南开大学

第七章 波动

（ **Wave** ）

本章内容

7.1 机械波的形成和特征

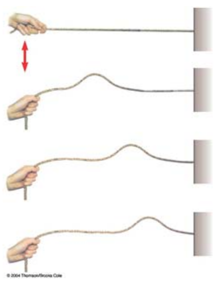
一. 机械波的形成

1. 产生：

振动和波动的关系：

波动——振动的传播

振动——波动的成因



弹性媒质的质元受外界扰动而发生振动时，因媒质各部分间的弹性联系，会使振动传播开去，这就形成了波动 — 机械波（mechanical wave）

“上游”的质元依次带动“下游”的质元振动某时刻某质元的振动状态将在较晚的时刻于“下游”某处出现。

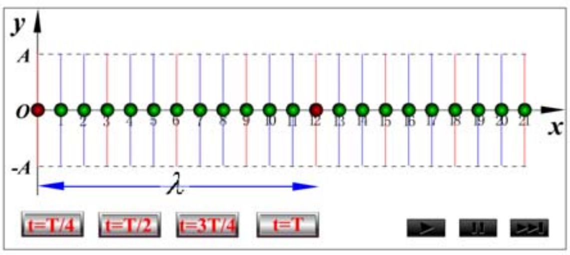
波动是振动状态的传播，不是媒质的传播。——波动传动振动及能量，但不传动质量。

形成机械波的条件 { 波源；弹性媒质

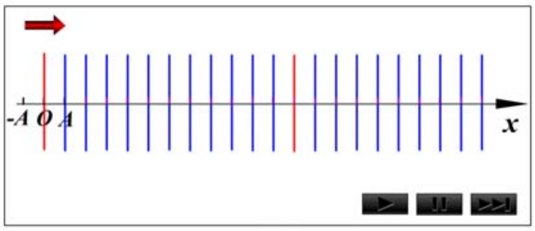
（电磁波不需要任何介质）

2. 传播：

介质中的质元振动方向与波动传播方向垂直的波称为横波。



而介质中的质元振动方向与波动传播方向一致的波称为纵波。（又称疏密波）例如：弹簧波、 声波



3 复杂波

例如：地震波

特点：复杂波可分解为横波和纵波的合成

固体既可以传播横波也可以传播纵波，而气体和液体只能传播纵波

简谐波

特点：波源及介质中各点均作简谐振动

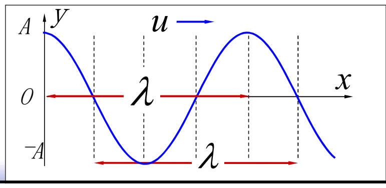
（本章研究重点之一）

二．波的特征量及其几何描述

特征量：波长　波的周期和频率　波速

1　波长　λ

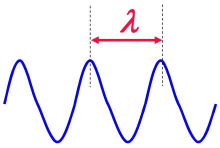
波传播方向上相邻两振动状态完全相同的质点间的距离（一完整波的长度）.



波长由波源和媒质共同决定。

波长是波的“空间周期”。

横波：相邻 波峰——波峰　波谷—— 波谷



纵波：相邻 波疏——波疏　波密——波密

2　周期　T

波传过一波长所需的时间，或一完整波通过波线上某点所需的时间.

它由波源决定（波源、观测者均不动时）

$$T = \lambda / u$$

3　频率 ν

单位时间内波向前传播的完整波的数目.

