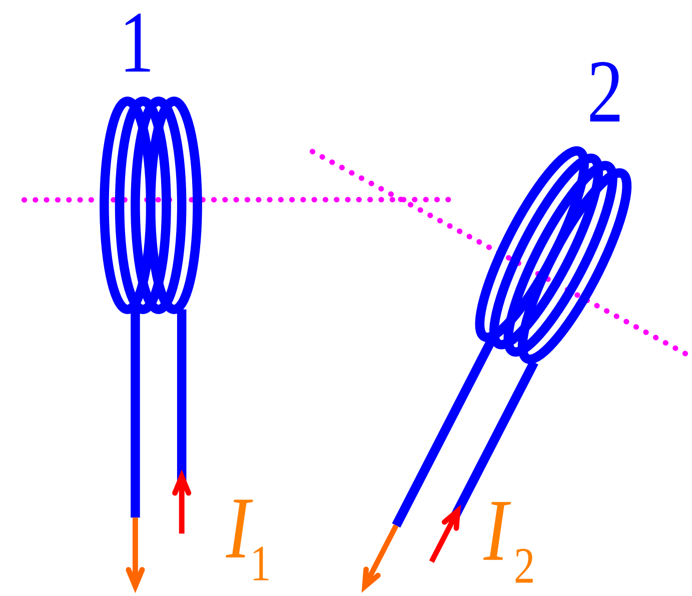
4 自感和互感

预备知识：

不论何种方式只要能使穿过闭合回路的磁通量发生变化，此闭合回路内就会有感应电动势出现。



引起磁通量变化的原因是多种多样的，必须依据情况作具体分析。

如图，依场叠加原理知，穿过回路1的磁通量为：

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}$$

由回路1中的电流I_1在回路1中引起的磁通量

由回路2中的电流I_2在回路1中引起的磁通量

则，回路1的电动势为：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_1}{dt} = (-\frac{d\Phi_{11}}{dt}) + (-\frac{d\Phi_{21}}{dt})$$

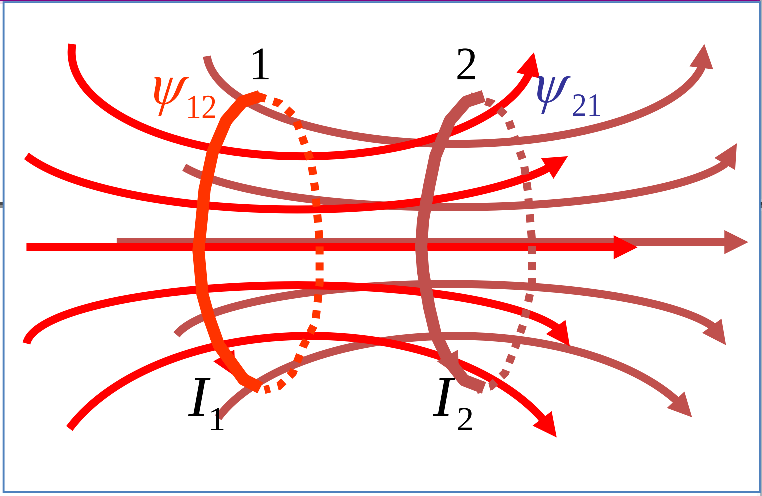
由回路1条件变化而在回路1中引起的电动势

由回路2条件变化而在回路1中引起的电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_{11}}{dt}$$ ～自感电动势

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt}$$ ～互感电动势

一、互感 互感系数



1.互感现象

当线圈 1中的电流变化时，所激发的磁场会在它邻近的另一个线圈 2 中产生感应电动势。

这种现象称为互感现象。该电动势叫互感电动势。

互感电动势与线圈电流变化率有关；与两个线圈结构以及它们之间的相对位置有关。

2.互感系数

线圈 1所激发的磁场通过线圈 2的磁通链数 Ψ_{12}。

$\Psi_{12} = N_2\Phi_{m12}$， Φ_{m12}由“1”产生穿过“2”的磁通；

线圈2所激发的磁场通过线圈1的磁通链数为 Ψ_{21} 。

$\Psi_{21} = N_1\Phi_{m21}$，$\Phi_{m21}$由“2”产生穿过“1”的磁通.

根据毕—萨定律 $$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$\Phi=\iint\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\Psi_{12}\propto I_1,\quad \Psi_{21}\propto I_2$$

写成等式：$\Psi_{12}=M_{12}I_1,$

$\Psi_{21}=M_{21}I_2$ M_{21} 、M_{12}是比例系数.

