概率论与数理统计

第七章　参数估计

练习：

1、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个随机样本，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，$\hat{\theta}^2 = C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，则 C＝ ________

（A）$\dfrac{1}{n}$ （B）$\dfrac{1}{n-1}$ （C）$\dfrac{1}{2(n-1)}$ （D）$\dfrac{1}{n-2}$

解：
$$E\left(\hat{\theta}^2\right) = E\left(C\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2\right)$$
$$= C\sum_{i=1}^{n-1}E\left(X_{i+1}^2 - 2X_{i+1}X_i + X_i^2\right)$$
$$= C\sum_{i=1}^{n-1}\left(2\left(\sigma^2+\mu^2\right)-2\mu^2\right)$$
$$= 2(n-1)C\sigma^2 = \sigma^2 \qquad \therefore C = \frac{1}{2(n-1)}$$

2、为了对一批产品估计其废品率 p，随机取一样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，其中

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{取得次品} \\ 0, \text{取得合格品} \end{cases} \quad (\mathbf{i=1,2,\cdots,n})$$

试证明 $\hat{p} = \bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是 p 的无偏估计量.

证明：$X \sim b(1, p)$，所以 $E(X) = p, E(X_i) = p$

故 $E(\hat{p}) = E(\overline{X}) = E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = p$

因而 $\hat{p}$ 是 p 的无偏估计.

§4 区间估计

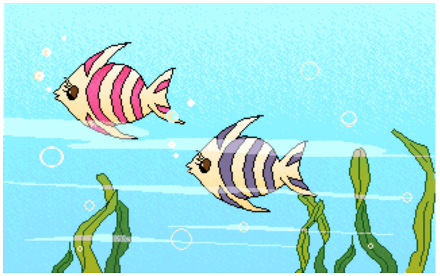
- 置信区间定义
- 置信区间的求法
- 单侧置信区间

引言

前面，我们讨论了参数点估计．它是用样本算得的一个值去估计未知参数．但是，点估计值仅仅是未知参数的一个近似值，它没有反映出这个近似值的误差范围，使用起来把握不大．区间估计正好弥补了点估计的这个缺陷．

譬如，在估计湖中鱼数的问题中，若我们根据一个实际样本，得到鱼数 N 的极大似然估计为1000条.

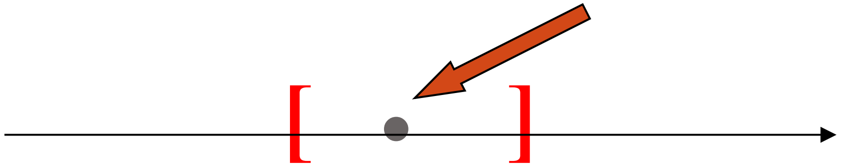
实际上，N的真值可能大于1000条，也可能小于1000条.

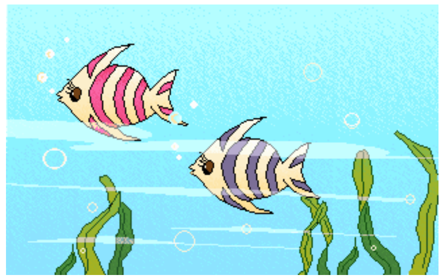


若我们能给出一个区间，在此区间内我们合理地相信 N 的真值位于其中. 这样对鱼数的估计就有把握多了.

也就是说，我们希望确定一个区间，使我们能以比较高的可靠程度相信它包含真参数值.

湖中鱼数的真值





这里所说的“可靠程度”是用概率来度量的，称为置信度或置信水平.

习惯上把置信水平记作 $1-\alpha$，这里 α 是一个很小的正数.

置信水平的大小是根据实际需要选定的.

例如，通常可取置信水平$1-\alpha$=0.95或0.9等.

