

# 概率论与数理统计

## 第十二章 随机过程及其统计描述

## 练习：

1、从某锌矿的东西两支矿脉中，各取容量为9和8的样本分析后，计算其样本含锌量的平均值与方差分别为：东支： $\bar{x} = 0.230, S_1^2 = 0.1337, n_1 = 9$ ；西支： $\bar{y} = 0.269, S_2^2 = 0.1736, n_2 = 8$ ；假定东西两支矿脉的含锌量都服从正态分布，对  $\alpha = 0.05$ ，问能否认为两支矿脉的含锌量相同？

解:设东支矿脉的含锌量为  $X$ ,  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

西支矿脉的含锌量为  $Y$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$  未知

(1) 首先需检验假设:  $H_{01} : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_{11} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

当  $H_{01}$  成立时, 检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

拒绝域为  $F \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

或  $F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

对  $n_1 = 9, s_1^2 = 0.1337, n_2 = 8, s_2^2 = 0.1736$ .

计算得  $F = \frac{0.1337}{0.1736} = 0.7702$

由  $F$  分布表查得

$$F_{0.025}(8,7) = 4.90, F_{0.975}(8,7) = \frac{1}{F_{0.025}(7,8)} = \frac{1}{4.53}$$

因为  $\frac{1}{4.53} < F < 4.90$  故接受假设  $H_{01}$ ,

即认为  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ .

(2) 检验假设  $H_{02} : \mu_1 = \mu_2, H_{12} : \mu_1 \neq \mu_2$

这属于  $t$  检验, 检验统计量为

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad S_W = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

检验的拒绝域为  $|t| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

计算得  $t = -0.2180$

查  $t$  分布表得  $t_{0.025}(15) = 2.1315$ ,

因  $|t| < 2.1315$ , 故接受假设  $H_0$ ,

即认为两支矿脉的含锌量相同。

# 第十二章 随机过程及其统计描述

- ◆ 随机过程的概念
- ◆ 随机过程的统计描述
- ◆ 泊松过程及维纳过程

# § 1 随机过程的概念

- ◆ 问题的提出
- ◆ 随机过程的概念
- ◆ 随机过程举例

# 一、问题的提出

## 热噪声电压

电子元件或器件由于内部微观粒子(如电子)的随机热骚动所引起的端电压称为热噪声电压.

热噪声电压在任一确定时刻 $t$ 的值是一随机变量, 记为 $V(t)$ .

