线性代数复习总结

第一部分

第一章 行列式

1. 基本知识：排列、反序(逆序)、反序(逆序)数、对换、奇/偶排列、余子式，代数余子式等概念.排列经一次互换改变奇偶性等基本结论.会排列逆序数的计算方法.

2. 掌握n阶行列式的定义.

$$|a_{ij}|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

（1）展开式共有$n!$项.

（2）每项是取自不同行不同列的n个元乘积，冠以正号或负号.

(3) 行标按自然顺序排列时，每项的正负号由列标构成排列的奇偶性(反序数)决定. $n!$项中一半取正号，一半取负号.

(4) 行列式表示一个数(值).

(5) 一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值记号相混淆.

另外，任意一项前面的符号是 $(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$

3. 掌握行列式按照某一行（列）展开，知道 *Laplace* 定理的结论.

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} |A|, & 当k=i \\ 0, & 当k\neq i \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{st} = \begin{cases} |A|, & 当j=t \\ 0, & 当j\neq t \end{cases}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{C_n^k} M_i A_i$$

4. <u>掌握</u>行列式的性质(6个).

- 行列互换（转置）值不变（性质1）
- 两行互换，反号（性质2）
- 一行的公因子可以提出（性质3）
- 某行元为两项之和，则等于两个行列式之和（性质4）
- 某行为零、两行相同或成比例，值为零（性质5）
- 某行倍数加到另一行，值不变（性质6）

5. 一些特殊的行列式及其性质，例如：对角形行列式、上(下)三角形行列式、范德蒙行列式等，会计算这些行列式的值，知道范德蒙行列式值为零的充要条件.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

6. 行列式的定义、性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.【或证明】

例：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

(定义)　　　　(性质)　　　　(展开)

注意: (1)要首先观察和分析行列式的特点，然后试一试化简，行不通再试别的方法.

(2)某些特殊的行列式求值需要讨论阶数n.

(3) 一些常见行列式处理方法：

已学过的方法有：

- 对角线法：二阶采用.
- 三角型法：用性质处理化简成容易计算的上(下)三角形行列式.
- 展开降阶法：先使得某一行（列）具有较多的零，再展开为低阶行列式.
- 拆项法：把某一行（列）的元拆成两（多）项，再分解成多个行列式的和.
- 归纳法：例如*Vandermonde*行列式的证明过程.
- 转化为*Vandermonde*行列式.
- 加边法
- 递推法

第二章 矩阵

1. 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵：零矩阵、行/列矩阵等，单位 / 对角 / 三角 / 对称 / 反对称 / 正交 矩阵及其性质. 理解矩阵的可交换. 了解行阶梯形 / 行最简矩阵.

   如对于正交矩阵A, B，有$A^T=A^{-1}$，A^{-1}, AB仍为正交阵.

   对称矩阵：$A=A^T$，反对称矩阵：$A=-A^T$.

   对角形矩阵的和、乘积、幂.

   用对角形矩阵左(右)乘一个矩阵的结果.

2. **掌握**矩阵的线性运算、乘法、转置，及运算规律，了解方阵的幂、方阵乘积的行列式.

只有当**左矩阵的列数等于右矩阵的行数**时，两个矩阵才能相乘.

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\quad B=(b_{ij})_{n\times s}\ \Rightarrow AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times s}$$

一般：$AB\neq BA,\ (AB)^k\neq A^kB^k.$

由$AB=O$**不能**得出A、B至少有一个零矩阵.

但是，若A为可逆矩阵，则可以得到$B=O$.

$$|\lambda A_n|=\lambda^n|A|$$

注意：矩阵与行列式线性运算的不同点，以及

$$(AB)^T=B^TA^T$$

$$|A_nB_n|=|A_n|\,|B_n|=|B_n|\,|A_n|$$

3. 掌握逆矩阵及其性质、矩阵可逆的充要条件，会用伴随矩阵求二阶矩阵逆矩阵.

如：

$|A|\neq 0$时A可逆，或对于方阵A，若存在方阵B，使 $AB=E$ $(AB=BA=E)$则A可逆。

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

$A^{-1}=A^*/|A|$，注意A^*中元素的排列顺序

对任意方阵A，有 $AA^*=A^*A=|A|E$

4. 掌握矩阵的初等变换、初等矩阵及性质，了解矩阵等价、矩阵的秩，会有关的判定定理，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

如：有三类初等变换，分别对应三类初等矩阵.

对矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$施行一次初等行(列)变换，其结果就等于对A左(右)乘一个相应的m(n)阶初等矩阵.

对任何矩阵$A_{m\times n}$总可经有限次初等行变换化为(行)阶梯形和行最简形.

n 级矩阵A可逆$\Leftrightarrow$它能表成一些初等矩阵的乘积.

可逆矩阵总可以经过一系列初等行(列)变换化成E.

矩阵的行秩等于列秩，等于A中一切非零子式最高阶数.

初等变换不改变矩阵的秩.