可以证明两个给定的线圈有：$M_{21}=M_{12}=M$

M 就叫做这两个线圈的互感系数，简称为互感。

$$M=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\frac{\Psi_{21}}{I_2}$$

单位：亨利（H）$1H=1Wb\cdot A^{-1}$

$1H=10^3mH=10^6\mu H$

注意：

互感仅与两个线圈形状、大小、匝数、相对位置以及周围的磁介质有关（无铁磁质时为常量）.

互感定义式： $M=\dfrac{\Psi_{12}}{I_1}=\dfrac{\Psi_{21}}{I_2}$

两个线圈的互感M在数值上等于其中一个线圈中的电流为1单位时，穿过另一个线圈所围面积的磁通匝链数。

$$\Psi_{12}=M_{12}I_1,\ \varepsilon_{12}=-\frac{d\Psi_{12}}{dt}=-M_{12}\frac{dI_1}{dt}=-M\frac{dI_1}{dt}$$

$$\Psi_{21}=M_{21}I_2\quad \varepsilon_{21}=-\frac{d\Psi_{21}}{dt}=-M_{21}\frac{dI_2}{dt}=-M\frac{dI_2}{dt}$$

互感系数M的物理意义：

当一个线圈中的电流变化率为1单位时，在另一个线圈中产生的感应电动势的绝对值。

$$M=-\frac{\varepsilon_{21}}{\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}}=-\frac{\varepsilon_{12}}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}$$ ～第二种定义式

M的值通常用实验方法测定，一些较简单的可用计算方法求得。

互感系数的计算：

①假设线圈中的电流 I；

②求另一个线圈中的磁通量 Φ_m；

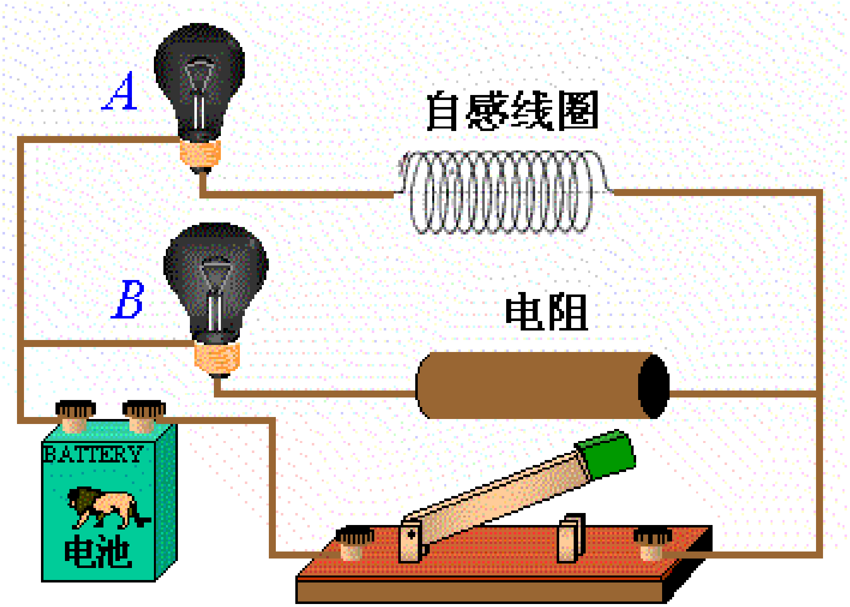
③由定义求出互感系数 M。

设 $I_1 \longrightarrow I_1$的磁场分布$\vec{B}_1 \longrightarrow$ 穿过回路2的 Ψ_{12}

$$\Psi_{12} = N_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} \longrightarrow \text{得 } M = \frac{\Psi_{12}}{I_1}$$

二、自感 自感系数

1. 自感现象



当线圈中电流变化时，它所激发的磁场通过线圈自身的磁通量也在变化，从而在回路自身中产生感生电动势的现象叫**自感现象**。

该电动势称为自感电动势。

2. 自感系数

(1) 定义：

由毕-萨定律： $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$ $\qquad |d\vec{B}| \propto I$

由叠加原理： $\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B}$ $\qquad B \propto I$

磁链： $\psi_m = N\iint_s \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ $\qquad \psi_m \propto I$ $\qquad \psi_m = LI$

自感系数： $L = \dfrac{\psi_m}{I}$

与电流无关，只决定于回路形状、大小、匝数及周围介质的磁导率。

定义：某回路的自感，在数值上等于通有单位电流时，穿过回路的全磁通。

(2) 物理意义

由法拉第定律

自感电动势：$$\varepsilon_L = -\frac{d\psi_m}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

式中负号表明自感电动势的方向总是要使它阻碍回路本身电流的变化。

$$L = -\frac{\varepsilon_L}{dI/dt}$$ ～第二种定义式

物理意义：当 $\frac{dI}{dt}=1$ 时，$L=-\varepsilon_L$

电流强度变化率为1单位时，在这个线圈中产生的感应电动势等于该线圈的自感系数。

$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$一定，$L\uparrow$，$|\varepsilon_L|\uparrow$ 线圈阻碍I变化能力越强。

