离散数学第三部分之一

命题逻辑

■ 一、逻辑

逻辑是研究推理的科学。公元前四世纪由希腊的哲学家亚里斯多德首创。作为一门独立科学，十七世纪，德国的莱布尼兹(Leibniz)给逻辑学引进了符号，又称为数理逻辑(或符号逻辑)。**逻辑可分为：形式逻辑（通过数学方法）、数理逻辑和辩证逻辑。**

- 辩证逻辑是研究反映客观世界辩证发展过程的人类思维的形态的。
- 形式逻辑是研究思维的形式结构和规律的科学，它撇开具体的、个别的思维内容，从形式结构方面研究概念、判断和推理及其正确联系的规律。
- 数理逻辑是用数学方法研究推理的形式结构和推理的规律的数学学科。它的创始人Leibniz，为了实现把推理变为演算的想法，把数学引入了形式逻辑。其后，又经多人努力，逐渐使得数理逻辑成为一门专门的学科。

定义1　具有确切真值的陈述句称为命题(Proposition）.

该命题可以取一个“值”，称为真值。真值只有“真”和“假”两种，分别用“T”（或“1”）和“F”（或“0”）表示。

从上述定义，可知一切没有判断内容的句子，如命令句、感叹句、疑问句、祈使句、二义性的陈述句等都不能作为命题。

命题特点

① 能够判断真假的陈述句。

② 命题的真值：命题的判断结果。命题的真值只取两个

③ 真命题：判断为正确的命题，即真值为真的命题（T）。

④ 假命题：判断为错误的命题，即真值为假的命题(F)。

例： 下列句子哪些是命题，并判断命题的真假。

（1）2是素数；
(2）北京是中国的首都；
（3）这个语句是假的；
（4）1+1=10；
（5）$x+y>0$；
（6）3+2=8；
（7）我喜欢踢足球；
（8）地球外的星球上也有人；
（9）明年国庆节是晴天；
（10）把门关上；
（11）滚出去！
（12）你要出去吗？
（13）今天天气真好啊！

命题分类

一般来说，命题可分两种类型：

原子命题(简单命题)：不能再分解为更为简单命题的命题。

复合命题：可以分解为更为简单命题的命题。而且这些简单命题之间是通过如"或者"、"并且"、"不"、"如果...则..."、"当且仅当"等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

在语言中，一般是通过联结词和标点符号将一些简单的句子联结成复杂的语句，最常见的联结词主要有以下五种：“或者”、“并且”、“不”、“如果……则……”、“当且仅当”。

定义2. 设P是任一命题，复合命题“非P”（或“P的否定”）称为P 的否定式（Negation），记作$\neg P$，“$\neg$”为否定联结词。$\neg P$为真当且仅当P为假。

例：设P：2是素数。则$\neg P$：2不是素数。

显然，当P的真值为0时，$\neg P$的真值为1。

定义3 **设P、Q是任两个命题，复合命题“P 并且Q ”（或“P和Q”）称为P与Q的合取式（Conjunction），记作P∧Q，“∧”为合取联结词。P∧Q为真当且仅当P，Q 同为真。**

例:设

P: 中国获得了2008年奥运会的主办权。

Q: 中国加入了WT。

则：$P\wedge Q$: 中国获得了2008年奥运会的主办权并且中国加入了WTO。

由于P和Q的真值都为1，所以$P\wedge Q$的真值也为1。

定义4. 设P、Q是任两个命题，复合命题“P或Q”称为P与Q的析取式（Disjunction），记作P∨Q，“∨”为析取联结词。P∨Q为真当且仅当P、Q中至少一个为真。

例 设

P：王红学过英语。

Q：王红学过法语。

则P∨Q：王红学过英语或法语。

此时语句P∨Q的真值需由P的真值和Q的真值确定。

定义 5 设P、Q是任两个命题，复合命题:“如果P，则Q ”称为P与Q的蕴涵式（Implication），记作P→Q，“→”为蕴涵联结词，P 称为蕴涵式的前件，Q称为蕴涵式的后件。

P→Q为**假当且仅当**P为真且Q为假。

例 设

P：如果角*A*和角*B*是对顶角。

Q：角*A*等于角*B*。

则*P*→*Q*：如果角*A*和角*B*是对顶角，则角*A*等于角*B*。

此时当语句*P*为1时，则*Q*一定为1，所以*P*→*Q*的真值必为1。

蕴涵的真值表

P	Q	P→Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

定义6 设P、Q是任两个命题，双蕴涵是指“P当且仅当Q”，记作$P\leftrightarrow Q$，“$\leftrightarrow$”为等价联结词。$P \leftrightarrow Q$为真当且仅当P、Q同为真假。