(s1　内向前传播了几个波长）

4　波速　u

一般地说，它由媒质的性质和波的类型决定，

波在介质中传播的速度

有些情况中还与频率有关（色散媒质中）。

例如，声波在空气中 $340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

水中　$1\,500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

钢铁中 $5\,000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

决定于介质的性质（弹性模量和密度）

四个物理量的联系

$$\nu = 1/T \qquad u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \qquad \lambda = \frac{u}{\nu} = Tu$$

注意

周期或频率只决定于波源的振动，

波速只决定于介质的性质

例1　在室温下，已知空气中的声速 u_1 为340 m·s^{-1}，水中的声速 u_2 为1 450 m·s^{-1}，求频率为200 Hz和2 000 Hz 的声波在空气中和水中的波长各为多少？

解 由 $\lambda = \dfrac{u}{\nu}$，频率为200 Hz和2 000 Hz 的声波在空气中的波长

$$\lambda_1 = \frac{u_1}{\nu_1} = \frac{340}{200}\ \text{m} = 1.7\ \text{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{u_1}{\nu_2} = 0.17\ \text{m}$$

在水中的波长

$$\lambda_1' = \frac{u_2}{\nu_1} = \frac{1\,450}{200}\ \text{m} = 7.25\ \text{m}$$

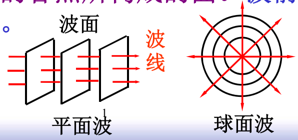
$$\lambda_2' = \frac{u_2}{\nu_2} = 0.725\ \text{m}$$

波的几何描述：波线　波面　波前

波线（wave line）——
表示波的传播方向的射线（波射线）

波面（wave surface）——
媒质振动相位相同的点组成的面（同相面）

波前（wave front）——
某时刻波到达的各点所构成的面。波前是最前面的波阵面。



性质

（1）同一波阵面上各点振动状态相同.

（2）波阵面的推进即为波的传播.

（3）各向同性介质中，波线垂直于波阵面.

三． 波的分类

按波的性质：
- 机械波（ mechanical wave ）
- 电磁波（electromagnetic wave ）
- …

按波线与振动方向关系：
- 横波（transverse wave ）
- 纵波（longitudinal wave ）

按波面形状：
- 平面波（plane wave ）
- 球面波（spherical wave ）
- 柱面波（ cylindrical wave ）

按复杂程度：
- 简谐波（simple harmonic wave ）
- 复波（ compound wave ）

按持续时间：
- 连续波（continued wave ）
- 脉冲波（pulsating wave ）

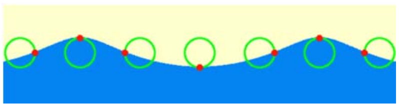
按波形是否传播：
- 行波（ travelling wave ）
- 驻波（standing wave ）

…　…

水表面的波既非横波又非纵波：

水的流动性和不可压缩性 ⇨ 水波中水质元

作二维运动 $\begin{cases}\text{纵向运动}\\ \text{横向运动}\end{cases}$ ⇨ 作圆运动



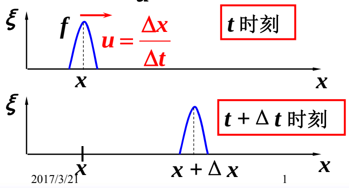
7.2 行波，简谐波

一. 行波（ travelling wave ）

某种物理量的扰动的传播称为行波。

设 ξ 为传播的物理量，它沿 x 轴传播，则

$\xi = f\,(t - \frac{x}{u})$ 为沿 $+x$ 向传播的行波，u 为波速。



$$f\,(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{u}) \overset{\Delta x = u\Delta t}{=\!=\!=} f\,(t - \frac{x}{u})$$

