = j\omega L \dot{I}}$$

有效值关系:

$$U = \omega L I$$

定义: $X_L = \omega L$

$$\omega L \times \frac{u}{i}$$

$$\omega L \times \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

频 域

电容元件

错误的写法

$$\dot{U} = U \angle 0^\circ \quad \underline{\dot{I} = j\omega C \dot{U}}$$

有效值关系

$$I = \omega C U$$

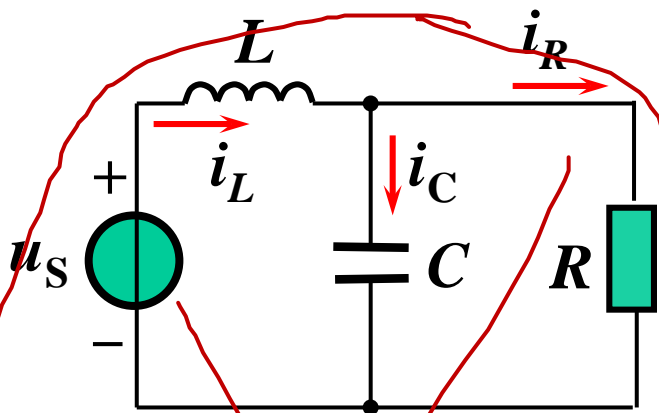
$$X_C \stackrel{\text{定义}}{=} -\frac{1}{\omega C}$$

$$\frac{1}{\omega C} \times \frac{u}{i}$$

$$\frac{1}{\omega C} \times \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$



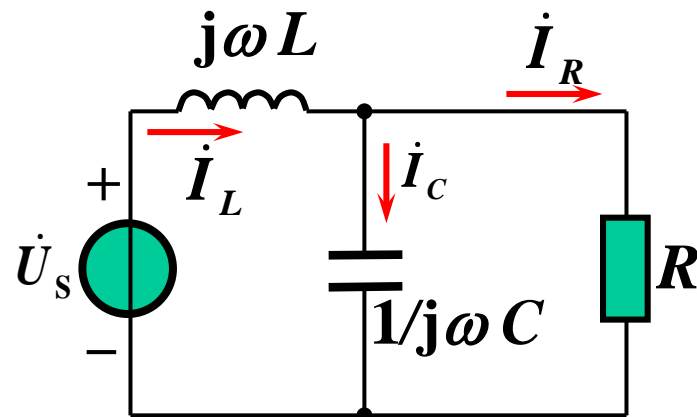
电路的相量模型（以单电源RLC电路为例）



电路时域模型

$$\left\{ \begin{array}{l} i_L = i_C + i_R \\ L \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} \int i_C dt = u_S \\ R i_R = \frac{1}{C} \int i_C dt \end{array} \right.$$

时域的微分方程



电路相量模型

$$\left\{ \begin{array}{l} I_L = I_C + I_R \\ j\omega L I_L + \frac{1}{j\omega C} I_C = \dot{U}_s \\ R I_R = \frac{1}{j\omega C} I_C \end{array} \right.$$

相量形式的代数方程



例1 试判断下列表达式的正、误。

$$1. \dot{U} = \omega L \dot{I} \quad \times$$

$$2. i = 5 \cos \omega t \neq 5 \angle 0^\circ$$

$$3. \dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m \quad \times$$

$$4. X_L = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} \quad \times$$

$$5. \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} \Omega \quad \times$$