例：设

P：成都是四川的省会。

Q：鸟会飞。

则$P \leftrightarrow Q$：成都是四川的省会当且仅当鸟会飞。

此时语句P的真值为1，Q的真值也为1，所以$P \leftrightarrow Q$的真值必为1。

将上述五个联结词进行归纳，见表5-1。

基本命题联结词

联 结 词	记号	复合命题	读法	记 法	真 值 结 果
否定	$\neg$	非P	P的否定	$\neg$	$\neg P$为真当且仅当P为假
合取	$\wedge$	P并且Q	P与Q的合取	$P \wedge Q$	$P \wedge Q$为真当且仅当P,Q同为真
析取	$\vee$	P或者Q	P与Q的析取	$P \vee Q$	$P \vee Q$为真当且仅当P,Q中至少一个为真
蕴涵	$\rightarrow$	若P,则Q	P蕴涵Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$为假当且仅当P为真Q为假
等价	$\leftrightarrow$	P当且仅当Q	P等价于Q	$P \leftrightarrow Q$	Q为真当且仅当P,Q同为真假

例：将下列命题符号化（1）中国不是一个国家；（2）今天天气很冷，但室内暖和；

（3）王刚是一位排球运动员或者是足球运动员；

（4）如果你固执起见，那么不愉快的事情将会发生；

（5）雪是白的当且仅当太阳从东方升起。

解 (1) 设P：中国是一个国家。则命题（1）可表示为$\neg P$。

(2) 设P：今天天气很冷。Q：室内暖和。

则命题（2）可表示为$P \wedge Q$。

(3) 设P：王刚是一位排球运动员。Q：王刚是一位足球运动员。

则命题（3）可表示为$P \vee Q$。

(4) 设P：你固执起见。Q：不愉快的事情将会发生。

则命题（4）可表示为$P \rightarrow Q$。

(5) 设P：雪是白的。Q：太阳从东方升起。

则命题（5）可表示为$P \leftrightarrow Q$。

说明

联结词与自然语言之间的对应并非一一对应；

（1）合取联结词“∧”对应了自然语言的“既…又…”、“不仅…而且…”、“虽然…但是…”、“并且”、“和”、“与”等；

（2）蕴涵联结词“→”,“P→Q”对应了自然语言中的“如P则Q”、“只要P就Q”、“P仅当Q”、“只有Q才P”、“除非Q否则¬P”等；

（3）等价联结词“↔”对应了自然语言中的“等价”、“当且仅当”、“充分必要”等；

（4）析取联结词“∨”对应的是相容（可兼）的或。

（1）联结词“$\neg$”是自然语言中的“非”、“不”和“没有”等的逻辑抽象；

（2）联结词“$\wedge$”是自然语言中的“并且”、“既…又…”、“但”、“和”等的逻辑抽象；

（3）联结词“$\vee$”是自然语言中的“或”、“或者”等逻辑抽象；但“或”有“可兼或”、“不可兼或”二种，如：

张明明天早上9点乘飞机到北京或者到上海(不可兼或)

我喜欢学习或喜欢音乐(可兼或)。

（4）联结词“→”是自然语言中的“如果…，则…”，“若…，才能…”、“除非…，否则…”等的逻辑抽象。主要描述方法有：

（1）因为P 所以Q；　　（2）只要P 就 Q；

（3）P 仅当 Q；　　（4）只有Q，才P；

（5）除非Q，才P；　　（6）除非Q，否则非P；

（7）没有Q，就没有P。

在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。但在数理逻辑中，当前件P为假时，不管Q的真假如何，则P→Q都为真。此时称为“善意推定”；这里要特别提醒一下“→”的含义，在自然语言中，条件式中前提和结论间必含有某种因果关系，但在数理逻辑中可以允许两者无必然因果关系，也就是说并不要求前件和后件有什么联系；

（5）双条件联结词“”是自然语言中的“充分必要条件”、“当且仅当”等的逻辑抽象；

（6）联结词连接的是两个命题真值之间的联结，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成他们的各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与联结次所连接的两原子命题之间是否有关系无关；

（7）联结词“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\leftrightarrow$”具有对称性，而联结词“$\neg$”、“$\rightarrow$”没有；

（8）联结词“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\neg$”同构成计算机的与门、或门和非门电路是相对应的，从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。

