Chpt.1 Basic Concepts of Probability

第一章 概率论的基本概念

1.1 Introduction

1.1.1 What Is Random Event

必然事件

在某一条件下必然发生的事件

太阳早晨从东方升起

不可能事件

在某一条件下肯定不会发生的事件

水在一个标准大气压下40°结冰

随机事件

在必然事件与不可能事件之间的事件

抛硬币：结果是正面

1.1 Introduction

Example 1.1.1 产品抽样检查

大批量生产，产品质量可以加以控制，但还是需要检验。

从N件产品中任意抽取n件，观察不合格产品的数目。

产品抽检

- 一般是非破坏性的检验（也有破坏性的检验）
- 一般是非全面的检验（抽样检验）
- 具有不确定性

Example 1.1.2 网络节点的Down time

Down有一定的随机性，可以用Down Time来描述系统的可靠性（Reliability）

Level	Availability	Down Time (Min/Year)
Unmanaged	90%	50,000 (833.3h)
Managed	99%	5,000 (83.3h)
Well Managed	99.9%	500 (8.3h)
High-Availability	99.99%	50 (0.83h)
Fault Tolerant	99.999%	5
Goal	99.9999%	0.5 (30s)

1.1 Introduction

Example 1.1.3 股票涨跌由什么决定

影响股票涨跌的因素有很多，例如：

1）政策的利空利多；

2）大盘环境的好坏；

3）主力资金的进出；

4）个股基本面的重大变化；

5）个股的历史走势的涨跌情况；

6）个股所属板块整体的涨跌情况；

7）其它未知情况！

1.1 Introduction

1.1.1 What Is Random Event

这类事件事前不可预料，即在相同条件下重复进行观察或试验时，有时出现，有时不出现。

这些事件称之为随机事件或不确定性事件。
这种现象称之为随机现象。

1.1 Introduction

1.1.2 Why to Study

随机现象是普遍存在的，确定性的（必然、不可能）现象是少数的。需要正面对待。

随机现象有其偶然性的一面，也有其必然性的一面.

其必然性表现在大量重复试验或观察中呈现出的固有规律性

⇩

规律性：随机现象的统计规律

研究目标：寻求随机现象的内在规律

1.1.3 How to Study

如何来研究随机现象? 抛开书来谈,途径有两种:

途径1：类似于确定性现象那样，寻求事务之间的因果关系，最理想的是1-1对应关系（如函数可逆、矩阵可逆）。

寻求随机事件发生的条件几乎是不可能的，它是由大量的随机因素支配的。

途经2：不去寻求导致事件发生的确切条件，而是研究事件在某一条件下发生的可能性的大小。

如：正常环境下，射击运动员射中十环的可能性。

如：正常生产条件下，一批产品的合格率。

概率理论

1.1.3 How to Study

寻求事件发生的可能性的想法在人们实践中很自然地产生。

射击运动员每次射中环数不一，但是我们可以谈他射中9环的可能性。

这种可能性可以由大量的试验、实践统计得到：

如果在条件e下进行n次试验，事件A发生的次数为A_n (称为频数)，事件A发生的频率为：$f_n(A)=A_n/n$

- $f_n(A)$是不同的，也就是所每作n次试验，所得$f_n(A)$未必相同；
- 但是当n较大时，$f_n(A)$接近一个常数P(A)，它是$f_n(A)$的极限。

1.2.1 随机试验

可以用试验来描述随机现象。试验总是有条件、有结果的。

[定义1.1] 随机试验用来描述条件相同时出现不同结果的试验。随机试验满足三点:

[1] 可以在相同的条件下重复;

[2] 每次试验的可能的结果不止一个，所有可能的结果是可以事先确切描述的;

[3] 每次试验的结果事前是不能确定的。

Example 1.2.1 抛硬币

[1] 抛一枚硬币，观察出现正面的情况；

[2] 将一枚硬币三次，观察出现正面H反面T的情况；

Example 1.2.2 摸球

一只袋子中装有M只白球、N只红球，从袋子中取球两次，每次取一只，考虑两种模式：放回、不放回。观察以下试验：

[1] 两只球均为白色；

[2] 两只球同色；

[2] 至少有一只白球。

1.2.2 样本空间

[定义1.2]: 把随机试验所有的结果组成的集合S称为随机试验的样本空间。样本空间中的元素称为样本点。

Example 1.2.1 抛硬币：将一枚硬币抛三次，观察出现正面H、反面T的情况；

S＝{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT }

Example 1.2.2 摸球：一只袋子中装有3只白球、2只红球，从袋子中取球两次，每次取一只

有放回试验 $S=\{W_1R_1,\ W_1R_2,\ W_1W_1,\ W_1W_2,\ W_1W_3,$
$W_2R_1,\ W_2R_2,\ W_2W_1,\ W_2W_2,\ W_2W_3,$
$W_3R_1,\ W_3R_2,\ W_3W_1,\ W_3W_2,\ W_3W_3,$
$R_1R_1,\ R_1R_2,\ R_1W_1,\ R_1W_2,\ R_1W_3,$
$R_2R_1,\ R_2R_2,\ R_2W_1,\ R_2W_2,\ R_2W_3\}$

不放回试验 $S=\{W_1R_1,\ W_1R_2,\ W_1W_2,\ W_1W_3,$
$W_2R_1,\ W_2R_2,\ W_2W_1,\ W_2W_3,$
$W_3R_1,\ W_3R_2,\ W_3W_1,\ W_3W_2,$
$R_1R_2,\ R_1W_1,\ R_1W_2,\ R_1W_3,$
$R_2R_1,\ R_2W_1,\ R_2W_2,\ R_2W_3\}$