$$6. \dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L \quad \checkmark$$

$$7. u = L \frac{di}{dt} \quad \times$$



例2 已知电流表读数: $A_1 = 8A$ $A_2 = 6A$

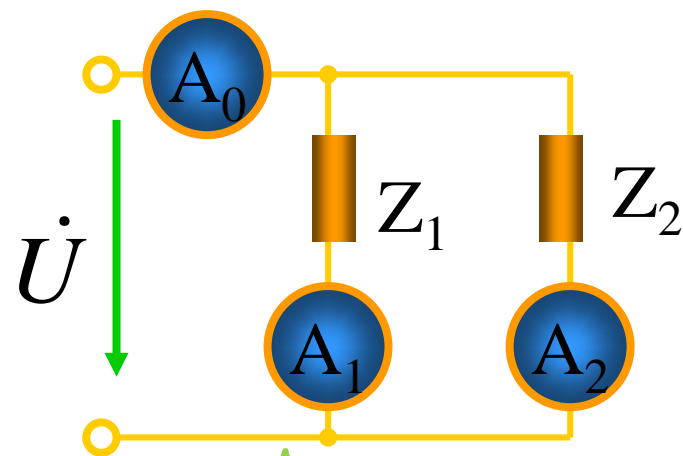
若 1. $Z_1 = R$, $Z_2 = jX_C$

$$A_0 = ?$$

2. $Z_1 = R$, Z_2 为何参数

$$A_0 = I_{0\max} = ?$$

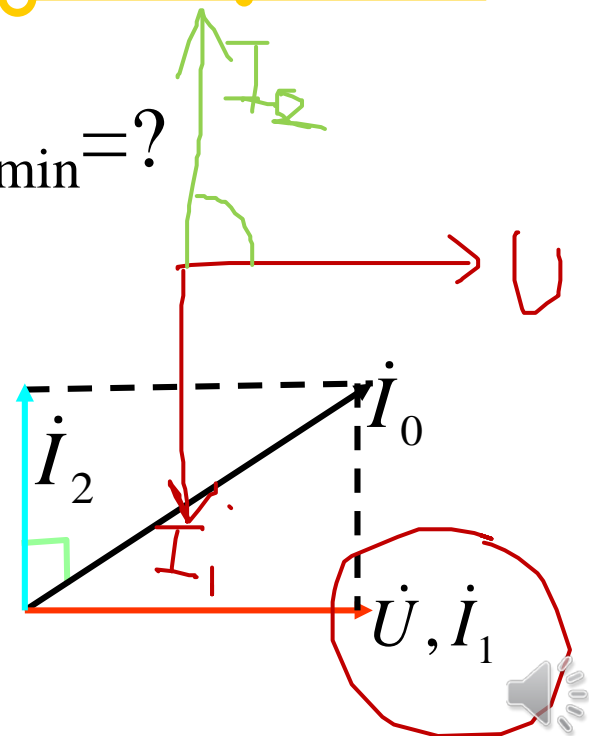
3. $Z_1 = jX_L$, Z_2 为何参数 $A_0 = I_{0\min} = ?$



解 1. $I_0 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10A$

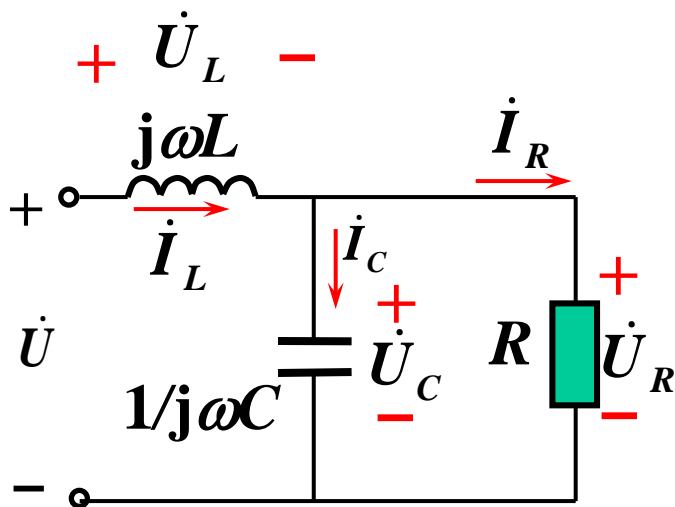
2. $Z_2 = R$, $I_{0\max} = 8 + 6 = 14A$

3. $Z_2 = jX_C$, $I_{0\min} = 8 - 6 = 2A$

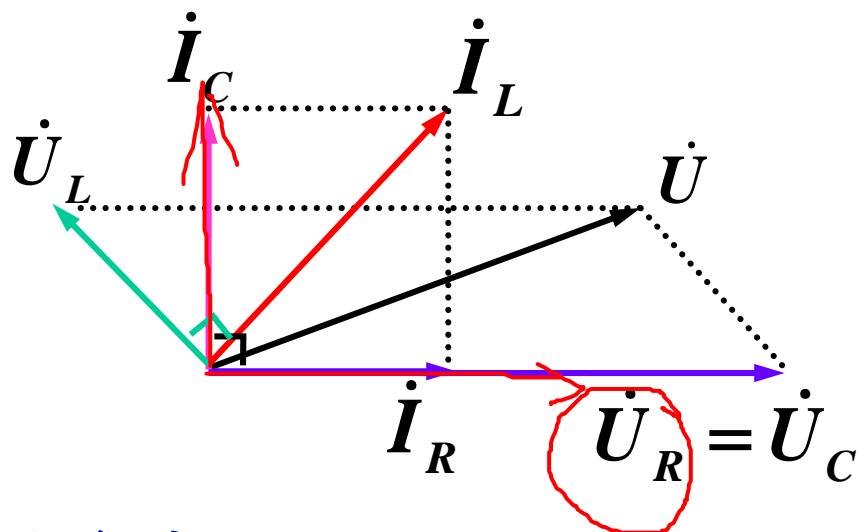


相量图(phasor diagram)

