南开大学

第五章 刚体定轴转动

(Rotation of Rigid Body about a Fixed Axis)

本章目录

5.1 刚体的运动

一. 刚体(rigid body)的概念

由于弹性，力在连续体内传播需要一定时间：

$F \xrightarrow{t}$ | A | B | C | | | | $t+\Delta t$ 才感受到力

固体中弹性波的速度 $v \propto \sqrt{k}$ （k—劲度）

若 $v \to \infty$，则 $k \to \infty$，此时物体有无限的刚性，它受作用力不会变形，因而可以瞬时传递力。

我们把这种不能变形的物体称为刚体。

显然，刚体是个理想化的模型，但是它有实际的意义。

通常 $v_{固体} \sim 10^3$m/s，所以只要我们讨论的运动过程的速度比此慢得多，就可把固体视为刚体。

刚体是特殊的质点系，其上各质点间的相对位置保持不变。质点系的规律都可用于刚体，而且考虑到刚体的特点，规律的表示还可较一般的质点系有所简化。

二、自由度的概念

- 确定一个物体的位置所需要的独立坐标数，称为这个物体的自由度数。
- 质点的位置：x，y，z三个空间坐标，3个自由度。
- 刚体的运动：任意点的平动＋绕该点的转动

点的平动：3个自由度

绕定点转动：3个自由度

刚体有6个自由度。（当刚体运动受限，则自由度减少）

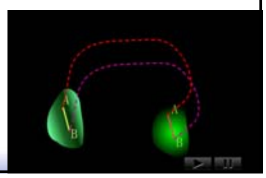
二. 刚体的运动形式

1. 平动（translation）：连接刚体内任意两点的直线在运动各个时刻的位置都彼此平行。

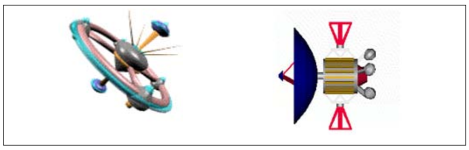
刚体做平动时，可用质心或其上任何一点的运动来代表整体的运动。

平动是刚体的基本运动形式之一。

特点：各点运动状态一样，如：$\vec{v}$、$\vec{a}$ 等都相同.



2. 转动（rotation）：
转动也是刚体的基本运动形式之一，它又可分为定轴转动和定点转动。



▲ 定轴转动：运动中各质元均做圆周运动，且各圆心都在同一条固定的直线（转轴）上。

▲ 定点转动：运动中刚体上只有一点固定不动，整个刚体绕过该定点的某一瞬时轴线转动。

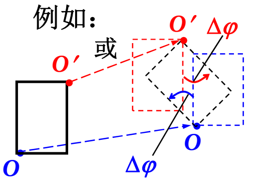
3. 平面运动：刚体上各点的运动都平行于某一固定平面的运动。

4. 一般运动：刚体不受任何限制的任意运动。
它可分解为以下两种刚体的基本运动：

▲ 随基点O（可任选）的平动

▲ 绕通过基点O的瞬时轴的定点转动

例如：

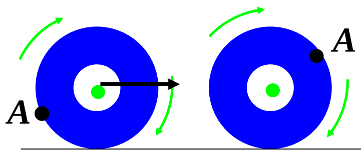


两种分解，基点选取不同，平动可以不同，转动却相同，转动与基点的选取无关。

动力学中，常选质心为基点。

选质点为基点时，一般刚体运动可视为：

随质心的平动 + 绕质心的转动 的合成



三 . 刚体转动的描述（运动学问题）

1. 定点转动（rotation about a fixed point）

（1）角量的描述

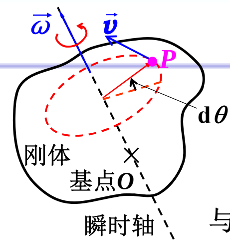
为反映瞬时轴的方向及刚体转动的快慢和转向，引入角速度矢量 $\vec{\omega}$ 。

角坐标 $\theta = \theta(t)$

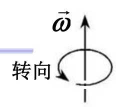
沿逆时针方向转动 $\theta > 0$

沿顺时针方向转动 $\theta < 0$

角位移 $\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$



$$\boxed{|\vec{\omega}| = \omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