1.2.3 随机事件

基本事件——样本空间中单个样本点

随机事件—— S的子集

必然事件—— S本身

不可能事件 ——空集Φ

事件是可以关联的，事件之间的各种关联构成新的事件。

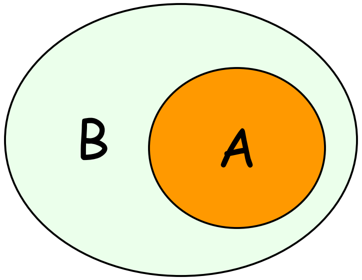
1.2.4 事件的关系与运算

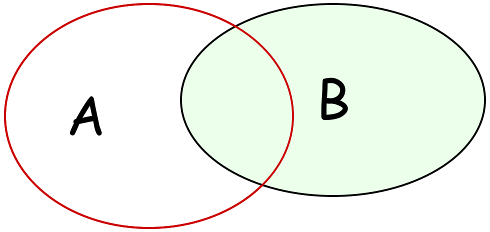
- B包含A ($B\supseteq A$)　　If $x\in A \Rightarrow x\in B$
- 和事件（并）：　　$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

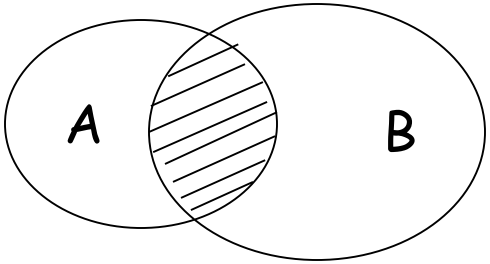
  n个事件的和 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，可列（可数事件）和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
- 积事件（交）：　　$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

  n个事件的交 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，　有时记作$A_1A_2\ldots A_n$

  可列（可数事件）交 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$



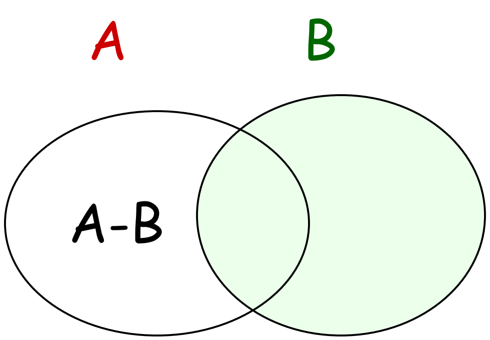


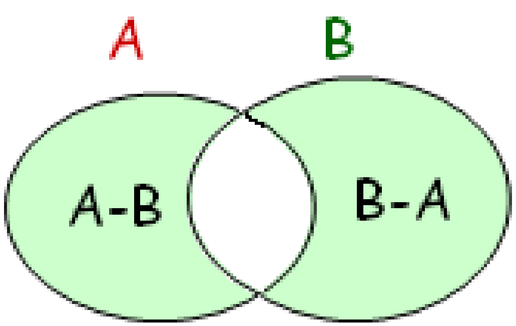


1.2.4 事件的关系与运算

- 互不相容(互斥): $A \cap B = \Phi$
- 差事件: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$
- 逆事件(对立事件): $A \cup B = S,\ A \cap B = \Phi$

  A的逆事件记为 $\overline{A} = S - A$
- 对称差: $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$





1.2.5 概率定义与基本特性

概率是在一随机试验中某一事件发生可能性大小的一种量化描述。

严格地讲: 没有定义

根据频率的性质:

[1] $0 \le f_n(A) \le 1$

[2] $f_n(S)=1$

[3] $A_1, A_2, \cdots\cdots A_k$是两两互不相容的事件则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots\cdots + f_n(A_k)$$

1.2.5 概率定义与基本特性

[定义1.3] 随机试验E，样本空间为S，其中事件的概率P(A)满足：

[1] Nonnegative：$0 \leq P(A) \leq 1$

[2] Normalization：$P(S)=1$

[3] σ-可加性：$A_1, A_2, A_3, \ldots$是两两互不相容的事件则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots$$

Problem 1：对于一个样本空间而言，概率是唯一的吗?

对于一个样本空间而言，可以在其上定义多种概率。这就像距离函数一样，可以定义多个。

假设在S上定义了概率P，有一事件B满足P(B)>0，定义一个新的函数 $\overline{P}$，对任意的S上的事件A有 $\overline{P}(A)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

[1] $\overline{P}(A)\geq 0$

[2] $\overline{P}(S)=\dfrac{P(SB)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$

[3] $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 是两两互斥的

$$\overline{P}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots)=\frac{P\big(B\cap(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots)\big)}{P(B)}$$

$$=\frac{P\big((B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\cdots\cdots)\big)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots\cdots}{P(B)}$$

$$=\overline{P}(A_1)+\overline{P}(A_2)+\cdots\cdots$$

可见 $\overline{P}$ 满足概率的定义，应该是S上的一个概率，但是它不同于P。

事实上它是我们后面将要提到的条件概率P(A|B)。

Problem 2: 实际应用中的概率是如何定义的?

一个样本空间上的概率并不是如此定义出来的，需要的根据实际情况确定。但是，所确定的概率需要满足以上条件。

1.2.5 概率定义与基本特性

[1] 不可能事件概率为零：$P(\Phi)=0$

[2] 有限可加性：

$A_1, A_2, \dots, A_k$是两两互不相容的事件则

$$P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_k)$$

[3] 可减性：

$A\subset B$，则$P(B-A)=P(B)-P(A)$

特别地$P(\overline{A})=1-P(A)$

[4] 不降性：

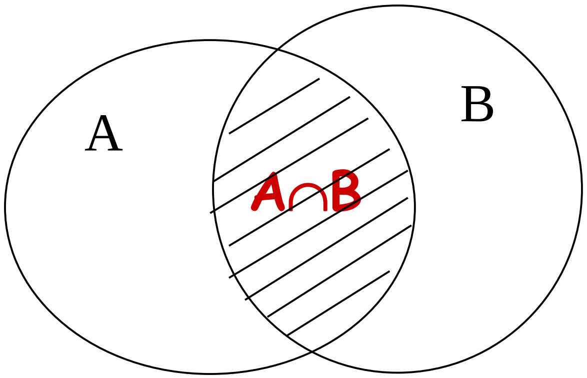
$A\subset B$，$P(A)\leq P(B)$;

$\forall$事件A, $P(A)\leq 1$

1.3 Principles for Probability

1.3.1 加法原则：

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$



可以利用面积原理加以说明

Proof：

$$A\cup B = A\cup(B - A\cap B)$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B - A\cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_k) = \sum P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

1.3.2条件概率与乘法定理

Example 1.3.1 四人（拱猪、升级、桥牌）打牌，以每人拿到红桃为例，均为随机的。

A＝东家拿到4张红桃

B＝西家拿到4张红桃

这两件事都是随机的，在抓牌前均是未知的。

我们考虑这样一件事：

当东家真的抓到4张红桃后，他要判断一下西家拿到4张红桃的可能性是多大?