- (a) 同频率正弦量的相量，才能表示在同一张相量图中；
- (b) 逆时针旋转——正角度增加的方向；
- (c) 选定一个参考相量（设其初相位为零——水平线方向）。



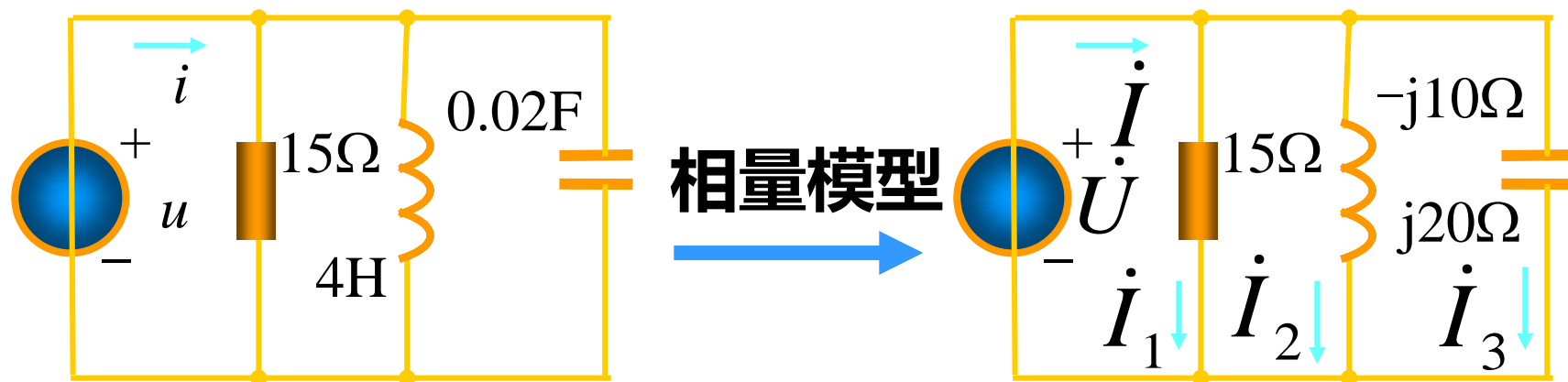
选 \dot{U}_R 作为参考相量



思考：对调 L 与 C 位置，相量图如何变？



例3 已知 $u(t) = 120\sqrt{2}\cos(5t)$, 求: $i(t)$



解 $\dot{U} = 120\angle 0^\circ$

$$jX_L = j4 \times 5 = j20\Omega$$

$$jX_C = -j\frac{1}{5 \times 0.02} = -j10\Omega$$

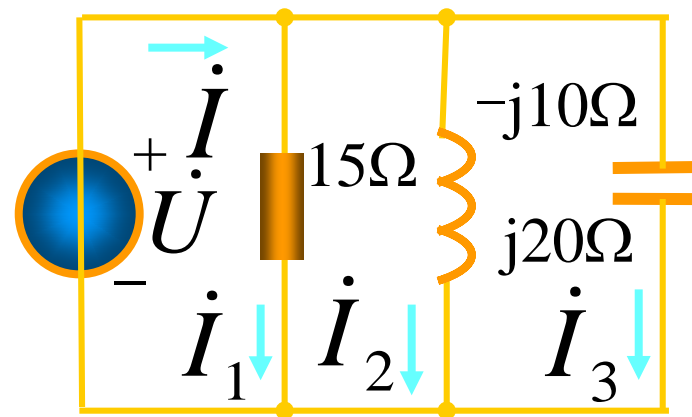


$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX_L} + \frac{\dot{U}}{jX_C}$$

$$\begin{aligned} & \text{120} \angle 0^\circ \\ & \text{120} \\ & = 120 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{j20} - \frac{1}{j10} \right) \end{aligned}$$

$$= 8 - j6 + j12 = 8 + j6 = 10 \angle 36.9^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 10\sqrt{2} \cos(5t + 36.9^\circ) \text{ A}$$



Homework

8-7

8-8

8-15

8-16