所以说，自感 L有维持原电路状态的能力，L就是这种能力大小的量度，它表征回路电磁惯性的大小。

L：描述线圈电磁惯性的大小

L单位：亨利（H） $1H = 1Wb \cdot A^{-1}$

（3）计算：求L的步骤

①假设线圈中的电流 I；

②求线圈中的磁通量 Φ_m；

③由定义求出自感系数 L。

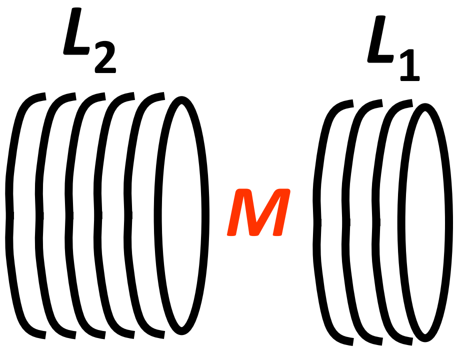
$$\text{设 } I \longrightarrow \vec{B}\text{ 分布} \longrightarrow \text{求 } \psi_m = N\iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \longrightarrow L = \frac{\psi_m}{I}$$

(4) 自感的应用：稳流，LC 谐振电路, 滤波电路等.

自感和互感统称为电感。

自感与互感的关系：

- 当两线圈相距较近时，自感和互感同时存在。



$$\psi = Li = N\varphi$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{N_1\varphi_1}{i_1}, \quad L_2 = \frac{N_2\varphi_2}{i_2}$$

$$\psi_{12} = Mi_1 = N_2\varphi_{12} \qquad \Rightarrow M = \frac{N_2\varphi_{12}}{i_1}$$

$$\psi_{21} = Mi_2 = N_1\varphi_{21} \qquad \Rightarrow M = \frac{N_1\varphi_{21}}{i_2}$$

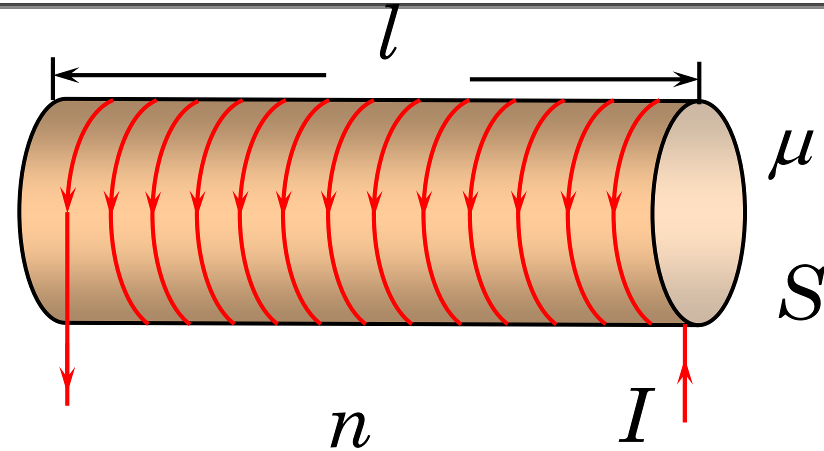
- 若一个线圈产生的磁力线全部穿过另一个线圈的每一匝导线，称为两线圈之间无漏磁。此时两线圈耦合最紧密，称理想耦合。
- 此时： $\varphi_{12}=\varphi_1 \qquad \varphi_{21}=\varphi_2$

$$M^2=\frac{N_2\varphi_{12}}{i_1}\cdot\frac{N_1\varphi_{21}}{i_2}=\frac{N_2\varphi_1}{i_1}\cdot\frac{N_1\varphi_2}{i_2}=L_1L_2$$

$M=\sqrt{L_1L_2}$ (无漏磁，理想耦合）

- 当有漏磁时： $M<\sqrt{L_1L_2}$
- 综合： $M\le\sqrt{L_1L_2}$

例1：一长直螺线管，线圈密度为 n，长度为 l，横截面积为 S，求线圈的自感系数 L 。



解：设线圈中通有电流 I，

线圈中的磁通量为：

$$\Phi_m = BS = \mu_0 nIS$$

线圈中的自感系数L为：

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi_m}{I} = \frac{N\mu_0 nIS}{I}$$

