# 练习

(第三章)

7. 已知向量组A:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$与向量组B:
$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_l\}$ 有相同的秩

证明：向量组A与向量组B等价.

8. 设有向量组A:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 及向量组B:

$$\{\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\cdots,$$

$$\beta_s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}\}\quad(s>1)$$

证明：向量组A与B有相同的秩.

9. 设向量组 $A:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$; $B:\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$;
$C:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$的秩分别为$r_1$, $r_2$, $r_3$.

证明：

$$\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$$

10. **有三个向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，且$\alpha_3$不能被$\alpha_1, \alpha_2$线性表示，证明$\alpha_1, \alpha_2$ 线性相关.**

# 答 案

7. 已知向量组A:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 与向量组B:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_l\}$ 有相同的秩

证明：向量组A与向量组B等价.

证明：分析，A是B的部分组，所以A可由B线性表示，

需证明B可以由A线性表示即可.

设$R$(A)=$R$(B)=$r$，向量组A和B的极大无关组有$r$个向量，

不妨设A的极大无关组为 $\mathrm{A1}:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$,

由于向量组A1也是B的线性无关部分组，

且$R$(B)=$r$，所以它也是B的一个极大无关组.

所以B可以由向量组A1线性表示.

因此B可以由A线性表示.

所以，向量组A与向量组B等价.

8. 设有向量组A: $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$

$$\{\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\cdots,$$
$$\beta_s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}\}\ (s>1)$$

证明：向量组A与B有相同的秩.

证明：构造矩阵 $D_1=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s\right)\xrightarrow[c_1+c_i\,(i=2,3,\cdots,s)]{}$

$$\left((s-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\right),\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

$$\xrightarrow[\substack{c_1/(s-1)\\ c_i-c_1(i=2,\cdots s)}]{}\left((\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s),-\alpha_2,\cdots,-\alpha_s\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{c_1+c_i(i=2,\cdots s)\\ (-1)\times c_i(i=2,\cdots s)}]{}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)=\mathrm{D}_2$$

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，所以$R(D_1)=R(D_2)$

**故向量组A与B有相同的秩.**

另证：显然 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示.

又 $\sum_{i=1}^{s}\beta_i=(s-1)\sum_{i=1}^{s}\alpha_i$

故 $\alpha_i=\frac{1}{s-1}\sum_{i=1}^{s}\beta_i-\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性表示.

从而这两个向量组等价。再证明等价的向量组有相同的秩即可。

9. 设向量组 $A:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$; $B:\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$;
$C:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 的秩分别为$r_1, r_2, r_3.$

证明： $\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$

**证明：设向量组A，B，C的极大无关组依次为向量组 A1, B1,C1， 则它们依次含有$r_1, r_2, r_3$个向量.**

**由于向量组A1中向量也是C中向量，且线性无关向量组A1可由向量组C的极大无关组C1线性表出，**

因此$r_1\le r_3$，同理$r_2\le r_3$.

**C1中向量若是A中向量，则可由A1线性表出，否则是B中向量，则可由B1线性表出，且线性无关向量组C1可由向量组{A1,B1} 线性表出，**因此$r_3\le r_1+r_2$

$\therefore \max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$

# 总结关于矩阵秩的几个结论

（1） $R(A) \le R(A,b)$，　$R(A) \le R\begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix}$

（2） $R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \le R(A) + R(B)$

根据上面例题可得

$$R(A,B) \le R(A) + R(B)$$

特别的 $R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = R(A) + R(B)$

原因：设A的列向量某极大无关组为$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{rA}$

设B的列向量某极大无关组为$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{rB}$

则 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{r_A} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{r_B} \end{pmatrix}$

线性无关，且 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 中每个列向量都可被它们线性表出.

(3) $R(A+B)\le R(A)+R(B)$

仿照上面例题可证

另外证法：设$A, B$为$m\times n$矩阵则

$$A+B=(A,B)\begin{pmatrix}E_n\\E_n\end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A+B)\le R(A,B)\le R(A)+R(B)$$

(4) 设矩阵$A_{m\times n}$与$B_{n\times p}$满足$AB=O$,证明$R(A)+R(B)\le n$.

【课本习题26，课上已证】

10. 有三个向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，且$\alpha_3$不能被$\alpha_1, \alpha_2$线性表示，证明$\alpha_1, \alpha_2$ 线性相关.

证明：由向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关知，存在非全零的数$k_1, k_2, k_3$使得下式成立

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \qquad (1)$$

若$k_3 \neq 0$, 则(1)化为 $\alpha_3 = -\frac{k_1}{k_3}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_3}\alpha_2$

这与$\alpha_3$不能被$\alpha_1, \alpha_2$线性表示矛盾.

因此(1)式中必有$k_3=0$, 此时(1)化为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

且其中$k_1, k_2$非全零.

因此有：$\alpha_1, \alpha_2$ 线性相关. 另外可以用反证法.

- 证明：反正法

  **假设$\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关，由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，可得$\alpha_3$可被$\alpha_1, \alpha_2$线性表示，这与$\alpha_3$不能被$\alpha_1, \alpha_2$线性表示矛盾，故假设错误，即$\alpha_1, \alpha_2$ 线性相关。**