

第二章 矩阵代数

第二节 矩阵的代数运算

目的：掌握矩阵代数运算的定义、条件及运算性质.

§ 2.2.1 矩阵的加法与数乘

一、矩阵的加法

1、定义

两个同型矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 的对应元相加所得的矩阵 $C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 称为 A 和 B 的和, 记作 $C = A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法就是矩阵对应的元相加

说明 只有当两个矩阵是**同型矩阵**时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2、运算性质

设 A, B, C, O 为同型矩阵，则有

$$(1) A + B = B + A$$

$$(2) (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(3) A + O = A$$

$$O + A = A$$

$$(4) A + (-A) = O$$

另外，矩阵的**减法**定义为： $A - B = A + (-B)$.

注意：

- 对于矩阵有

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- 而对于行列式一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

二、数与矩阵相乘

1、定义

设 λ 是一个数，矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，则 $(\lambda a_{ij})_{m \times n}$ 称为矩阵 A 和数 λ 的(数量)乘积，记为 λA 或 $A\lambda$ 。

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

特别的, λE 称为数量矩阵.

2、线性运算的运算性质

矩阵的加（减）法和数乘统称为矩阵的**线性运算**，这些运算都归结为**数（元）**的加法与乘法。

运算性质

设 A, B 为同型矩阵， λ, μ 为数，则

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

有矩阵 X **满足** $A+3X=2B$, **求** X .

解:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}(2B - A) = \frac{1}{3} \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

又如设 $A=(a_{ij})_n$, k 为数, 则

$$\begin{aligned} |kA| &= \left| k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} \\ &= k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n |A|. \end{aligned}$$

故对于 n 阶方阵 A 有: $|kA|=k^n|A|$.

三、线性组合

给定若干个同型矩阵 A_1, A_2, \dots, A_m ，经线性运算

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_m A_m = \sum_{j=1}^m \lambda_j A_j = B,$$

(其中 λ_j 为常数, $j=1, 2, \dots, m$)

得到的矩阵 B 称为矩阵 A_1, A_2, \dots, A_m 的线性组合.

或者称矩阵 B 可经(由)矩阵 A_1, A_2, \dots, A_m 线性表出(线性表示)。

线性组合是讨论同型矩阵之间是否有所谓线性关系的基本概念. 特别是当它们都是 n 维向量时, 这种讨论很有用.

第三章将详细讨论.

例 设 $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

证明：任何一个二阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

都是 M_1, M_2, M_3, M_4 **的线性组合.**

证明：显然

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}M_1 + a_{12}M_2 + a_{21}M_3 + a_{22}M_4.$$

证毕.

§ 2.2.2 矩阵的乘法

1、定义

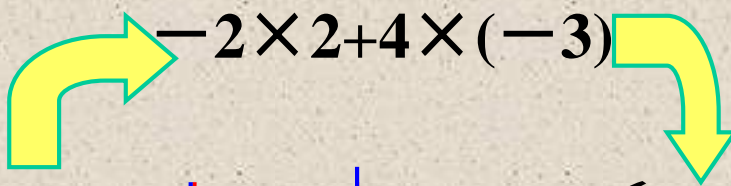
足 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times s}$, 若矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times s}$ 满

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, s)$$

则 C 称为矩阵 A 和 B 的**乘积**, 记作 AB , 读做 **A 右乘 B** 或 **B 左乘 A** . (注: 不同资料读法可能相反, 不要深究)

C 特点: C 的第 i 行、第 j 列处的元 = A 的第 i 行元与 B 的第 j 列对应元乘积之和.

