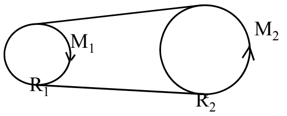
已知：两个皮带轮半径分别为R_1，R_2，质量分别为m_1，m_2，分别绕固定轴O_1，O_2转动，用皮带相连，轮1作用力矩M_1，轮2有负载力矩M_2，皮带与轮无滑动，轴处无摩擦。

求：轮1的角速度。

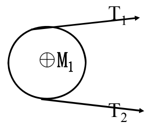


解：

轮1：受作用力矩M，（正方向）

皮带的力矩R_1T_1和R_1T_2；

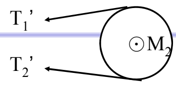
轮的转动惯量J_1＝（1/2）$m_1R_1^2$



$$M + R_1T_1 - R_1T_2 = J_1\beta_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2\beta_1$$

轮2：

受作用力矩M'，



皮带的力矩$T_1'R_2$和$T_2'R_2$；

轮的转动惯量J_2＝（1/2）$m_2R_2^2$

$$-M' - R_2T_1' + R_2T_2' = J_2\beta_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2\beta_2$$

注意：M定为正方向后，M'力矩的方向与M一致则为“正”反之为“负”。

两个轮是牵连在一起运动的，所以存在着牵连关系。

皮带与轮没有相对滑动

则：

$$\omega_1R_1 = \omega_2R_2 \text{ 且 } \beta_1R_1 = \beta_2R_2$$

不计皮带质量

∴T_1＝T_1'，　T_2＝T_2'

解方程得：

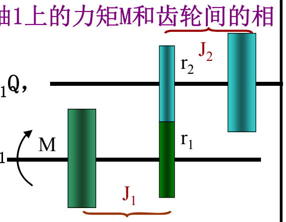
$$\beta_1 = \frac{2(R_2M - R_1M')}{(m_1+m_2)R_1^2R_2}$$

例：已知：飞轮齿轮1绕转轴1的转动惯量J_1＝98.0kgm²，飞轮齿轮2绕转轴2的转动惯量J_2=78.4kgm²，两齿轮咬合传动，齿数比Z_1：Z_2＝3：2，r_1＝10cm，轴1从静止在10s匀加速到1500r/min，求：加在轴1上的力矩M和齿轮间的相互作用力Q。

解：飞轮1受到的力矩：M 和 r_1Q，

角加速度：β_1

动力学方程：　$M - Qr_1 = J_1\beta_1$



飞轮2受到的力矩：　$Q'r_2$，

角加速度：β_2

动力学方程：　$Q'r_2 = J_2\beta_2$

牵连关系：$\beta_1 r_1 = \beta_2 r_2$；$r_1/r_2 = Z_1/Z_2$

解方程得：

$$M = \left[J_1 + \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 J_2\right]\beta_1$$

$$Q = \frac{J_2}{J_1}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2\beta_1$$

将具体数值代入：

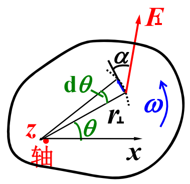
$$\beta_1 = \left(\frac{1500}{60}\right)\times 2\pi \times \frac{1}{10} = 5\pi(s^{-2})$$

$$M = \left(98.0 + 78.4\times\frac{9}{4}\right)\times 5\pi = 4.31\times10^3(N\cdot m)$$

$$Q = \left(\frac{78.4}{0.1}\right)\times\left(\frac{9}{4}\right)\times 5\pi = 27.7\times10^3(N)$$

5.5 定轴转动中的功能关系

一．力矩的功



力矩的空间积累效应：

$$dW = F_\perp \cos\alpha(r_\perp d\theta)$$

$$= (F_\perp \cos\alpha \cdot r_\perp)d\theta$$

$$= M d\theta$$

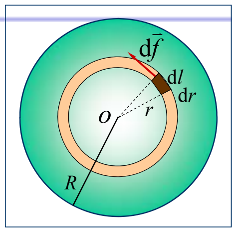
力矩的功：

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta}$$

例　留声机的转盘绕通过盘心垂直盘面的轴以角速率 ω 作匀速转动．放上唱片后，唱片将在摩擦力作用下随转盘一起转动．设唱片的半径为R，质量为m，它与转盘间的摩擦系数为 μ ，求：(1)唱片与转盘间的摩擦力矩；(2)唱片达到角速度 ω 时需要多长时间；(3)在这段时间内，转盘的驱动力矩做了多少功？