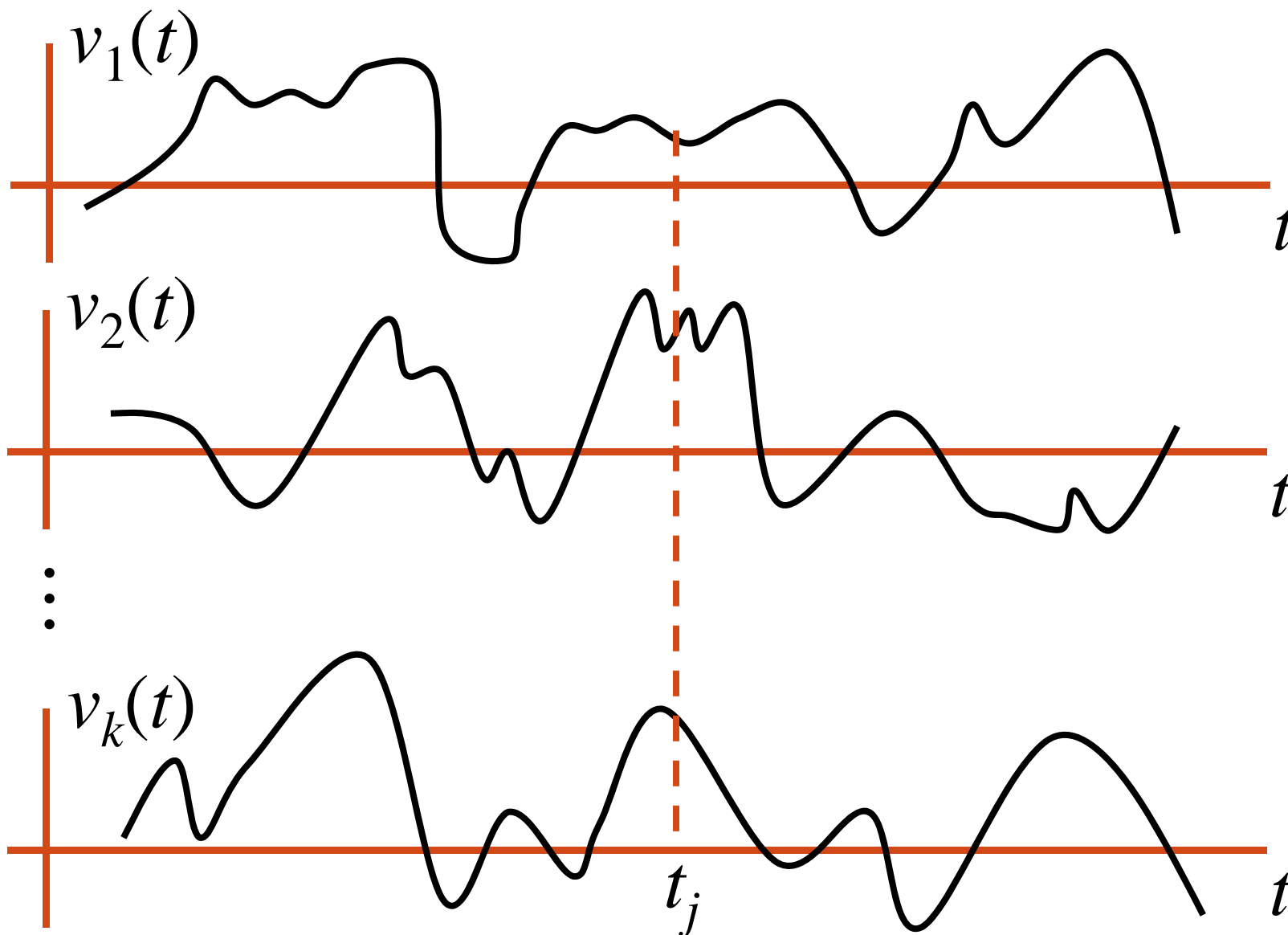
时间 $t : [0, +\infty)$ ,  $\{V(t), t \geq 0\}$ .

对某无线电接收设备的热噪声电压在相同条件下进行测量. 得到如下的电压——时间曲线.

如图12-1所示



## 多次试验得到多个电压函数



## 二、随机过程的概念

设  $T$  是一无限实数集 .

依赖于参数  $t \in T$  的一族 (无限多个) 随机变量称为随机过程 , 记为  $\{x(t), t \in T\}$ .

对每一个  $t \in T$ ,  $X(t)$  是一随机变量 .

$T$  叫做参数集 .

若把  $t$  看成时间,  $X(t)$  称为  $t$  时过程的状态 .

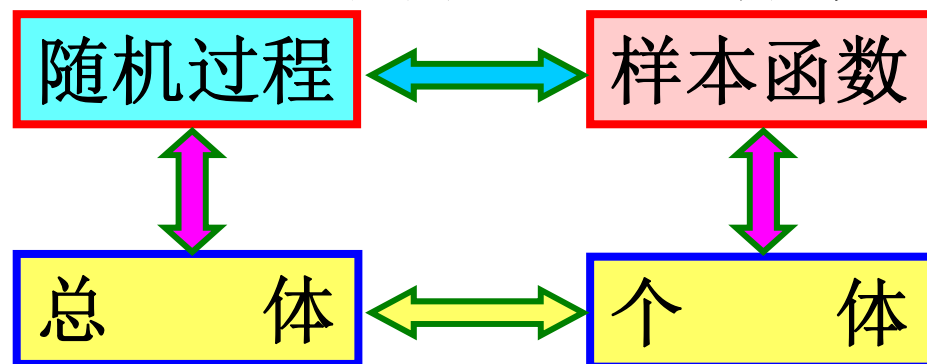
$X(t_1) = x$  (实数) 说成是  $t = t_1$  时过程处于状态  $x$  .

