概率论与数理统计

第三章　多维随机变量及其分布

§1　二维随机变量

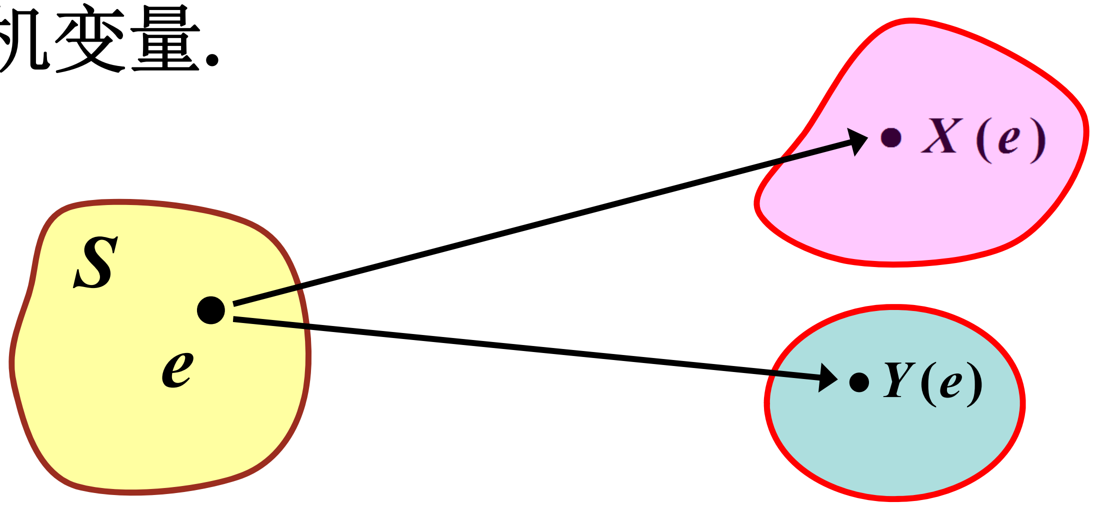
- 二维随机变量及其分布函数
- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量
- 两个常用的分布

一、二维随机变量及其分布函数

1.定义

设E是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫做二维随机向量或二维随机变量.

图示



实例1 炮弹的弹着点的位置 (X,Y) 就是一个二维随机变量.

实例2 考查某一地区学前儿童的发育情况, 则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H,W).

说明 二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X 、Y 有关, 而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

2.二维随机变量的分布函数

(1)分布函数的定义

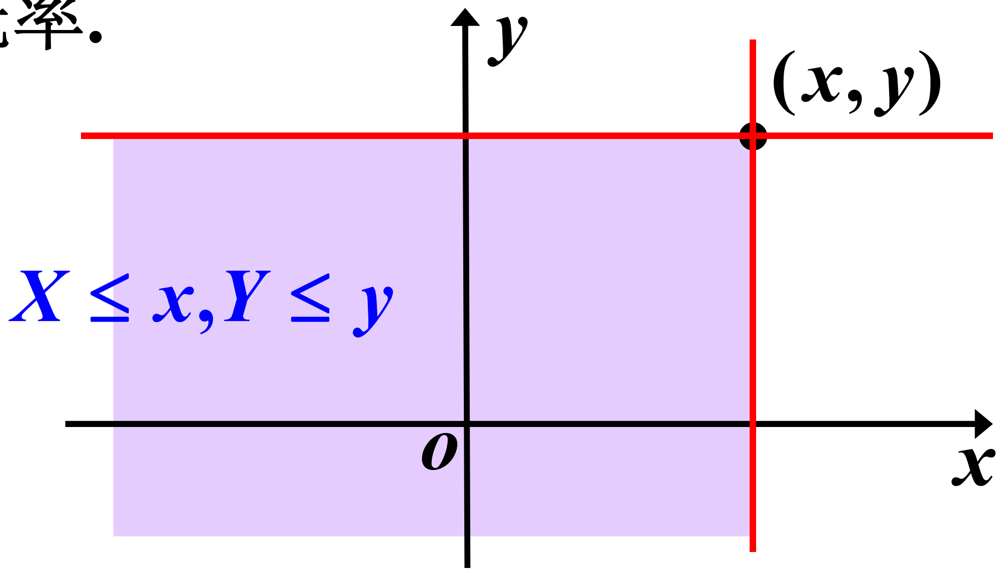
定义 设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x,y，二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=}P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或称为随机变量X和Y的联合分布函数.