即 $\xi\,(x + \Delta x,\ t + \Delta t) = \xi\,(x,\ t)$

∴ $\xi = f(t - \frac{x}{u})$ 具有沿 $+x$ 向传播的性质。

同理，$\xi = f(t + \frac{x}{u})$ 具有沿 $-x$ 向传播的性质。

$\xi\,(x,\ t)$ 的函数形式称为波函数，它也就是波传播时，任意点媒质质元的运动函数。

$\xi\,(x, t) = f\,(t \pm \frac{x}{u})$ 称为行波的波函数。

二．简谐波（simple harmonic wave）

如果波传播的扰动是简谐振动的话，这样的波称为简谐波（余弦波，单色波）

1. 一维平面简谐波的波函数

以机械波的横波为例，设平面波沿 x 方向以速度 u 传播，媒质均匀、无限大，无吸收。

在 $x = 0$ 处质元振动方程为 $y(0, t) = A\cos\omega\, t$，

则应有： $\boxed{y(x, t) = A\cos\omega\,(t - \frac{x}{u})}$ —— 波函数

（因无吸收，故振幅 A 不变）

上面波函数式中的 $\omega\,(t - \frac{x}{u})$ 为波的相位。

波在某点的相位反映该点媒质的“运动状态”。

所以简谐波的传播也是媒质振动相位的传播。

设 t 时刻 x 处的相位经 dt 传到（x +dx）处，

则应有 $\omega\,(t - \frac{x}{u}) = \omega\left[\,(t + dt) - \frac{x + dx}{u}\,\right]$

于是得到 $u = \frac{dx}{dt}$ —— 相速度（相速）

即简谐波的波速就是相速。

2. 一维简谐波函数的几种常用的表示

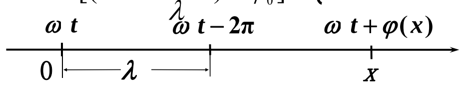
$$y(x, t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y(x, t) = A\cos[(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x) + \varphi_0]$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{\lambda}{T} \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

说明：



沿波传播方向每增加 λ 的距离，相位落后 2π。

∴ $\varphi(x) = -\frac{x}{\lambda}2\pi$

［例 1 ］：有一平面简谐波在介质中传播，波速 $u=100\ m\cdot s^{-1}$，波线上右侧距波源O（坐标原点）为75.0 m处的一点P的运动方程为

$$y_P=(0.30\ m)\cos[2\pi t+\frac{\pi}{2}]$$

求⑴波向x轴正方向传播时的波动表达式，

⑵波向x轴负方向传播的表达式

解1：⑴设以波源为原点O，沿x轴正向传播的波动方程为

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

传到P点的时间：75/100=0.75S

$$y_P=A\cos[\omega(t-0.75)+\varphi_0]$$

与已知的P点表达式比较

$$\boldsymbol{y_P=(0.30\ m)\cos[2\pi t+\frac{\pi}{2}]=0.3\cos[2\pi t+2\pi-\frac{3\pi}{2}]}$$

$$\boldsymbol{Y_p=0.3\cos[2\pi(t-\frac{3}{4})+2\pi]}$$

$$A=0.30\ m \qquad \omega=2\pi \qquad \varphi_0=2\pi$$

$$y=(0.30)\cos[2\pi(t-\frac{x}{100})]$$

⑵当沿x轴负向传播时

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$y_P=A\cos[\omega(t+0.75)+\varphi_0]$$

与已知的P点表达式比较

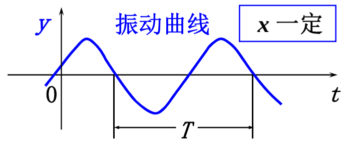
$$\boldsymbol{y_p=0.3\cos[2\pi(t+0.75)-\pi]}$$

$$A=0.30\ m \qquad \omega=2\pi \qquad \varphi_0=-\pi$$

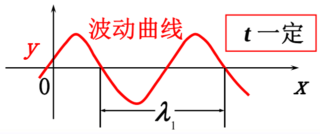
$$y=(0.30)\cos[2\pi(t+\frac{x}{100})-\pi]$$

3. 波函数的意义 $y(x,t)=A\cos[(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)+\varphi_0]$

（1） x 一定，$y\sim t$ 给出 x 点的振动方程。



（2） t 一定， $y\sim x$ 给出 t 时刻空间各点位移分布



[例2] 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A=1.0\ \mathrm{m}$，$T=2.0\ \mathrm{s}$，$\lambda=2.0\ \mathrm{m}$ ．在t=0时坐标原点处的质点在平衡位置沿Oy 轴正向运动． 求：**(1)** 波动方程；**(2)** $t=1.0\ \mathrm{s}$波形图；

(3) $x=0.5\ \mathrm{m}$ 处质点的振动规律并作图.

