第 44 卷第 11 期 数学的实践与认识 Vol.44, No.11
2014 年 6 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jun., 2014

用数形结合法求解连续型随机变量的函数分布问题

杨玲玲 [1], 王 超 [2]

(1. 天津大学 数学系, 天津 300072)
(2. 南开大学 软件学院, 天津 300071)

摘 要: 针对概率统计课程教学中的关于"连续型随机变量函数的分布"这类难点, 利用数形结合的思想, 巧妙的通过一副图形完全涵盖了这一类问题所需的概率知识点, 且帮助了学生后续积分的计算. 表明数形结合法是一个值得在概率统计教学中推广的好方法.

关键词: 数形结合法; 分布函数; 概率统计; 教学方法

1 引言

在概率统计课程的教学中, 有一类难点对于学生来说是普遍掌握不好的, 那就是连续型随机变量的函数的分布 [1]. 一维连续型随机变量的函数的分布是其基础. 若一维情况掌握不好, 上升到二维对于学生来说就更困难. 大部分学生都是机械地套用所谓随机变量函数的概率密度公式, 但这种公式往往是在函数严格单调的基础上才成立, 对于函数不是严格单调的情况下, 就不能直接套用公式, 也就是说公式并不能解决问题. 求解此类问题应该使用分布函数法, 即先求出新的随机变量的分布函数. 对此方法而言, 同学们在概率层面应该能够理解, 但遇到具体题目的计算有时不知道如何处理. 本文通过具体例子, 运用同学们从小学中学就一直使用的数形结合的方法帮助他们理清问题内部相对复杂的关系. 此方法可以通过一张图表快速说明求解方法, 简单形象易懂. 事实上, 作者在概率统计课程的教学上使用此法, 学生很快就能掌握, 且能举一反三, 作者认为值得在大学理工科的教学中推广此法.

2 用数形结合法求解随机变量的函数分布

一维连续型随机变量函数的分布问题的常规提法是: 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, $Y=g(X)$, 若 Y 是连续型随机变量, 求 Y 的概率密度; 若 Y 不连续, 则求 Y 的分布函数. 在讲述求解这类问题的思路时, 作者认为授课老师首先应该强调概率密度不是概率, 概率密度从定义可以看出是依存于分布函数而来的, 是分布函数的导数. 所以在求解概率密度的整个过程中, 老师要时刻提醒同学: 慎用公式, 如果不是严格单调的情况, 必须先求分布函数, 以分布函数作为桥梁. 因为分布函数是概率求解的范畴, 通过已知条件能够求解出来. 具体应用到这类问题上, 分布函数法的解题步骤如下:

收稿日期: 2013-07-14
资助项目: 天津大学教改项目 (11JYYB047); 南开大学教改项目 (Z126005)

第 1 步 先求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 的表达式:

因为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

设 $L_y=\{x|g(x)\le y\}$, 则

$$F_Y(y)=P\{X\in L_y\}=\int_{L_y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

第 2 步 若 Y 连续, 对 $F_Y(y)$ 求导得到变量 Y 的密度函数, 即 $f_Y(y)=F'_Y(y)$.

有了基本方法, 下面的事情就是针对具体问题如何计算. 对于学生来说, 定积分求解问题中如果被积函数是分段函数, 积分区间又是变动的, 无疑求解难度比较大, 但这种难度是不可避免的. 因为我们的概率密度经常是分段函数, 而分布函数是变上限定积分的范畴, 区间就是变动的. 所以在概率的教学中必须掌握这类积分的计算. 鉴于此, 作者在长期的概率教学中, 对此问题摸索了一个让同学们直观易懂的方法: 那就是数形结合法.

数形结合法 [2-5] 是数学教学中的一种重要思想方法, 使用这一方法能够帮助学生直观地学习数学而不是抽象地学习数学. 利用数形结合讲解概率问题, 使许多概率问题清晰直观, 帮助学生克服具体计算中遇到的困难. 在教学中重视培养学生数形结合的思想方法, 能够有效地提高学生的学习效率. 下面通过几个例子来说明对此类问题如何运用数形结合法来求解随机变量的函数的概率分布.

例 1 设 $X\sim U[-1,2]$, 求 $Y=X^2$ 的概率密度函数.

在引入数形结合方法之前, 首先要熟悉通常的纯解析方法.

解: 因为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le x\le 2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$, $Y=g(X)=X^2$, 所以 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$. 自然能够看出当 $y<0$ 时, $F_Y(y)=0$; 当 $y\ge 0$ 时, 分布函数始终是

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

去掉概率背景, 此处的计算完全是高等数学的知识. 但这类积分问题的区间是变动的, 而且被积函数是分段函数, 在大学高等数学课程中练习的相对较少, 导致学生比较困惑. 由此作者还认为教授高等数学的老师可以和教授概率统计的老师多沟通, 在高等数学教学中增加此类题型的计算, 以方便同学们将来学习概率统计课程.

例 1 的关键是 y 的几个结点, 因为随机变量 X 的概率密度只在 $x\in[-1,2]$ 上有值, 所以由 $-\sqrt{y}=-1$ 及 $\sqrt{y}=2$, 解得 $y=1$ 和 4 这两个结点很重要.