根据一个实际样本，由给定的置信水平，我们求出一个尽可能小的区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$，使

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

称区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

一、 置信区间定义

设总体 X 的分布函数为$F(x;\theta)$，θ是 一个待估参数，给定 $\alpha\ (0<\alpha<1)$,若由样本 $X_1,X_2,\ldots X_n$确定的两个统计量

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

$$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n) \qquad (\underline{\theta}<\overline{\theta})$$

满足

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

则称区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是 θ的置信水平（置信度)为$1-\alpha$ 的置信区间.

$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$分别称为置信下限和置信上限.

可见，

对参数θ作区间估计，就是要设法找出两个只依赖于样本的界限(构造统计量).

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$
$$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \qquad (\underline{\theta} < \overline{\theta})$$

一旦有了样本，就把θ估计在区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$内.

置信区间的意义

置信区间的含义是: 反复抽样多次, 每次样本容量相等; 每个样本值确定一个区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$, 则在这多个区间中, 包含$\theta$ 真值的区间所占百分比约为$1-\alpha$, 不包含θ 真值的区间所占百分比约为 α.

例如, 当 置信水平 $1-\alpha = 0.95$ 时, 抽样100次, 则包含θ真值的区间大约有95个, 不含θ 真值的区间约有5个.

几点说明

1、置信区间的长度$(\overline{\theta}-\underline{\theta})$反映了估计精度，

$(\overline{\theta}-\underline{\theta})$ 越小，估计精度越高.

2、α 反映了估计的可靠度, α 越小, 越可靠.

α 越小, 1- α 越大, 估计的可靠度越高,但

这时, $(\overline{\theta}-\underline{\theta})$往往增大, 因而估计精度降低.

3、α 确定后, 置信区间 的选取方法不唯一,

常选最小的一个.

处理“可靠性与精度关系”的原则

求参数置信区间 → 先 → 保 证 可靠性 → 再 → 提 高 精 度

二、置信区间的求法

在求置信区间时，要查表求分位点.

回顾：各种分布的上 α 分位点

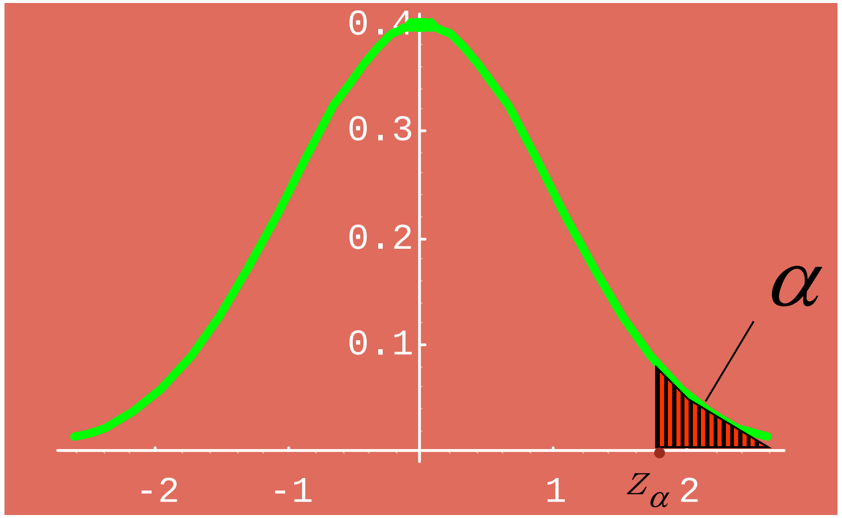
定义

若 $P(X > z_{\alpha}) = \alpha$，则称 z_{α} 为标准正态分布的上 α 分位点.

若 $P(|X| > z_{\alpha/2}) = \alpha$，则称 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 为标准正态分布的双侧 α 分位点.