注：为了不使句子产生混淆，对于命题联结词之优先级作如下约定：

（1）否定→合取→析取→蕴涵→等价

（2）同级的联结词，按其出现的先后次序（从左到右）。

（3）若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算优先级最高。

例 设命题 P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

R：我将去学校。

符号化下述语句：

（1）如果明天上午七点不是雨夹雪，则我将去学校。

（2）如果明天上午七点不下雨并且不下雪，则我将去学校。

（3）如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校。

解 (1) 可符号化为 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$

(2) 可符号化为 $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

(3) 可符号化为 $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$

求下面公式的真值表：

$$G = (P \rightarrow ((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R)) \vee Q$$

其中，P、Q、R是G的所有命题变元。

P Q R	¬P	$\neg P \leftrightarrow Q$	$((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R$	$P \rightarrow ((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R)$	G
0 0 0	1	0	0	1	1
0 0 1	1	0	0	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	0	1
1 1 1	0	0	0	0	1

1.2 命题等价

定义 1.2.1

若复合命题A在其各种赋值下的取值均为真，则称A是**重言式或永真式**，记为T或1。

若A在其各种赋值下的取值均为假，则称A是**矛盾式或永假式**，记为F或0。

若A不是矛盾式则称A为**可满足式**(satisfiable)。注：由定义可知,重言式一定是可满足式,反之不真.

① 永真式G的否定¬G是矛盾式；矛盾式G的否定¬G是永真式。

② 永真式一定是可满足式,可满足式不一定是永真式

③ 可满足式的否定不一定为不可满足式(即为矛盾式)

④ 如果公式G在解释Ｉ下是真的，则称Ｉ满足G；如果G在解释Ｉ下是假的，则称Ｉ弄假于G。

例： 写出下列公式的真值表，并验证其公式是重言式、矛盾式、可满足公式。

（1）$G_1 = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$；

（2）$G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P))$；

（3）$G_3 = (P \to \neg Q) \vee \neg Q$。

解：真值表

P Q	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P))$	$(P \to \neg Q) \vee \neg Q$
0 0	1	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	0	0

定义

若$P \leftrightarrow Q$ 是永真式，则称命题P 和 Q 是逻辑等价的，用： $P \Leftrightarrow Q$（教材用=） 表示。判断两个命题是否等价，只需要比较它们的真值列表是否完全一致。

例 判定下面的命题等价

（1）$\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$

（2） $p \rightarrow q$和 $\neg p \vee q$

“＝”与“↔”的区别

首先，双条件词“↔”是一种逻辑联结词，公式G↔H是命题公式，其中“↔”是一种逻辑运算，G↔H的结果仍是一个命题公式。而逻辑等价“＝”则是描述了两个公式G与H之间的一种逻辑等价关系，G＝H表示“命题公式G等价于命题公式H”，G＝H 的结果不是命题公式。

其次，如果要求用计算机来判断命题公式G、H是否逻辑等价，即G＝H那是办不到的，然而计算机却可“计算”公式G↔H是否是永真公式。

例 证明公式$G_1=(P\leftrightarrow Q)$与公式$G_2=(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$之间是逻辑等价的。

P Q	$G_3=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$
0 0	1 1 1 1 1
0 1	0 1 1 0 0
1 0	0 1 0 0 1
1 1	1 1 1 1 1

表 1.2 逻辑等价

等价关系	名称
$p \wedge T \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	恒等律
$p \vee T \Leftrightarrow T$ $p \wedge F \Leftrightarrow F$	支配律
$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	幂等律
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	双非律
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	交换律
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	结合律
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	分配律
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	德摩根定律
$p \vee \neg p \Leftrightarrow T$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$ $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	有用的逻辑等价关系

例 1.2.3. 证明 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 逻辑等价.

证明:	$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	由第二德摩根定律
	$\Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q)$	由第一德摩根定律
	$\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q)$	由双非律
	$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	由分配律
	$\Leftrightarrow F \vee (\neg p \wedge \neg q)$	由于 $\neg p \wedge p \Leftrightarrow F$
	$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee F$	由析取的交换律
	$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	由 F 的恒等律

例 设 $G(P, Q)=(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$，证明公式G是一个永真公式。另有两个任意公式：

$$H(P, Q)=(P\vee\neg Q);$$

$$S(P, Q)=(P\leftrightarrow Q)。$$

进一步验证代入定理的正确性。

解:

P Q	$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	1

该部分主要题型为:

（1）判断公式的类型：

证明 $((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$ 是一个永真公式。

（2）证明公式之间的等价关系：

证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$

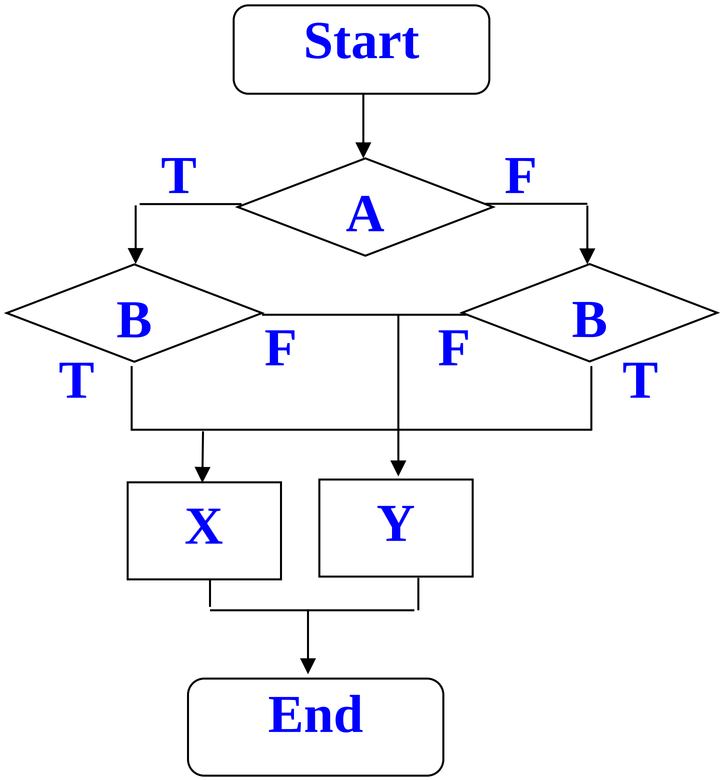
（3）化简公式：

证明 $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee ((Q \wedge R) \vee (P \wedge R)) = R$

命题公式的应用

例 将下面程序语言进行化简。

If A then if B then X else Y else if B then X else Y



解：执行X的条件为：

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$$

执行Y的条件为：

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

执行X的条件可化简为：

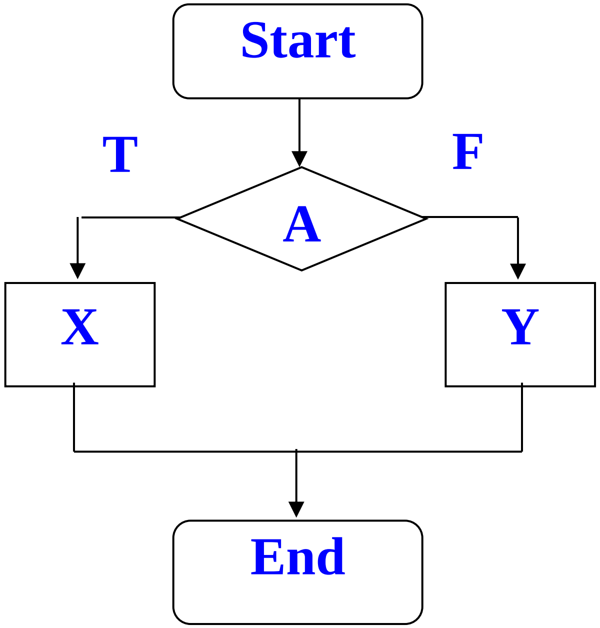
$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

$= B \wedge (A \vee \neg A) = B$

执行Y的条件可化简为：

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$= \neg B \wedge (A \vee \neg A) = \neg B$



程序可简化为：If B then X else Y

例

有一逻辑学家误入某部落，被拘于劳狱，酋长意欲放行，他对逻辑学家说：

"今有两门，一为自由，一为死亡，你可任意开启一门。为协助你脱逃，今加派两名战士负责解答你所提的任何问题。惟可虑者，此两战士中一名天性诚实，一名说谎成性，今后生死由你自己选择。"

逻辑学家沉思片刻，即向一战士发问，然后开门从容离去。该逻辑学家应如何发问？

解:逻辑学家手指一门问身旁的一名战士说:“这扇门是死亡门，他(指另一名战士)将回答‘是’,对吗？”

当被问战士回答“对”,则逻辑学家开启所指的门从容离去。

当被问的战士回答“否”,则逻辑学家开启另一扇门从容离去。

P: 被问战士是诚实人;

Q: 被问战士的回答是“是”

R: 另一名战士的回答是“是”

S: 这扇门是死亡门。

P Q	R	S
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	0	1
1 1	1	0

本章要点

- 命题的定义
- 命题的推理
- 复合命题逻辑等价
- 命题的分类