（他计算此种可能性的关心程度远超过在摸牌之前计算“西家拿到4张红桃”的可能性！）

1.3.2条件概率与乘法定理

[定义1.4] 概率是对随机事件发生可能性大小的描述，在一事件A发生的前提下，另一事件B是否发生依然是随机的，其发生的可能性大小与A的发生有关系，记这样的概率为 P(B|A).

How to calculate P(B|A)

A是大前提，在A发生的前提下，看B发生的可能性；

假设A在S中有m个，AB有k个，总样本数是n个；

则

$$P(B|A)=k/m=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

Example 1.3.2：一盒子装4只产品，3只合格1只次品。顺序取两只

问：在第一次取得是合格品的情况下，第二次依然取得合格品的概率

解：A—第一次取得合格品；B—第二次取得合格品。

S—共有4×3种可能

A—共有3×3种可能

AB—共有3×2种可能

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/12}{9/12}=\frac{2}{3}$$

Example 1.3.3: 中央电视台“幸运52”栏目中的“百宝箱”互动竞猜游戏，规则如下:

在20个商标中，有5个商标牌的背面注明了一定的奖金额，其余商标的背面是一张哭脸，若翻到它就不得奖。参加这个游戏的观众有三次翻牌的机会。

某观众前两次翻牌均得若干奖金，如果翻过的牌不能再翻，那么这位观众第三次翻牌获奖的概率是?

$A\ \ \frac{1}{4}\qquad B\ \ \frac{1}{6}\qquad C\ \ \frac{1}{5}\qquad D\ \ \frac{3}{20}$

Remark 1: 条件概率依然是概率，它满足概率的三个原则；

Remark 2: 虽然我们说概率论不去研究事件与原因之间的对应关系，但是可以探索导致一件事情发生的原因，如果A发生，那么是原因E的可能性有多大？

这和后面的Bayes公式相关。

乘法定理

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$

$$P(ABC)=P(C|AB)P(AB) \quad =P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})P(A_1A_2\ldots A_{n-2}A_{n-1})$$

$$=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\,P(A_1A_2\ldots A_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$=P(A_1)\,P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

积的概率分解为多个条件概率的积，而这些条件概率相对是容易计算的

Example 1.3.4 袋中有r只红球，t只白球。每次自袋中任取一球，观察其颜色后放回，并再放入a只与所取球同色的球。

问：连续取球4次，第一、二次为红球且第三、四次为白球的概率

解：以$A_i(i=1,2,3,4)$表示“第 i 次取得红球”

则 $\overline{A}_3, \overline{A}_4$ 分别表示事件第三、四次取到白球。

所描述的事件为 $A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4$

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$= \frac{r}{r+t} \bullet \frac{r+a}{r+t+a} \bullet \frac{t}{r+t+a+a} \bullet \frac{t+a}{r+t+a+a+a}$$

Example 1.3.5 某公司有两个汽车生产厂，分别生产80%、20%的汽车，第一个厂的产品合格率为95%，第二个厂的产品合格率为98%。

[1] 买一辆此公司的汽车为合格的概率是多少?

[2] 如果买到的汽车是合格的，则此汽车为第一厂的概率是多少?

解：记

A - 买到的汽车为合格品

B_1 - 买到的车为第一厂生产且合格

B_2 - 买到的车为第二厂生产且合格

C - 买的车为第一厂

则问题分别为$P(A)$、$P(C|A)$

$$P(A)=P(B_1 \cup B_2)$$

$$=P(B_1)+P(B_2)$$

$$P(B_1)=0.8\times 0.95=0.76$$

$$P(B_2)=0.2\times 0.98=0.196$$

$$P(A)=0.956$$

$$P(C|A)=P(AC)/P(A)$$

$$=P(B_1)/P(A)$$

$$=0.76/0.956$$

$$=0.794979$$

Example 1.3.6：一盒子装4只产品，3只合格1只次品。有放回取两只

问：在第一次取得是合格品的情况下，第二次依然取得合格品的概率

解：A—第一次取得合格品；B—第二次取得合格品。

S—共有4×4种可能

A—共有3×4 种可能

B—共有4×3种可能

AB—共有3×3种可能

$P(A)=3/4$　　$P(B)=3/4$　　$P(AB)=9/16$

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= P(AB)/P(A) \\
&= (9/16)/(3/4) \\
&= 3/4
\end{aligned}
$$

i.e. $P(B|A)=P(B)$,

or $P(AB)=P(A)P(B)$

这说明事件B的发生与事件A的发生是无关的，称A、B相互独立

1.3.3 独立事件

[定义1.2]: A、B为两事件，如果满足

P(AB)=P(A)P(B)，则称A、B相互独立。

-

[定理1.1] A、B两事件，P(A)>0， 如A、B相互独立，

则P(B|A)=P(B)。反之也成立。

-

[定理1.2] 如事件A、B是独立的，则下列各对事件也独立：

A与 $\overline{B}$ ，$\overline{A}$ 与B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$