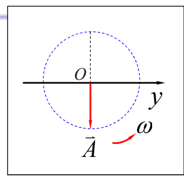
解 （1） 写出波动方程的标准式

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi_0}]$$

$t=0 \quad x=0$

$$y=0,v=\frac{\partial y}{\partial t}>0 \quad \boxed{\varphi_0=-\frac{\pi}{2}}$$



$$y=\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]\ (\mathrm{m})$$

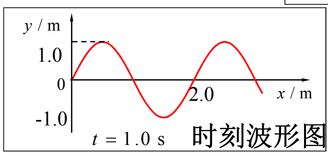
(2) 求 $t=1.0\mathrm{s}$ 波形图

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

$$y=1.0\cos[\frac{\pi}{2}-\pi x]$$

$$=\sin\pi x\ \ (\mathrm{m})$$

$t=1.0\ \mathrm{s}$ 波形方程



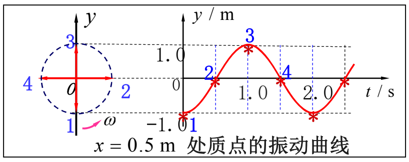
时刻波形图

(3) $x=0.5\mathrm{m}$ 处质点的振动规律并作图

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

$x=0.5\mathrm{m}$ 处质点的振动方程

$$y=\cos[\pi t-\pi]\ \ (\mathrm{m})$$



$x=0.5\ \mathrm{m}$ 处质点的振动曲线

［例］平面简谐波以v=300 m·s^{-1}的波速，沿x轴正向传播，轴上A，B，C三点间距AB=150 m，BC=150 m，已知B点质元振动表达式为：$y=6\sin\pi t(cm)$ 试写出

（1）以B为原点的波动表达式

（2）以A为原点的波动表达式

（3）以C为原点的波动表达式

解：（1）B点的振动方程 $y_B=6\sin\pi t=6\cos(\pi t-\frac{\pi}{2})$

B为原点的波动：$y_B=6\cos[\pi(t-\frac{x}{300})-\frac{\pi}{2}]$

（2）A的振动超前B 1/2s

$$y_A=6\cos[\pi(t+\frac{1}{2})-\frac{\pi}{2}]=6\cos\pi t$$

A为原点波动表达式 $y_A=6\cos\pi(t-\frac{x}{300})$

(3) C的振动落后A 1s $y_C=6\cos\pi(t-1)$

C为原点波动表达式 $y_C=6\cos[\pi(t-\frac{x}{300})-\pi]$

4. 一维波函数的其他常见表示式

$$y=A\cos(\omega t\mp kx),\ k=\frac{2\pi}{\lambda}$$ —— 波数 (wave number)

$$y=A\cos 2\pi(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda})$$

$$y=A\cos k(ut\mp x)$$

$$y=Ae^{i(\omega t\mp kx)}\quad(\mathrm{Re})$$

$$=\underline{Ae^{\mp ikx}}\cdot\underline{e^{i\omega t}}\quad(\mathrm{Re})$$

空间因子（复振幅） 振动因子

注意此处各式，均未加初位相φ_0

△7.3 物体的弹性形变

一、 物体弹性形变的基本知识

定义：形变---物体受外力作用，形状大小改变。

分类：

1）弹性形变：当形变不超过一定限度时，外力撤去以后，物体仍可以完全恢复原状的 形变。这个外力的限度叫弹性限度。

三种弹性形变：线变、切变、体变

2）范性形变：当外力撤去以后，物体不能完全恢复原状的形变。

7. 4 波的能量

一 波动能量的传播

1 波的能量

波的传播是能量的传播，传播过程中，介质中的质点运动，具有动能 W_k，介质形变具有势能 W_p .