如果将二维随机变量(X,Y)看成是平面上随机点的坐标，那么，分布函数$F(x,y)$在(x,y)处的

函数值就是随机点 (X,Y)落在如图所示的，以 (x,y)为顶点而位于该点左下方的无穷矩形域内的概率.



随机点(X,Y)落在矩形域 $\{(x,y) \mid x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2\}$的概率为

$$P\{x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2).$$

(2) 分布函数的性质

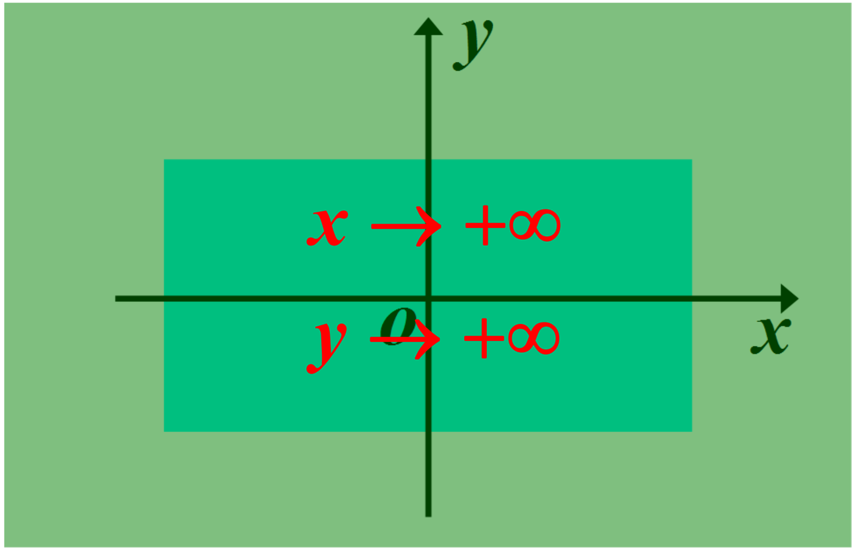
1° $F(x, y)$是变量x和y的不减函数，即对于任意固定的y，当$x_2 > x_1$时$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$；对于任意固定的x，当$y_2 > y_1$时$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.

2° $0 \le F(x, y) \le 1$，且

对于任意固定的 $y, F(-\infty, y) = 0$,

对于任意固定的x, $F(x,-\infty)=0$,

$F(-\infty,-\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$.



3° $F(x+0,y)=F(x,y)$, $F(x,y+0)=F(x,y)$,

即$F(x,y)$关于x右连续, 关于y也右连续.

4° 对于任意$(x_1, y_1),(x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 下述不等式成立:

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$$

证明 $P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$

$$= P\{X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_1, y_1 < Y \leq y_2\}$$

$$= P\{X \leq x_2, Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_2, Y \leq y_1\}$$

$$- P\{X \leq x_1, Y \leq y_2\} + P\{X \leq x_1, Y \leq y_1\} \geq 0,$$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$

二、二维离散型随机变量

1. 定义

如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的不相同的值是有限对或可列无限多对,则称(X,Y)是离散型的随机变量.

2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值为$(x_i, y_j), i, j = 1,2,\cdots$,记$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1,2,\cdots$, 则由概率的定义有

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1,$$

称$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1,2,\cdots$ 为二维离散型随机变量(X,Y)的分布律，或随机变量X和Y的联合分布律.

二维随机变量 (X,Y) 的分布律也可表示为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

例1 设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值, 另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值. 试求 (X,Y) 的分布律.

解 用乘法公式容易求得 (X,Y) 的分布律. 易知 $\{X=i, Y=j\}$ 的取值情况是: $i=1,2,3,4$, j 取不大于 i 的正整数. 且

$$P\{X=i, Y=j\} = P\{Y=j \mid X=i\} P\{X=i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4, \quad j \le i.$$

于是 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

例2　从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里, 随机抽取两支, 若 X、Y 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数,求 (X, Y) 的分布律.

解　(X, Y) 所取的可能值是

$(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(2,0)$.

