第二章 矩阵代数

第三节 逆矩阵与矩阵的初等变换

§ 2.3.1 逆矩阵

一、（概念的）引入

在数的运算中，当数$a \neq 0$时， 有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为a 的倒数,（或称 a 的逆）；

在矩阵的运算中，单位阵E相当于数的乘法运算中的1， 那么，对于矩阵A ,如果存在一个矩阵A^{-1},

使得 $$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵A^{-1}也可类似称为A的可逆矩阵或逆阵.

二、逆矩阵的概念和性质

定义1 对于 n 阶矩阵 A，如果有一个 n 阶矩阵 B，使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵 B 称为A 的逆矩阵.

A的逆矩阵记作 A^{-1}.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,$

$\therefore B$是A的逆矩阵.

?

n阶矩阵在逆矩阵存在时，其逆矩阵唯一吗？

在具备什么条件时，它是可逆矩阵？

可逆时如何求其逆矩阵？

先来看：

若n阶矩阵A可逆，设B和C都是A的逆矩阵，

则有 $AB = BA = E$, $AC = CA = E$,

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以 A 的逆矩阵是唯一的. 即 $B=C=A^{-1}$.

定理1 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

由于 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$，可知A^{-1}可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

解决了第一个问题.

例1　设　$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，　求A的逆阵.

解:　设 $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是A的逆矩阵,

利用待定系数法

则　$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases}$$

又因为

$$\overset{AB}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{BA}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

新问题：对于高阶方阵待定系数法求取逆矩阵显然是不可行的.

对一个方阵，我们引入伴随矩阵的概念

定义2 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

注意：A^*中元素排列顺序.

例2 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解: $A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}.$$

定理2 矩阵A可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$，且当A可逆时

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},$$

其中A^{*}为矩阵A的伴随矩阵.

证明：

必要性

若 A 可逆，即有A^{-1}使$AA^{-1}=E$.

故$|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1$, 所以$|A|\neq 0$.

充分性

当$|A| \neq 0$时，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix},$$

类似可得 $AA^{*}=|A|E.$

因此，$AA^{*}=A^{*}A=|A|E \Rightarrow A\dfrac{A^{*}}{|A|}=\dfrac{A^{*}}{|A|}A=E,$

按逆矩阵的定义得 $A^{-1}=\dfrac{A^{*}}{|A|}.$ 证毕.

解决了第二、三个问题.

补：奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当$|A|=0$时，A称为**奇异矩阵**，当$|A|\neq 0$时称为**非奇异矩阵**.

由此得：A是可逆矩阵$\Leftrightarrow A$为非奇异矩阵.

另外，也称$|A|=0$的方阵为**退化矩阵（降秩矩阵）**，$|A|\neq 0$的方阵为**非退化矩阵（满秩矩阵）**.

例3 方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 可逆吗？若可逆求其逆矩阵.

解: $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\ \therefore\ A^{-1}$存在.

前面已经得到: $A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}.$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

伴随矩阵法求逆矩阵

推论 设A、B为n阶矩阵，若$AB=E$（或$BA=E$）成立，则$B=A^{-1}$.

证明: $|A|\cdot|B| = |E| = 1$, 故$|A| \neq 0$,

因而A^{-1}存在, 于是

$$B = EB = \left(A^{-1}A\right)B = A^{-1}(AB)$$

$$= A^{-1}E = A^{-1}$$

证毕

逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda \neq 0$,则λA可逆,且 $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

定理3

证明: $$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 皆为n阶可逆矩阵.

(4) 当$|A|\neq 0$时，定义 $A^{-k}=(A^{-1})^k$. (k为正整数)

注意，对于方阵A有，$A^0=E$.

当$|A| \neq 0, \lambda, \mu$为整数时,有

$$A^{\lambda} A^{\mu} = A^{\lambda+\mu}, \qquad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu} = A^{\lambda\mu}.$$

(5)若A可逆,则有$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

证明: $\because AA^{-1} = E$

$\therefore |A|\left|A^{-1}\right| = 1$

因此 $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

另外，对于任意方阵（无论是否可逆），有

$$AA^{*} = A^{*}A = |A|E.$$

定理4 设A是n阶可逆矩阵，那么对任意$B=B_{n\times m}$ (或$B=B_{m\times n}$)，矩阵方程

$$AX=B \quad (\text{或} XA=B)$$

有**唯一解** $X=A^{-1}B$ (或$X=BA^{-1}$).