标准正态分布的上α分位点图形

$P(X > z_\alpha) = \alpha$



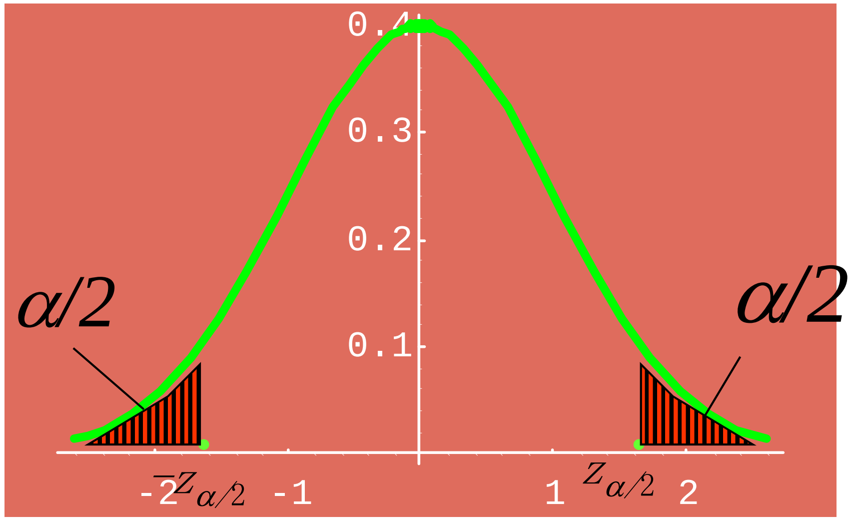
常用数字

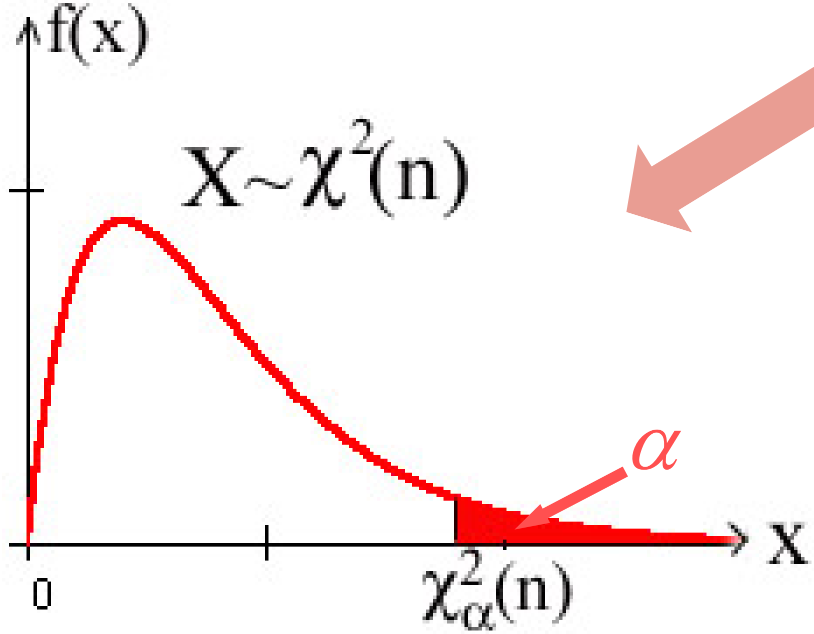
$z_{0.05} = 1.645$

$z_{0.025} = 1.96$

$z_{0.005} = 2.575$

$P(|X| > z_{\alpha/2}) = \alpha$





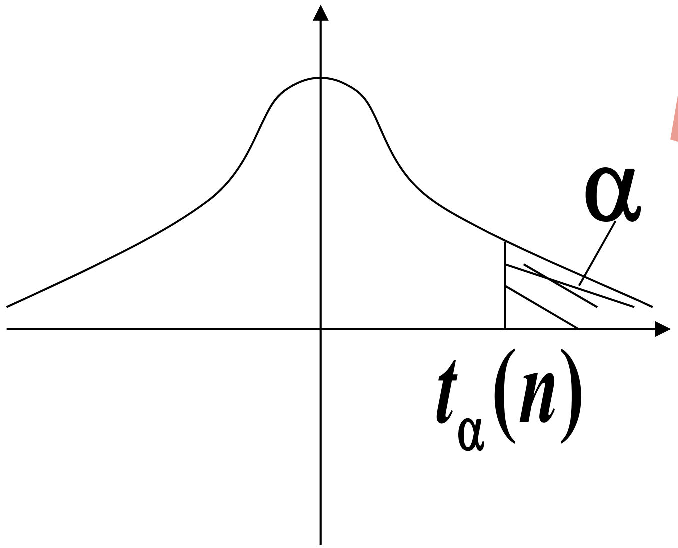
自由度为**n**的χ^2分布的上α分位点$\chi^2_\alpha(n)$

$$\chi^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\Downarrow$$

$$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)) = \alpha$$

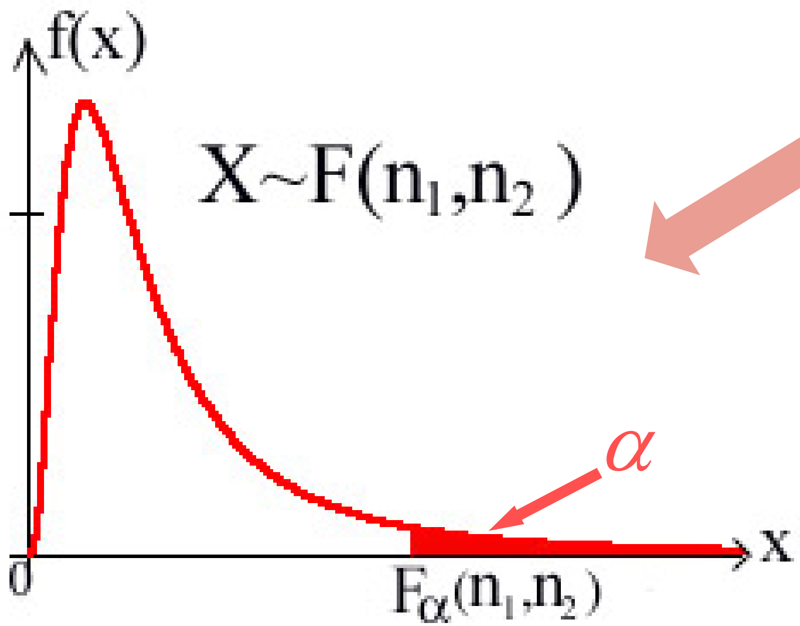
自由度为n的t分布的上α分位点$t_\alpha(n)$



$$t \sim t(n)$$

$$\Downarrow$$

$$p(t > t_\alpha(n)) = \alpha$$



自由度为$\boldsymbol{n_1,n_2}$的$\boldsymbol{F}$分布的上α 分位点$F_\alpha(n_1,n_2)$

$$F \sim F(n_1,n_2)$$

$$\Downarrow$$

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$$

例1 设$X_1,\ldots,X_n$是取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2已知

μ 未知，求参数μ的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间.

解 选μ的点估计为$\overline{X}$，

取 $$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

明确问题,是求什么参数的置信区间?置信水平是多少?

寻找未知参数的一个良好估计.

寻找一个待估参数和统计量的函数，要求其分布为已知.

有了分布，就可以求出Z取值于任意区间的概率.

对于给定的置信水平，根据Z的分布，确定一个区间，使得Z取值于该区间的概率为置信水平.