对于一切  $t \in T$ ,  $X(t)$  所有可能取的一切值的全体称为随机过程的状态空间.

对随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  进行一次试验 (即在  $T$  上进行一次全程观测), 其结果是  $t$  的函数, 记为  $x(t), t \in T$ ,

称它为随机过程的一个样本函数或样本曲线.

所有不同的试验结果构成一族样本函数.

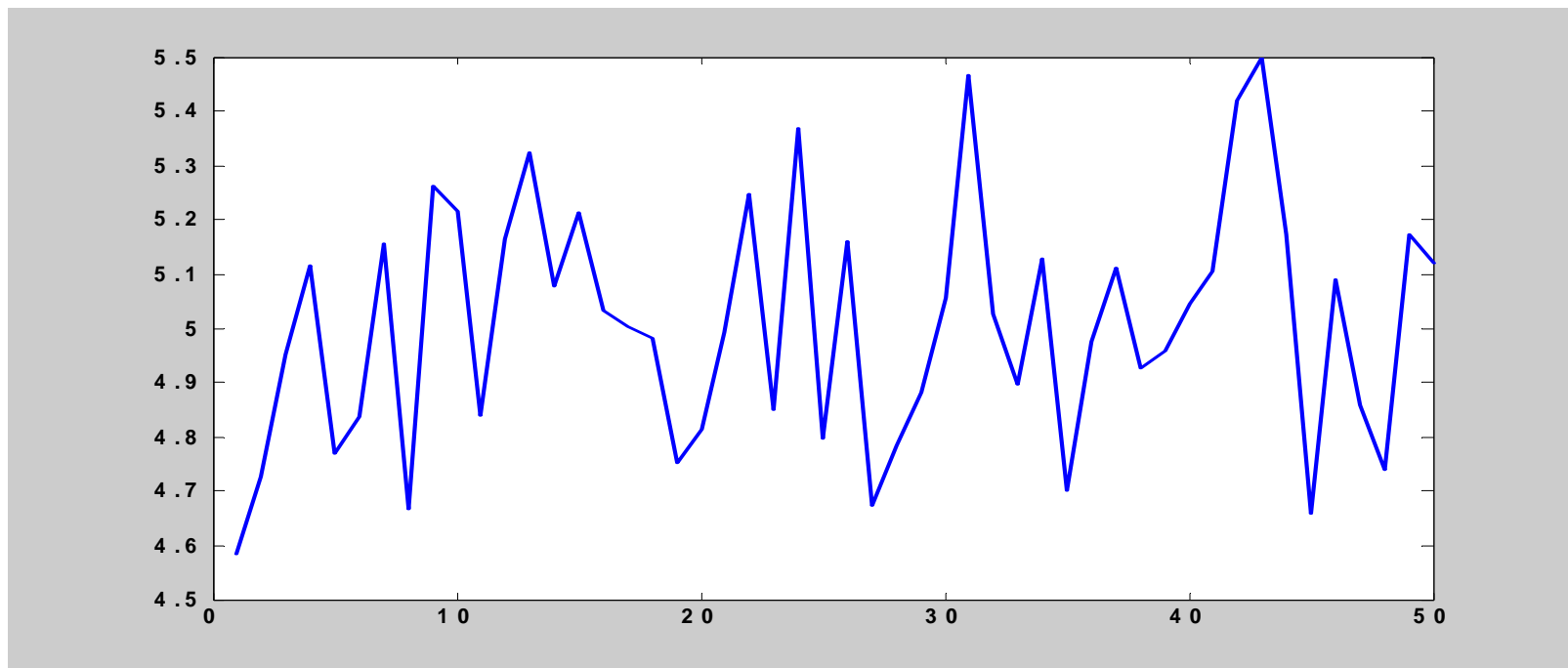


## 热噪声电压

电压的变化过程  $\{V(t), t \geq 0\}$  是一个随机过程.