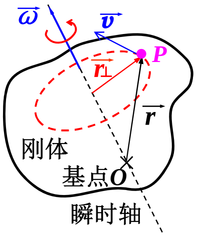


$\vec{\omega}$ 的方向沿瞬时轴，与转向成右螺旋关系。

为反映 $\vec{\omega}$ 的变化情况，引入角加速度矢量 $\vec{\alpha}$ 。

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$（不一定沿着瞬时轴）

（2）线量和角量的关系



$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}_\perp=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

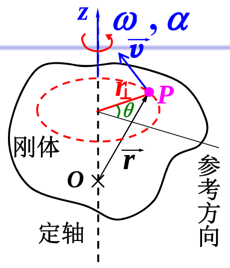
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$=\underline{\vec{\alpha}\times\vec{r}}+\underline{\vec{\omega}\times\vec{v}}$$

旋转加速度　向轴加速度

2. 定轴转动（rotation about a fixed axis）

转轴固定，$\vec{\omega}$和$\vec{\alpha}$退化为代数量ω和α。



$$v=r_\perp\omega$$

$$a_t=\frac{dv}{dt}=r_\perp\frac{d\omega}{dt}=r_\perp\alpha$$

$$a_n=r_\perp\omega^2$$

由于刚体没有形变，所以刚体的法向加速度不重要

若$\alpha=\text{const}$.

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t\\(\theta-\theta_0)=\omega t+\frac{1}{2}\alpha t^2\\\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)\end{cases}$$

定轴转动的特点

(1) 每一质点均作圆周运动，圆面为转动平面；

(2) 任一质点运动 $\Delta\theta,\vec{\omega},\vec{\alpha}$ 均相同，但 $\vec{v},\vec{a}$ 不同；

(3) 运动描述仅需一个角坐标(一个自由度)．

例2　高速旋转圆柱形转子可绕垂直其横截面通过中心的轴转动．开始时，它的角速度 $\omega_0=0$，经300 s 后，其转速达到 18 000 $\mathrm{r\cdot min^{-1}}$ 。转子的角加速度与时间成正比．问在这段时间内，转子转过多少转？

解　令$\alpha=ct$，即 $\frac{d\omega}{dt}=ct$，积分

$$\int_0^\omega d\omega=c\int_0^t t\,dt\qquad 得\ \omega=\frac{1}{2}ct^2$$

$$\boxed{\omega=\frac{1}{2}ct^2}$$

当 t=300 s 时

$$\omega=18\,000\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}=600\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$c=\frac{2\omega}{t^2}=\frac{2\times600\pi}{300^2}=\frac{\pi}{75}\mathrm{rad\cdot s^{-3}}$$

$$\omega=\frac{1}{2}ct^2=\frac{\pi}{150}t^2$$

由 $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{\pi}{150}t^2$

得 $\int_0^\theta d\theta=\frac{\pi}{150}\int_0^t t^2dt$

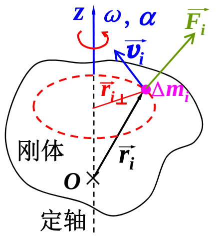
$$\theta=\frac{\pi}{450}t^3\ \mathrm{rad}$$

在 300 s 内转子转过的转数

$$N=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi\times450}(300)^3=3\times10^4$$

5.2 刚体的定轴转动定律

把刚体看作无限多质元构成的质点系。



$\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ （对 O 点）

$M_{外z} = \dfrac{dL_z}{dt}$ （对 z 轴）

$L_z = \sum\limits_i L_{iz} = \sum\limits_i \Delta m_i v_i r_{i\perp}$

$= (\sum\limits_i \Delta m_i r_{i\perp}^2)\cdot\omega$

令 $\boxed{J_z = \sum\limits_i \Delta m_i r_{i\perp}^2}$ —转动惯量（对z轴）（rotational inertia）

则 $\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$

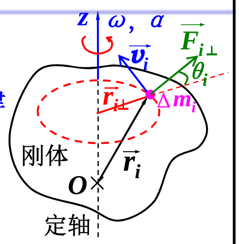
$M_{外z} = \dfrac{dL_z}{dt} = J_z \dfrac{d\omega}{dt}$