对给定的置信水平$1-\alpha$,

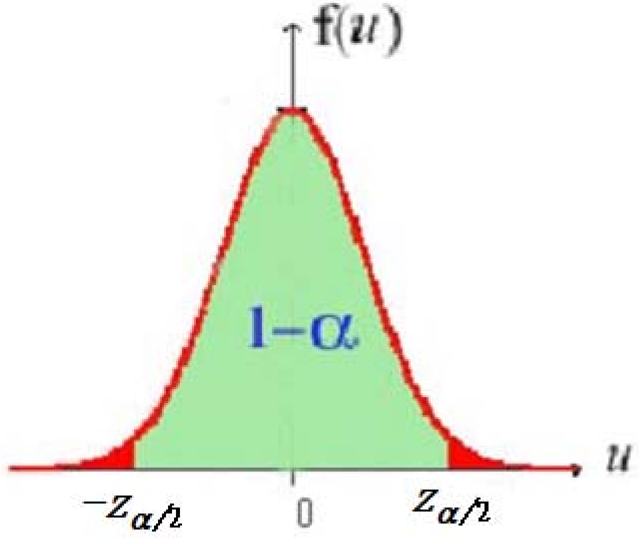
查正态分布表得$z_{\alpha/2}$，

使 $$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

对给定的置信水平$1-\alpha$,

查正态分布表得$z_{\alpha/2}$,使

$$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$



从中解得

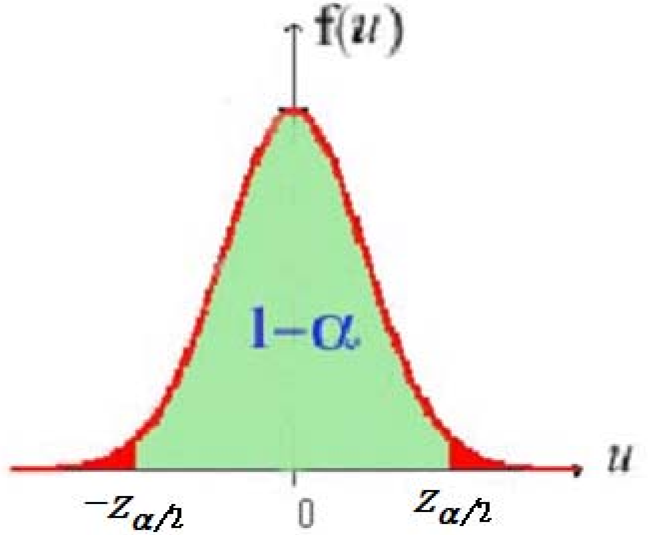
$$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\le\mu\le\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\le\mu\le\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\}$$

$$=1-\alpha$$

于是所求μ的 置信区间为

$$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}]$$



也可简记为

$$(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$$

从例1解题的过程，我们归纳出求置信区间的一般步骤如下:

1. 明确问题，是求什么参数的置信区间?

置信水平 $1-\alpha$ 是多少?

2. 寻找参数 θ 的一个良好的估计

$$T(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

3. 寻找一个待估参数 θ 和估计量 T 的函数 $W(T, \theta)$,且其分布为已知.

4. 对于给定的置信水平$1-\alpha$，根据$W(T,\theta)$的分布，确定常数a, b，使得

$$P(a < W(T,\theta) < b) = 1-\alpha$$

5. 对"$a < W(T,\theta) < b$"作等价变形,得到如下形式:

$$\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$$

即

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1-\alpha$$

于是$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$就是$\theta$的$100(1-\alpha)\%$的置信区间.

可见，确定区间估计很关键的是要寻找一个待估参数θ和估计量T的函数$W(T,\theta)$, 且$W(T,\theta)$的分布为已知, 不依赖于任何未知参数.

而这与总体分布有关，所以，总体分布的形式是否已知，是怎样的类型，至关重要.

需要指出的是，给定样本，给定置信水平，置信区间也不是唯一的.

对同一个参数，我们可以构造许多置信区间.