抽取两支都是绿笔

$$P\{X=0, Y=0\} = \binom{3}{0}\cdot\binom{2}{0}\cdot\binom{3}{2}\Big/\binom{8}{2} = \frac{3}{28},$$

抽取一支绿笔,一支红笔

$$P\{X=0, Y=1\} = \binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2} = \frac{3}{14},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{1}{28},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{9}{28},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28}.$$

故所求分布律为

Y \ X	0	1	2
0	$3/28$	$9/28$	$3/28$
1	$3/14$	$3/14$	0
2	$1/28$	0	0

例3　一个袋中有三个球,依次标有数字 1, 2, 2, 从中任取一个, 不放回袋中, 再任取一个, 设每次取球时,各球被取到的可能性相等,以 X, Y 分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字, 求 (X, Y) 的分布律与分布函数.

解 (X, Y) 的可能取值为 $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

$$P\{X=1, Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{3},\quad P\{X=2, Y=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=2, Y=2\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

$$p_{11}=0,\quad p_{12}=p_{21}=p_{22}=\frac{1}{3},$$

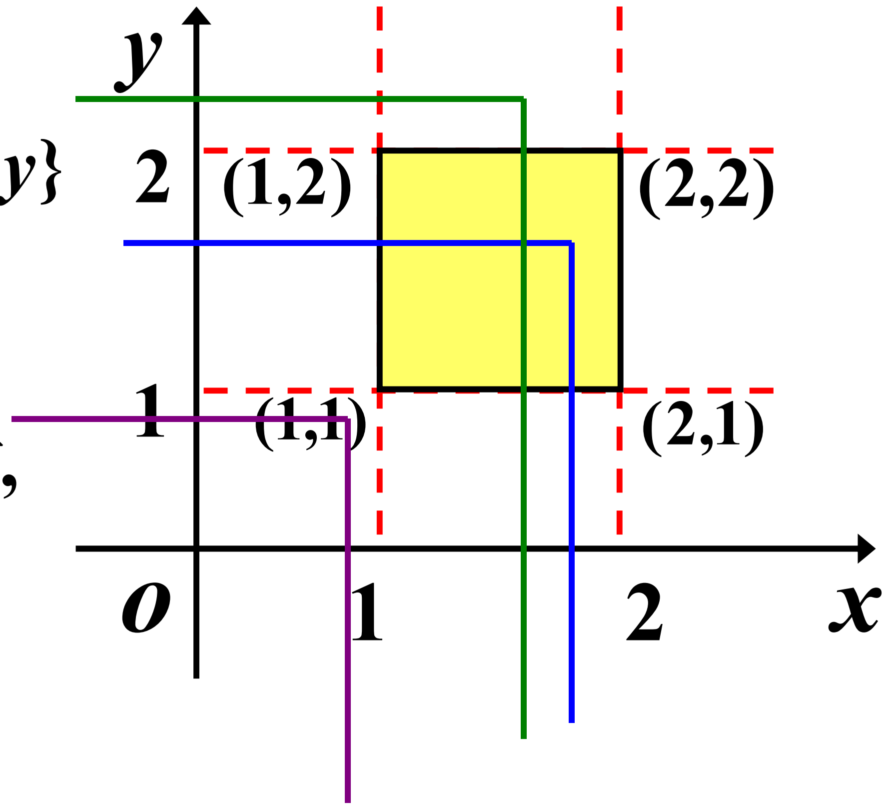
故 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2
1	0	$1/3$
2	$1/3$	$1/3$

下面求分布函数.

