概率论与数理统计

第四章　随机变量的数字特征

练习1：

游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光,电梯于每个正点的第5分钟、第25分钟和第55分钟从底层起行. 假设在早上的8点的第 X 分钟到达底层候梯处, 且 X 在[0,60]上服从均匀分布求游客等候时间的数学期望.

解　已知 X 在[0,60]上服从均匀分布, 其密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le x\le 60,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

设Y是游客等候电梯的时间(单位:分), 则

$$Y=g(X)=\begin{cases} 5-X & 0\le X\le 5 \\ 25-X & 5<X\le 25 \\ 55-X & 25<X\le 55 \\ 65-X & 55<X\le 60 \end{cases}$$

因此

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{60}\int_0^{60}g(x)\mathrm{d}x$$

$$E(Y)=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=11.67$$

练习2：

（正态分布）设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X)$.

解　设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其分布密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma>0,-\infty<x<\infty.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t$

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu$$

因而参数 μ 为正态分布的数学期望.

§2 方差

◆方差的定义

◆方差的计算

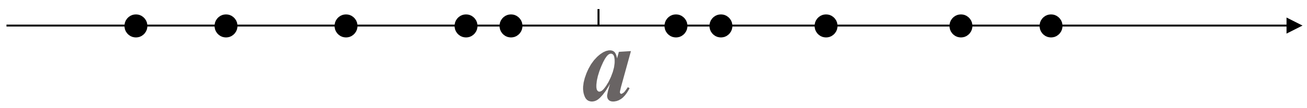
◆方差的性质

◆切比雪夫不等式

上一节我们介绍了随机变量的数学期望，它体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

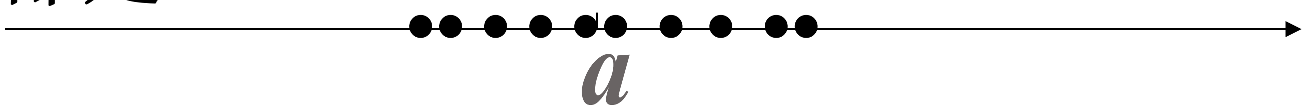
但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.

例如，某零件的真实长度为a，现用甲、乙两台仪器各测量10次，将测量结果X用坐标上的点表示如图：



测量结果的均值都是 a

甲仪器测量结果



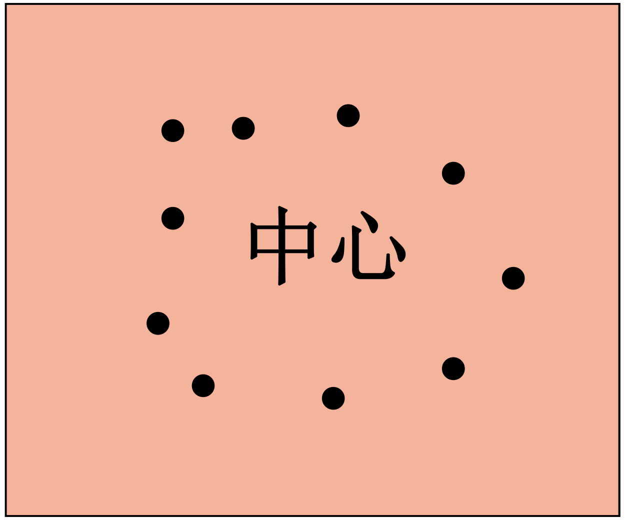
乙仪器测量结果

较好

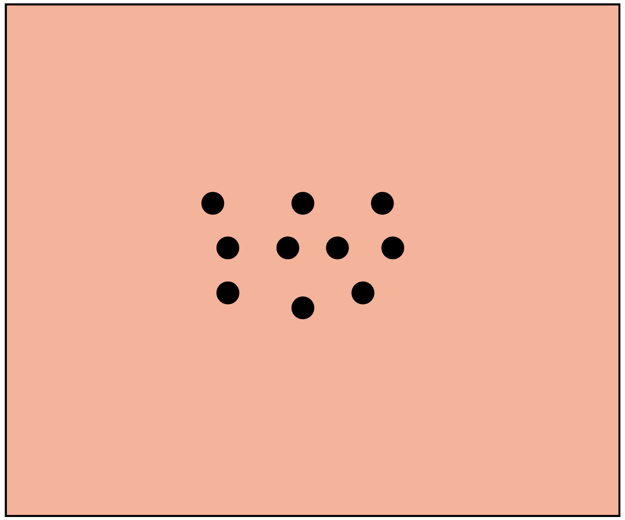
若让你就上述结果评价一下两台仪器的优劣，你认为哪台仪器好一些呢？

因为乙仪器的测量结果集中在均值附近

又如,甲、乙两门炮同时向一目标射击10发炮弹，其落点距目标的位置如图：



甲炮射击结果



乙炮射击结果 ← 乙炮

你认为哪门炮射击效果好一些呢?