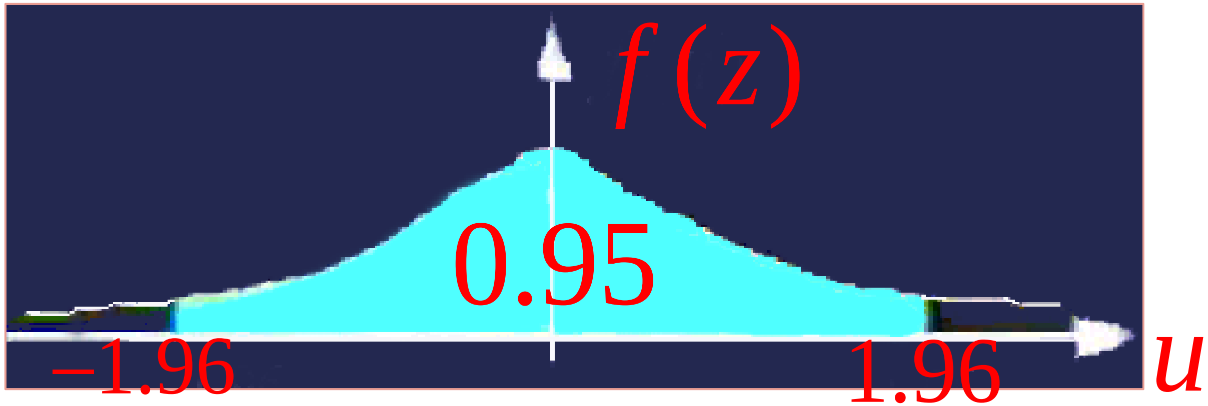
例如，设 $X_1, \ldots, X_n$ 是取自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 已知，求参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

由标准正态分布表，对任意 a、b，我们可以求得 $P(a < Z < b)$.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

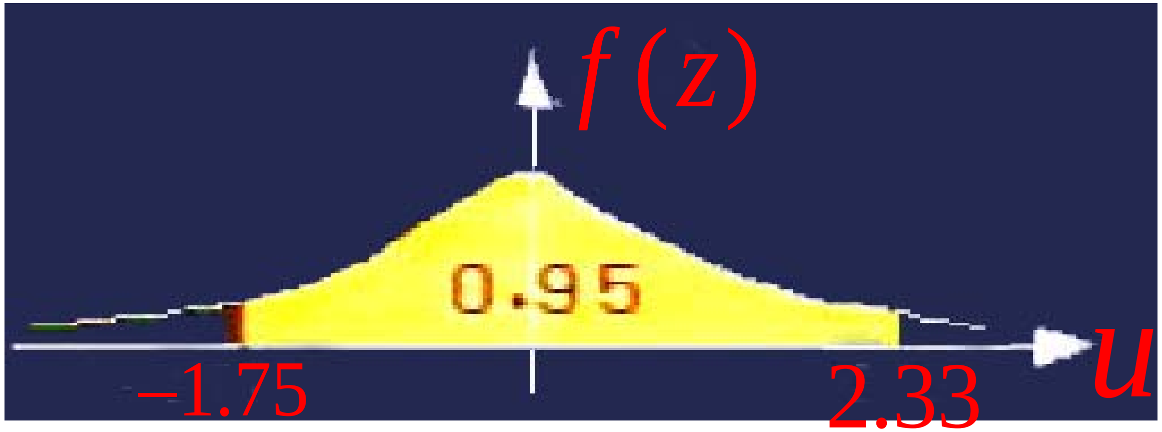
例如，由 $P(-1.96 \le Z \le 1.96) = 0.95$



我们得到均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间为

$$[\bar{X} - 1.96\sigma/\sqrt{n},\ \bar{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n}]$$

由 $P(-1.75 \le Z \le 2.33)=0.95$



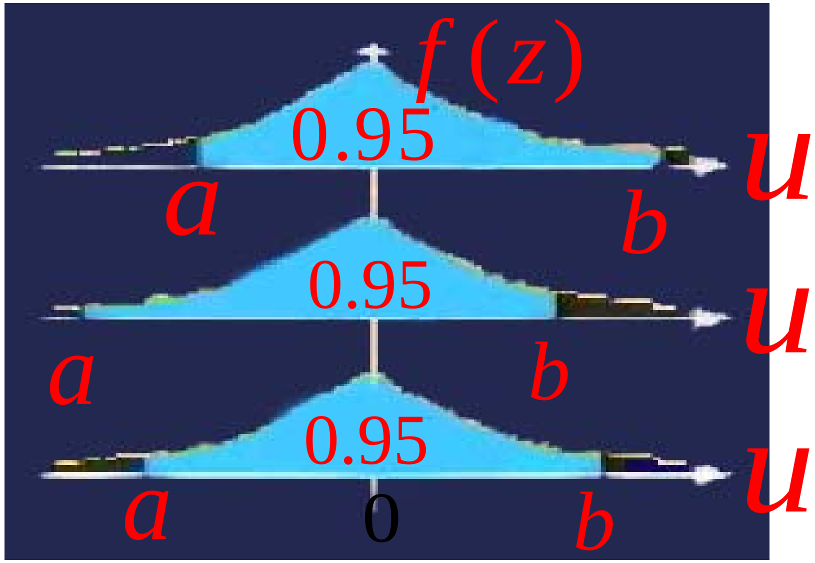
我们得到均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间为