(1)当 $x < 1$ 或 $y < 1$ 时，

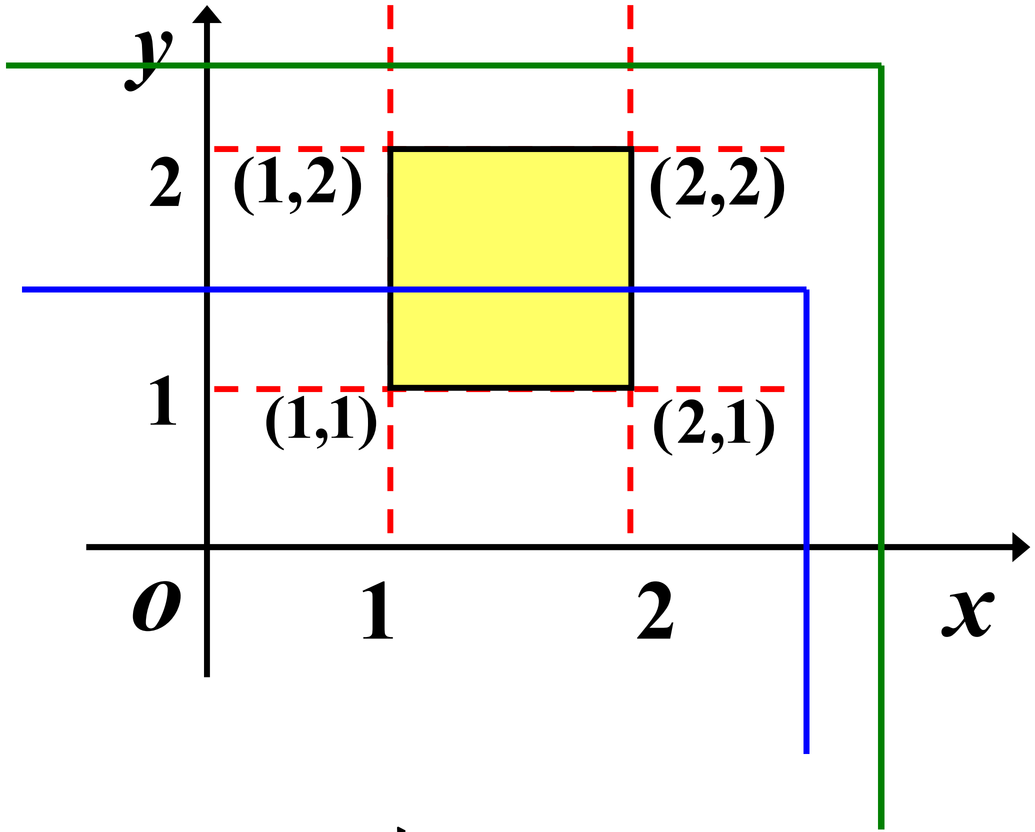
$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$
$$= 0;$$



(2)当 $1 \le x < 2, 1 \le y < 2$ 时，

$$F(x,y) = p_{11} = 0;$$

(3)当 $1 \le x < 2, y \ge 2$ 时， $F(x,y) = p_{11} + p_{12} = 1/3;$



(4)当$x \geq 2, 1 \leq y < 2$时，$F(x,y) = p_{11} + p_{21} = 1/3$;

(5)当$x \geq 2, y \geq 2$时，$F(x,y) = p_{11} + p_{21} + p_{12} + p_{22} = 1$.

所以(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1\text{或}y<1,\text{或}1\le x<2,1\le y<2\text{时}\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x<2,y\ge 2,\text{或}x\ge 2,1\le y<2,\\ 1, & x\ge 2,y\ge 2.\end{cases}$$

说明

离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数归纳为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的 i, j 求和.

三、二维连续型随机变量

1.定义

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负可积函数 $f(x,y)$ 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度，或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

2.性质

$1°\ f(x,y) \geq 0.$

$2°\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

3° 设 G 是 xOy 平面上的区域，点 (X,Y) 落在 G内的概率为

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4°若 $f(x,y)$在(x,y)连续, 则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.说明

由性质4°，在连续点(x, y)处有

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0+ \\ \Delta y \to 0+}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$\overset{\text{由(1.1)}}{=} \lim_{\substack{\Delta x \to 0+ \\ \Delta y \to 0+}} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)$$

$$- F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

这表示：

若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则当$\Delta x,\Delta y$很小时，

$$P\{x < X \le x+\Delta x, y < Y \le y+\Delta y\} \approx f(x,y)\Delta x\Delta y,$$

即(X,Y)落在小长方形$(x,x+\Delta x]\times(y,y+\Delta y]$内的概率近似地等于$f(x,y)\Delta x\Delta y$.

在几何上$z=f(x,y)$表示空间的一个曲面.

由性质2°知，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

介于$z=f(x,y)$和xOy平面的空间区域的体积为1.