证：由于A可逆，用其逆矩阵A^{-1}左乘方程$AX=B$得 $A^{-1}AX=A^{-1}B$. 得到$X=A^{-1}B$为方程的解.

再证解的唯一性：若方程还有另一解$C=C_{n\times m}$，即$AC=B$，则

$$C=EC=(A^{-1}A)C=A^{-1}(AC)=A^{-1}B=X$$

故$X=A^{-1}B$为唯一解。

本定理的特殊情况，当B为**列向量**时，得到$Cramer$规则（克拉默、克莱姆）.

定理5（克莱姆规则）n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式 $D=|A|=|a_{ij}|\neq 0$ 时，存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数列代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$j = 1,2,\cdots,n$$

显然：$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}$$

其中A_{ij} (i=1,2, …,n)是a_{ij}在D中的代数余子式.

证：方程组表为矩阵形式 $AX=b$，由于$|A|\neq 0$，
知A为可逆矩阵，由上面定理知(1)有唯一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}A^*b = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

比较等式两边得

$$x_j = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}) = \frac{1}{|A|}D_j = \frac{D_j}{D}. \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

注意：

（1） 用克莱姆法则解方程组的两个条件

(a) 方程个数等于未知量个数;

(b) 系数行列式不等于零.

（2） 克莱姆规则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.

综合例题

例1 设方阵A满足方程$A^2 - A - 2E = 0$,证明:$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明: （注意：A是已知矩阵，所求矩阵要用A表示）

由$A^2 - A - 2E = 0$,

得$A(A-E) = 2E \Rightarrow A\underbrace{\frac{A-E}{2}}_{A^{-1}} = E$

$$\therefore \ A^{-1} = \frac{1}{2}(A-E).$$

又由$A^2 - A - 2E = 0$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E) + 4E = 0$$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right] = E$$

$(A+2E)^{-1}$

故$A+2E$可逆.

且$(A+2E)^{-1} = -\frac{1}{4}(A-3E) = \frac{3E-A}{4}$.

说明：(1) 不能由(A－2E)(A+E)=O得到A+2E=O 或 A+E=O.

(2)另外A^2=A+2E也可以得到A+2E的逆阵.

例2 解矩阵方程 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $$\overset{E}{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ X\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$,

得 $$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

再给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$，

得 $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -75 & 30 \\ 9 & 52 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix}.$$

例3 若可逆矩阵A与矩阵B可交换，试证A^{-1}与B也可交换.

证明：已知条件 $AB = BA$，$AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

故 $A^{-1}B = A^{-1}BE = A^{-1}BAA^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$

$= A^{-1}(AB)A^{-1} = (A^{-1}A)BA^{-1}$

$= EBA^{-1} = BA^{-1}$

即 $A^{-1}B = BA^{-1}$，

由此知A^{-1}与B也可交换.

例4 设 A是可逆矩阵，试证

(1) A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$;

(2) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

证：(1) 由A可逆知$|A|\neq 0$， 又有 $AA^* = |A|E$

得到 $\frac{1}{|A|}AA^* = E.$ **即** $(\frac{1}{|A|}A)A^* = E,$

所以A^*可逆，且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A.$

(2) 由伴随矩阵的定义，可知

$$A^*A = |A|E, \quad (A^{-1})(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$$

故 $A^*A(A^{-1})(A^{-1})^* = |A|E|A^{-1}|E$

于是 $A^*(A^{-1})^* = E,$ **因此** $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$

例5 设三阶矩阵A,B满足关系：

$$A^{-1}BA=6A+BA,\text{且}A=\begin{pmatrix}1/2 & & O\\ & 1/4 & \\ O & & 1/7\end{pmatrix}\text{求}B.$$

解： $A^{-1}BA-BA=6A$

$$\Rightarrow\left(A^{-1}-E\right)BA=6A\Rightarrow\left(A^{-1}-E\right)B=6E$$

$$\Rightarrow B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}.$$

$$B = 6\left(A^{-1} - E\right)^{-1}$$

$$= 6\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

作业

第二章习题

2.

4. (1) (4)

5.

6. (3)

7.

8.