概率论与数理统计

第三章　多维随机变量及其分布

§3 条件分布

- 离散型随机变量的条件分布
- 连续型随机变量的条件分布
- 两个常用的分布

一、离散型随机变量的条件分布

问题 考虑一大群人，从其中随机挑选一个人，分别用 X 和 Y 记此人的体重和身高，则 X 和 Y 都是随机变量，他们都有自己的分布.

现在如果限制 Y 取值从1.5米到1.6米，在这个限制下求 X 的分布.

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=P_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=y_j\}=P_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots.$$

设$p_{\bullet j}>0$, 现在考虑在事件 $\{Y=y_j\}$已发生的条件下事件$\{X=x_i\}$发生的概率 $P\{X=x_i \mid Y=y_j\}$

由条件概率公式，可得

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}$$

$$= \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

条件概率具有分布律的性质:

1° $P\{X = x_i \mid Y = y_j\} \geq 0;$

2° $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{1}{p_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

$$= \frac{p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}} = 1.$$

定义 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j, 若 $P\{Y=y_j\}>0$, 则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, i=1,2,\cdots,$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同样, 对于固定的 i, 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, j=1,2,\cdots,$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

例1 在一汽车工厂中，一辆汽车有两道工序是由机器人完成的．其一是紧固3只螺栓，其二是焊接2处焊点．以X表示螺栓紧固得不良的 数目，以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目．据积累的资料知(X,Y)具有分布律：

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1) 求在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律;

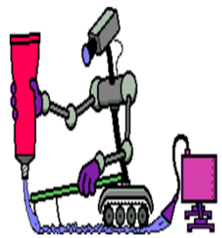
(2) 求在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律.

解　边缘分布已经求出列在上表中.

在$X=1$的条件下, Y的条件分布律为

$$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045},$$

$$P\{Y=1|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045},$$



$$P\{Y=2|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045},$$

或写成

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k\|X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

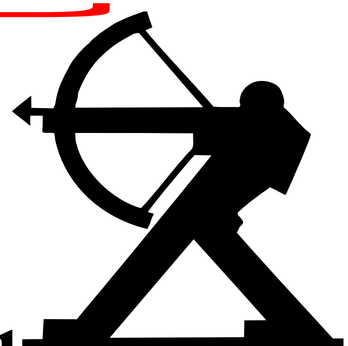
同样可得在 $Y=0$ 的条件下 X 的条件分布律为

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k\|Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

例2 一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$,射击直至击中目标两次为止. 设以X表示首次击中目标所进行的射击次数, 以Y表示总共进行的射击次数, 试求X和Y的联合分布律及条件分 布律.

解　　由题意知 X 取 m 且 Y 取 n时, 有

$$P\{X=m,Y=n\}=p\cdot p\cdot\underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)}_{(n-2)\text{个}}$$



即得 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2q^{n-2},$$

其中$q=1-p, n=2,3,\cdots;\quad m=1,2,\cdots,n-1.$

现在求条件分布律.

$$P\{X=m \mid Y=n\}, \quad P\{Y=n \mid X=m\},$$

由于 $P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X=m, Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 q^{n-2}$

$$=p^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-2}=\frac{p^2 q^{m-1}}{1-q}=p q^{m-1},$$

$$m=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1} P\{X=m, Y=n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1} p^2 q^{n-2}=(n-1) p^2 q^{n-2}, \quad n=2,3,\cdots.$$

所以当 $n=2,3,\cdots$ 时,

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\cdots,n-1.$$

当 $m=1,2,\cdots,n-1$ 时,

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{p\ q^{m-1}}=pq^{n-m-1},\qquad n=m+1,m+2,\cdots.$$

二、连续型随机变量的条件分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，由于对任意x, y，$P\{X=x\}=0$, $P\{Y=y\}=0$，所以不能直接用条件概率公式得到条件分布，下面我们直接给出条件概率密度的定义.

定义　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$,(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$.若对于固定的 y, $f_Y(y)>0$,则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度, 记为 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x$ 为在 $Y=y$ 的条

件下X的条件分布函数，记为$P\{X \le x \mid Y = y\}$或

$F_{X|Y}(x|y)$，即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x \mid Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x.$$

类似地，可以定义 $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 和

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}y.$$

请同学们思考

为什么不能用条件概率的定义来直接定义条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)$?

