概率论与数理统计

第八章　假设检验

§3 正态总体方差的假设检验

- 单个总体的情况
- 两个总体的情况

一、单个总体的情况

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2), \mu,\sigma^2,$ 均未知，

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 X 的样本，要求检验假设（显著性水平为 α）：

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2.$$

σ_0^2 为已知常数。

由于 s^2 是 σ^2 的无偏估计，当 H_0 为真时，比值 $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ 一般来说**应在1附近摆动**，而不应过分大于1或过分小于1。由于当 H_0 为真时，$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$.

我们取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 作为检验统计量，如上所说知道上述检验问题的拒绝域具有以下的形式：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \text{ 或 } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$$

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le k_1 \text{ 或 } \chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge k_2$$

此处的 k_1,k_2 值由下式确定：

$$\boldsymbol{P\{\text{当}H_0\text{为真拒绝}H_0\}}$$

$$=\ P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le k_1)\cup(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\}=\alpha$$

为计算方便起见，习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le k_1)\}=\frac{\alpha}{2},\qquad P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\}=\frac{\alpha}{2}\qquad \text{（3.1）}$$

故得 $k_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),k_2=\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

于是得拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

上述检验法为χ^2检验法。关于方差σ^2的单边检验法得拒绝域在下表中给出。

关于 σ^2 的检验　χ^2检验法

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ (μ未知)	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

例1 某厂生产的某种型号的电池，其寿命（以小时计）长期以来服从方差$\sigma^2=5000$的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变，现随机取**26**只电池，测出其寿命的样本方差$s^2=9200$.问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化（取$\alpha=0.02$）？

解：　按题意要求在水平$\alpha = 0.02$下检验假设

$$H_0:\sigma^2 = 5000, H_1:\sigma^2 \neq 5000.$$

现在$n = 26$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.314$,

$\chi^2_{1-\alpha/2}(25) = \chi^2_{0.99}(25) = 11.524$, $\sigma_0^2 = 5000$.

拒绝域为：$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le 11.524$ 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge 44.314$

由观察值$s^2 = 9200$ 得 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 46 > 44.314$ 所以拒绝 H_0，认为这批电池寿命波动性较以往的有显著的变化。

例2　某厂生产的铜丝的折断力指标服从正态分布, 现随机抽取9根, 检查其折断力, 测得数据如下(单位:牛顿): 289, 268, 285, 284, 286, 285, 286, 298, 292. 问是否可相信该厂生产的铜丝的折断力的方差为20?　　$(\alpha = 0.05)$

解　按题意要检验 $H_0 : \sigma^2 = 20,\ H_1 : \sigma^2 \neq 20,$

$n = 9,\quad \bar{x} = 287.89,\quad s^2 = 20.36,$

查表得 $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18,\quad \chi^2_{0.025}(8) = 17.5,$

于是 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{8 \times 20.36}{20} = 8.14,\ 2.18 < 8.14 < 17.5,$

故接受 H_0,认为该厂生产铜丝的折断力的方差为20.

例3　某自动车床生产的产品尺寸服从正态分布，按规定产品尺寸的方差σ^2不得超过0.1，为检验该自动车床的工作精度，随机的取25件产品，测得样本方差 $s^2=0.1975, \bar{x}=3.86$. 问该车床生产的产品是否达到所要求的精度？ $(\alpha=0.05)$

解　要检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.1,\quad H_1:\sigma^2>0.1,$

$$n=25,\quad \chi^2_{0.05}(24)=36.415,$$

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\dfrac{24\times 0.1975}{0.1}=47.4>36.415,$

所以拒绝 H_0,

认为该车床生产的产品没有达到所要求的精度.