讨论 $\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_k + \mathrm{d}W_p = \rho \mathrm{d}V A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$

(1) 在波动传播的介质中，任一体积元的动能、势能、总机械能均随 x, t 作周期性变化，且变化是同相位的.

体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大.

体积元的位移最大时，三者均为零.

(2) 任一体积元都在不断地接收和放出能量，即不断地传播能量. 任一体积元的机械能不守恒. 波动是能量传递的一种方式 .

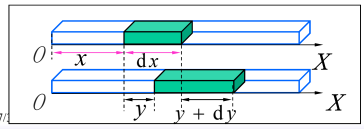
能量密度：单位体积介质中的波动能量

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

适用于各种弹性波

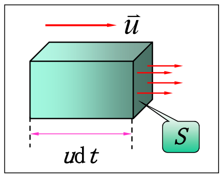


二 能流和能流密度

能流：单位时间内垂直通过某一面积的能量.

平均能流：

$$\overline{P} = \overline{w} u S$$



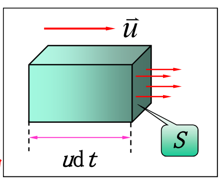
能流密度 (波的强度) I:

通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流.

$$\overline{P} = \overline{w} u S$$

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w} u$$

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 u$$



推广：任何形式的周期性波动其能量正比于振幅A^2和速度u

7. 5 惠更斯原理（Huygens principle）

前面讨论了波动的基本概念，现在讨论与波的传播特性有关的现象、原理和规律。

由于某些原因，波在传播中，其传播方向、频率和振幅都有可能改变。

惠更斯原理给出的方法（惠更斯作图法）是一种处理波传播方向的普遍方法。

一．惠更斯原理（1690）

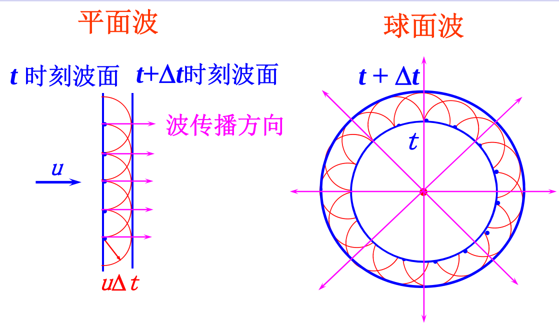
1. 原理的叙述

媒质中任意波面上的各点，都可看作是发射子波（次级波）的波源（点源），其后的任一时刻，这些子波面的包络面（包迹）就是波在该时刻的新的波面。

2. 原理的应用

已知 t 时刻的波面→ $t+\Delta t$ 时刻的波面，从而可进一步给出波的传播方向。

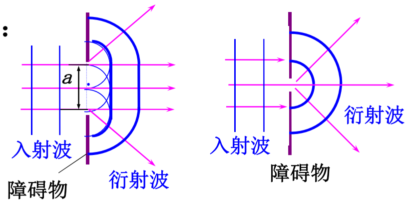
例如，均匀各向同性媒质内波的传播：



二．波的衍射（wave diffraction）

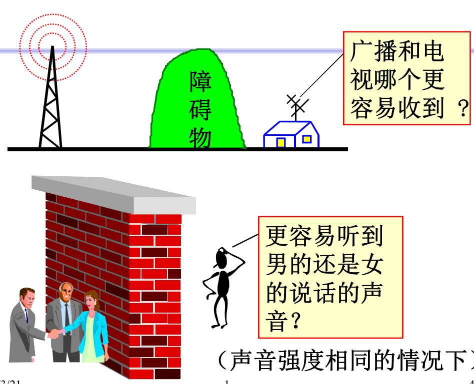
衍射：波传播过程中，当遇到障碍物时，能绕过障碍物边缘而偏离直线传播的现象。

例如：



相对于波长而言，障碍物的线度越大衍射现象越不明显，障碍物的线度越小衍射现象越明显。

水波通过窄缝时的衍射



（声音强度相同的情况下）