即 $\boxed{M_{外z} = J_z\alpha}$ —转动定律

其中 $M_{外z} = \sum\limits_i F_{i\perp} r_{i\perp}\cdot\sin\theta_i$

定轴情况下，可不写下标 z，

记作： $\boxed{M = J\alpha}$



与牛顿第二定律相比，有：

M 相应 F， J 相应 m， α 相应 a。

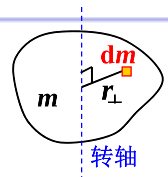
注意：刚体在做定轴转动时是一维问题

- 角速度ω的方向为z轴方向
- r_i与v_i总是互相垂直的
- $r_i \times v_i$的方向为z轴方向
- $r_i \times v_i$的大小为$r_i v_i \sin 90^\circ = r_i v_i$

5.3 转动惯量的计算

质点系 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体 $J = \int\limits_m r_\perp^2 \cdot dm$



（1）与刚体的体密度 ρ 有关.

（2）与刚体的几何形状(及体密度 ρ 的分布)有关.

（3）与转轴的位置有关.

刚体是连续分布的情况下，其质量亦是连续分布的

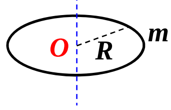
$$J_z = \lim_{N\to\infty}\sum_i m_i R_i^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_i \Delta m_i R_i^2 = \int_V R^2 dm$$

体分布 $dm = \rho dv$

面分布 $dm = \sigma ds$

线分布 $dm = \lambda dl$

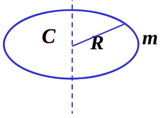
一. 常用的几种转动惯量表示式



细圆环： $\boxed{J_O = mR^2}$

例．质量为m，半径为R的均匀平面圆环，对垂直于平面的对称轴的转动惯量

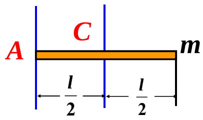
解：



$$dm = \lambda dl$$

$$\therefore J_z = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi R} \frac{m}{2\pi R} R^2 dl$$

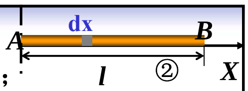
$$= mR^2$$

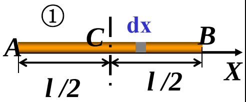


均匀细杆：

$$\boxed{J_C = \frac{1}{12} ml^2} \quad \boxed{J_A = \frac{1}{3} ml^2}$$

例 长为l，质量为M的细长均质均匀棒，绕①过质心；②过端点，而垂直于棒的轴的J。



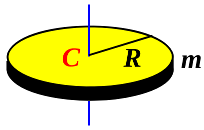


解：设其线密度为λ

① $dJ = x^2 dm = x^2 \lambda dx = x^2 \frac{M}{l} dx$

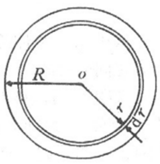
$$\therefore J_0 = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{M}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} Ml^2$$

② $J_0{}' = \int_0^l x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{1}{3} Ml^2$



均匀圆盘：$\boxed{J_C = \frac{1}{2} mR^2}$

解：设其体密度为ρ



$$M = (\pi R^2 \cdot h)\rho$$

$$dm = 2\pi r h \rho dr$$

$$dJ = dm \cdot r^2 = 2\pi r h \rho r^3 dr$$

$$J = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr = \frac{1}{2} \pi R^4 h \rho = \frac{1}{2} MR^2$$

讨论：

①若为实心圆柱体绕中心轴转动 $J = \frac{1}{2} MR^2$

②若一空心圆柱体绕中心轴转动

$$J = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi h \rho r^3 dr = \frac{1}{2}(\pi R_2^2 h\rho) R_2^2 - \frac{1}{2}(\pi R_1^2 h \rho) R_1^2$$

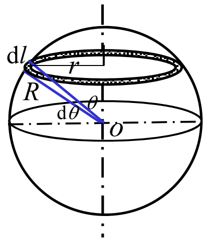
$$= \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \qquad M = \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho$$