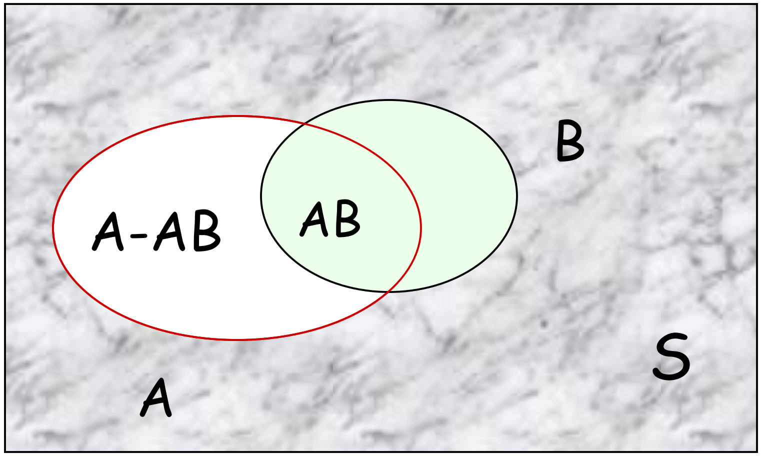
1.3.3 独立事件

事件A,B是独立的, 则A与 $\overline{B}$ 独立

如果证明了此，我们就知道:

B与 $\overline{A}$ 独立

$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立



Proof:

$$P(A\overline{B}) = P\{A \cap (S-B)\}$$
$$= P(A-AB)$$
$$= P(A) - P(AB)$$
$$= P(A) - P(A)P(B)$$
$$= P(A)\{1-P(B)\}$$
$$= P(A)P(\overline{B})$$

1.3.3 独立事件

[定义1.3] 三个事件的相互独立

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(BC)=P(B)P(C)$$

$$P(AC)=P(A)P(C)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

一般，设A_1，A_2，……，A_n是n个事件，如果其中的任意多个事件的积事件的概率都等于各个事件概率的积，则称A_1，A_2，……，A_n相互独立。

1.3.3 独立事件

Remark 1：区分互斥、对立、独立三个概念；

互斥：$A \cap B = \Phi$

对立：互斥$A \cap B = \Phi$，并$A \cup B = S$

独立：$P(AB) = P(A)P(B)$

Remark 2：独立、互斥往往是根据实际意义去判断

Remark 3：两两独立未必三个独立;

例 四张卡片分别标以数字1,2,3,4，今任取一张。

A：取得的是1或2，$P(A)=1/2$

B：取得的是1或3，$P(B)=1/2$

C：取得的是1或4，$P(C)=1/2$

$P(AB)=1/4 \quad P(BC)=1/4 \quad P(CA)=1/4$

$P(AB)=P(A)P(B)$, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$

但是:

$P(ABC)=1/4, \quad P(A)P(B)P(C)=1/8$

Example 1.3.7 甲乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为p，$p\ge 1/2$。问：对甲而言，采用三局两胜制有利，还是采用五局三胜制有利。**假设各局的胜负相互独立**。

解：采用三局两胜制，甲获胜的情况：甲甲，甲乙甲，乙甲甲，总的获胜概率是三种情况（互斥事件）概率的和

$$
\begin{aligned}
P_3 &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) \\
&= p\times p+p(1-p)p+(1-p)p\times p \\
&= 3p^2-2p^3
\end{aligned}
$$

采用五局三胜制，如果要甲获胜，有以下几种可能：

甲前三盘连续获胜；

四盘（最后一盘必定是甲胜，前面三盘甲胜2盘，3选择2）；

五盘（最后一盘必定是甲胜，前面四盘甲胜2盘，4选择2）

总的获胜概率是三种情况概率的和（互斥事件）

$$P_5 = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$
$$= p^3 + C_3^2 p^3 (1-p) + C_4^2 p^3 (1-p)^2$$
$$= 10p^3 - 15p^4 + 6p^5$$

$$p_5 - p_3 = 10p^3 - 15p^4 + 6p^5 - 3p^2 + 2p^3$$
$$= 3p^2(2p^3 - 5p^2 + 4p - 1)$$
$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1)$$

如果$p > 1/2$，$p_5 > p_3$，则$p_5 - p_3 > 0$，打五局比打三局要好

这就是增加了局数，偶然性就降低。

Example 1.3.8 设某型号的计算机服务器可靠性为85%，现在采用冗余配置（并行工作），欲使得系统的可靠性达到99.99%，问至少应配多少台这样的服务器?

解： 假设共需要n台这样的服务器才能使得系统的可靠性达到99.99%。

A系统工作正常，A_i＝第i台服务器工作正常

$A=\cup A_i$

$P(A)=P(\cup A_i)\geq 99.99\%$

注意到A_i是可以同时发生，不具备互斥性，无法直接分解成概率的和。但是 $\overline{A_i}$ 是独立的（再次说明独立、互斥之间的不同概念），也就是n台服务器是否down机是独立的。考虑如何把A_i和事件表达、分解为 $\overline{A_i}$ 积事件。

1.3 Principles for Probability

$$A = S - \overline{A} = S - \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$P(A) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

$$= 1 - (1 - 85\%)^n$$

$$= 1 - 0.15^n$$

$\geq 99.99\%$

$0.000\,1 \geq 0.15^{n}$

$n \geq 4.85$ 至少需要5台机器。

Example 1.3.9 若每个人的呼吸道中有感冒病毒的概率为0.002

求：在有1500人看电影的剧场中有感冒病毒的概率。

解：A_i－事件“第i个人带有感冒病毒”（i=1,2,...，1500）

假定每个人是否带有感冒病毒是相互独立的，则所求概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{1500} A_i\right)=1-P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{1500}\right)$$
$$=1-P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)\text{L}\ P\left(\overline{A}_{1500}\right)$$
$$=1-(1-0.002)^{1500}$$
$$=1-0.998^{1500}$$
$$\approx 0.95$$

可见：虽然每人带感冒病毒的可能性很小，但许多人聚集在一起时空气中含有感冒病毒的概率可能会很大

- 这种现象称为**小概率事件的聚众效应**。
- 卫生常识中,不让婴儿到人多的公共场所去就是这个道理。

Example 1.3.10 有一批产品是由甲、乙、丙三厂同时生产

	甲厂	乙厂	丙厂
产品百分比	15%	80%	5%
产品次品率	2%	1%	3%

如果从这批产品中随机抽取一件，试计算该产品是次品的概率多大?