状态空间:  $(-\infty, +\infty)$ .

一次测得的电压——时间函数是一个样本函数.



### 三、随机过程举例

例1 投掷一枚硬币的试验，样本空间  $S = \{H, T\}$ ，现借此定义

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{当出现 } H, \\ t, & \text{当出现 } T, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

其中  $P(H) = P(T) = 1/2$ .

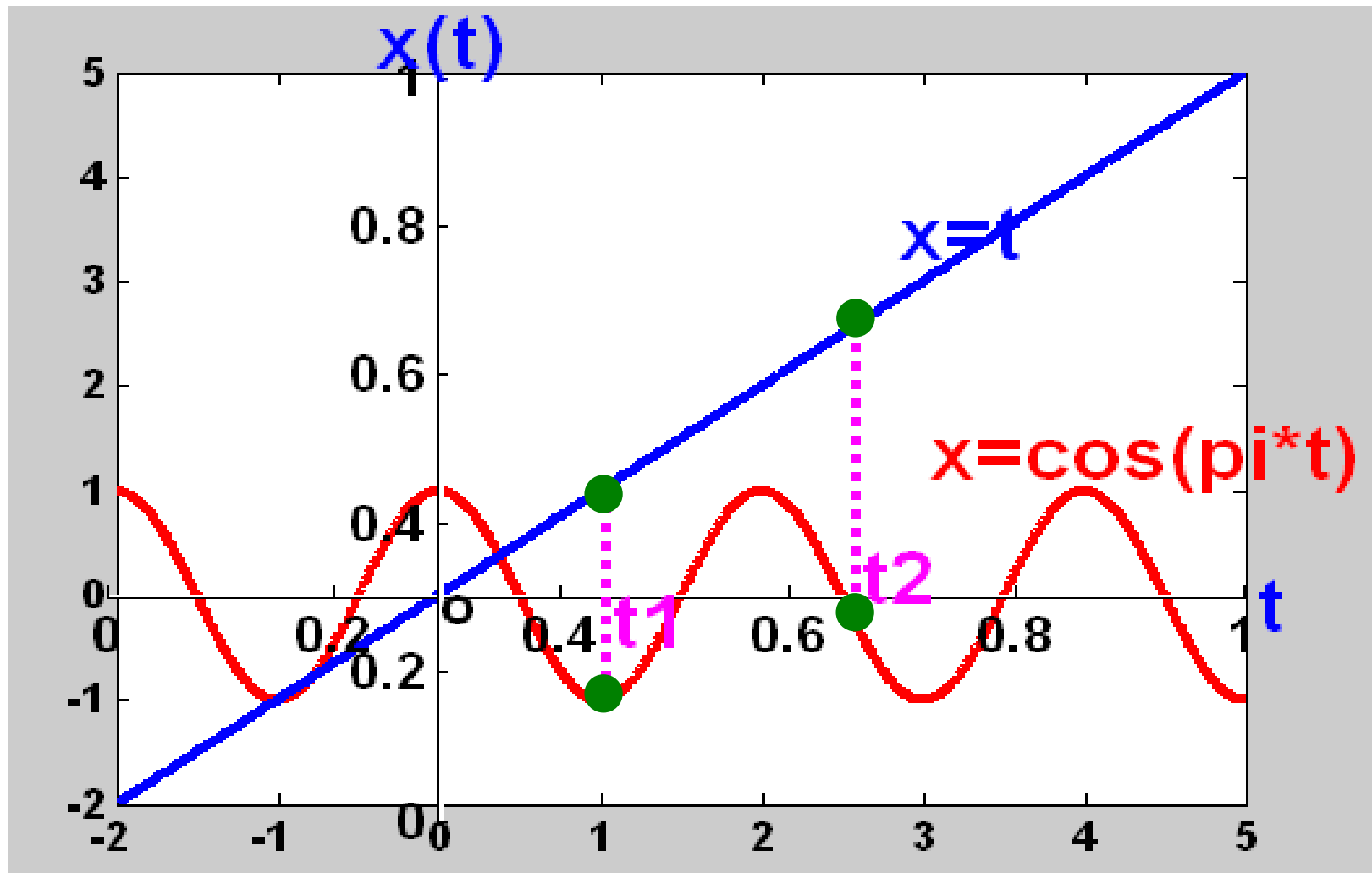
对任意固定的  $t$ ,  $X(t)$  是定义在  $S$  上的随机变量.