答 条件分布是指在一个随机变量取某个确定值的条件下, 另一个随机变量的分布, 即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\}.$$

由于$P\{Y = y\}$可能为零(连续型时一定为零). 故直接用条件概率来定义时, 会出现分母为零.

因为, 在条件分布中, 作为条件的随机变量的取值是确定的数.

我们来解释一下定义的含义：

以 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为例

$$P\{X\le x|Y=y\}=\lim_{\varepsilon\to 0+}P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$$

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x, y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{y}^{y+\varepsilon}f(x,y)dy\right)dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(y)dy}=\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(x,y+\theta_1\varepsilon)dx}{\varepsilon\cdot f_Y(y+\theta_2\varepsilon)}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(x,y+\theta_1\varepsilon)dx}{f_Y(y+\theta_2\varepsilon)}\to\frac{\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dx}{f_Y(y)}\quad(\varepsilon\to 0+)$$

$$F_{X|Y}(x|y) \triangleq P\{X \le x | Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

$$\Downarrow$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

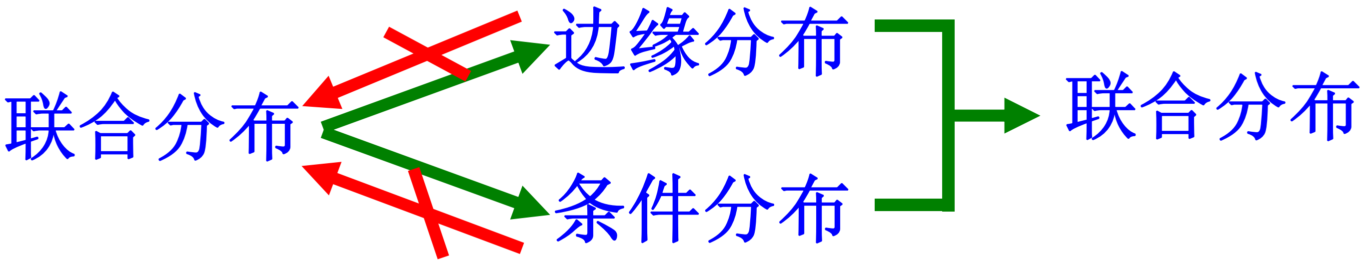
条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}\,x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}\,y=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}\,y.$$

说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下：



例3 设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A.

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称(X,Y)在G上服从均匀分布．现设二维随机变量在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 由假设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且有边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

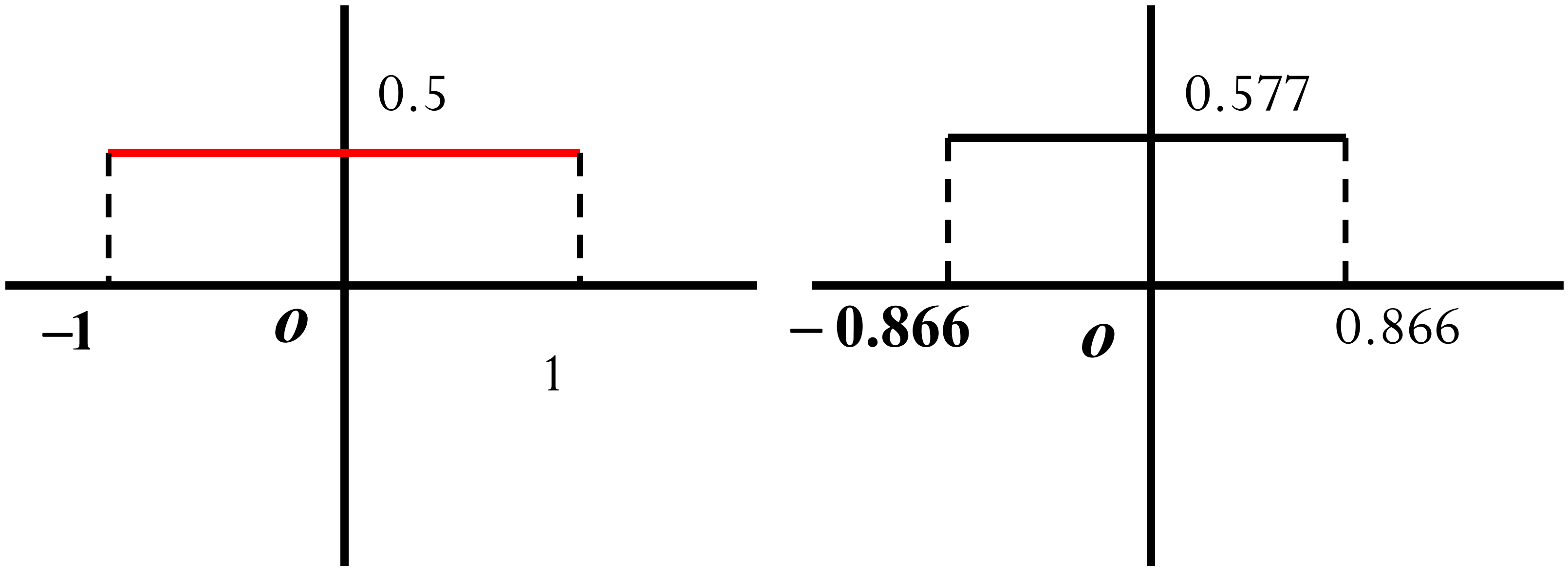
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是当$-1<y<1$时，有