二、两个总体的情况

设 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}$ 来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，

$y_1, y_2, \cdots, y_{n_2}$ 是来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且两样本独立。其样本方差分别为 s_1^2, s_2^2 。且设 μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 均为未知，现在需要检验假设（显著性水平为 α）：

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

当 H_0 为真时， $E(S_1^2) = \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 = E(S_2^2)$,

当H_1为真时，$E(S_1^2)=\sigma_1^2>\sigma_2^2=E(S_2^2)$,

当H_1为真时，观察值$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$有偏大的趋势，

故拒绝域的形式为$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\geq k$, 常数$k$的值由下式确定：

$$P\{H_0\text{为真,拒绝}H_0\}=P_{\sigma_1^2\leq\sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq k\right\}$$

$$\leq P_{\sigma_1^2\leq\sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\geq k\right\}, \ (\text{因为}\sigma_1^2/\sigma_2^2\leq 1)$$

要使 $P\{H_0\text{为真,拒绝}H_0\}\leq\alpha$,只需令

$$P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \ge k\right\} = \alpha.$$

由第六章§3定理四知

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$$

$$k = F_\alpha(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$$

即得检验问题的拒绝域为 $\boxed{F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \ge F_\alpha(n_1 - 1,\ n_2 - 1).}$

上述检验法称为**F 检验法**。关于 σ_1^2, σ_2^2 的另外两个

检验问题的拒绝域在下表中给出。

关于方差比σ_1^2/σ_2^2的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ μ_1,μ_2 均未知	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

例4　　研究机器A和机器B生产的钢管的内径，随机抽取机器 A 生产的管子18 只，测得样本方差 $s_1^2 = 0.34(mm^2)$；抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差 $s_2^2 = 0.29(mm^2)$。设两样本相互独立，且设由机器A,机器B生产的管子的内径分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$，这里 $\mu_i, \sigma_i^2 (i = 1, 2)$ 均未知。作假设检验:(取 $\alpha = 0.1$)

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

解：　此处

$$n_1 = 18, n_2 = 13, F_\alpha(18-1, 13-1) = F_{0.1}(17, 12) = 1.96$$

由（**3.4**）式拒绝域为

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq 1.96.$$

现在 $s_1^2 = 0.34, s_2^2 = 0.29, s_1^2 / s_2^2 = 1.17 < 1.96$

故接受 H_0.

两总体方差相等也称两总体具有方差齐性.

例5　两台车床加工同一零件, 分别取6件和9件测量直径, 得: $s_x^2 = 0.345$, $s_y^2 = 0.357$. 假定零件直径服从正态分布, 能否据此断定 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.$(\alpha = 0.05)$

解　本题为方差齐性检验:

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2, \quad H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$$

$$F_{0.025}(5,\ 8) = 4.82, \quad F_{0.975}(5,\ 8) = 0.148,$$

取统计量 $F = \dfrac{s_x^2}{s_y^2} = \dfrac{0.345}{0.357} = 0.9664,$

$0.148 < F < 4.82$, 故接受 H_0, 认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

例6　分别用两个不同的计算机系统检索10个资料，测得平均检索时间及方差(单位:秒)如下:

$$\bar{x}=3.097,\ \ \bar{y}=2.179,\ \ s_x^2=2.67,\ \ s_y^2=1.21,$$

假定检索时间服从正态分布，问这两系统检索资料有无明显差别? $(\alpha=0.05)$

解 根据题中条件，首先应检验方差的齐性.

假设 $H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2,\quad H_1:\sigma_x^2\neq\sigma_y^2.$

$$F_{0.025}(9,\ 9)=4.03,\quad F_{0.975}(9,\ 9)=0.248,$$

取统计量 $F=\dfrac{s_x^2}{s_y^2}=\dfrac{2.67}{1.21}=2.21,$

$$0.248 < F = 2.21 < 4.03,$$

故接受 H_0，认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

再验证 $\mu_x = \mu_y$,

假设 $H_0: \mu_x = \mu_y$, $\quad H_1: \mu_x \neq \mu_y$.

取统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$,

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$.

当H_0为真时，$t \sim t(n_1+n_2-2)$.