薄球壳绕直径的 $J=\frac{2}{3}mR^2$

实心球绕直径的 $J=\frac{2}{5}mR^2$

求质量 m，半径 R 的薄球壳对直径的转动惯量



解：取离轴线距离相等的点的集合为积分元

$$\mathrm{d}s=2\pi r\mathrm{d}l=2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta$$

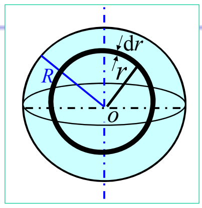
面密度 $\sigma=\frac{m}{4\pi R^2}$

$$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}s=\frac{1}{2}m\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=(R\sin\theta)^2\mathrm{d}m=\frac{1}{2}mR^2\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$J=\int\mathrm{d}J=\int_0^\pi\frac{1}{2}mR^2\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}mR^2$$

求质量 m，半径 R 的球体对直径的转动惯量



解：以距中心 r，厚 $\mathrm{d}r$ 的球壳为积分元

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r\\ \rho=\dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\end{array}\right\}\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}J=\frac{2}{3}\mathrm{d}m\cdot r^2=\frac{2mr^4\mathrm{d}r}{R^3}$$

$$J=\int\mathrm{d}J=\int_0^R\frac{2mr^4\mathrm{d}r}{R^3}=\frac{2}{5}mR^2$$

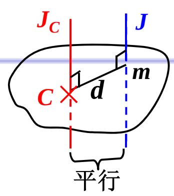
二. 计算转动惯量的几条规律

1. 对同一轴J具有可叠加性(如空心圆柱体)

$$\boxed{J=\sum J_i}$$

2. 平行轴定理

$$\boxed{J=J_C+md^2}$$

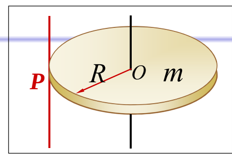


$$\therefore\quad J_C=J_{\min}$$

质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为 J_C，则对任一与该轴平行，相距为 d 的转轴的转动惯量

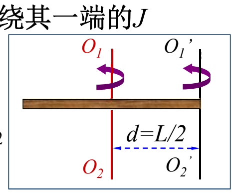
$$J=J_c+md^2$$

圆盘对P 轴的转动惯量



$$J_P=\frac{1}{2}mR^2+mR^2$$

质量为m，长为L的细棒绕其一端的J



$$J_c=\frac{1}{12}mL^2$$

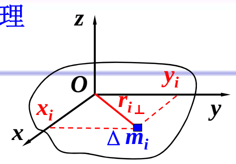
$$J=J_c+m\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{3}mL^2$$

3. 对薄平板刚体的正交轴定理

如图 $J_z = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

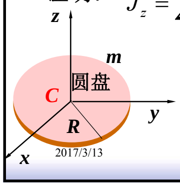
$= \sum \Delta m_i x_i^2 + \sum \Delta m_i y_i^2$

即 $\boxed{J_z = J_x + J_y}$



例：已知圆盘 $J_z = \frac{1}{2} mR^2$ 求对圆盘的一条直径的 J_x（或 J_y）

证明： $J_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$



由 $\begin{cases} J_z = J_y + J_x \\ J_x = J_y \end{cases}$

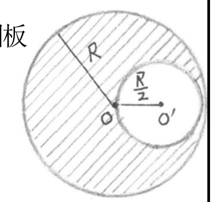
$\therefore \quad J_x = J_y = \frac{1}{4} mR^2$

例. 从半径为R的均匀薄板上，挖去一个直径为R的圆板，所形成的圆洞中心距圆薄板中心 $R/2$ 处，所剩薄板质量为m。求此时薄板对于通过原中心而与板面垂直的轴的转动惯量。（设板密度为ρ，厚度为 a ）

解： $J = J_2 - J_1$ ，

同轴J可叠加性

$\downarrow$ 挖洞后 $\downarrow$ 完整板 $\downarrow$ $\frac{R}{2}$圆板



$J_1 = \frac{1}{2} m_1 (\frac{R}{2})^2 + m_1 (\frac{R}{2})^2$

$= \frac{3}{2} \pi (\frac{R}{2})^2 a\rho (\frac{R}{2})^2 = \frac{3}{32} \pi a \rho R^4$