其中匝数：$N = ln$

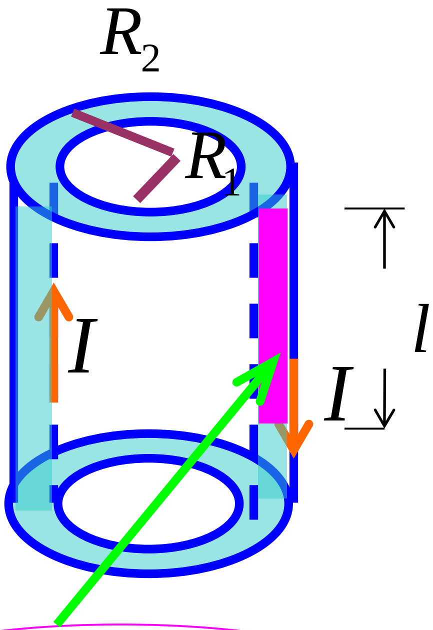
则自感系数 $L = \dfrac{N\mu_0 nIS}{I} = \dfrac{ln\mu_0 n\cancel{I}S}{\cancel{I}} = \mu_0 n^2 lS = \mu_0 n^2 V$

提高 L的途径

例2：一电缆由内外半径分别为R_1、R_2的两个无限长同轴圆筒状导体构成。两圆筒电流大小相等方向相反。计算电缆单位长度的自感。

解：根据对称性和安培环路定理，在内圆筒和外圆筒外的空间磁场为零。两圆筒间磁场为:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\quad (R_1\le r\le R_2)$$



考虑 *l*长电缆通过面元 *ldr* 的磁通量为

$$d\Phi=B\cdot dr\cdot l=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr$$

$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

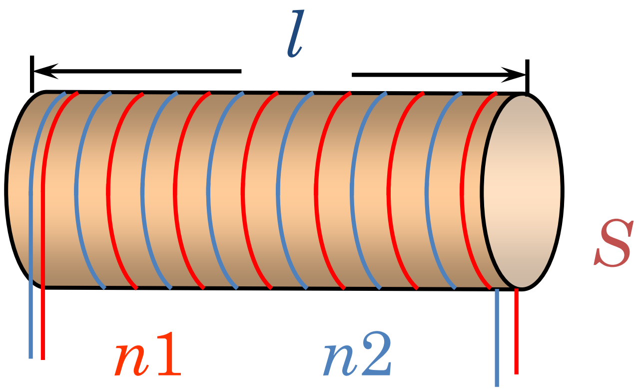
电缆单位长度的自感:

$$L=\frac{\Phi}{l\cdot I}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例3： 长为 l、横截面积为 S 的长直螺线管，两线圈的线圈密度分别为 n_1 、n_2，两线圈完全耦合，求两线圈的互感系数。

解： 设线圈 1 中的电流为 I_1，

线圈 1 在线圈 2 中产生的磁链：



$$\Psi_{12} = N_2\Phi_{m12} = l n_2 B_1 S$$

$$= l n_2 \mu_0 n_1 I_1 S$$

线圈 1 在线圈 2 中产生的互感系数：

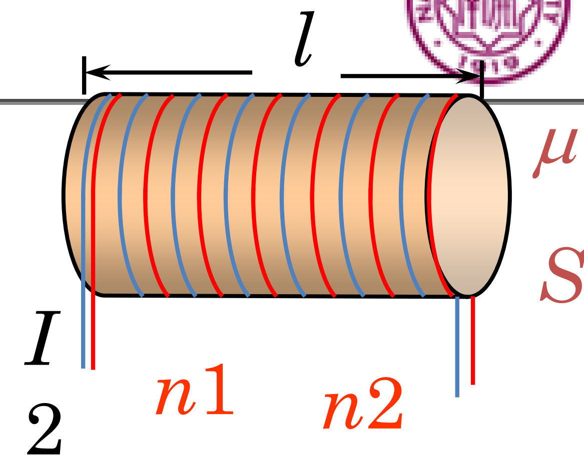
$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l S$$