由性质3°,

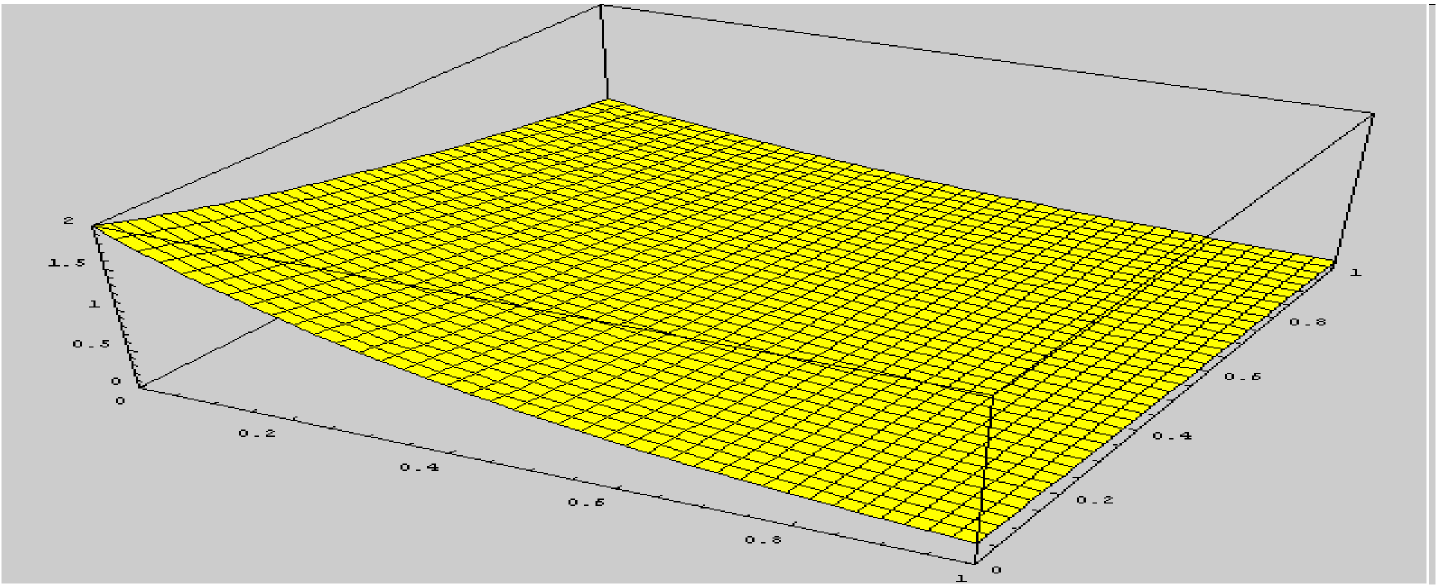
$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以G为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶面的柱体体积 .

例4 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$; (2) 求概率 $P\{Y \le X\}$.



解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

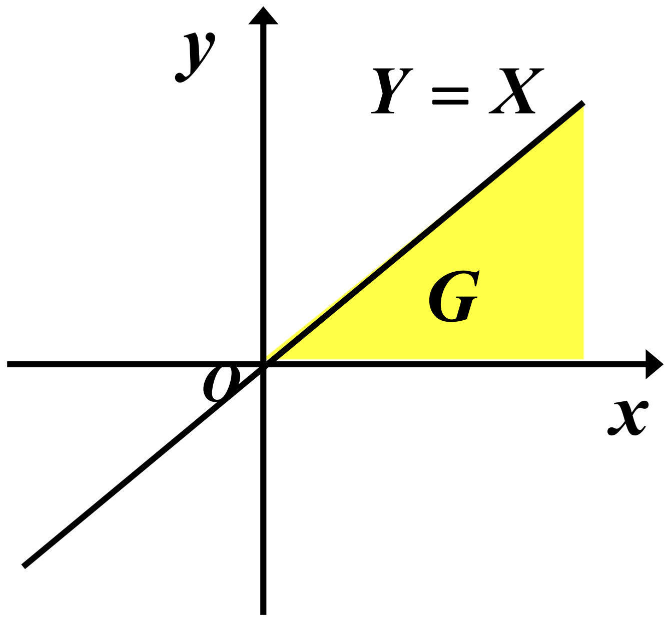
$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即有 $F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0,y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 将(X,Y)看成是平面上随机点的坐标, 即有 $\{Y\le X\}=\{(X,Y)\in G\}$, 其中$G$为$xOy$平面上直线