$$f_{X|Y}(x|y)$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 其他. \end{cases}$$

当$y=0$和$y=\dfrac{1}{2}$时$f_{X|Y}(x|y)$的图形分别如下 图所示.


0.5
−1
o
1
0.577
− 0.866
o
0.866

例4 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值，当观察到 $X=x\ (0<x<1)$ 时，数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机的取值，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 按题意 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对于任意给定的值 $x(0<x<1)$，在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由定义得 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是得 关于Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-y), & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

小 结

1. 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，$p_{ij}(i,j=1,2\cdots)$ 为其联合分布律，在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$$

$$=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

在给定 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}$$

$$=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中$i,j=1,2,\cdots.$

2. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量,则有

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

作业：课后习题 13、14

练习

1．对于二维正态分布，在已知 $X=x$ 条件下，求 Y 的条件分布.

2．设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, x>0, y>x \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

求 $f_{X|Y}(x|y)$.

1．对于二维正态分布，在已知 $X=x$ 条件下，求 Y 的条件分布.

解　设 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$，则其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

X的边缘密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

在 $X=x$ 条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

2 . 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, x>0, y>x \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

求 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 (X,Y)关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, y>0, \\ 0, \qquad y\le 0. \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

当 $y\le 0$ 时，

$f_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，若 $0<x<y$，

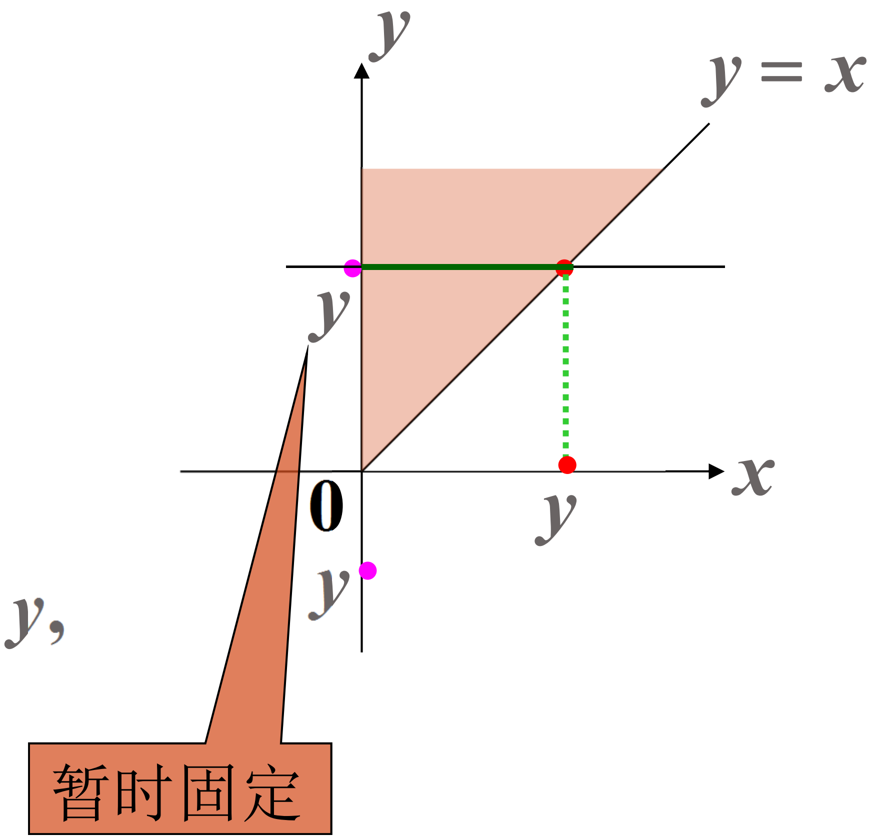
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y}$$

