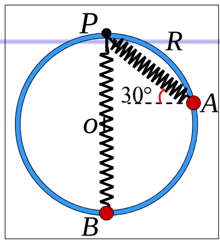
四．应用举例

［例 1］ 一轻弹簧，其一端系在铅直放置的圆环的顶点P，另一端系一质量为m 的小球， 小球穿过圆环并在环上运动（μ=0）．开始球静止于点A， 弹簧处于自然状态，其长为环半径R；当球运动到环的底端点B时，球对环没有压力．求弹簧的劲度系数．

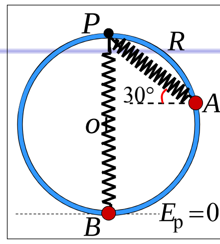


解　以弹簧、小球和地球为一系统

$\because A \to B$只有保守内力做功

$\therefore$ 系统 $E_B = E_A$

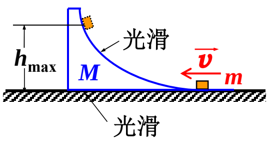
取点B为重力势能零点



即 $\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kR^2 = mgR(2-\sin 30^\circ)$

又 $kR - mg = m\frac{v_B^2}{R}$　　所以 $k = \frac{2mg}{R}$

［例2］已知：$m = 0.2\text{kg}$， M=2kg， $v = 4.9\text{m/s}$ 。



求：$h_{max} = ?$

解： $m + M +$ 地球：

$W_外$= 0， $W_{内非}$ = 0 ，

故机械能守恒。

当 $h = h_{max}$ 时，M 与 m有相同的水平速度$\vec{V}$ 。

取地面 $E_p = 0$，有：

$$\frac{1}{2}mv^2 + \cancel{E_{pM}} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \cancel{E_{pM}} + mgh_{max} \quad (1)$$

$m + M$： 水平方向$F_外$= 0，故水平方向动量守恒 mv =（m+M）V　　(2)

由(1)、(2) 得：　　$h_{max} = \frac{1}{1+\frac{m}{M}} \cdot \frac{v^2}{2g}$

分析结果的合理性：● 量纲对。

● $\frac{m}{M} \to 0$， $h_{max} = \frac{v^2}{2g}$ $\longrightarrow$ $mgh_{max} = \frac{1}{2}mv^2$，正确。

代入数据： $h_{max} = \frac{1}{1+\frac{0.2}{2}} \times \frac{4.9^2}{2\times 9.8} = 1.11\ \text{m}$

$\boxed{\text{思考}}$ 该过程中地面承受的压力如何变化 ？

例3、一质量为m的质点，在xoy平面上运动。

其位置矢量为：$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$

其中a,b,ω为正值常数，$a > b$。

(1)求质点在A $(a,0)$点和$B(0,b)$点时的动能。

(2)求质点所受的作用力以及当质点从A运动到B的过程中分力F_x、F_y所做的功。

解：　$(1)\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$

$\therefore x = a\cos\omega t \qquad y = b\sin\omega t$

$v_x = -a\omega\sin\omega t \quad v_y = b\omega\cos\omega t$

$A(a,0)$点：$\cos\omega t=1 \quad \sin\omega t=0$

$\therefore E_{KA} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}mb^2\omega^2$

$B(0,b)$点：$\cos\omega t=0 \quad \sin\omega t=1$

$\therefore E_{KB} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$

$(2)\vec{F} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j}$

$= -ma\omega^2\cos\omega t\vec{i} - mb\omega^2\sin\omega t\vec{j}$

$W_x = \int_a^0 F_x dx = -\int_a^0 ma\omega^2\cos\omega t dx = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$

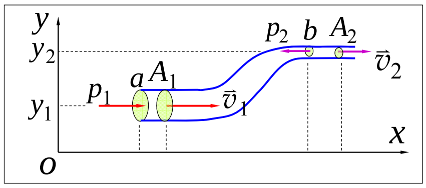
$W_y = \int_0^b F_y dy = -\int_0^b mb\omega^2\sin\omega t dy = -\frac{1}{2}mb^2\omega^2$