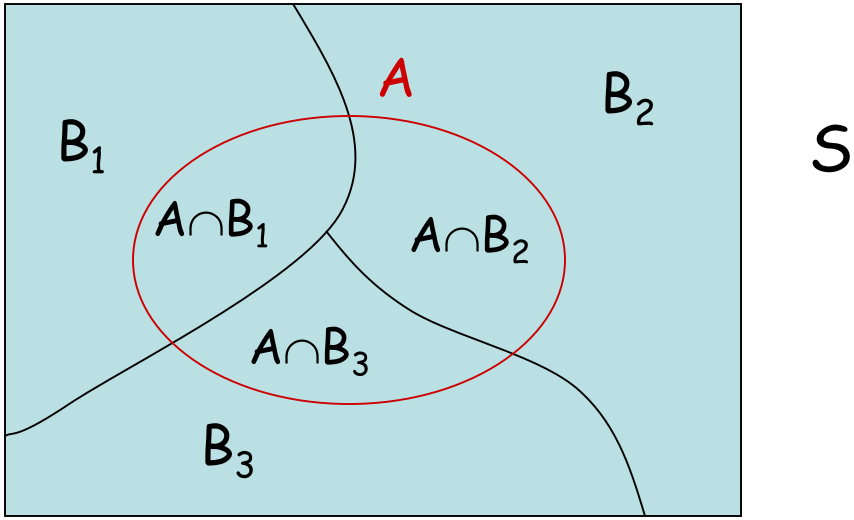
解：设B_1、B_2、B_3分别表示抽得产品是甲厂、乙厂、丙厂生产的，A表示抽得产品为次品，它也只能是来自B_1、B_2、B_3，即：

$$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup(A\cap B_3)$$

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+P(A\cap B_3)\\&=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)\\&=0.02\times0.15+0.01\times0.8+0.03\times0.05\\&=0.0125\end{aligned}$$

1.3.3 Rule of Total Probability

上面的例子，事实上是把事件 A 的概率计算转化为A在空间S上几个部分的概率计算。



空间S的划分：

设S为随机试验E的样本空间，B_1, B_2, ---, B_n为E的一组事件，如果

[1] B_1, B_2, ---, B_n是两两互斥的事件；

[2] $B_1 \cup B_2 \cup --- \cup B_n = S$

则称B_1, B_2, ---, B_n称为样本空间S的一个划分

1.3.3 Rule of Total Probability

[定理]：设S为随机试验E的样本空间，$B_1, B_2, ---, B_n$为S的一个划分，且 $P(B_i)>0,\ i=1,2,\cdots,n$。则E的任意事件A的概率为

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

Remark：上述称为全概率公式，它事实上是把在一个复杂空间S上事件A的概率，分解为在数个小的子空间上的概率之和

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$

进一步地把在每个子空间上的概率分解为条件概率的积.

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

由此, 简化运算 (比照加法公式、乘法公式)

Example 1.3.11 甲乙丙分别操纵三门炮向一飞机射击。设他们的命中率分别为0.4、0.5、0.7；如只有一人射中，飞机坠毁的概率为0.2，如两个射中，飞机坠毁的概率为0.6，如三人都射中，则飞机必坠毁。

求： 三人同时射击时飞机坠毁的概率?

解： 记 C_1＝甲射中，C_2＝乙射中，C_3＝丙射中

B＝飞机坠毁

A_0＝3个人都没射中；

A_1＝有1个人射中；

A_2＝有2人射中；

A_3＝有3人射中；

$P(B|A_0)=0$; $P(B|A_1)=0.2$; $P(B|A_2)=0.6$; $P(B|A_3)=1$

解：A_0、A_1、A_2、A_3是S的一个划分。有

$$P(B)=P(B|A_0)P(A_0)+P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

现在要求出A_0、A_1、A_2、A_3的概率

$$P(A_0)=P(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3})=(1-0.4)(1-0.5)(1-0.7)=0.09$$

$$P(A_1)=P(\text{有1个中})=P(C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3})+P(\overline{C_1}C_2\overline{C_3})+P(\overline{C_1}\,\overline{C_2}C_3)$$

$$=0.4(1-0.5)(1-0.7)+(1-0.4)0.5(1-0.7)+(1-0.4)(1-0.5)0.7$$

$$=0.36$$

$$P(A_2)=P(\text{有2个中})=P(C_1C_2\overline{C_3})+P(C_1\overline{C_2}C_3)+P(\overline{C_1}C_2C_3)$$

$$=0.4\times0.5(1-0.7)+0.4(1-0.5)0.7+(1-0.4)0.5\times0.7$$

$$=0.41$$

$$P(A_3)=P(\text{3个全中})=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

$$P(B)=0.458$$

1.3.4 Bayes' Theorem

一类实际问题： “已知结果看原因”

前面我们说过，概率研究的思路不是建立因果之间的关系

但是，已知某结果发生的前提下，还是可以分析导致它发生

的原因的，或者说分析各种原因作用的大小。

例如：一汽大众有三个制造厂B_1,B_2, B_3。如果顾客买了一辆大众汽车，我们可以问这样的一些问题：

[1] 这辆车(A)最可能属于那个制造厂?

[2] 如果这辆车是合格的(B)，它最可能属于那个制造厂?

[3] 如果这辆车是不合格的(C)，它最可能属于那个制造厂?

1.3.4 Bayes' Theorem

这里，事件A、B、C发生后，我们希望知道导致这些事件发生几种原因的可能性。这几种原因就是B_1、B_2、B_3，他们是事实上是空间S的一个划分。

[Bayes定理]：设试验E的样本空间为S，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为样本空间S的一个划分，A为E的事件，$P(A)>0$, $P(B_i)>0(i=1,2, \ldots n)$，则：

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

1.3.4 Bayes' Theorem

Proof: $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(B_iA)}{P(A)} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$

注意到$B_1, B_2, \ldots, B_n$为样本空间S的一个划分

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(AB_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)$$

而同时 $\boldsymbol{P(B_iA) = P(A \mid B_i)\, P(B_i)}$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Remark 1：该公式于1763年由贝叶斯(Bayes)给出，故称Bayes公式。它是在观察到事件A已发生的条件下，寻找导致A发生的每个原因的概率。有时也称为逆概率公式。

1.3.4 Bayes' Theorem

Remark 2：在贝叶斯公式中，$P(B_i)$和$P(B_i \mid A)$分别称为先验概率和后验概率.