求逆矩阵的方法：

(1) 伴随矩阵法. （阶数较低）

(2) 由 $AB=E$ 或 $BA=E$.（待定系数法）

(3) 初等变换的方法.

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

(4) 分块矩阵的方法.

$$diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)^{-1}.$$

$$=diag(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_s^{-1}).$$

矩阵秩为$r \Leftrightarrow$ 有一个r级子式不为零，同时所有 $r+1$ 级子式全为零.

$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

P_m, Q_n可逆，$A_{m\times n}$则 $r(PA) = r(A) = r(AQ)$

若A中存在一个r阶子式不为零，则 $r_A \ge r$;

若A中所有r阶子式都为零，则 $r_A < r$.

5. 掌握分块矩阵及其运算，注意分块矩阵运算需要满足的分块条件. 会使用分块矩阵的初等变换.

注意：$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix}$ 的应用.

但 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq |AB| - |CD|$

$$(A_{ij})_{st}(B_{ij})_{tr} = (C_{ij})_{sr} = \left(\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}\right)_{sr}$$

分块对角形矩阵的运算性质.

分块矩阵的初等变换和分块初等矩阵.

对一个分块矩阵作一次分块矩阵的初等行（列）变换，相当于在矩阵的左（右）边乘上一个相应的分块初等矩阵，反之亦然.

6. 理解矩阵之间的三种关系(等价、相似、合同)及性质.

若矩阵A经过有限次初等变换化为B，则称矩阵A和B等价.

(1) 矩阵A与B等价⇔有初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$，$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 使 $B = P_s P_{s-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$.

(2) 两个 $s \times n$ 矩阵A, B 等价⇔存在可逆的 s级矩阵P与可逆的n 级矩阵Q使 $B = PAQ$.

(3)任意一个 $m \times n$ 矩阵A 都与一形式为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ 的矩阵等价，它称为矩阵A 的标准形.

即:存在可逆阵$P=P_m$和可逆阵$Q=Q_n$使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

设A，B为两个n阶矩阵. 若存在满秩矩阵M，使$B=M^{-1}AM$，则称矩阵A与B相似. 若此时还有M为正交矩阵，则A与B正交相似。

设A, B是数域F上的n阶矩阵，若存在F上的可逆矩阵C，使得$B=C^TAC$成立，则称A与B是合同矩阵.

秩为r的n阶对称矩阵A必合同对角形矩阵，即存在满秩矩阵C，使得

$$C^T AC = diag(d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 不为零.

•矩阵等价、相似、合同、正交相似的联系与区别

$\forall A,B\in M_n$,

A与B**相似** $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$

A与B**合同** $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵C，使$C^{T}AC=B$

A与B正交**相似** $\Leftrightarrow$ 存在正交阵Q，使$Q^{T}AQ=Q^{-1}AQ=B$

$\forall A,B\in M_{m\times n}$,

A与B**等价** $\Leftrightarrow$ 存在m阶可逆矩阵P，n阶可逆矩阵Q，使$PAQ=B$

共同的性质：自反性、对称性、传递性

•等价、相似、合同、正交相似的关系

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{A\text{与}B\text{正交相似}} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\boxed{A\text{与}B\text{合同}} \arrow[dr] & & \boxed{A\text{与}B\text{相似}} \arrow[dl] \\
 & \boxed{\text{方阵}A\text{与}B\text{等价}} &
\end{tikzcd}$$

•等价、相似、合同、正交相似的不变量

<u>等价:</u> 秩，即$R(A)=R(B)$

<u>相似:</u> 秩，即$R(A)=R(B)$

特征多项式，特征值 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

<u>合同:</u> 秩，即$R(A)=R(B)$

对称性，即若A对称，则B也对称

对称阵A、B对应的二次型的正(负)惯性指数

对称阵A、B对应的二次型的规范型

<u>正交相似:</u> 相似+合同

7. 知道实对称矩阵的性质：

(1) 特征值为实数；

(2) 属于不同特征值的特征向量正交；

(而对一般矩阵，属于不同特征值的特征向量仅仅线性无关)

(3) 特征值的代数重数与几何重数相等；

（即与特征子空间维数相等）

(4) 必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值.

- **求方阵特征值和特征向量的步骤**

计算$|\lambda E-A|$ → 求$|\lambda E-A| = 0$的根 → 求$(\lambda E-A)x = 0$的基础解系

- **实对称阵对角化的步骤**

  - 求A全部特征值（所有特征值的重根次数之和等于n）
  - 对每个k_i重特征值λ_i求方程$(A-\lambda_i E)x=0$的基础解系
  - 得出对应于特征值λ_i的k_i个线性无关的特征向量
  - 将对应于特征值λ_i的k_i个线性无关的特征向量正交、单位化（总共可以得到n个两两正交的单位特征向量）
  - 将n个两两正交的单位特征向量构成正交阵P，即可满足$P^{-1}AP=\Lambda$(注意顺序)。

二、典型例题

例1 设 a_1, a_2, a_3, b 均为3维列向量, 矩阵$A=(a_1, a_2, a_3)$, $B=(3a_1, 2a_2, b)$, 且已知行列式 $\det A=2$, $\det B=-6$.