机械能守恒定律的应用
——伯努利方程

- 应用条件：不可压缩，没有粘滞性，流体流动时，空间每一点的流速不随时间而改变
- 伯努利方程：

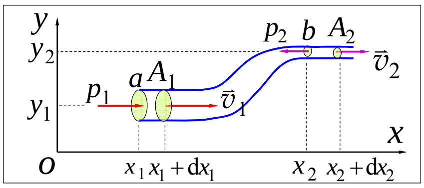
$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=\text{常量}$$

例4 如图，在一弯曲管中，稳流着不可压缩的密度为 ρ 的流体．$p_a = p_1$、$S_a=A_1$，$p_b=p_2$，$S_b=A_2$．$v_a = v_1$，$v_b = v_2$．求流体的压强 p 和速率 v 之间的关系．



解 取如图所示坐标，在dt时间内 a、b 处流体分别移动dx_1、dx_2．两侧外力对流体所做功 $\mathrm{d}W_p = p_1A_1\mathrm{d}x_1 - p_2A_2\mathrm{d}x_2$

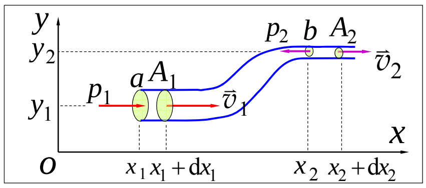
$$A_1\mathrm{d}x_1 = A_2\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}V \qquad \therefore \mathrm{d}W_p = (p_1-p_2)\mathrm{d}V$$



$$\mathrm{d}W_g = -\mathrm{d}m\cdot g(y_1-y_2) = -\rho\cdot g(y_1-y_2)\mathrm{d}V$$

$$(p_1-p_2)\mathrm{d}V-\rho\cdot g(y_2-y_1)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}Vv_2^2-\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}Vv_1^2$$

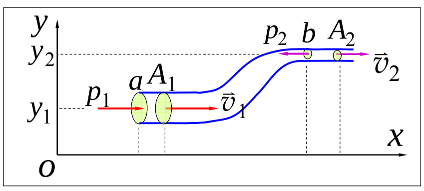
$$p_1+\rho gy_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2+\rho gy_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2=\text{常量}$$



- 伯努利方程 $p+\rho gy+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$

若将流管放在水平面上，即 $y_1=y_2$

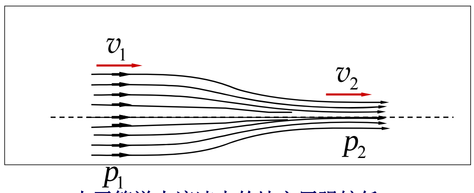
则有 $p+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$



$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

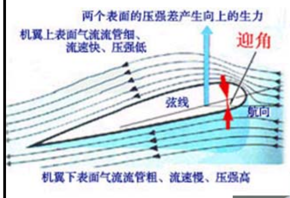
即 $p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$

结论 若 $p_1>p_2$ 则 $v_1<v_2$

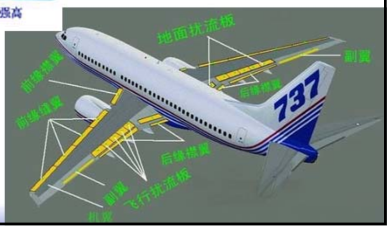


水平管道内流速大的地方压强较低

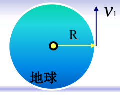
伯努利方程的应用举例



飞机升空原理



牛顿万有引力的应用
——人造卫星的梦想



- 牛顿的设想：牛顿曾设想,从高山上用不同的水平速度抛出物体,速度一次比一次大,则落点一次比一次远,如不计空气的阻力,当速度足够大时,物体就永远不会落到地面上来,而围绕地球旋转,成为一颗人造地球卫星了.
- 人造地球卫星绕地球运行的动力学原因：地球对人造卫星的万有引力提供了它绕 地球做匀速圆周运动所需的向心力，所以所有的人造地球卫星的轨道平面必 通过地球中心，即必须以地心作为圆轨道的圆心或椭圆轨道的焦点，否则不可能稳定运行。