例1


$$C = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{-2} & \textcolor{red}{4} \\ \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{-2} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{2} & \textcolor{blue}{4} \\ \textcolor{blue}{-3} & \textcolor{blue}{-6} \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & \textcolor{red}{?} 16 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

例2 求 AB .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解: $\because A = (a_{ij})_{3 \times 4}, \quad B = (b_{ij})_{4 \times 3}$

$\therefore C = (c_{ij})_{3 \times 3}.$

故

$$C = AB = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{-1} & \cancel{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

左矩阵

AB

右矩阵

注意 只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，
两个矩阵才能相乘。

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 不存在.}$$

例3 设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则

$$AB = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)$$

$$= \boxed{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \dots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \dots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \dots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

注意 该 1×1 矩阵作为运算结果可与数 $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ 同等看待，但是在运算过程中不能视做数，这是因为数与矩阵的乘法和矩阵与矩阵的乘法是两种不同的运算。

如：上述矩阵 A 、 B 和另外矩阵 $C_{m \times n}$ ($m \neq 1$)， AB 看作数 ABC 有意义，而实际无意义。

例4 对于线性方程组

[illegible]

若记 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, 则上述线性方

程组可表示为矩阵方程

$$AX = b.$$

矩阵的乘法为其它许多研究提供了方便的手段.

2、矩阵乘法的运算性质

$$(1) (AB)C = A(BC);$$

$$(2) A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA;$$

$$(3) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad (\text{其中 } \lambda \text{ 为数});$$

$$(4) E_m A_{mn} = A_{mn} = A_{mn} E_n;$$

$$(5) \text{若 } A \text{ 是 } n \text{ 阶矩阵, 则 } A^k \text{ 为 } A \text{ 的 } k \text{ 次幂, 即}$$
$$A^k = \underbrace{A A \cdots A}_k, \text{ 并且 } A^m A^k = A^{m+k}, (A^m)^k = A^{mk}.$$

$(m, k \text{ 为正整数})$

并对方阵 A 规定: $A^0 = E$.

几点注意:

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

则 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

显然, $AB \neq BA$, $BA = BC$.

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**, 即一般:

$$AB \neq BA, (AB)^k \neq A^k B^k.$$

这是因为一般它们运算的结果不是同型矩阵.
即使是同型矩阵也不一定相等.

特殊的，若矩阵 A, B 满足 $AB=BA$ ，则称 A 与 B 是**可交换的**。显然，此时 A, B 均为**同阶方阵**。

例如：

单位矩阵 E 和任何同阶方阵可交换。

数量矩阵 λE 和任何同阶方阵可交换。

(2) 由 $AB=O$ **不能**得出 A, B 至少有一个零矩阵。

如前面的 A, B 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq O,$$

$$\text{而 } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

(3) 由 $BA=BC$ (或 $AB=CB$) , 且 $B \neq O$, 不能得出 $A=C$ 的结论, 即乘法一般不满足消去律.
如前面的

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq O, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = BC, \text{ 但 } A \neq C.$$

这一点一定要引起注意!

若 $BA=O, AB=O$, 不能得出 $A=O$ 或 $B=O$ 的结论, 如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \neq O, B = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \neq O$$

例5 若 $A^2 = B^2 = E$ ，则 $(AB)^2 = E$ 的充分必要条件是
 A 与 B 可交换.

证明:

充分性 若 A 与 B 可交换，即 $AB = BA$ ，

$$\begin{aligned} \text{则 } (AB)^2 &= ABAB = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) \\ &= A^2B^2 = EE = E \end{aligned}$$

必要性 若 $(AB)^2 = E$ ，两边同左乘 A ，再右乘 B 得

$$A(AB)^2B = AEB = AB$$

$$\text{而 } A(AB)^2B = AABABB = (AA)BA(BB) = EBAE = BA$$

故 $BA = AB$ ，即 A 与 B 可交换.

例6 如果方阵 A, B 满足 $AB+BA=E$, 且 $A^2=O$
(或 $B^2=O$), 则 $(AB)^2=AB$.

证明: 仅以 $A^2=O$ 为例.

在 $AB+BA=E$ 两边同时左乘矩阵 A , 再
右乘矩阵 B 得

$$A(AB+BA)B = AEB = AB$$

$$\text{而 } A(AB+BA)B = (AAB+ABA)B = (O+ABA)B \\ = (AB)^2$$

故 $(AB)^2=AB$.

3、方阵的多项式

当 A 为方阵时，称矩阵

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m E$$

为**矩阵 A 的多项式**，也称 $f(A)$ 是普通多项式

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \lambda + a_m$$

当 $\lambda=A$ 的值.