$P(B_i)$ ($i=1,2,\ldots,n$)是基于以往的统计，人们对诸事件发生可能性大小的认识. 故称为先验概率。

当有了新的信息（知道A发生）后，人们对诸事件发生可能性大小$P(B_i \mid A)$有了新的估计。贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化。

比较$P(B_1 \mid A)$ 、$P(B_2 \mid A)$、……、 $P(B_n \mid A)$的大小，则知导致A发生的最可能的原因.

Remark 3：注意Bayes公式对于任意事件B成立

$$P(B \mid A)=\frac{P(A \mid B)P(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

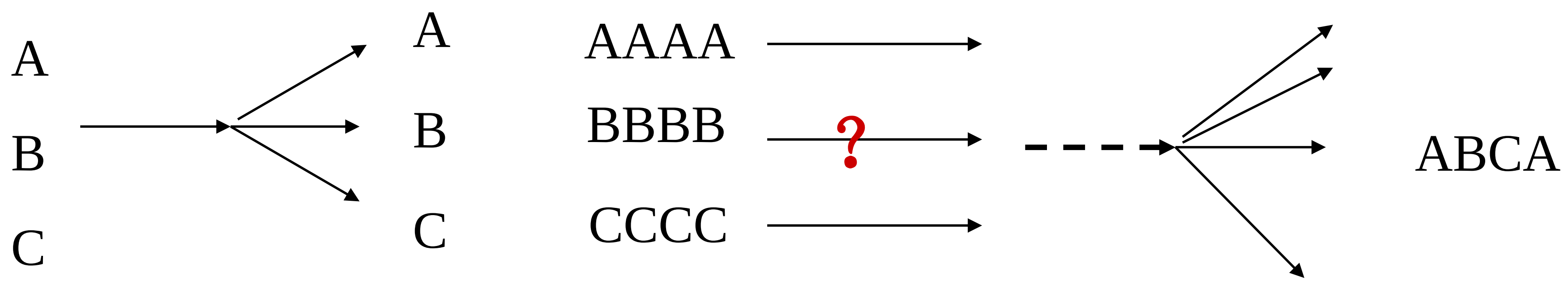
1.3.4 Bayes' Theorem

Example 1.3.12（习题40 pp.29）将A,B,C三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为α，而输出为其他一字母的概率均为(1-α)/2. 今将字母串AAAA,BBBB,CCCC之一输入到信道，输入的概率分别为p_1, p_2, p_3 ($p_1+p_2+p_3=1$)。

假设：信道传输各个字母的工作是独立的

已知：输出为ABCA

问：输入的是AAAA的概率是多少?



$$P(\mathrm{AAAA}|\mathrm{ABCA}) = \frac{P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{AAAA})P(\mathrm{AAAA})}{P(\mathrm{ABCA})}$$

$$P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{AAAA})P(\mathrm{AAAA}) = \alpha \frac{(1-\alpha)}{2} \bullet \frac{(1-\alpha)}{2} \alpha\ p_1$$

$$= p_1\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)\alpha / 4$$

$$\begin{aligned} P(\mathrm{ABCA}) = {} & P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{AAAA})P(\mathrm{AAAA}) \\ & + P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{BBBB})P(\mathrm{BBBB}) \\ & + P(\mathrm{ABCA}|\mathrm{CCCC})P(\mathrm{CCCC}) \\ = {} & p_1\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)\alpha/4 \\ & + p_2\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)/8 \\ & + p_3\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mathrm{AAAA}|\mathrm{ABCA}) &= 2p_1\alpha / \{2p_1\alpha + p_2(1-\alpha) + p_3(1-\alpha)\} \\ &= 2p_1\alpha / \{(3\alpha - 1)p_1 + (1-\alpha)\} \end{aligned}$$

1.4.1 古典概型

古典概率是一类比较简单、直观的随机试验。有以下两个明显特征:

- 试验所得的可能的结果个数有限，即基本事件个数有限

  $S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$

- 各个试验结果在每次实验中发生的可能性是一样的

  $P(e_i)=1/n$

事件A是基本事件的集合，包含了k个基本事件，则

$$P(A)=P(e_{i1})+P(e_{i2})+\ldots+P(e_{ik})$$
$$=k/n$$

Example 1.4.1 (pp.11 例3) 将n只球放入N（$N\geq n$）只盒子中，试求每个盒子至多有一只球（n个球落入不同的盒子）的概率。

解： S--每只球都可以放入N个盒子中的任意一个，共有N种方法，n只球所有放法共有 N^n 种。

A--每个盒子中至多有一个球。那么，第一只球有N种放法，第二只球有（N-1）种放法，…，

如此n只球总的放法为：

$$N(N-1)\cdots(N-(n-1)) = A_N^n$$

（注意：没有区分球，所以S、A都没有考虑具体地放那个球）

$$P(A) = A_N^n \big/ N^n$$

[实际应用-生日问题] 假设每个人在一年中每一天出生的可能性是一样的，那么n个人生日各不相同（生在不同的日子）的概率为：

$$P=365(365-1)\ldots(365-n+1)\,/\,365^n$$

如此，n个人中至少有两个生日相同的概率为

$$P'=1-365(365-1)\ldots(365-n+1)\,/\,365^n$$

表：n个人中至少有两个人生日相同的概率

n	20	23	30	40	50	64	100
P'	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

[实际应用Example 1.4.2 (pp.14 例8)] 某接待站在某周曾接待过12次来访，已知所有这12次接待都是在周二、周四进行的。

问：由此是否可以推断接待时间是有规定的?