$y = x$及其下方的部分．于是

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$



$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

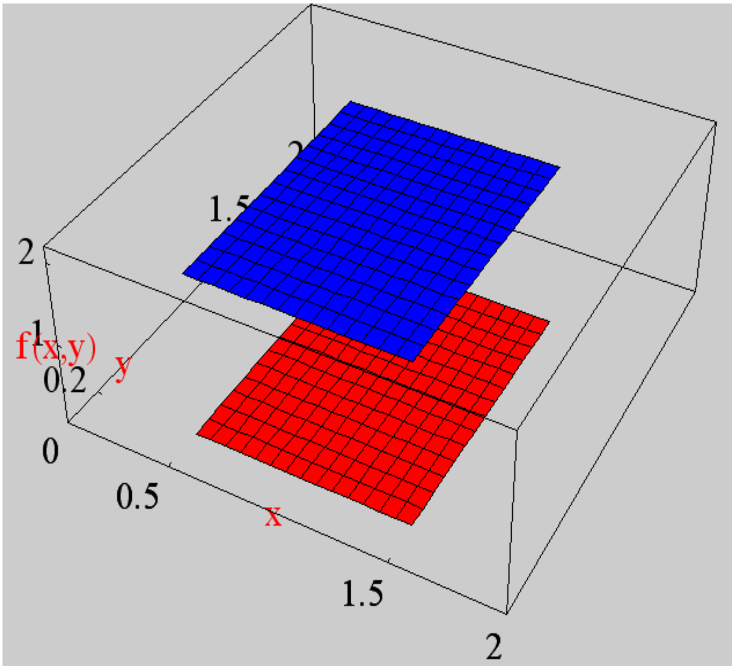
$$= \frac{1}{3}.$$

四、两个常用的分布

1.均匀分布

定义 设 D 是平面上的有界区域,其面积为 S,若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

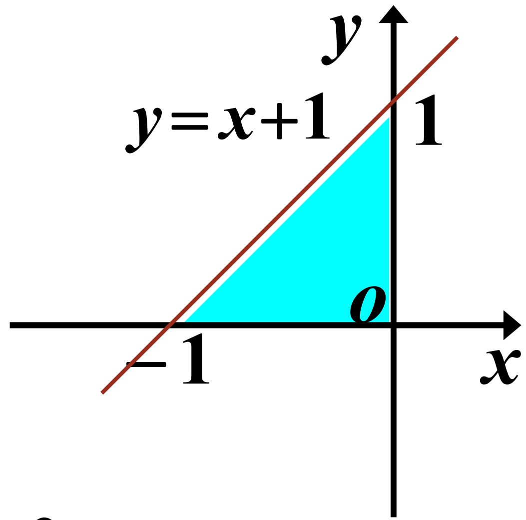


则称 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布.

例5　已知随机变量 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布，试求 (X, Y) 的概率密度及分布函数，其中 D 为 x 轴，y 轴及直线 $y=x+1$ 所围成的三角形区域．

解　由 $f(x,y)=\begin{cases} 1/S, & (x,y)\in D, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

得 $f(x,y)=\begin{cases} 2, & (x,y)\in D, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$



当 $x<-1$ 或 $y<0$ 时，$f(x,y)=0$

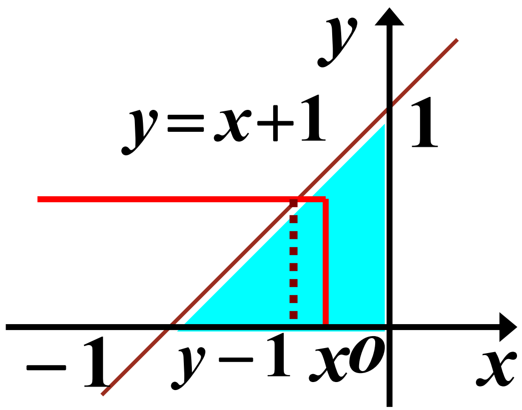
$$\Rightarrow F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=0;$$

当$-1 \le x < 0, 0 \le y < x+1$时,

$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{y-1}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v + \int_{y-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{y} 2\,\mathrm{d}v$$

