概率论与数理统计

第二章　随机变量及其分布

§1　随机变量

- 随机变量的引入
- 随机变量的概念

一、随机变量的引入

1. 为什么引入随机变量?

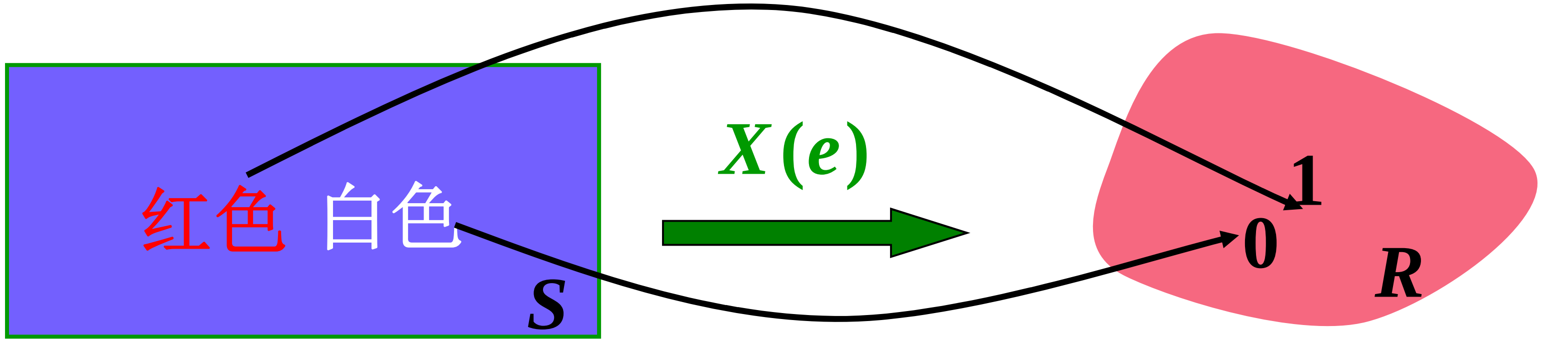
概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，为了更方便有力的研究随机现象，就要用数学分析的方法来研究，就需将任意的随机事件数量化. 当把一些非数量表示的随机事件用数字来表示时，就建立起了随机变量的概念.

2. 随机变量的引入

例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球，观察摸出球的颜色.

$S=\{\underbrace{\text{红色、白色}}_{\text{非数量}}\}\xrightarrow{?}$ 将S数量化

可采用下列方法

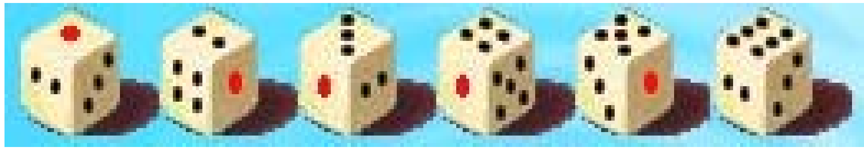


即有 X (红色)=1， X (白色)=0.

$$X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色},\\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$

这样便将非数量的 S={红色，白色} 数量化了.

例2 抛掷骰子，观察出现的点数.



$S=\{1，2，3，4，5，6\}$

样本点本身就是数量

$X(e)=e$ 恒等变换

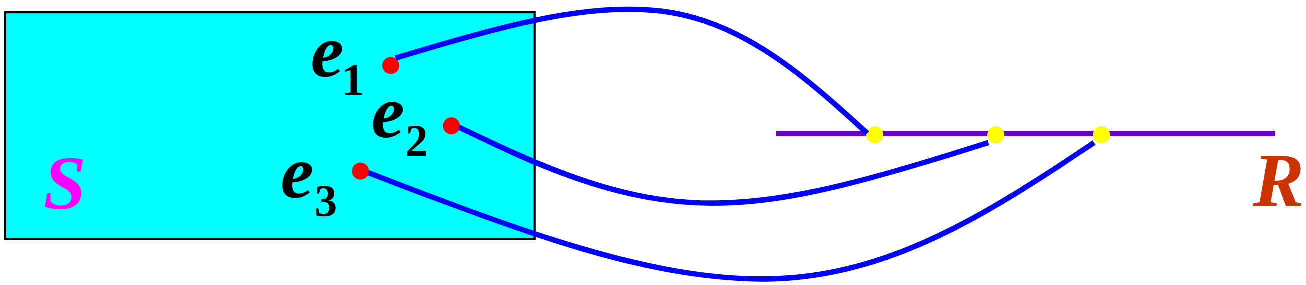
$X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3, X(4)=4, X(5)=5,$

$X(6)=6$, 且有 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{6}, \quad (i=1,2,3,4,5,6).$

二、随机变量的概念

定义　设随机试验的样本空间 $S=\{e\}$．$X=X(e)$是定义在样本空间 S上的单值实值函数．称 $X=X(e)$为随机变量．

下图画出了样本点 e与实数$X=X(e)$对应的示意图.