宇宙三速度

第一宇宙速度

物体在地面附近绕地球做匀速圆周运动的速度，叫第一宇宙速度，又叫环绕速度，第一宇宙速度是最小的发射速度。

解 取卫星和地球为一系统，只有保守力作功，系统的机械能守恒 .

$$G\frac{m_{地}m}{R_{地}^{2}} = m\frac{v_1^2}{R_{地}}$$

地球质量$M_{地}$约为6×10^{24}kg，地球平均半径$R_{地}$为6400km，人造卫星的半径约为地球半径即近地卫星。$G=6.67\times10^{-11}N\cdot m^2/kg^2$

$$v_1=\sqrt{\frac{Gm_{地}}{R_{地}}}=7.91 \quad km/s$$

方法2：根据 $mg=m\frac{v_1^2}{R}$ ，由地球表面的重力加速度和地球的半径算出：

$v_1=\sqrt{gR}$ =7.9km/s。

第二宇宙速度——逃脱地球引力所需要的从地面出发的最小速度(脱离速度).

取无穷远处引力势能为零,物体距地心距离为r时的引力势能为，

$$\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{m_{地}m}{R_{地}}=0$$

式中G是引力常量，M是地球的质量,m是物体的质量．不计空气阻力，物体和地球组成的系统机械能守恒

$$v_2=\sqrt{\frac{2Gm_{地}}{R_{地}}}=11.2 \quad km/s$$

可见11.2km/s是物体脱离地球的最小发射速度。当物体的速度等于或大于11.2km/s，它就会离开地球，我们把11.2km/s叫做第二宇宙速度，又叫脱离速度。

第二宇宙速度与第一宇宙速度的关系是 $v_2=\sqrt{2}v_1$

第三宇宙速度——是使物体脱离太阳系所需的最小速度(逃逸速度).

取地球为参考系,由机械能守恒得

设质点以第三宇宙速度抛出时，其动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv_3^2$$

这个动能包含两部分，即脱离地球引力所需的动能E_{k1} 和脱离太阳系所需的动能 E_{k2} ：

$$E_k=E_{k_1}+E_{k_2}$$

而 $$E_{k_1}=\frac{1}{2}mv_2^2$$

求脱离太阳系所需的动能 E_{k2}.

由于地球公转的速率 v = 29. 8 km/s，

类似于第二宇宙速度计算，可计算物体脱离太阳引力所需速率应该是

$$v=\sqrt{2G\frac{M_0}{R_0}}$$

太阳质量为M_0，太阳中心到地球中心的距离为R_0，

将$M_0=2.0\times10^{30}$kg，$R_0=1.5\times10^{11}$m代入得v=42.2km/s

$$v=\sqrt{2}\times v_1=\sqrt{2}\times29.8km/s=42.2 \quad km/s$$

设准备飞出太阳系的物体的发射方向与地球公转的方向相同，射出的质点在离开地球时相对地球速率为

$$v'=(42.2-29.8)km/s=12.4 \quad km/s$$

与此相对的动能为 $E_{k_2}=\frac{1}{2}mv'^2$

既能摆脱地球引力又能摆脱太阳引力所需要的总能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv_3^2 = E_{k_1} + E_{k_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