$n_1=10,\quad n_2=10,\quad t_{0.025}(18)=2.101,\ -t_{0.025}(18)=-2.101$

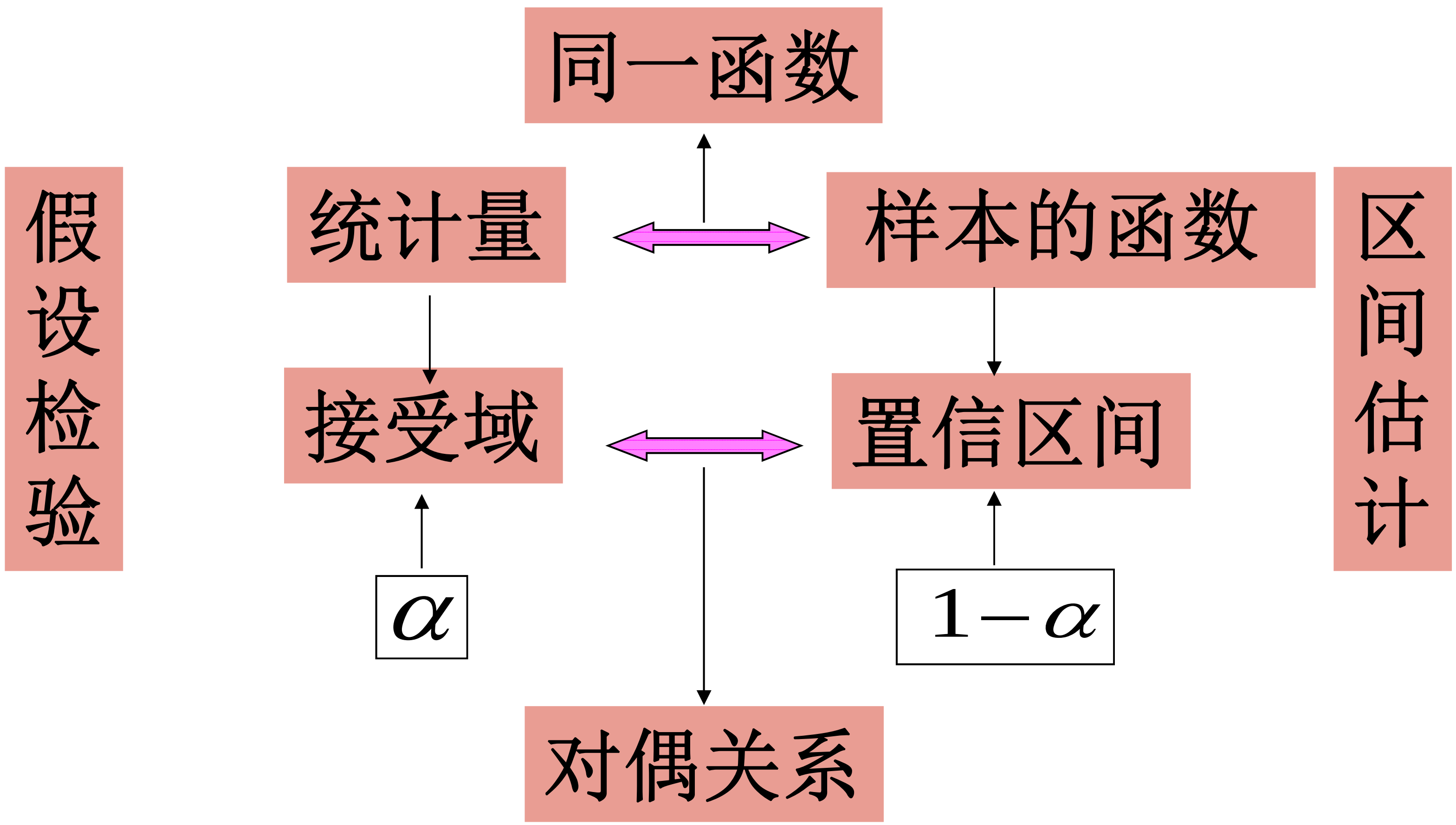
因为$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{3.097-2.179}{\sqrt{\dfrac{10(2.67+1.21)}{18}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{10}}}$

$=1.397$

$2.101<1.397<2.101$, 故接受H_0,

认为两系统检索资料时间无明显差别.

§4 置信区间与假设检验之间的关系



假设检验与置信区间对照

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	接受域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ （σ^2 已知)	$\left\lvert\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert\le z_{\frac{\alpha}{2}}$
待估参数		样本的函数及其分布	置信区间
μ		$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ （σ^2 已知)	$(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ （σ^2未知）	$\left\|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right\|\leq t_{\frac{\alpha}{2}}$

待估参数	样本的函数及其分布	置信区间
μ	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ （σ^2未知）	$(\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}})$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ (μ未知)	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\leq\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$

待估参数	样本的函数及其分布	置信区间
σ^2	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ (μ未知)	$\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

§5 样本容量的选取

当样本容量 n 固定时，我们不能同时控制犯两类错误的概率，但可以适当选取 n 的值，使犯取伪错误的概率 β 控制在预先给定的限度内.