$$[\bar{X}-1.75\sigma/\sqrt{n},\ \bar{X}+2.33\sigma/\sqrt{n}]$$

这个区间比前面一个要长一些.

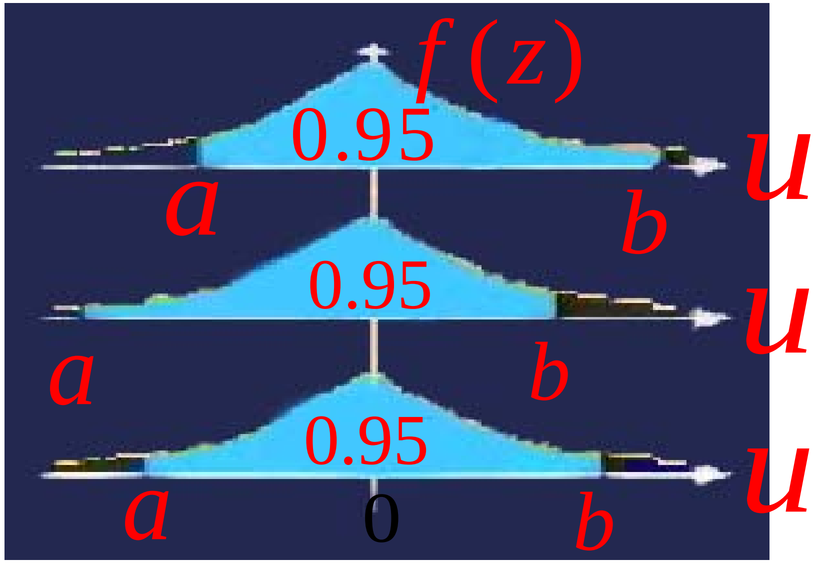
类似地，我们可得到若干个不同的置信区间.

任意两个数a和b，只要它们的纵标包含$f(z)$下95%的面积，就确定一个95%的置信区间.



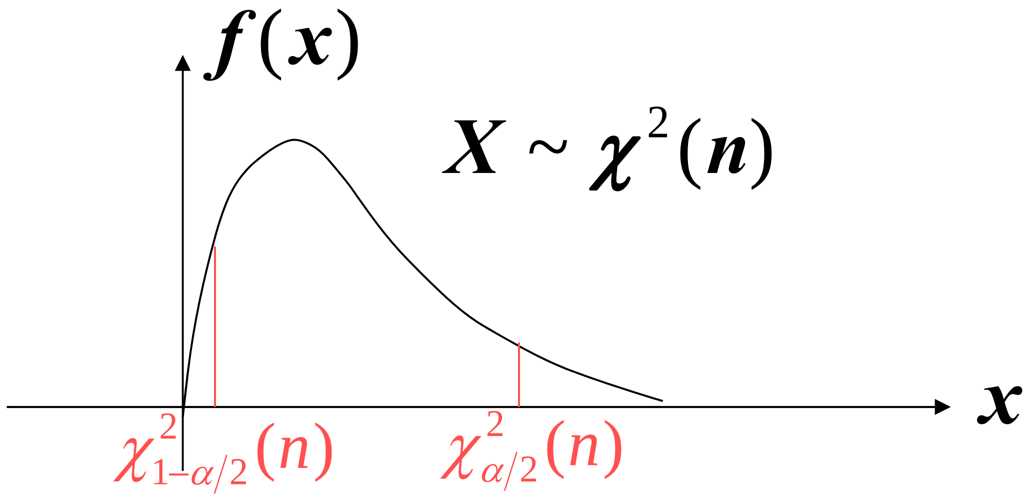
我们总是希望置信区间尽可能短.