设线圈 2 中的电流为 I_2， 线圈 2 在线圈 1 中产生的磁链：

$$\Psi_{21} = N_1\Phi_{m21} = l n_1 B_2 S = l n_1 \mu_0 n_2 I_2 S$$

线圈 2 在线圈 1 中产生的互感系数：

$$M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_2}=\mu_0 n_1 n_2 lS,$$



由此可看出，两线圈的互感系数相等。

$$M_{21}=M_{12}=M=\mu_0 n_1 n_2 lS$$

例4：证明上例中两线圈的互感系数为：$M=\sqrt{L_1 L_2}$

证明： 线圈1的自感系数为：$L_1=\mu_0 n_1^2 lS$

线圈 2 的自感系数为：$L_2=\mu_0 n_2^2 lS$

$$L_1 L_2=\mu_0^2 n_1^2 n_2^2 l^2 S^2$$

$$\sqrt{L_1 L_2}=\mu_0 n_1 n_2 lS=M$$ 证毕。

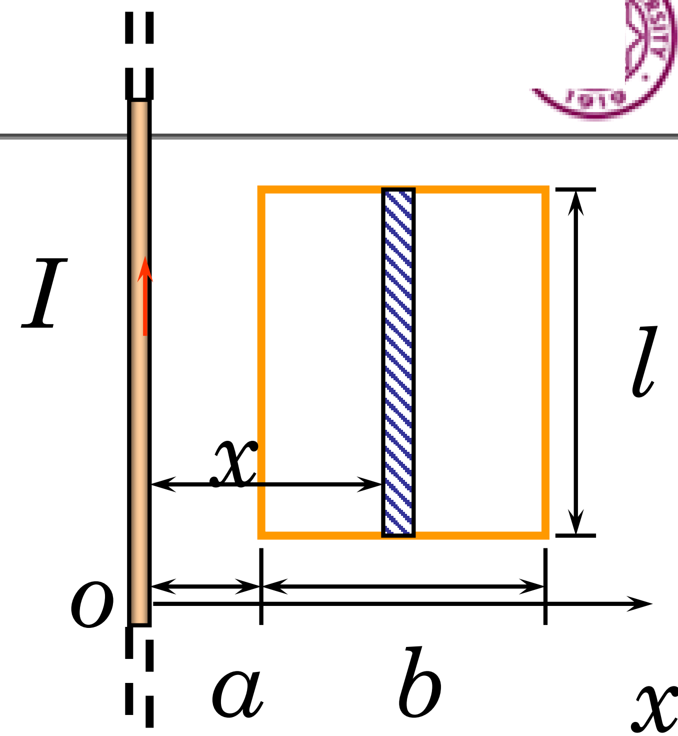
$$\boxed{M_{12}=\mu n_1 n_2 lS}$$

当两个线圈中的每一个线圈所产生的磁通量对于每一匝来说都相等，并且全部穿过另一个线圈的每一匝，这种情形叫做无漏磁。

对于两线圈不完全耦合（有漏磁）时

$M = k\sqrt{L_1 L_2}$ 其中 k 为耦合系数,（$0<k<1$）

例5： 在长直导线旁距 a 放置一长为 l、宽为 b 的矩形导线框，求两导体的互感系数。



解：设直导线中通有电流 I，

载流直导线在矩形线圈内产生的磁通量为：

$$\Phi_m = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^{a+b} Bl\,dx$$

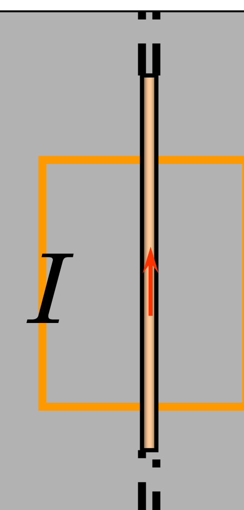
$$= \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\,dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

互感系数：

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{N\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l \cancel{I}}{2\pi \cancel{I}}\ln\frac{a+b}{a}$$

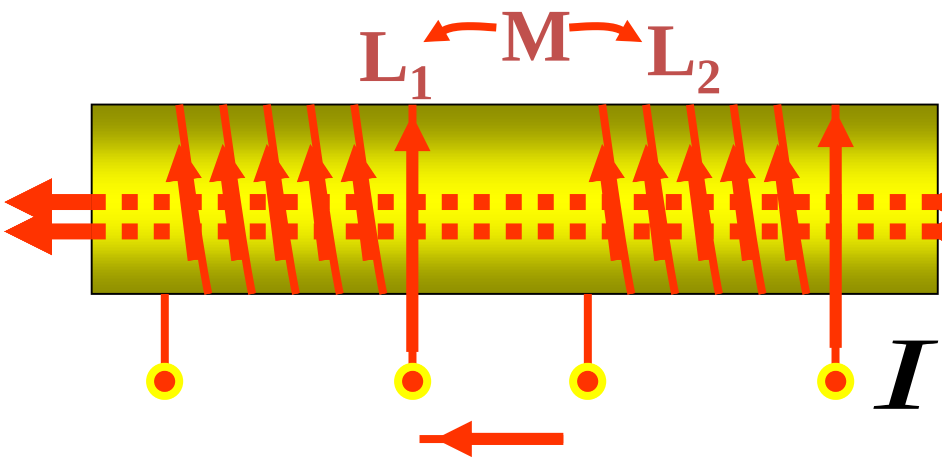
$$= \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