例1 某厂生产小型马达,说明书上写着:在正常负载下平均消耗电流不超过0.8 安培.

随机测试16台马达，平均消耗电流为0.92安培，标准差为0.32安培.

设马达所消耗的电流 服从正态分布,取显著性水平为$\alpha = 0.05$, 问根据此样本, 能否否定厂方的断言?

解 根据题意待检假设可设为

$H_0: \mu \le 0.8$; $H_1: \mu > 0.8$

σ 未知, 选检验统计量: $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{16}} \sim t(15)$

拒绝域为 $t = \dfrac{\bar{x} - 0.8}{s/\sqrt{n}} > 1.753 = t_{0.05}(15)$

将 $\bar{x}=0.92, s=0.32,$ 代入得

$t=1.5<1.735,$ 落在拒绝域 外

故接受原假设 H_0 , 即不能否定厂方断言.

解二 $H_0: \mu \geq 0.8$; $H_1: \mu < 0.8$

选用统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{16}} \sim t(15)$

拒绝域 $t=\dfrac{\bar{x}-0.8}{s/\sqrt{n}}<-1.753=-t_{0.05}(15)$

现 $t=1.5>-1.735,$ 落在拒绝域 外

故接受原假设, 即否定厂方断言.

由例1可见: 对问题的提法不同(把哪个假设作为原假设),统计检验的结果也会不同.

上述两种解法的立场不同，因此得到不同的结论.

第一种假设是不轻易否定厂方的结论；

第二种假设是不轻易相信厂方的结论.

为何用假设检验处理同一问题会得到截然相反的结果?

这里固然有把哪个假设作为原假设从而引起检验结果不同这一原因；除此外还有一个根本的原因，即样本容量不够大.

若样本容量足够大，则不论把哪个假设作为原假设所得检验结果基本上应该是一样的．否则假设检验便无意义了！

由于假设检验是控制犯第一类错误的概率, 使得拒绝原假设 H_0 的决策变得比较慎重, 也就是 H_0 得到特别的保护. 因而，通常把有把握的，经验的结论作为原假设，或者尽量使后果严重的错误成为第一类错误.

小结

在这一节中我们学习了正态总体方差的检验法，有以下两种：单个正态总体方差的检验、两个正态总体方差的检验、置信区间与假设检验之间的关系以及样本容量的选取.

作业：课后习题 **12、16、17、22**

课堂练习：

1、某台机器加工某种零件，规定零件长度为100cm，标准差不超过2cm，每天定时检查机器运行情况，某日抽取10个零件，测得平均长度 $\overline{X}=101$cm，样本标准差 $S=2$ cm，设加工的零件长度服从正态分布，问该日机器工作是否正常（$\alpha=0.05$）？

附表：

$$\begin{cases} t_{0.025}(8)=2.306,\ t_{0.025}(9)=2.262 \quad \chi_{0.025}{}^{2}(8)=17.535,\ \chi_{0.025}{}^{2}(9)=19.023 \\ t_{0.05}(8)=1.8595,\ t_{0.05}(9)=1.8331 \quad \chi_{0.05}{}^{2}(8)=15.507,\ \chi_{0.05}{}^{2}(9)=16.919 \end{cases}$$

解 已知 $\overline{X}=101, n=10, S=2, \alpha=0.05$

（1）、由题意需检验 $H_0:\mu=100, H_1:\mu\neq 100$

拒绝域 $|t|=\dfrac{|\overline{X}-100|}{S/\sqrt{n}}\geq t_{\alpha/2}(9)$ $\quad t_{\alpha/2}(9)=2.2622$

$$|t|=\frac{|\overline{X}-100|}{S/\sqrt{n}}=1.5811<2.2622$$

接受H_0，即认为$\mu=100$

(2)、由题意需检验 $H_0:\sigma^2 \le 4, H_1:\sigma^2 > 4$

统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域 $(\chi^2_\alpha(n-1), \infty)$

$$\chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0.05}(9) = 16.919,$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = 9 < 16.919$$

接受H_0，即认为$\sigma^2 \le 4$.

由1、2的证明可知，机器正常工作.