若 $y\le 0$ 或 $y\le x$，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{0}{ye^{-y}}=0$$

综上　当 $y>0$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$



3 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & 0<x<\infty, 0<y<\infty \\ 0\quad, & \text{其它}\end{cases}$$

求$P\{X>1|Y=y\}$.

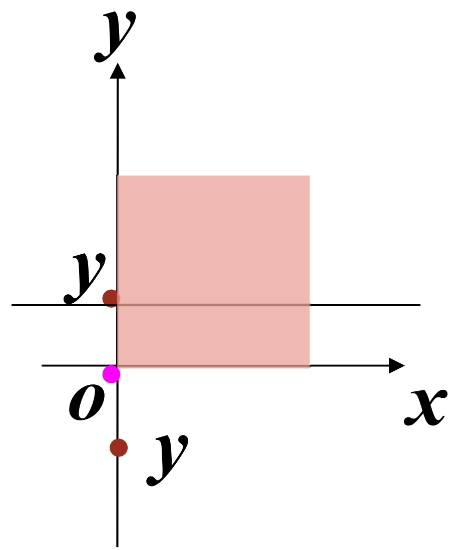
解 $$P\{X>1|Y=y\}=\int_1^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx$$

为此，需求出 $f_{X|Y}(x|y)$

由于 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}dx=\frac{e^{-y}}{y}[-ye^{-x/y}]\Big|_0^{\infty}$$

$$=e^{-y},\qquad 0<y<\infty$$



于是对 $y>0$,

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-x/y}}{y},\quad x>0$$

故对 $y>0$,
$$P\{X>1|Y=y\}=\int_1^{\infty}\frac{e^{-x/y}}{y}dx$$

$$=-e^{-x/y}\Big|_1^{\infty}=e^{-1/y}$$

3.设某班车起点站上车人数 X 服从参数为λ（λ >0）的泊松分布，并且中途不再有人上车。而车上每位乘客在中途下车的概率为 p ,且中途下车与否相互独立，以Y表示在中途下车的人数。试求：

(1)在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率；

(2)(X,Y)的联合概率分布律；

(3)求Y的分布律。

解:(1)P{Y=m|X=n}=$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ **,m=0,1,2,…n.**

(2) X可能的取值是0，1，2，…..，k，…，n，...

P{X=k}= $\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Y可能的取值是0，1，2，…，r，…，k

P{x =k, y =r }=P{x=k}P{y=r|x=k}=$\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} C_k^r p^r q^{k-r}$

当r>k时，P{x=k, y=r}=0,

(3)Y的边缘分布

$$P\{Y=r\}=\sum_{k=0}^{+\infty}P\{x=k,y=r\}=\sum_{k=0}^{+\infty}P\{x=k\}P\{y=r/x=k\}$$

$$=\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}C_k^r p^r q^{k-r}=e^{-\lambda}(\lambda p)^r\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}(\lambda q)^{k-r}$$

$$=e^{-\lambda}(\lambda p)^r\frac{1}{r!}\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{1}{(k-r)!}(\lambda q)^{k-r}$$

$$=e^{-\lambda}(\lambda p)^r\frac{1}{r!}e^{\lambda q}$$

$$=\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}\qquad r=0,1,2,\dots,$$

注：$e^{\lambda q}$泰勒级数展开式要知道