即

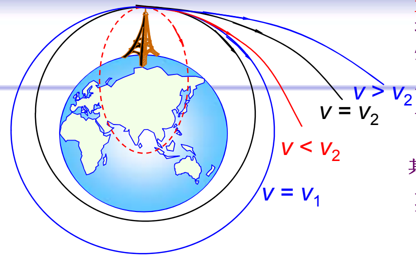
$$v_3^2 = v_2^2 + v'^2$$

第三宇宙速度

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v'^2}$$

$$= \sqrt{11.2^2 + 12.4^2} \text{ km/s} = 16.7 \text{ km/s}$$

在地面附近发射一个物体，要使物体挣脱太阳引力的束缚，飞到太阳系外，必须使它的速度等于或大于16.7km/s，这个速度叫做第三宇宙速度，又叫逃逸速度。



第四宇宙速度是指在地球上发射的物体摆脱银河系引力束缚，飞出银河系所需的最小初始速度。但由于人们尚未知道银河系的准确大小与质量，因此只能粗略估算，其数值在525千米/秒以上。而实际上，仍然没有航天器能够达到这个速度。

第一宇宙速度：v=7.9km/s（绕地球做圆周运动的最小速度）实际上，地球表面存在稠密的大气层，航天器不可能贴近地球表面作圆周运动，必需在150千米的飞行高度上，才能绕地球作圆周运动。在此高度下的环绕速度为7.8千米/秒。

第二宇宙速度：速度为11.2km/s时，在地球上发射的物体摆脱地球引力束缚，飞离地球所需的最小初始速度。大于该速度，卫星就会脱离地球的吸引，不再绕地球运行。达到第二宇宙速度的卫星还受到太阳的引力。

第三宇宙速度：速度为16.7km/s，是指在地球上发射的物体摆脱太阳引力束缚，飞出太阳系所需的最小初始速度。大于该速度，物体就摆脱了太阳引力的束缚，飞到太阳系以外的宇宙空间去。

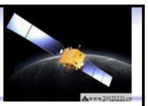
世界航天

- 1957年10月，原苏联发射第一颗人造地球卫星
- 1961年4月12日苏联空军少校加加林进入了东方一号载人飞船。实现了人类第一次进入太空。他的非凡勇气，鼓舞了更多人为航天事业奋斗。
- 1969年7月20日，阿波罗11号将人类送上了月球。当时，上亿人通过电视注视着走出登月舱的阿姆斯特朗，他在月球上迈出了一小步，确是人类迈出的一大步。
- 1984年4月12日，第一架航天飞机哥伦比亚号发射成功。
- 2003年2月1日，哥伦比亚号航天飞机在重返地面的过程中突然发生解体燃烧，航天飞机上的七名宇航员，包括六名美国人及一名以色列人全部遇难。

中国航天

- 1970年，“东方红”1号，中国第一颗人造卫星。中国是第五个能自行发射卫星的国家。
- 1975年，返回式遥感卫星，中国第一颗返回式卫星，用于对地观测，运行三天后按计划返回地面；中国是第三个掌握卫星回收技术的国家。
- 1984年，试验通信卫星：“东方红”2号，标志着中国是世界上第5个能发射地球静止轨道卫星的国家。
- 2003年10月15日9时，我国“神舟”五号宇宙飞船在酒泉卫星发射中心成功发射，把中国第一位航天员杨利伟送人太空.

嫦娥三号



所属组织	国家航天局（CNSA）
任务类型	着陆器和一艘月球车（玉兔号）
环绕对象	月球
入轨时间	2013年12月06日
发射时间	2013年12月02日 01时30分00.344秒
发射手段	长征三号乙增强型
发射地点	西昌卫星发射中心
任务时长	一年（着陆器）/三个月（玉兔号月球车）
质量	3,750千克（8,300磅）
功耗	太阳能电池板、锂电池、同位素热源（仅用于保温）月球表面着陆
着陆日期	2013年12月14日[1][2]
着陆地点	雨海西北地区（“虹湾着陆区”）

摘自维基百科

作业

- P138　3.21，3.23，3.24，3.26