性质：

设 $f(\lambda), g(\lambda)$ 是两个多项式，令

$$h(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda), \quad s(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda).$$

$$(1) \quad h(A) = f(A) + g(A), \quad s(A) = f(A)g(A).$$

$$(2) \quad f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

4、 n 阶矩阵乘积的行列式

方阵对应着行列式，于是有如下定理：

定理：若 A, B 是 n 阶方阵，则 $|AB| = |A| |B|$.

(此定理可以推广到有限个同阶矩阵的情况)

证明：设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij})$,
则由拉普拉斯定理知下式成立：

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A| |B|$$

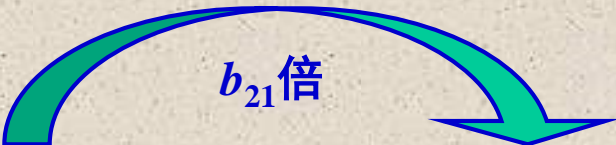
利用行列式性质6，用 $-E$ 的那些 -1 把
中的 B 所在部分都消成 0 。

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{21}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

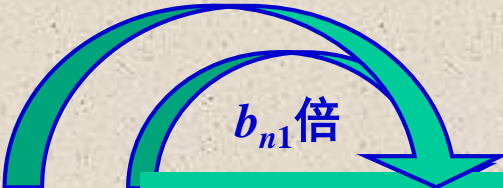
b_{11} 倍

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$



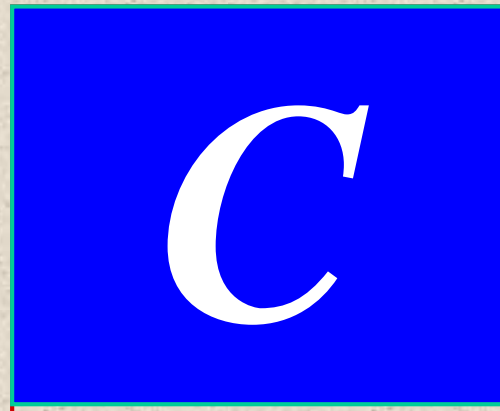
 b_{21} 倍

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \underline{\mathbf{c}_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \mathbf{c}_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \mathbf{c}_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{vmatrix}$$

再利用拉普拉斯定理按后 n 行展开

$$\begin{aligned} &= |-E| (-1)^{[(n+1)+(n+2)+\cdots+2n]+(1+2+\cdots+n)} |C| \\ &= (-1)^n (-1)^{n(2n+1)} |C| = |C| = |AB| \end{aligned}$$

故： $|A||B|=|AB|$.