对不同的  $t$ ,  $X(t)$  是不同的随机变量.

$\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$  是一族随机变量, 是随机过程.

另一方面,作一次试验,若出现  $H$ , 样本函数  $x_1(t) = \cos \pi t$ ; 若出现  $T$ , 样本函数为  $x_2(t) = t$ , 所以该随机过程对应的一族 样本函数仅包含两个函数:  $\{\cos \pi t, t\}$ .

显然这个随机过程的状态空间为:  $(-\infty, +\infty)$



样本函数的集合： $\{\cos \pi t, t\}$       状态空间： $(-\infty, +\infty)$

例2 考虑 $X(t) = a \cos(\omega t + \Theta)$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ ,  
其中 $a$ 和 $\omega$ 是正常数,  $\Theta$ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布  
的随机变量.

对固定的时刻  $t = t_1$ ,

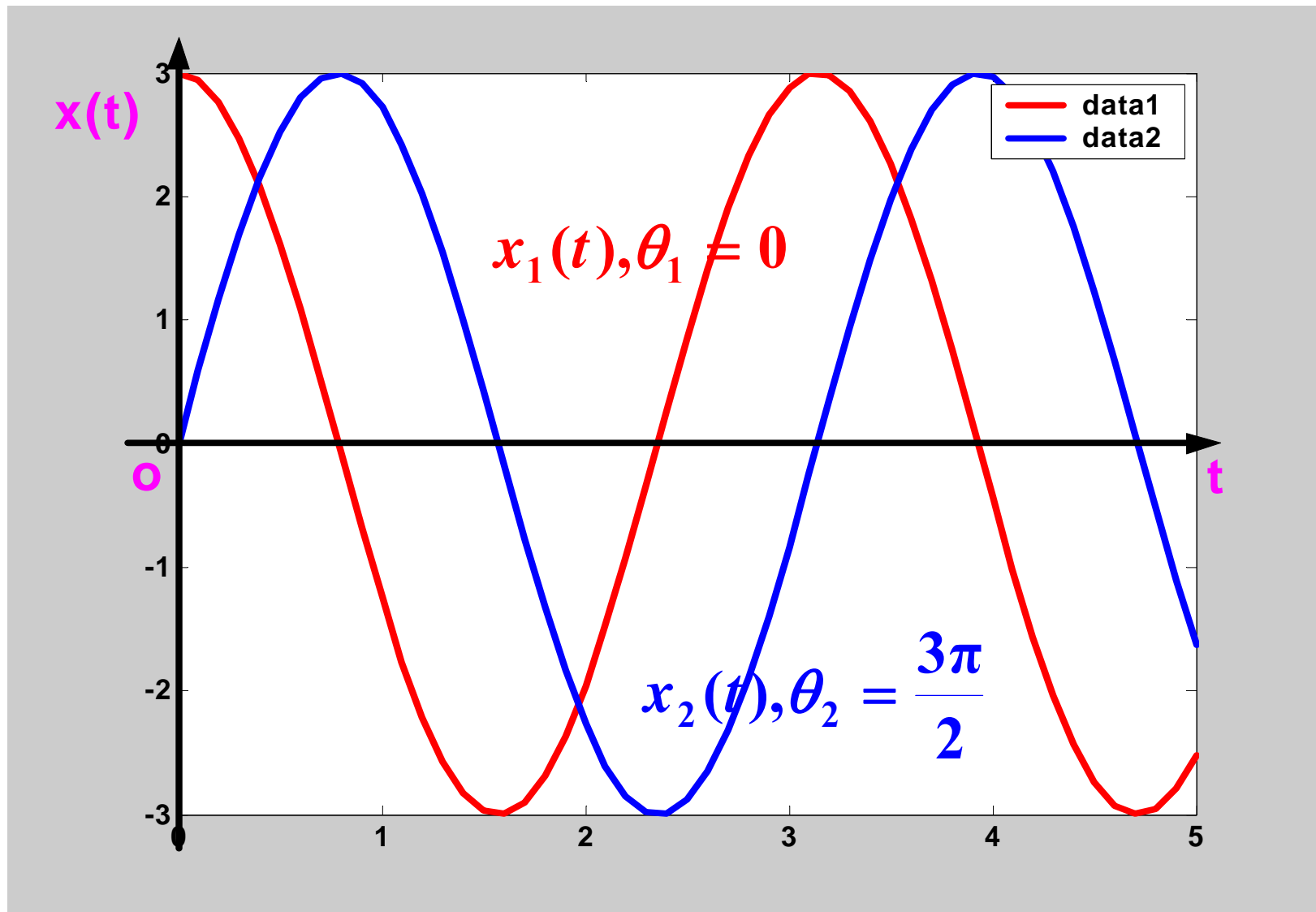
$X(t_1) = a \cos(\omega t_1 + \Theta)$  是一个随机变量.