在概率密度为单峰且对称的情形，当$a = -b$时求得的置信区间的长度为最短.



$a = -b$

即使在概率密度不对称的情形，如 χ^2分布，*F*分布，习惯上仍取对称的分位点来计算未知参数的置信区间.



我们可以得到未知参数的任何置信水平小于 1 的置信区间，并且置信水平越高，相应的置信区间平均长度越长.

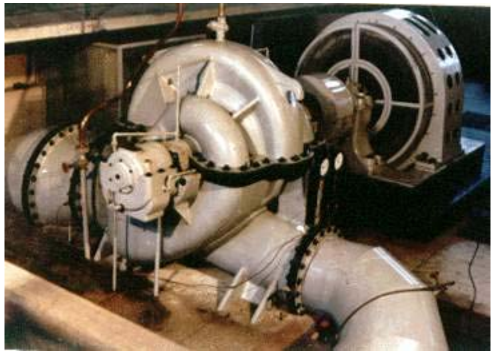
也就是说，要想得到的区间估计可靠度高，区间长度就长，估计的精度就差.这是一对矛盾.

实用中应在保证足够可靠的前提下，尽量使得区间的长度短一些 .

三、单侧置信区间

上述置信区间中置信限都是双侧的，但对于有些实际问题，人们关心的只是参数在一个方向的界限.

例如对于设备、元件的使用寿命来说，平均寿命过长没什么问题，过短就有问题了.



这时, 可将置信上限取为$+\infty$，而只着眼于置信下限，这样求得的置信区间叫单侧置信区间.

于是引入单侧置信区间和置信限的定义：

定义　设 θ 是一个待估参数，给定 $\alpha > 0$，若由样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 确定的统计量

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

对于任意 $\theta \in \Theta$，满足

$$P\{\theta \ge \underline{\theta}\} = 1 - \alpha$$

则称区间 $[\underline{\theta}, +\infty)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间. $\underline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

若由样本$X_1,X_2,\ldots,X_n$确定的统计量

$$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

对于任意 $\theta \in \Theta$，满足

$$P\{\theta \le \overline{\theta}\} = 1 - \alpha$$

则称区间$(-\infty, \overline{\theta}]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间. $\overline{\theta}$称为θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

例2　从一批灯泡中随机抽取5只作寿命试验，测得寿命X（单位：小时）如下：

1050，1100，1120，1250，1280

设灯泡寿命服从正态分布. 求灯泡寿命均值μ的置信水平为0.95的单侧置信下限.

解　μ的点估计取为样本均值$\overline{X}$，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

方差σ^2未知

对给定的置信水平$1-\alpha$，确定分位点 $t_\alpha(n-1)$

使 $$P\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_\alpha(n-1)\} = 1-\alpha$$

即 $$P\{\mu \ge \overline{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha$$

于是得到 μ 的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间为

$$[\overline{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \infty]$$

即 μ 的置信水平为$1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\overline{X}-t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

将样本值代入得

μ 的置信水平为**0.95**的单侧置信下限是

1065小时

课本表7-1，将各种情况下的区间估计加以了总结.

作业：课后习题 14、15

练习：

1、随机地取炮弹 10 发做试验，得炮口速度的标准差 $s=11(m/s)$，炮口速度服从正态分布. 求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

由
$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得到 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

这里 $\alpha/2 = 0.025, 1-\alpha/2 = 0.975, n-1 = 9,$

$\chi^2_{0.025}(9) = 19.023,\ \chi^2_{0.975}(9) = 2.700,\ s = 11.$

于是得到 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$