当 $0\le y\le 1$ 时,

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{y}}{3}$$

当 $1<y\le 4$ 时,

$$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{y}+1}{3}$$

当 $y>4$ 时,

$$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_{2}^{\sqrt{y}}0\mathrm{d}x=1$$

通过解析方法,在同学已经对分布函数的求解很清楚的情况下,我们引入图形寻找 y 的关键结点. 首先观察一下 Y 与 X 的函数关系在图形上的表示,以及在图形上已知 Y 的取值范围如何找到 X 的取值范围. $Y=X^2$ 是中学里同学就很熟悉的函数. 然后教师强调可以通过图形帮助理解积分区间的情形,这点很重要. 由于此类问题中会涉及到函数关系图和概率密度图,学生开始时容易弄错应该画哪种图. 本方法的优点是利用图形快速直观地寻找到不同的积分区间,而积分区间是和函数关系图挂钩的,所以接下来我们要画的仅仅是函数关系图,不需要绘出概率密度图. 图形如图 1 所示.

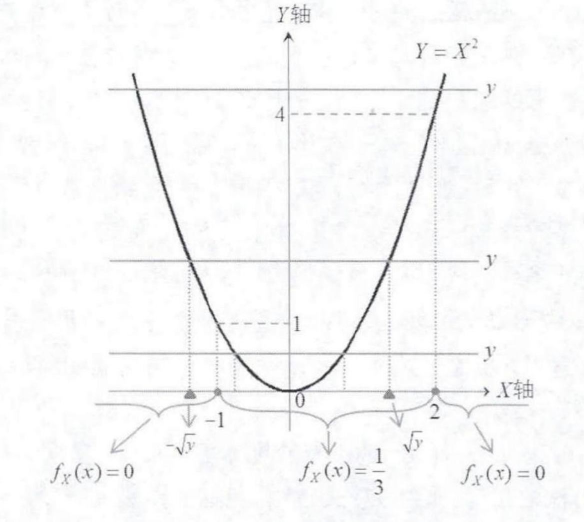

图 1 求解例 1 所用函数关系图

因为分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}$ 中涉及到 Y 和 y 的比较,所以图形上要把 Y 和 y 显示清楚. 上图中 Y 用粗实线标出. y 的变动在图中对应一族水平线,用细实线标出. 授课老师在此要给学生示意 $Y\leq y$ 在图形上如何表示,对应到 X 轴上容易直观地得到 X 的取值范围,然后询问学生在某一特定取值范围如何积分,诱导学生标出随机变量 X 的概率密度在各段的取值. 这样就得到一个完整的带有函数关系以及随机变量 X 的概率密度各段取值的图形,同时 y 的关键结点 $0,1,4$ 自然就标示出来了. 跟原有的解析方法相比较,通过图形的分析显得清楚直观. 由于篇幅限制,此处只绘制一幅完整图形. 为了达到更好的教学效果,建议教师授课时根据求解步骤分步完成图形绘制.

通过例 1,我们把数形结合的方法介绍给同学,他们一旦掌握了这种数形结合法,对于一些更复杂的函数关系,在不等式的求解不是那么一目了然的情况下,就能运用绘制图形的方法快速准确的找到积分区间进而求解.

我们再看下面两个例子,一个是周期函数,一个是分段函数.

例 2 设随机变量 X 概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

分析: 此题学生常见的错误有两个. 一是直接代入概率密度公式, 但公式严格要求是单调函数才行, 而此处的函数是周期的而不是单调的, 直接用公式就会出错; 二是用分布函数法时在解不等式 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$ 时, 想当然的认为 $P\{\sin X\le y\}=P\{X\le \arcsin y\}$. 事实上, 我们通过上面介绍的数形结合法, 绘出图形后一目了然, 上面的错误就能很好的避免.

解 首先

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sin X\le y\}$$

当 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=0$; 当 $y\ge 1$ 时, $F_Y(y)=1$. 当 $0<y<1$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)=&P\{\sin X\le y\}=P\{0\le X\le \arcsin y \text{ 或 } \pi-\arcsin y\le X\le \pi\}\\ =&\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

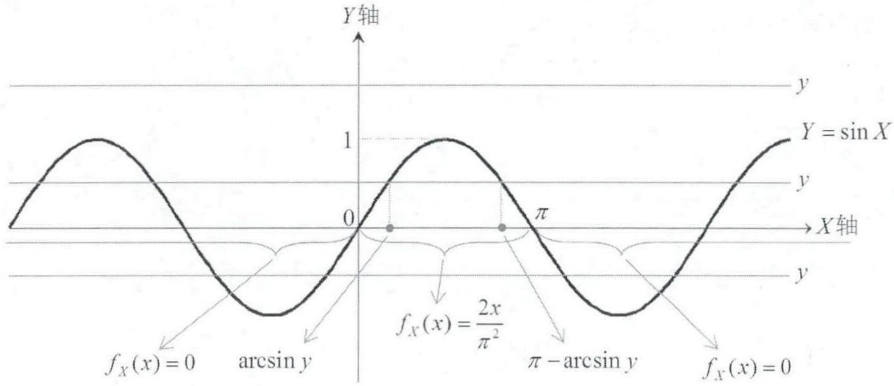

图 2 求解例 2 所用图形

此时可得

$$\begin{aligned}f_Y(y)=&\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{2\arcsin y}{\pi^2}(\arcsin y)'-\frac{2(\pi-\arcsin y)}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)'\\ =&\frac{2\arcsin y}{\pi^2}(\arcsin y)'+\frac{2(\pi-\arcsin y)}{\pi^2}(\arcsin y)'\\ =&\frac{2(\arcsin y)'}{\pi}=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