解（1）如图取面积元$\mathrm{d}s = \mathrm{d}r\mathrm{d}l$，该面元所受的摩擦力为

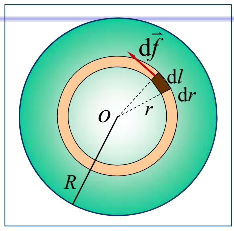
$$\mathrm{d}f = \frac{\mu mg}{\pi R^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}l$$



此力对点o的力矩为

$$r\mathrm{d}f = \frac{\mu mg}{\pi R^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}l$$

于是，在宽为$\mathrm{d}r$的圆环上，唱片所受的摩擦力矩为



$$\mathrm{d}M = \frac{\mu mg}{\pi R^2}r\mathrm{d}r(2\pi r)$$

$$= \frac{2\mu mg}{R^2}r^2\mathrm{d}r$$

$$M = \frac{2\mu mg}{R^2}\int_0^R r^2\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\mu Rmg$$

(2) 由转动定律求α，（唱片$J=mR^2/2$）

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{4\mu g}{3R}\text{（作匀加速转动）}$$

由 $\omega = \omega_0 + \alpha t$ 可求得 $t = \dfrac{3\omega R}{4\mu g}$

(3) 由 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ 可得在 0 到 t 的时间内，转过的角度为 $\theta = \dfrac{3\omega^2 R}{8\mu g}$

驱动力矩做的功为 $W = M\theta = \dfrac{1}{4}mR^2\omega^2$

二．定轴转动动能定理

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta$$

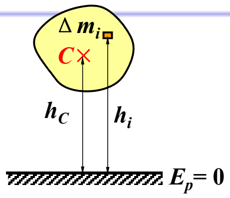
$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

令转动动能：$\boxed{E_k = \frac{1}{2}J\omega^2}$　（$\omega\uparrow\rightarrow E_k\uparrow\uparrow$）（飞轮储能）

（可证：$\frac{1}{2}J\omega^2 = \sum\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$）

刚体定轴转动动能定理：$\boxed{W = E_{k2} - E_{k1}}$

三．刚体的重力势能



$$E_p = \sum\Delta m_i g h_i$$

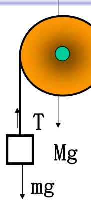
$$= mg\frac{\sum\Delta m_i h_i}{m}$$

$$= mgh_C$$

四．应用举例

对于包括刚体的系统，功能原理和机械能守恒定律仍成立。

例：均质园盘滑轮质量M，半径R，绕轻绳，绳的另一端系一质量m的物体，轴无摩擦，开始时系统静止。求：物体下降s时，滑轮的角速度和角加速度。



解：轴无摩擦，系统机械能守恒

	m动能	m势能	M动能
初：	0	mgs	0
终：	（1/2）mv^2	0	（1/2）$J_z\omega^2$

牵连关系：$v=\omega R$，$J_z=（1/2）MR^2$

$mgs=（1/2）mv^2+（1/2）J_z\omega^2$

$=（1/2）mR^2\omega^2+(1/4)MR^2\omega^2$

$$\therefore \quad \omega=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}$$

求角加速度：

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}\right)=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{d}{dt}\sqrt{s}$$

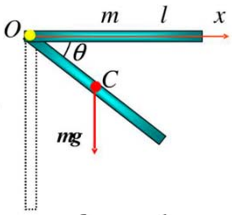
$$=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{ds}{dt}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{1}{\sqrt{s}}\omega R$$

其中 $ds/dt=v=\omega R$，并将ω值代入得：

$$\beta=\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}\frac{1}{\sqrt{s}}=\frac{2mg}{R(2m+M)}$$

一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置.

求 它由此下摆 θ 角时的 ω.



解：用机械能守恒定律

直棒竖直时的最低点为零势能点

因为只有保守内力作功，机械能守恒

$E_1=mgl$

$E_2=\frac{1}{2}J\omega^2+mg(l-\frac{l}{2}\sin\theta)$

$\because E_1=E_2$

$\therefore mgl=\frac{1}{2}J\omega^2+mg(l-\frac{l}{2}\sin\theta)$

即 $mg\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}J\omega^2$

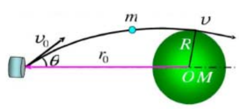
$J=\frac{1}{3}ml^2$

$\omega=(\frac{3g\sin\theta}{l})^{1/2}$

角加速度？

发射一宇宙飞船去考察一质量为M，半径为R的行星，当飞船静止于空间距行星中心4R时，以速度v_0发射一质量为m的仪器。要使该仪器恰好略过行星表面。求θ角及着陆滑行时的速度多大？