说明

(1)随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数, 但它与普通的函数有着本质的差别, 普通函数是定义在实数轴上的，而随机变量是定义在样本空间上的(样本空间的元素不一定是实数).

(2)随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值, 由于试验的各个结果的出现具有一定的概率, 因此

随机变量的取值也有一定的概率规律.

(3)随机变量与随机事件的关系

随机事件包容在随机变量这个范围更广的概念之内.或者说:随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则是从动态的观点来研究随机现象.

例3　掷一个硬币, 观察出现的面 , 共有两个

结果:　$e_1 = $(反面朝上),

$e_2 = $(正面朝上),

若用 X 表示掷一个硬币出现正面的次数, 则有

$e_1 = $(反面朝上)	$\xrightarrow{X(e)}$	0 $\rightarrow X(e_1) = 0$
$e_2 = $(正面朝上)		1 $\rightarrow X(e_2) = 1$

即 $X(e)$ 是一个随机变量.

例4 在一只袋中装有编号分别为1,2,3的3只球，在袋中任取一只球，放回，再任取一只球，记录它们的号码，试验的样本空间为

$$S = \{e\} = \{(i, j) \mid i, j = 1,2,3\}$$

i, j分别为第1,第2次取到的球的号码．

以X记两球号码之和，对于试验的每一个结果

$$e = (i, j) \in S ,$$

X都有一个指定值 $i + j$与之对应．X是定义在样本空间S上的单值实值函数．其定义域是样本空间 S．值域是实数集合$\{2,3,4,5,6\}$.

X可写成 $X = X(e) = X((i, j)) = i + j$， i， $j = 1, 2, 3$．

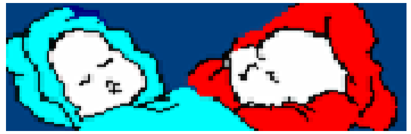
例5 将一枚硬币抛掷三次, 观察出现正面和反面的情况, 样本空间是

$$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

以X记三次投掷得到正面 H的总数， 那么, 对于样本空间$S=\{e\}$中的每一个样本点 e， X都有一个数与之对应. X是定义在样本空间 S上的一个实值单值函数.它的定义域是样本空间S，值域是实数集合$\{0,1,2,3\}$.使用函数记号可将 X写成

$$X = X(e) = \begin{cases} 3, & e = HHH, \\ 2, & e = HHT, HTH, THH, \\ 1, & e = HTT, THT, TTH, \\ 0, & e = TTT. \end{cases}$$

例6　在有两个孩子的家庭中,考虑其性别，共有 4 个样本点:



$e_1=($男,男$)$，$e_2=($男,女$)$，$e_3=($女,男$)$，$e_4=($女,女$)$.

若用 X 表示该家女孩子的个数时，则有

$X(e_1)=0$，$X(e_2)=1$，$X(e_3)=1$，$X(e_4)=2$，

可得随机变量 $X(e)$,

$$X(e)=\begin{cases}0, & e=e_1, \\ 1, & e=e_2, e=e_3, \\ 2, & e=e_4.\end{cases}$$

例7 设盒中有5个球 (2白3黑), 从中任抽3个,则

$$X(e) = \text{抽得的白球数},$$

是一个随机变量. 且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

$$0, \quad 1, \quad 2.$$

例8 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次, 则

$$X(e) = \text{射中目标的次数},$$

是一个随机变量. 且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \cdots, \quad 30.$$

例9 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8，现该射手不断向目标射击，直到击中目标为止，则

$$X(e)=\text{所需射击次数},$$

是一个随机变量.

且$X(e)$的所有可能取值为:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots\quad .$$

例10 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，如果某人到达该车站的时刻是随机的, 则

$$X(e) = \text{此人的等车时间},$$

是一个随机变量.

且$X(e)$的所有可能取值为:$[0,5]$.

3.随机变量的分类

随机变量

离散型　　非离散型

连续型　　其它

(1)离散型 随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个, 叫做离散型随机变量.

实例1 观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是： **1, 2, 3, 4, 5, 6.**

实例2 若随机变量 X 记为 "连续射击, 直至命中时的射击次数", 则 X 的可能值是:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots.$$

实例3 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次,则随机变量 X 记为 "击中目标的次数", 则 X 的所有可能取值为:

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots,\quad 30.$$

(2)连续型　随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例1　随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

实例2　随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测量误差”.

则 X 的取值范围为 (a, b) .

小结

1. 概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，因此为了方便有力的研究随机现象， 就需将随机事件数量化，把一些非数量表示的随机事件用数字表示时， 就建立起了随机变量的概念． 因此随机变量是定义在样本空间上的一种特殊的函数.

与普通的函数不同，随机变量的取值具有一定的概率规律.

2. 随机变量的分类**:** 离散型、非离散续型**.**