$X(t) = a \cos(\omega t + \Theta)$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ , 是一个随机过程,  
叫做**随机相位正弦波**.

状态空间:  $[-a, a]$ .

样本函数:  $x_i(t) = a \cos(\omega t + \theta_i)$ ,  $\theta_i \in (0, 2\pi)$ .





例3 测量运动目标的距离时存在随机误差.  
若以  $\varepsilon(t)$  表示在时刻  $t$  的测量误差 ,  
则它是一个随机变量 .  
当目标随时间  $t$  按一定规律运动时 ,  
测量误差  $\varepsilon(t)$  也随时间  $t$  而变化 .  
换句话说 ,  $\varepsilon(t)$  是依赖于时间  $t$  的一族随机变量 .  
亦即  $\{\varepsilon(t), t \geq 0\}$  是一个随机过程 .  
且它们的状态空间是  $(-\infty, +\infty)$  .

例4 设某城市的120急救电话台迟早会接到用户的呼叫.

以 $X(t)$ 表示时间间隔  $(0, t]$ 内接收到的呼叫次数.

它是一个随机变量,

且对于不同的  $t \geq 0$ ,  $X(t)$ 是不同的随机变量.

即  $\{X(t), t \geq 0\}$  是一个随机过程.

状态空间是  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

例5 考虑抛掷一颗骰子的试验.

(1) 设 $X_n$ 是第 $n$ 次( $n \geq 1$ )抛掷的点数.

对于 $n = 1, 2, \dots$ 的不同值,  $X_n$ 是不同的随机变量,  
因而 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一个随机过程.

称为伯努利过程或伯努利随机序列.

(2) 设 $Y_n$ 是前 $n$ 次( $n \geq 1$ )抛掷中出现的最大点数.

$\{Y_n, n \geq 1\}$ 也是一个随机过程.

它们的状态空间都是  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

## 随机过程的分类

根据任一时刻的**状态**是连续型随机变量还是离散型随机变量：

**连续型随机过程**

热噪声电压、例2、例3

**离散型随机过程**

例1、例4、例5

根据**时间(参数)**是连续变量还是离散变量：

**连续参数随机过程**

**离散参数随机过程(随机序列)**

# 小结

## 1. 随机过程的概念

依赖于参数  $t \in T$  的一族 (无限多个) 随机变量称为随机过程, 记为  $\{x(t), t \in T\}$ .

## 2. 随机过程的实例及其分类

{ 连续型随机过程  
离散型随机过程

{ 连续参数随机过程  
离散参数随机过程 (随机序列)

# 作业：课后习题 1