请考虑：当导线放在矩形导线框中部，互感系数为多大。



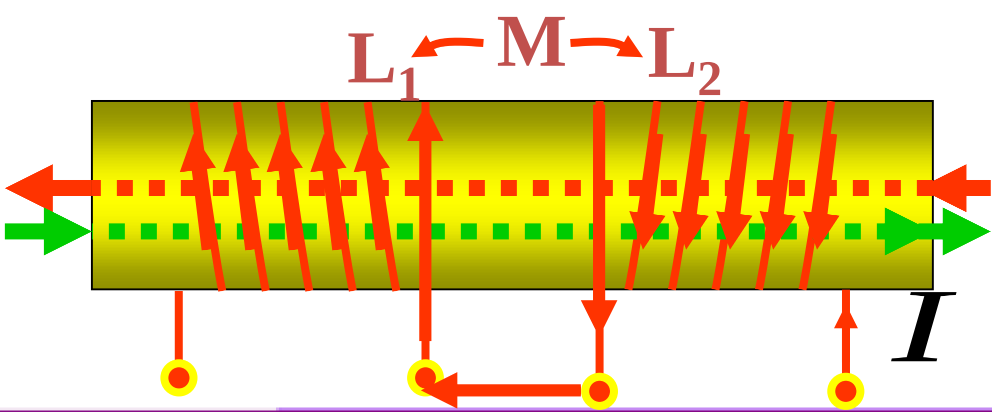
例6：求自感量分别为L_1、L_2的两线圈串联后的总自感量。

解：1）顺串：两个线圈中的磁场互相加强。



$$L_{总} = L_1 + L_2 + 2M$$

2）反串：两个线圈中的磁场互相减弱。

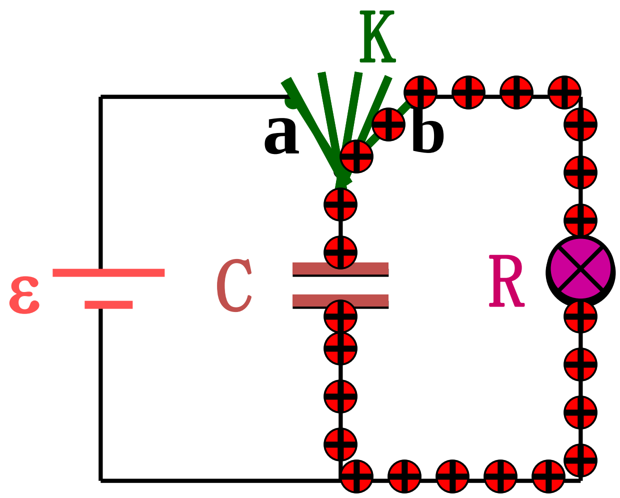


$$L_{总} = L_1 + L_2 - 2M$$

三、电场能量和磁场能量

1. 电容器的能量

电容器带电时具有能量，实验如下：



将K倒向a 端 → 电容充电

再将K到向b端→

→灯泡发出一次强的闪光!

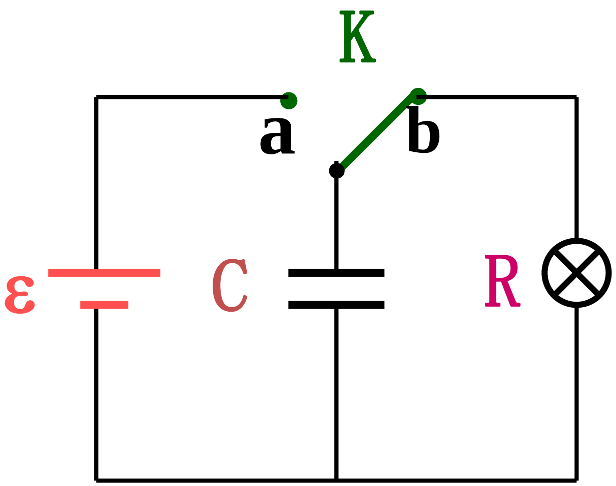
能量从哪里来?

→ 电容器释放。

当电容器带有电量Q、相应的电压为U时，所具有的能量W=?

利用放电时电场力作功来计算：

放电到某t时刻，极板还剩电荷q，极板的电位差：



$$u=\frac{q}{C}$$

将(dq)的正电荷从正极板→

→负极板，电场力作功为：

$$A=\int dA=\int_Q (dq)u=\int_Q \frac{q}{c}dq$$

$$A=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

即电容器带有电量Q时具有的能量：

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\begin{cases}=\frac{1}{2}CU^2\\ =\frac{1}{2}QU\end{cases}$$