解：假设没有规定，则12次访问落到七天内的概率一致，共有7^{12}种可能，而12次访问落入周二、周四的可能事件为2^{12}，因此概率为

$$(2/7)^{12} = 0.000\,000\,3$$

这样的话如果没有规定，全部落入周二、周四的可能性微乎其微，而12次接待都是在周二、周四进行的事件确实发生了，所以由此可以推断出接待时间是有规定的。

Example 1.4.3 (pp.13 例7) 将15新生随机平均分配到3个班中，其中3名为优秀生。

问：[1] 每个班分配到一名优秀生的概率是多少?
[2] 3名优秀生分在同一个班的概率是多少?

解：总体样本空间S的样本数 $C_{15}^{5}C_{10}^{5}C_{5}^{5}$

[1] A—3名优秀生分配到三个班是3 × 2 × 1种可能

每个班的另外4名学生来自一般生。

共有 $C_{12}^{4}C_{8}^{4}C_{4}^{4}\times 3!$ 种可能，p=0.274

[2] B—3名优秀生同在一个班，共有3种可能；

而其余12名学生要按2-5-5随机分配。

共有 $3C_{12}^{2}C_{10}^{5}C_{5}^{5}$ 种可能，p=0.0659

Example 1.4.4 (pp.12 例4) N件产品，其中有D件次品，今从中任取n件，问其中恰有k（$k \le D$）件次品的概率是多少？

解：k件次品必然来自于D件次品，可能的情况为 C_D^k

其余n-k件产品则来自余下的N-D正品 C_{N-D}^{n-k}

N 件产品中取 n 件产品的可能 C_N^n

$$p = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

此称为“超几何分布”

推广应用

[推广1] 此可以进一步推广到产品的质量管理中： N件产品，其中有D件次品，从中随机抽取少量的n件样品，如果次品数少于k则接收。

$$C_D^0 C_{N-D}^n / C_N^n + C_D^1 C_{N-D}^{n-1} / C_N^n + C_D^2 C_{N-D}^{n-2} / C_N^n + \cdots + C_D^{k-1} C_{N-D}^{n-k+1} / C_N^n$$

[推广2] 上述超几何分布也可加以推广。假某N件产品中包含一、二、三级产品各为 $n_1, n_2, N-n_1-n_2$件，现从中抽查n件，那么包含 k_1 件一级产品，k_2 件二级产品，$n-k_1-k_2$ 件三级产品的概率为

$$C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} C_{N-n_1-n_2}^{n-k_1-k_2} / C_N^n$$

1.4.2 几何概型

问题出处：古典概型只考虑有限个等可能样本点。如果试验结果的个数为无限，但是依然是等可能性的，那么上述的古典概型就不可用。

如何计算概率?

解决途径：可以考虑采用测度（长度、面积、体积等）计算方法。由此形成了确定概率的另一方法——几何方法。

Example 1.4.5 甲、乙两人相约在周二下午6点~7点在某地见面，并约定先到者等20分钟，过时则可离去。设每人在6点到7点这段时间内各时刻到达该地是等可能的，且两人到达的时刻互不相关。试求甲、乙两人能会面的概率?