解：引力场系统的机械能守恒和质量的角动量守恒



$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{r_0}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R} \qquad (1)$$

$$mv_0r_0\sin(\pi-\theta)=mvR \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad v=\frac{v_0r_0\sin\theta}{R}=4v_0\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}\right)^{1/2}$$

$$v=v_0\left(1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}\right)^{1/2}$$

5.6 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

讨论力矩对时间的积累效应。

质点系：对点 $\vec{M}_外=\frac{d\vec{L}}{dt}$，$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_外\,dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1$

对轴 $\int_{t_1}^{t_2}M_{外z}\,dt=L_{2z}-L_{1z}$

刚体 $L_z=J_z\omega$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}M_{外z}\,dt=J_z\omega_2-J_z\omega_1}$$

—— 刚体定轴转动的角动量定理

刚体定轴转动的角动量守恒定律：

$$\boxed{M_{外z}=0，\text{则 } J_z\omega=\text{const.}}\begin{cases}\text{大小不变}\\ \text{正、负不变}\end{cases}$$

对刚体系，$M_{外z}=0$ 时，$\sum J_{iz}\omega_i=\text{const.}$，

此时角动量可在系统内部各刚体间传递，而却保持刚体系对转轴的总角动量不变。

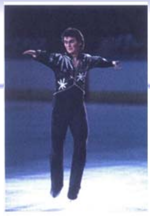
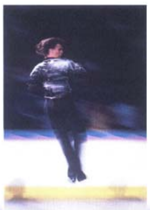
例. 人坐在转凳上，两手拿哑铃，伸开手让他以角速度ω_1 转动，转动惯量为 J_1，如果人手将哑铃拉回到身边，对轴的转动惯量变为 $J_2(<J_1)$，求此时转动角速度 ω_2

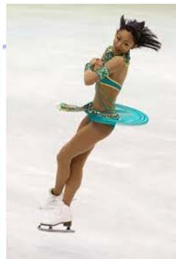
解： $(M_z = 0)$

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \qquad \Rightarrow \omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1$$

$$J_1 > J_2 \qquad \omega_2 > \omega_1$$

茹科夫斯基凳

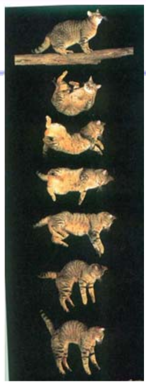


滑冰运动员的旋转

克服直升飞机机身反转的措施：

装置尾浆推动大气产生克服机身反转的力矩

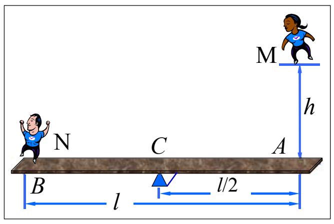
装置反向转动的双旋翼产生反向角动量而相互抵消



猫的下落（A）

猫的下落（B）

例1　一杂技演员M由距水平跷板高为h 处自由下落到跷板的一端A，并把跷板另一端的演员N弹了起来．问演员N可弹起多高?



设跷板是匀质的，长度为l，质量为 m'，跷板可绕中部支撑点C 在竖直平面内转动，演员的质量均为m. 假定演员M落在跷板上，与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞.

解　碰撞前M落在 A点的速度

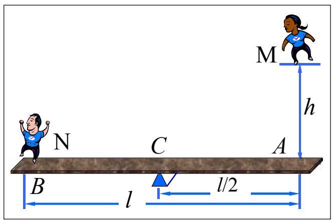
$$v_{\mathrm{M}}=(2gh)^{1/2}$$

碰撞后的瞬间，M、N具有相同的线速度

$$u=\frac{l}{2}\omega$$

M、N和跷板组成的系统，角动量守恒

$$mv_{\mathrm{M}}\frac{l}{2}=J\omega+2mu\frac{l}{2}=\frac{1}{12}m'l^2\omega+\frac{1}{2}ml^2\omega$$



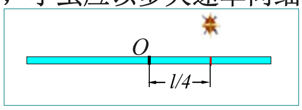
$$mv_{\mathrm{M}}\frac{l}{2}=J\omega+2mu\frac{l}{2}=\frac{1}{12}m'l^2\omega+\frac{1}{2}ml^2\omega$$

解得 $$\omega=\frac{mv_{\mathrm{M}}l/2}{m'l^2/12+ml^2/2}=\frac{6m(2gh)^{1/2}}{(m'+6m)l}$$

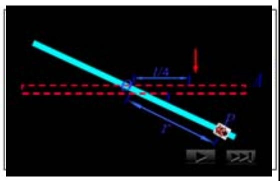
演员N以u起跳，达到的高度：

$$h'=\frac{u^2}{2g}=\frac{l^2\omega^2}{8g}=(\frac{3m}{m'+6m})^2h$$

例2　质量很小长度为l 的均匀细杆，可绕过其中心 O并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动．当细杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距点O为 $l/4$ 处，并背离点O 向细杆的端点A 爬行．设小虫与细杆的质量均为m. 问：欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行?