例 3 设 $X\sim EXP(2), Y=\begin{cases}1, & X<1\\ 2X, & X\ge 1\end{cases}$, 求随机变量 Y 的分布函数.

分析 此题随机变量 Y 与 X 之间是分段函数, 如果直接解不等式对于学生来说有一定困难, 但是用上面提到的数形结合法, 先利用图形确认随机变量 Y 的几个关键取值, 此题就可以迎刃而解.

解 由图 3 可以看出, 当 $y<1$ 时, $F_Y(y)=0$;

当 $1 \le y < 2$ 时,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{Y = 1\} = P\{X < 1\} \triangleq P\{X \le 1\} = F_X(1) = 1 - e^{-2}$$

这里"$\triangleq$"成立是因为 X 是连续型随机变量.

当 $y \ge 2$ 时,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \le \frac{y}{2}\} = F_X(\frac{y}{2}) = 1 - e^{-y}.$$

所以最终有

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1 - e^{-2}, & 1 \le y < 2 \\ 1 - e^{-y}, & y \ge 2 \end{cases}$$

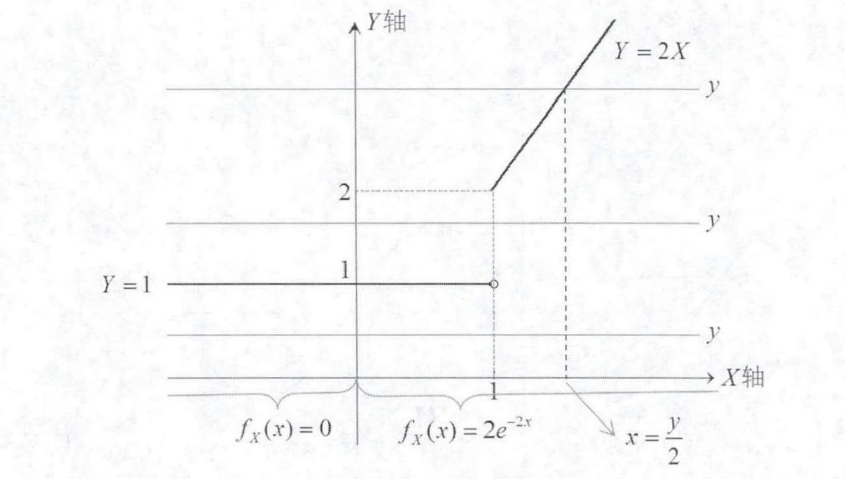

图 3 求解例 3 所用图形

类似于例 3 这种分段函数的题型, 如果让学生只用解析方法来求解 $Y \le y$ 并不是一件容易的事情.

3 总结

从上节的三个例题可以看出, 在概率论的教学中适当的运用数形结合思想 [6], 能够将抽象复杂, 难以理解的问题图形化、直观化、简单化. 实践证明, 用此方法为学生讲解, 同学们更容易理解掌握这一类问题的求解过程, 有助于提高教学质量, 获得更好的教学效果.

参考文献

[1] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计 (第 4 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[2] 闫国松. 浅议数形结合思想在概率教学中的应用 [J]. 科技信息, 2007(30): 438-439.
[3] 冯波, 姜燕苹. 数形结合思想在解一类概率问题中的应用的例子 [J]. 数学教学通讯. 2004(217), 85-86.
[4] 蔡鸣晶. 数形结合思想在高职概率统计学习中的妙用 [J]. 读与写 (教育教学刊). 2012(6): 61-62.
[5] 吕佐良. 数形结合求概率 [J]. 数学爱好者. 2007(4): 22-23.
[6] 魏孝章, 姜根明. 概率统计中的数学思想 [J]. 陕西教育学院学报, 2003(1): 67-69.

Solving the Distribution Problem of Functions of Continuous Random Variables by Using Method of Combination of Figure and Chart

YANG Ling-ling[1], WANG Chao[2]

(1. Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)
(2. College of Software, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: This paper uses the thought of combination of figure and chart to solve difficult problems as "the distribution of functions of continuous random variables" in probability and statistics course. By this method, a figure covering all the knowledge point required for this class of problems is used smartly. It could also help the students to do subsequent integral calculation. This paper shows that the method of combination of figure and chart is a good idea and worth popularizing in the teaching of probability and statistics course.

Keywords: combination of figure and chart; distribution function, probability and statistics; teaching method