解：我们以0~60分钟为一个区间，便于描述此事。

两人到达约会地点的时间记为x, y，所有可能的事件集合为

$$G = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\}$$

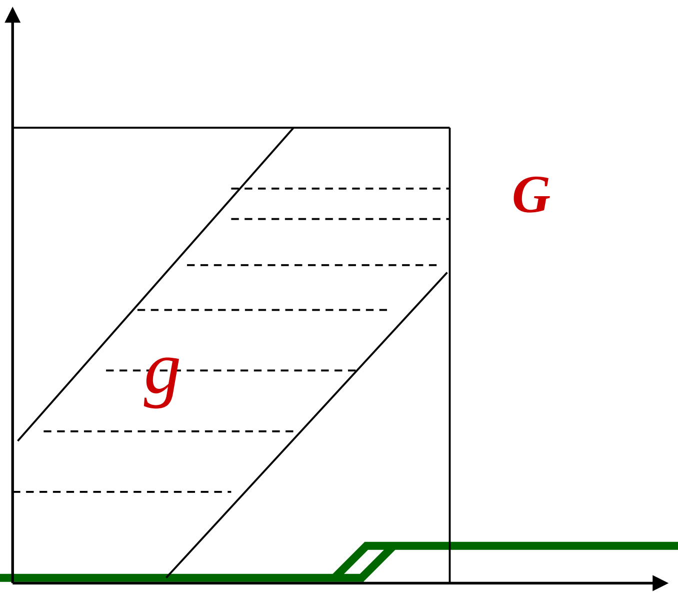
两个人达到时间相距不超过20分钟的集合为

$g = \{(x, y) \mid |x-y| \le 20, (x, y) \in G\}$

$P = S(g) / S(G)$

$S(G) = 60 \times 60$，$S(g) = 2000$

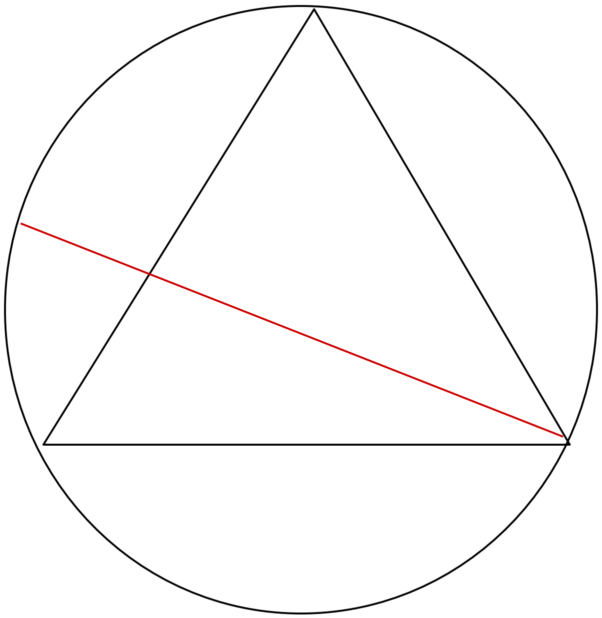
$P = 0.556$



Example 1.4.6 在半径为1的圆内随机地取一条弦。

问：其长超过该圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}$ 的概率为多少？

解：任何弦交圆周于两点，不失一般性，先固定其中一点于圆周上，以此点为顶点作一内接等边三角形。

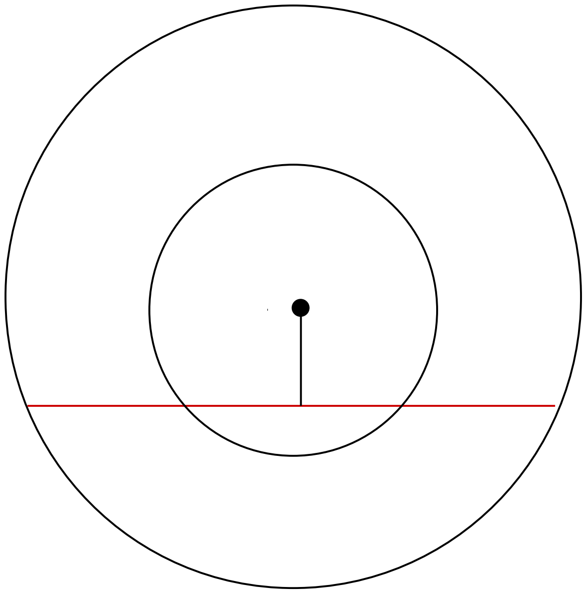


显然只有落入此三角形的弦，其长度才大于等边三角形边长。

而这样的弦的另一端跑过的弧的长度为整个圆周的1/3。

故此，所求概率为1/3。

另解： 一条弦完全由其中点确定。可假定弦的中点在圆内均匀分布，则只有当弦中点在以半径为1/2的小圆内时，这条弦与圆心的的距离小于1/2，而其弦长才大于$\sqrt{3}$ 。因此所求概率为1/4。



同一问题，为什么出现两个解？到底哪个对？

两个都对，主要在于对“随机”的理解不一样。

它们事实上是两个不同的随机试验

1.4.3 二项概率模型

一类随机试验：在相同的情况下重复进行n次同样的试验

每次的可能结果为有限个

且各次试验的结果互不影响（n次试验相互独立的）

这种概率模型称做n重独立试验概型。

特别,当每次试验只有两种可能结果A和 $\overline{A}$，则$P(A)=p \quad (0 < p < 1)$

$$P(\overline{A}) = 1 - p.$$

称为n重贝努里（Bernoulli）概型，也称为n重贝努里试验。

1.4 Model & Calculation for Probability

[定理] 在贝努里概型中，$P(\overline{A})=1-p(0<p<1)$，则事件$A$在$n$次试验中恰好发生$k$次的概率为：

$$b(k,n,p)=C_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}\qquad(0\le k\le n)$$

Remark1 该公式正好与 $[p+(1-p)]^n$ 的二项展开式中第（k+1）项完全相同，故有时又称之为参数为n和p的二项概率公式。

Remark2 反过来，由n重Bernoulli 实验可能成功的次数为0,1,2,…,n，必有

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=1$$

Remark3 一般而言，可以把任何事件二分，要么成功，要么失败（不成功的均为失败），如此试验可重复、独立进行，构成n重Bernoulli试验。

Example 1.4.7 某人进行射击，每次射击命中率为0.02，独立射击400次。

求：至少击中两次的概率。

解：A: 至少击中两次。

B_1: 一次不中

B_2: 射中一次

$$P(A) = 1 - P(B_1 \cup B_2)$$

$$= 1 - P(B_1) - P(B_2)$$

$$= 1 - (1-0.02)^{400} - 400 \times 0.02 \times (1-0.02)^{399}$$

$$= 0.9972$$

Example 1.17 反欺诈（Anti-Fraud）

招聘专业品酒师，随机让他区分两种酒。每次给他一杯酒，让他品尝说出是哪一种。连续重复10次（每次后稍加休息、漱口）。如果10次中有8次正确，则聘; 否则不聘。

问：这种做法合适否?

分析：判断这种标准合适与否，也就是判断一下什么样的人被录用的可能性大。

如一个人水平高，区辨能力达到$p=90\%$，那么应该可以聘用；而如果一个人连蒙带唬，区辨能力为$p=50\%$，那就该拒绝。是否如此呢?

Example 1.17 反欺诈（Anti-Fraud）

解：每次品酒要么正确，要么错误。

假设一个人每次正确判断可能为p，那么10次中有8次（包括以上）正确，其概率为：

$$b(8,10,p)+b(9,10,p)+b(10,10,p)$$

$$=p^8[45(1-p)^2+10p(1-p)+p^2]$$

如果$p=90\%$，则发生8次正确的概率为 $2.16p^8=0.929\,809$

如果$p=80\%$，则发生8次正确的概率为 $4.04p^8=0.671\,088$

如果$p=50\%$，则发生8次正确的概率为 $56.0p^8=0.054\,684$

看来连蒙带唬的人8次正确的概率很小，只有约5.5%；而能力强的人（90%）8次正确的概率为约93%。

Example1.18 碰运气能否通过英语四级考试

问题：早期CET-4 包括听力、语法结构、阅读理解、综合填空、写作等。除写作占15分外，其余85道题为单项选择题，每道题附有A、B、C、D四个选项。

靠运气能通过CET-4考试吗?

分析：看看靠运气通过考试的概率

假定不考虑写作所占的15分，若按及格为60分，85道选择题必须答对51题以上。

Example 碰运气能否通过英语四级考试

每道题有4个选择，只有一个答案是对的

其选择可以视为Bernoulli试验，成功概率为1/4，失败概率为3/4；85道题的选择可以看为85重Bernoulli试验。

要及格，必须在85次中成功51次，其概率为：

$$p = b(51,85,0.25) + b(52,85,0.25) + \cdots + b(85,85,0.25)$$

$$= \sum_{k=51}^{85} C_{85}^{k} 0.25^{k} (1-0.25)^{85-k}$$

$$\approx 8.74 \times 10^{-12}$$

此概率非常之小，在1000亿碰运气的考生中，只有0.874个可能成功！！！