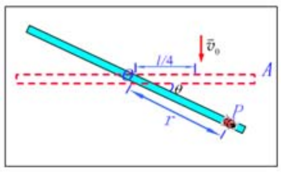
解　虫与杆的碰撞前后，系统角动量守恒



$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2\right]\omega$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$



由角动量定理

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

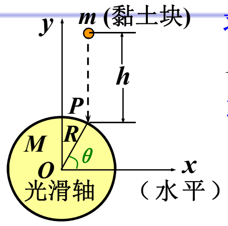
$$mgr\cos\theta=\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{12}ml^2+mr^2)=2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

考虑到 $\theta=\omega t$

得 $$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7lg}{24v_0}\cos(\frac{12v_0}{7l}t)$$

此即小虫需具有的爬行速率.

[例3] 如图示,已知：h，R，M=2m，ω=60°

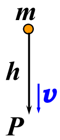


均质圆盘

求：碰撞后的瞬间盘 $\omega_0 = ?$

P 转到 x 轴时盘 $\omega = ?$，$\alpha = ?$

解： m下落：



$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

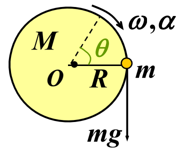
$$\upsilon = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

对（m+盘），碰撞中重力对O 轴力矩可忽略，

系统角动量守恒： $m\upsilon R\cos\theta = J\omega_0 \qquad (2)$

（m+盘）角动量 $J = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = 2mR^2$ (3)

由(1)(2)(3)得： $\omega_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta \qquad (4)$



对（m + M +地球）系统，

只有重力作功，E守恒。

令P、x 重合时 E_P = 0，则：

$$mgR\sin\theta + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (5)$$

(3)(4)(5)得：

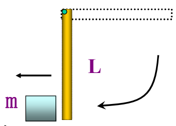
$$\omega = \sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta + \frac{g}{R}\sin\theta} = \frac{1}{2R}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}(h + 4\sqrt{3}R)}$$

$(\theta = 60^\circ)$

$$\alpha = \frac{M_{外}}{J} = \frac{mgR}{2mR^2} = \frac{g}{2R}$$

例4：长为L，质量为M的均匀杆，一端悬挂，由水平位置无初速度地下落，在铅直位置与质量为m的物体A做完全非弹性碰撞，碰后，物体A沿摩擦系数为μ的水平面滑动。

求：物体A滑动的距离。



解：整个过程分为三个阶段

1、杆由水平位置绕端点的轴转动：机械能守恒

2、与A作完全非弹性碰撞：角动量守恒

3、A滑动：动能被摩擦力耗散掉。

第一阶段：机械能守恒

	动能	势能
初：	0	Mg（L/2）
终：	（1/2）$J_z\omega^2$	0

∴ （1/2）$J_z\omega^2$=Mg（L/2）

其中J_z=(1/3)ML^2

∴ ω^2=3g/L

第二阶段：角动量守恒

初： $J_z\omega$

终： $J_z\omega' + mL^2\omega'$

∴ $J_z\omega = J_z\omega' + mL^2\omega'$

代入J_z和ω值得：

$$\frac{1}{3}ML^2\sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{3}ML^2\omega' + mL^2\omega'$$