C也标志电容器储能的本领。

2. 磁场的能量

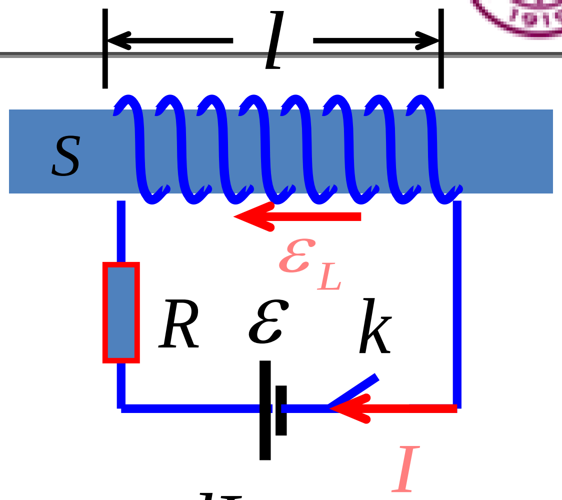
- 在电容器充电过程中，外力克服静电力作功，将非静电力能→电能。当极板电压为U时，电容器储存的电能为：

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

- 在电流激发磁场的过程中，也是要供给能量的，所以磁场也应具有能量。所以，电感也可以储能，等于电流建立过程中电源反抗感应电动势所做的功。

（1）自感磁能（自感储能）：

设：有一长为l，横截面为S, 匝数为N，自感为L的长直螺线管。电源内阻及螺线管的直流电阻不计。



当K接通时

在I↗过程中，L内产生与电源电动势ε反向的自感电动势：

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

由欧姆定律：

$$\varepsilon - L\frac{dI}{dt} = RI$$

同乘Idt，在0～t内积分：

$$\int_0^t \varepsilon I dt - \int_0^I LIdI = \int_0^t RI^2 dt$$

$$\int_0^t \varepsilon I dt = \frac{1}{2} L I^2 + \int_0^t R I^2 dt$$

物理意义：

0～t时间内回路电阻R所放出的焦耳热

0～t时间内电源ε反抗自感电动势所作的功

0～t时间间隔内电源ε所作的功，即ε提供的能量

结论：电流在线圈内建立磁场的过程中，电源供给的能量分成两个部分：一部分转换为热能，另一部分则转换成线圈内的磁场能量。

即，电源ε反抗自感电动势所作的功在建立磁场过程中转换成线圈内磁场的能量，储存在螺线管内。

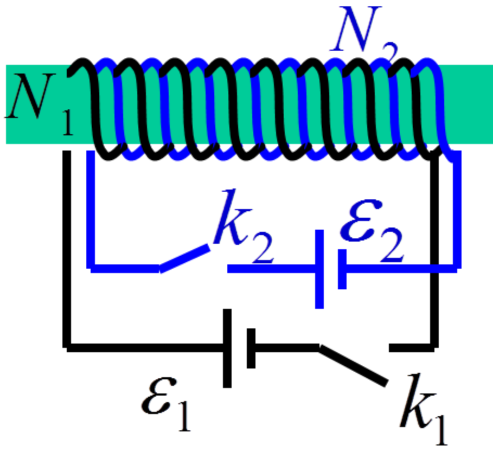
自感磁能： $A' = \frac{1}{2} L I^2$

对长直螺线管：$L=\mu_0 n^2 V \quad I=\dfrac{B}{\mu n}$

$$A'=\frac{1}{2}(\mu_0 n^2 V)\cdot\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2=\frac{B^2}{2\mu_0}\cdot V$$

（2）互感磁能（互感储能）：

当两个线圈中都通有电流时，除各自通过自感储能外，还会通过互感储存一部分能量，叫做互感磁能。其等于电流建立过程中，外力反抗互感电动势所做的功。



- 在dt时间内，线圈2的电流建立过程中反抗线圈1中的互感电动势所作的功为：

$$dA_2 = -\varepsilon_{12} i_2 dt$$

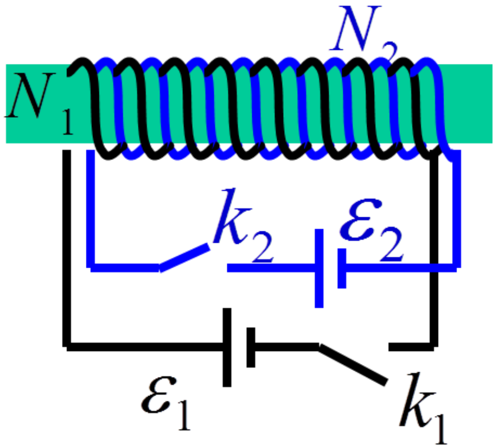
- 在dt时间内，线圈1的电流建立过程中反抗线圈2中的互感电动势所作的功为：

$$dA_1 = -\varepsilon_{21} i_1 dt$$

- 两线圈的互感储能：

$$W_M = \int (-\varepsilon_{12} i_2 - \varepsilon_{21} i_1) dt$$

$$\because \varepsilon_{12} = -M \frac{di_1}{dt} \qquad \varepsilon_{21} = -M \frac{di_2}{dt}$$



$$\therefore W_M = \int (i_2 M \frac{di_1}{dt} + i_1 M \frac{di_2}{dt}) dt$$

$$= M \int (i_2 \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{di_2}{dt}) dt$$

$$= M \int \frac{d(i_1 i_2)}{dt} \cdot dt = M \int_0^{I_1 I_2} d(i_1 i_2) = M I_1 I_2$$