注：(1) 可推广到有限个同阶方阵相乘情况

$$|A_1 A_2 \cdots A_m| = |A_1| |A_2| \cdots |A_m|$$

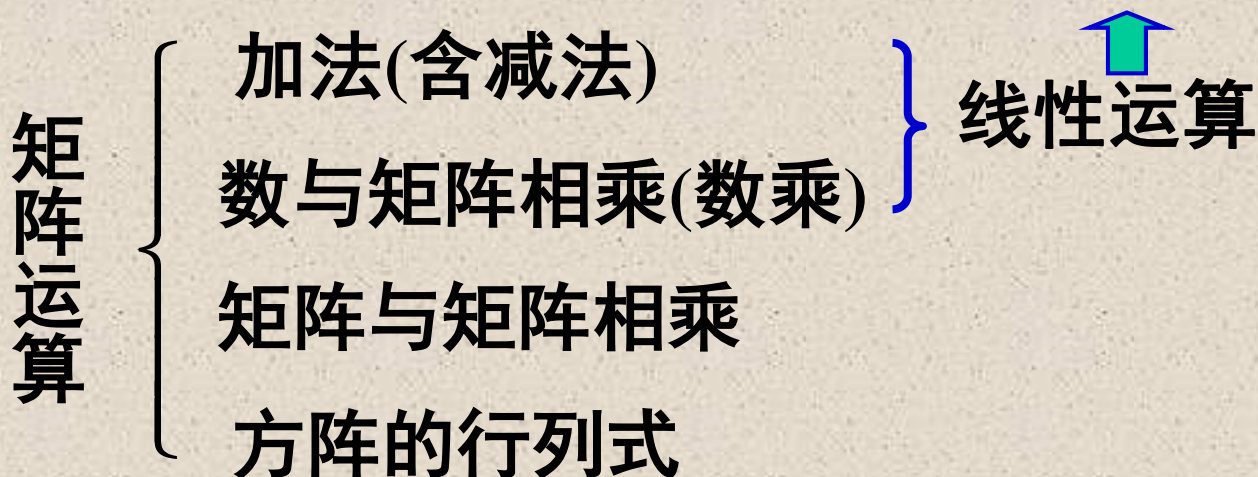
(2) 对于同阶方阵 A, B 有

$$|A| |B| = |AB| = |B| |A|$$

可推广：若 A_1, A_2, \dots, A_m 是同阶方阵，则它们以任意次序相乘得到矩阵的行列式值相等。

小结

线性组合的概念



注意

(1) 只有当两个矩阵是同型矩阵时, 才能进行加法运算.

(2) 只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时, 两个矩阵才能相乘, 且矩阵相乘不满足交换律.

(3) 矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

综合训练

例1 判断下述结论是否正确(A, B为同阶方阵)

(1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$. ✗

(2) $(AB)^2 = A^2 B^2$. ✗

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_1 \end{pmatrix}$ 则对于任二阶方阵B有 $AB = BA$. ✓

若 $A = \begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{pmatrix}$ 时呢? ✗

(4) 若 $|A| = |B|$, 则 $A = B$. ✗

(5) 若 $A^2 = O$, 则 $A = O$. ✗ 如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

例2 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, **求** A^k ($k \geq 1$).

解:

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 4E = 2^2 E \end{aligned}$$

因此, 当 k **为偶数时,** $k/2$ **为整数, 则**

$$A^k = A^{2 \times \frac{k}{2}} = (A^2)^{\frac{k}{2}} = (2^2 E)^{\frac{k}{2}} = 2^{2 \times \frac{k}{2}} E = 2^k E.$$

当 k **为大于1奇数时,** $k-1$ **为偶数, 此时由上面结论知**

$$A^k = A^{(k-1)+1} = A^{k-1} A = 2^{k-1} E A = 2^{k-1} A.$$

此结论对于 $k=1$ **情况也成立.**

例3 设 $A = \frac{1}{2}(B + E)$. 证明: $A^2=A$ **当且仅当** $B^2=E$.

证: **充分性** 若 $B^2=E$, 则

充要条件

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4}(B + E)^2 = \frac{1}{4}(B^2 + 2B + E) = \frac{1}{4}(E + 2B + E) \\ &= \frac{1}{4}(2B + 2E) = \frac{1}{2}(B + E) = A \end{aligned}$$

必要性 若已知 $A^2=A$, 由于

$$A^2 = \frac{1}{4}(B + E)^2 = \frac{1}{4}(B^2 + 2B + E), \quad A = \frac{1}{2}(B + E)$$

$$\text{故 } \frac{1}{4}(B^2 + 2B + E) = \frac{1}{2}(B + E), \text{ 化简得 } \frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{4}E,$$

即 $B^2=E$.

例4 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 求 A^k ($k \geq 2$).

解1

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

由此归纳出

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (k \geq 2)$$

用数学归纳法证明

当 $k = 2$ 时, 显然成立.

假设 $k = n$ 时成立, 则 $k = n + 1$ 时,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n & \frac{(n+1)n}{2} \lambda^{n-1} \\ \mathbf{0} & \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda^{n+1} \end{pmatrix},$$

所以对于任意的 $k \geq 2$ 都有

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} \\ \mathbf{0} & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

解2 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + B$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

数量矩阵 λE **和同阶矩阵** B **可交换. 且**

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^k = 0, (k \geq 3)$$

由二项式定理得:

$$\begin{aligned} A^k &= (\lambda E + B)^k \\ &= C_k^0 \lambda^k E + C_k^1 \lambda^{k-1} B + C_k^2 \lambda^{k-2} B^2 + \cdots + C_k^k B^k \\ &= \lambda^k E + k \lambda^{k-1} B + \frac{k(k-1)}{2!} \lambda^{k-2} B^2 \end{aligned}$$

$$= \lambda^k E + k\lambda^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2!} \lambda^{k-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$