$$\omega' = \frac{M\sqrt{\frac{3g}{L}}}{M + 3m}$$

第三阶段，动能定理

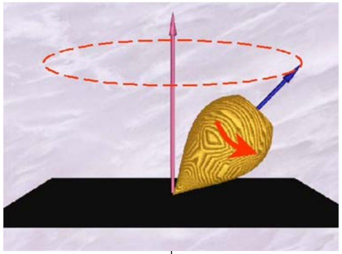
A的速度：ω'L ；摩擦力mgμ

$$\frac{1}{2}m(l\omega')^2 = mg\mu s$$

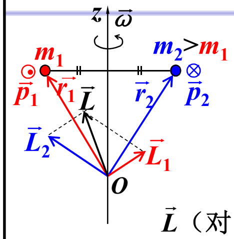
$$s = \frac{3LM^2}{2\mu(M + 3m)^2}$$

5.7 旋进 （进动，precession）

旋进：高速旋转的物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象。如玩具陀螺的运动：



刚体自转的角动量不一定都与自转轴平行。

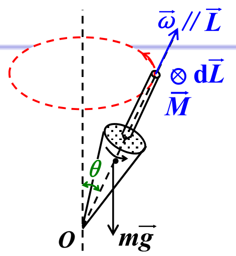


例如，图示的情形：质量 $m_2>m_1$ 对转轴不对称，则对轴上 O 点的 $\vec{L}$ 不平行于 $\vec{\omega}$。

若质量对转轴分布对称，则： $\vec{L}\,//\,\vec{\omega}\,//$ 轴

$\vec{L}$（对点）$=L_z\vec{k}$（对轴）$=J_z\vec{\omega}$

下面我们就讨论这种质量对转轴分布对称的刚体的旋进问题。



玩具陀螺的旋进：

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\longrightarrow$$

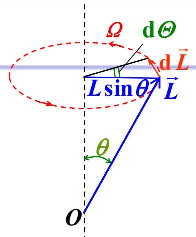
$$\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t\ //\ \vec{M}$$

$$\vec{M}\perp\vec{L}\longrightarrow\mathrm{d}\vec{L}\perp\vec{L}$$

$\longrightarrow$ $\vec{L}$ 只改变方向而不改变大小，从而产生旋进运动。

$$|\mathrm{d}\vec{L}|=L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta=M\,\mathrm{d}t$$

旋进角速度：$\Omega=\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$



$$\therefore\quad \boxed{\Omega=\frac{M}{L\sin\theta}=\frac{M}{J\omega\sin\theta}}$$

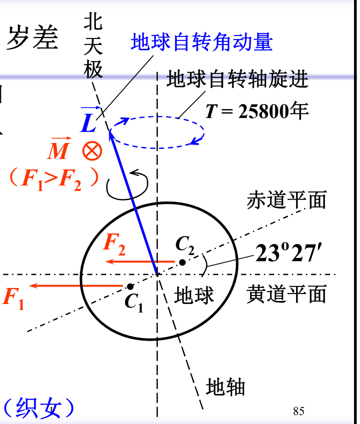
$$\boxed{\text{当}\ \theta=90^\circ\ \text{时，}\ \Omega=\frac{M}{J\omega}}\qquad \Omega\propto\frac{1}{\omega},\ \omega\uparrow\rightarrow\Omega\downarrow$$

思考

旋进的方向？

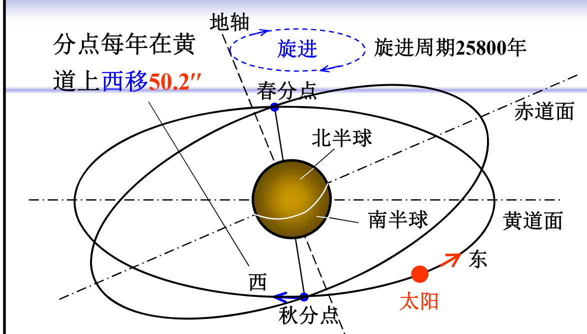
▲ 地球转轴的旋进，岁差

随着地球自转轴的旋进，北天极方向不断改变。



	北极星
3000年前	小熊座 β
现在	小熊座 α
12000年后	天琴座 α（织女）

分点每年在黄道上西移50.2″



太阳年（回归年）：太阳由春分→秋分→春分

恒星年（时间长）： 地球绕太阳一周的时间

} 岁差（precession）

岁差 = 恒星年 – 太阳年 ≈ 20分23秒

我国古代已发现了岁差：

▲前汉（公元前**206 — 23**） 刘歆发现岁差。

▲晋朝（公元**265 — 316**）虞喜最先确定了岁差：

每50年差1度（约**72″**/年）（精确值为 **50.2″**/年）

▲祖冲之（公元**429 — 500**） 编《大明历》最先将岁差引入历法：391年有144个闰月。

当旋进发生后，总角速度 $\vec{\omega}_{总}=\vec{\omega}+\vec{\Omega}\neq\vec{\Omega}$ 。

只有刚体高速自转时，才有 $\vec{\omega}_{总}\doteq\vec{\omega}$ ，

这时也才有 $\vec{L}\doteq J\vec{\omega}$ 和以上 Ω 的表示式。

当考虑到 $\vec{\Omega}$ 对 $\vec{\omega}_{总}$ 的贡献时，自转轴在旋进中还会出现微小的上下的周期性摆动，这种运动叫章动（**nutation**）。

作业

- **P191：5.8, 5.10**
- **P227： 6.17, 6.22**