$W_M = M I_1 I_2$ ——互感储能。

也可写成对称形式：

$$W_M = \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1$$

3、电感磁能

- 自感磁能和互感磁能统称为电感储能，因而对两个线圈组成的系统，当各自电流为 I_1，I_2，总的电感储能为：

$$W = W_L + W_M = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + \frac{1}{2}M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2}M_{21} I_2 I_1$$

若有N个线圈：

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} M_{ji} I_j I_i$$

自感能： $A = \frac{1}{2} L I^2$

互感能： $A = M I_1 I_2$

磁能： $W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$

若有N个线圈：

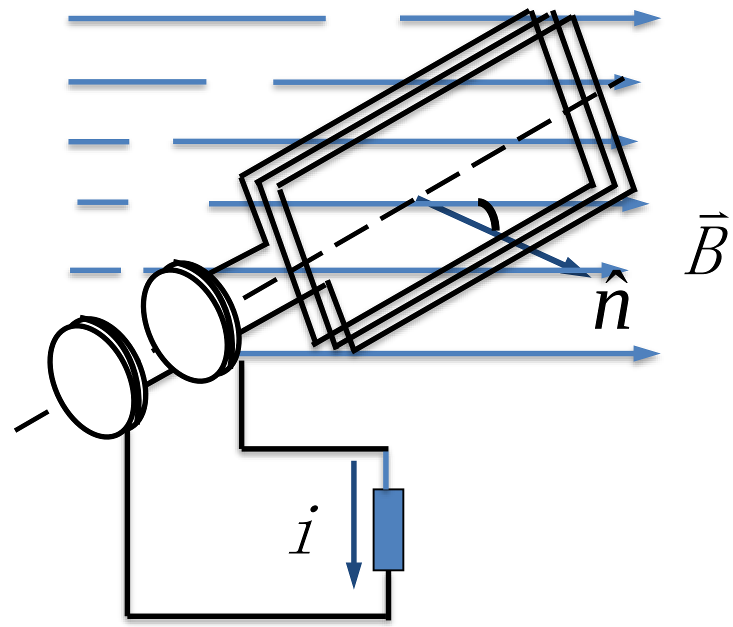
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} M_{ji} I_j I_i$$

电磁感应的应用

- 电磁感应在实际生产实践及科研领域的应用十分广泛，下面就对典型的应用举例说明。

1、交流发电机

- 发电机是电磁感应最直接最重要的应用，发电机的原理图为：
- 当线圈在磁场中转动时，通过线圈所围曲面的磁通量就会发生变化。



- 根据法拉第定律，线圈中就会有感应电动势产生。线圈与外电路连接，组成闭合回路，就会产生感应电流，从而起到了发电的作用。
- 设线圈的匝数为$\boldsymbol{N}$，匀角速度为$\boldsymbol{\omega}$，面积为$\boldsymbol{S}$。$\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$时刻，法线方向$\hat{\boldsymbol{n}}$与$\vec{\boldsymbol{B}}$的夹角$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}$。

t时刻，$\theta=\omega t$。此时线圈的磁通量为：

$$\phi = NSB\cos\omega t$$

感应电动势：$\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt} = \omega NSB\sin\omega t$

设：$\varepsilon_m = NSB\omega$，　　则：$\varepsilon = \varepsilon_m \sin\omega t$

设回路中电阻为R，则感应电流为：

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_m}{R}\sin\omega t$$

设$I_m = \varepsilon_m / R$ ——感应电流的峰值

$$\Rightarrow\ i = I_m \sin\omega t$$

- 由此可见，在均匀磁场中，匀速旋转的线圈，其产生的感应电流是时间的正弦函数，简称为简谐电流。
- 从能量转换角度给予分析：

机械能→ 电能（通过洛伦兹力传递）

2、感应加速器

3、电磁感应的几种效应

热效应-----涡电流

阻尼效应

趋肤效应

在稳恒电流中，导体中的电流密度是均匀的；但当电流为交变电流时，电流密度从内到外逐渐增大，这种效应就叫电磁感应的趋肤效应。

应用：表面淬火。

克服：传输电缆采用辫式结构，甚至表面镀银。

4、其它应用

灵敏电流计、冲击电流计、电磁流量计、感应圈等。

The end!