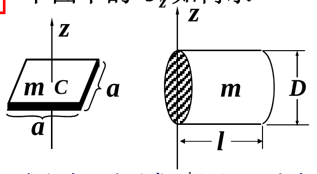
$J_2 = \frac{1}{2} m_2 R^2 = \frac{1}{2} \pi a \rho R^4$

$J = J_2 - J_1 = \frac{13}{32} \pi a \rho R^4$

又由于 $\left[\pi R - \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] a\rho = m$ 即 $\pi a \rho R^2 = \frac{4}{3} m$

带入上面求J的公式最后得 $J = \frac{13}{24} mR^2$

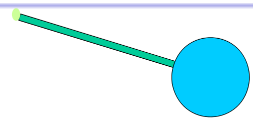
思考 下图中的 J_z 如何求？



可根据表6.1中的常用转动惯量求出

右图所示刚体对经过棒端且与棒垂直的轴的转动惯量如何计算？(棒长为L、球半径为R）

解：

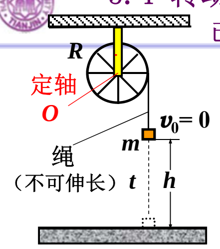


$J_{L1} = \frac{1}{3} m_L L^2$

$J_o = \frac{2}{5} m_o R^2 \quad J_{L2} = J_0 + m_0 d^2$

则： $J = \frac{1}{3} m_L L^2 + \frac{2}{5} m_o R^2 + m_o (L+R)^2$

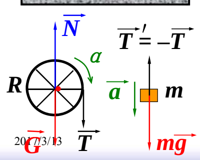
5.4 转动定律应用举例 $\boxed{M = J\alpha}$



已知： $R = 0.2$m， $m = 1$kg， $v_0 = 0$， $h = 1.5$m， 绳轮间无相对滑动，下落时间 $t = 3$s。（轮的质量分布未知）

求：轮对 O 轴 $J = ?$

解： 动力学关系：



对轮： $T \cdot R = J \cdot \alpha$ (1)

对m： $mg - T = ma$ (2)

运动学关系： $a = \alpha \cdot R$ (3)

$h = \frac{1}{2} at^2$ (4)

(1)~(4)联立解得： $J = (\frac{gt^2}{2h} - 1) mR^2$

分析结果：

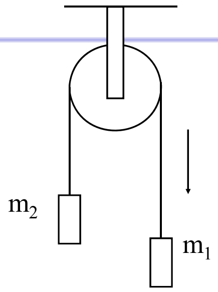
- 量纲对；
- h、m 一定，$J\uparrow \rightarrow t\uparrow$，合理；
- 若 $J = 0$，得 $h = \frac{1}{2} gt^2$， 正确。

代入数据：

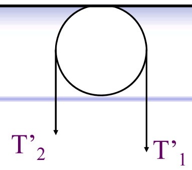
$$J = (\frac{9.8 \times 3^2}{2 \times 1.5} - 1) \times 1 \times 0.2^2 = 1.14 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

此为一种用实验测转动惯量的方法。

例2. 质量为**M**，半径为**r**的匀质圆盘，绕过中心的水平轴转动惯量为 $J=\frac{1}{2}Mr^2$，圆盘上挂一根长绳，设绳不伸长，且质量可以忽略，绳两端分别吊上质量为 m_1 和 $m_2(<m_1)$ 的重物，又设绳子与圆盘间无滑动，试求重物下落的加速度及绳中张力。

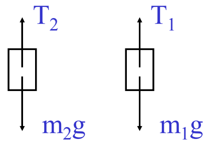


解：



$$\alpha=\frac{a}{r}$$

$$\begin{cases} m_1g-T_1=m_1a \\ m_2g-T_2=-m_2a \\ (T_1-T_2)r=J\alpha \qquad J=\frac{1}{2}Mr^2 \end{cases}$$



$$\therefore \quad a=\frac{2(m_1-m_2)}{M+2m_1+2m_2}g$$

$$T_1=\frac{m_1g(M+4m_2)}{M+2m_1+2m_2} \qquad T_2=\frac{m_2g(M+4m_1)}{M+2m_1+2m_2}$$