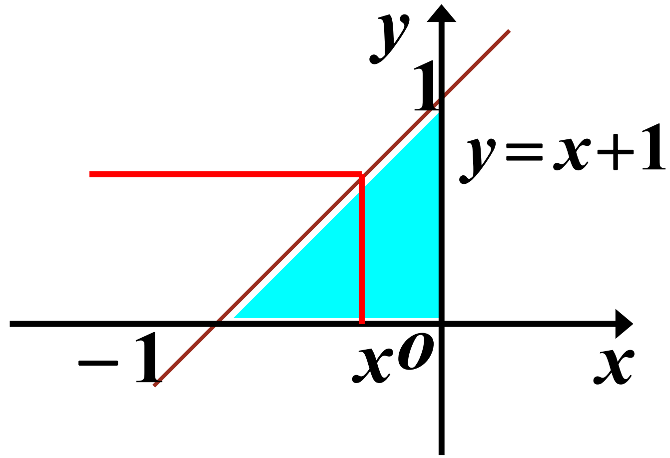
$$= (2x - y + 2)y;$$



当$-1 \le x < 0, y \ge x+1$时,

$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v = (x+1)^2;$$

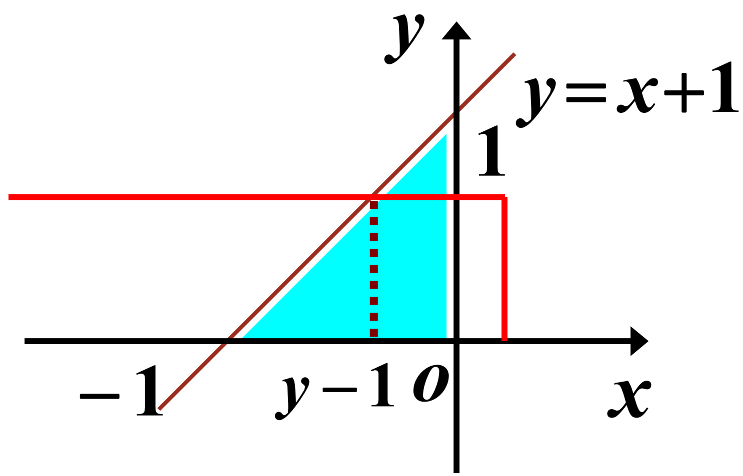


当 $x \geq 0, 0 \leq y < 1$ 时,

$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{y-1}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v + \int_{y-1}^{0}\mathrm{d}u\int_{0}^{y} 2\,\mathrm{d}v$$

$$= (2-y)y;$$



当 $x \geq 1, y \geq 1$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1}2\,\mathrm{d}v=1.$$

所以 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<-1, \text{或 } y<0,\\ (2x-y+2)y, & -1\leq x<0,\ 0\leq y<x+1,\\ (x+1)^2, & -1\leq x<0,\ y\geq x+1,\\ (2-y)y, & x\geq 0,\ 0\leq y<1,\\ 1, & x\geq 0,\ y\geq 1.\end{cases}$$

2.二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

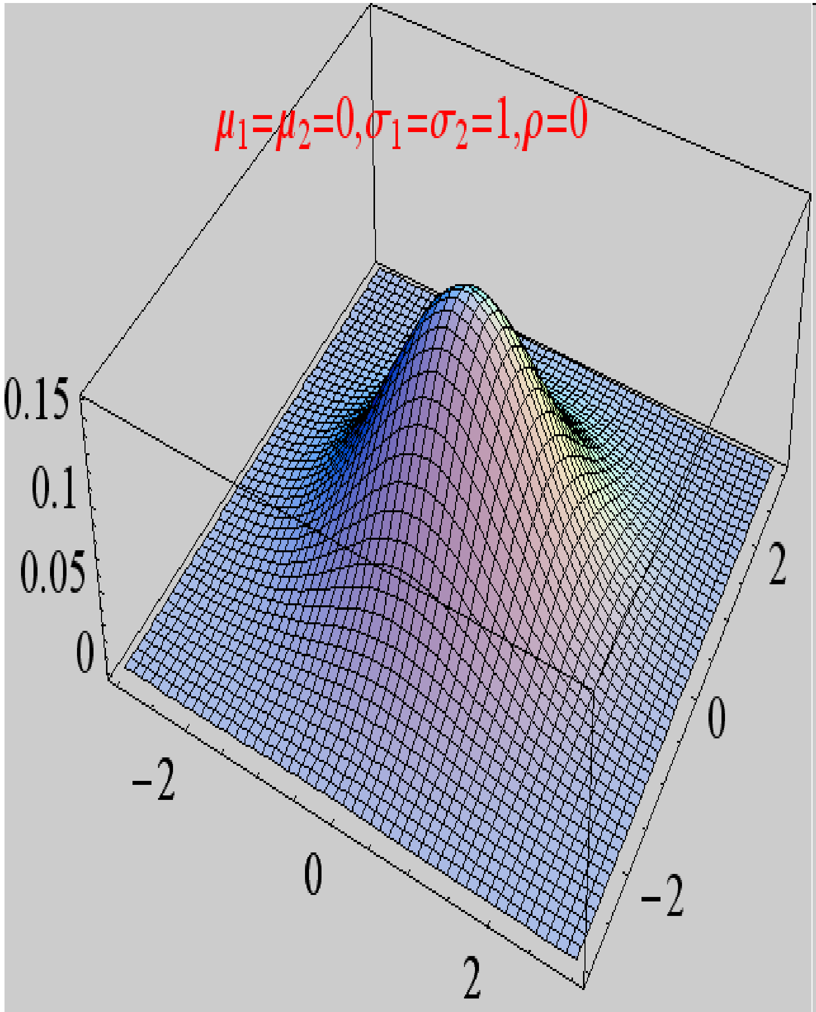
$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