计算 $\det(3A-B)$ 和 $\det(3A+B)$.

例2 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, 计算 $2M_{31}+M_{33}+M_{34}$.

例3 计算矩阵 A_{2n} 的行列式, 其中

$$A_{2n}=\begin{pmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{pmatrix}$$

二、典型例题

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $A^2+AB-A=E$, 求 A^9和 B.

例5 设 A 满足方程 $A^2+2A-E=O$, 证明 A 与 $A+3E$ 都可逆, 并求它们的逆阵.

例6 已知 $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $AB=B+A$, 求 B.

例7 设 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A=(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$,

求 A^n.

二、典型例题

例1 设 a_1, a_2, a_3, b 均为3维列向量, 矩阵$A=(a_1, a_2, a_3)$, $B=(3a_1, 2a_2, b)$, 且已知行列式 $\det A=2$, $\det B=-6$.

计算 $\det(3A-B)$ 和 $\det(3A+B)$.

解

$$\det(3A-B)=\det(0, a_2, 3a_3-b)=0$$

$$\det(3A+B)=\det(6a_1, 5a_2, 3a_3+b)$$

$$=30\det(a_1, a_2, 3a_3+b)$$

$$=30[\det(a_1, a_2, 3a_3)+\det(a_1, a_2, b)]$$

$$=30[3\det A+\frac{1}{6}\det B]=150$$

例2 设 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\1&2&3&4\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$，计算 $2M_{31}+M_{33}+M_{34}$.

解 $2M_{31}+M_{33}+M_{34}$

$$=2A_{31}+0A_{32}+1A_{33}+(-1)A_{34}$$

$$=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_4+5r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-8&0&4&-6\\2&0&1&-1\\16&0&-2&7\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-8&4&-6\\2&1&-1\\16&-2&7\end{vmatrix}\overset{c_1-2c_2}{\underset{c_3+c_2}{=\!=\!=}}-\begin{vmatrix}-16&4&-2\\0&1&0\\20&-2&5\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-16&-2\\20&5\end{vmatrix}=-(-80+40)=40$$

例3 计算矩阵 A_{2n} 的行列式, 其中

$$A_{2n}=\begin{pmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{pmatrix}$$

解

$$|A_{2n}|=\begin{vmatrix} a_n & b_n & \\ c_n & d_n & \\ & & A_{2(n-1)} \end{vmatrix}=(a_nd_n-b_nc_n)|A_{2(n-1)}|$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})|A_{2(n-2)}|=\cdots$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})\cdots(a_2d_2-b_2c_2)|A_2|$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$$

例4 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,

且 $A^2+AB-A=E$, 求 A^9

和 B.

解 $A^2=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=9E$

$$A^8=(A^2)^4=(9E)^4=3^8E$$

$$A^9=3^8A$$

$$=\begin{pmatrix}6561&-13122&13122\\-13122&6561&13122\\13122&13122&6561\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}A$$

$$AB=E+A-A^2$$

$$B=A^{-1}(E+A-A^2)$$

$$=A^{-1}+E-A$$

$$=\frac{1}{9}A+E-A$$

$$=E-\frac{8}{9}A$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&16&-16\\16&1&-16\\-16&-16&1\end{pmatrix}$$

例5 设 A 满足方程 $A^2+2A-E=O$, 证明 A 与 $A+3E$ 都可逆, 并求它们的逆阵.

证明 由 $A^2+2A-E=O$, 得

$$A(A+2E)=E$$

因此 A 可逆, 且有 $A^{-1}=A+2E$.

$$A^2+2A-E=A(A+3E)-A-E$$
$$=A(A+3E)-(A+3E)+2E$$
$$=(A-E)(A+3E)+2E$$
$$(A-E)(A+3E)=-2E$$
$$\frac{1}{2}(E-A)(A+3E)=E$$

因此 $A+3E$ 可逆, 且有 $(A+3E)^{-1}=\frac{1}{2}(E-A)$.

例6 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}$，且 $AB = B + A$，求 B.

解 $|A|^3 = |A^*| = 64$，$|A| = 4$，由 $AB = B + A$，得

$$B = A^{-1}B + E, \quad (E - A^{-1})B = E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \quad E - A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = (E - A^{-1})^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_3]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+2r_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-0.5\, r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$B=(E-A^{-1})^{-1}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

例7 设

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&3&3&4\\1&2&2&3\\0&0&3&4\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$A=(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$，求 A^n.

解 $A=(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$

$$=[C(E-C^{-1}B)]^{\mathrm{T}}=(C-B)^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix},$$

令 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，

则有

$$A_1^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2A_1,$$

$$A_1^n=2^{n-1}A_1,\quad A_2=2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

$$A_2^n=2^n\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^n=2^n\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix},$$

$$A^n=\begin{pmatrix}A_1^n&O\\O&A_2^n\end{pmatrix}$$

$$=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2n&2\end{pmatrix}$$