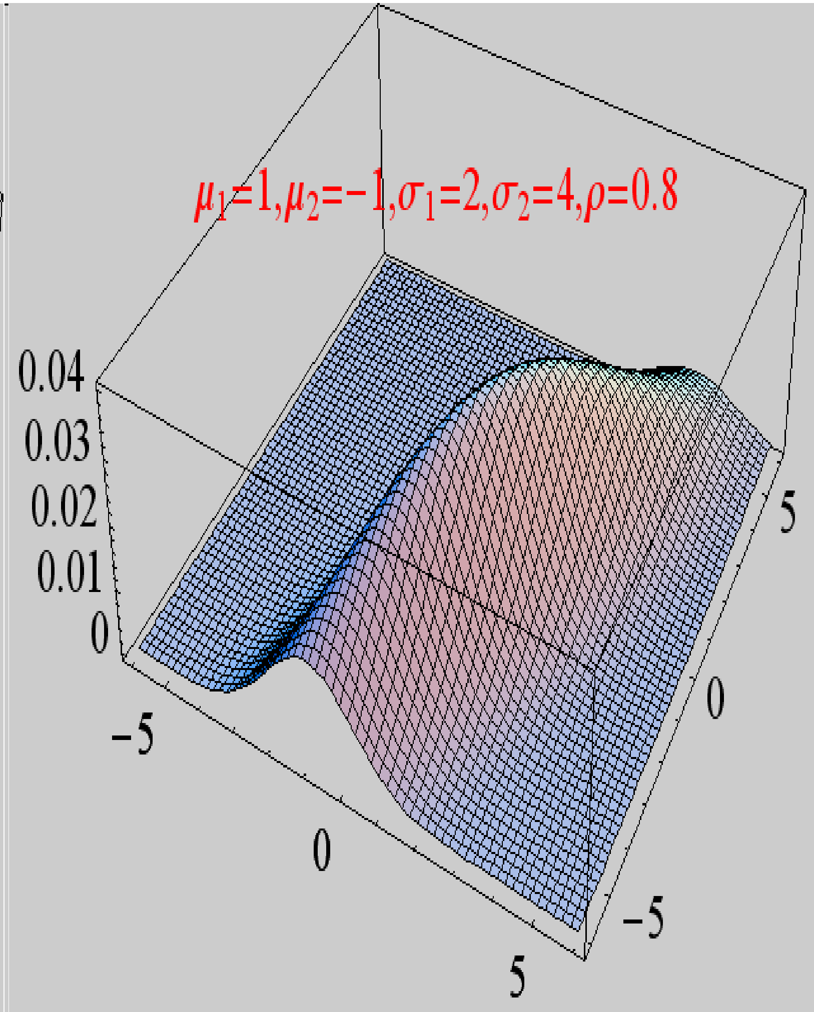
则称 (X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布 .记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

二维正态分布的图形



$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
-2
0
2
2
0
-2



$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-5
0
5
5
0
-5

推广 n 维随机变量的概念

定义　　设E是一个随机试验,它的样本空间是$S=\{e\}$, 设$X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$是定义在$S$上的随机变量,由它们构成的一个$n$维向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$叫做 n维随机向量或 n维随机变量.

对于任意n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$, n元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数或随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布函数.

小 结

二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}.$$

二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x, y_j\le y} p_{ij}.$$

二维连续型随机变量的概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

作业：课后习题 **2、3**