因为乙炮的弹着点较集中在中心附近.

由此可见,研究随机变量与其均值的偏离程度是十分必要的.那么,用怎样的量去度量这个偏离程度呢?容易看到

$$E\{|X-E(X)|\}$$

能度量随机变量与其均值**E(X)**的偏离程度. 但由于上式带有绝对值,运算不方便,通常用量

$$E\{[X-E(X)]^2\}$$

来度量随机变量**X**与其均值**E(X)**的偏离程度.

这个数字特征就是我们这一讲要介绍的

方差

一、方差的定义

设X是一个随机变量，若$E[(X-E(X)]^2$存在，称 $E[(X-E(X)]^2$为 X 的方差. 记为D(X)或Var(X)，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E[X-E(X)]^2$$

方差的算术平方根$\sqrt{D(X)}$称为X的标准差或均方差记为$\sigma(X)$，它与X具有相同的量纲。

方差刻划了随机变量的取值对于其数学期望的离散程度 .

若X的取值比较集中，则方差D(X)较小；

若X的取值比较分散，则方差D(X)较大.

因此，D(X)是刻画X取值分散程度的一个量，它是衡量X取值分散程度的一个尺度。

二、方差的计算

由定义知，方差是随机变量 X 的函数

$$g(X)=[X-E(X)]^2$$

的数学期望 .

$$D(X)=\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k, \\ \int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx, \end{cases}$$

X为离散型，
分布率
$P\{X=x_k\}=p_k$

X 为连续型，X 概率密度 $f(x)$

计算方差的一个简化公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

证：$D(X)=E[X-E(X)]^2$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2$$

利用期望性质

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

例1 设随机变量X具有(0—1）分布，其分布率为

$$P\{X=0\}=1-p,\quad P\{X=1\}=p$$

求D(X) .

解 $$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

由公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

因此,0-1分布

$$E(X)=p,D(X)=p(1-p)$$

例2　设$X \sim \pi(\lambda)$，求$D(X)$。

解　X的分布率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0$$

因为　$E(X)=\lambda$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

因此, 泊松分布

$$E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$$

由此可知，泊松分布的数学期望与方差相等，等于λ。泊松分布的分布率中只含一个参数λ，只要知道λ，泊松分布就被确定了.

例3 设$X \sim U(a,b)$,求$D(X)$

解 X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & 其它 \end{cases}$

因为 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

所以 $D(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$$=\int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

因此, 均匀分布

$$E(X)=\frac{a+b}{2},D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

例4 设随机变量X服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$,求$E(X)$,$D(X)$

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

因此 $D(X)=\theta^2$

由此可知, 指数分布

$$E(X)=\theta,\ \ D(X)=\theta^2$$

三、方差的性质

1. 设C 是常数, 则 $D(C)=0$.

证明: $D(C)=E\left\{[C-E(C)]^2\right\}=0$

2. 设X 是随机变量, C 是常数, 则

$$D(CX)=C^2D(X).$$

证明: $$D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}$$

$$=C^2E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=C^2D(X)$$

由性质1和2可以得出

$$D(aX+b) = a^2 D(X)，\quad a,b\text{是常数}$$

$$D(aX+b) = E\left\{\left[(aX+b)-E(aX+b)\right]^2\right\}$$

$$= E\left\{\left[a(X-E(X))+(b-E(b))\right]^2\right\}$$

$$= E\left\{a^2\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

$$= a^2 D(X)$$

3. 设 X 与 Y 是两个随机变量，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

证明

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) &= E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} \\
&= E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\} \\
&= E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\}+ \\
&\quad +2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \\
&= D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}
\end{aligned}
$$

若 X,Y 相互独立, 由数学期望的性质4得

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

此性质可以推广到有限多个**相互独立**的随机变量之和的情况.

若$X_1,\cdots,X_n$ **相互独立**, $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 为常数

则 $$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i)$$

若X,Y相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $E(XY)=E(X)E(Y)$

4. $D(X)=0$的充要条件是X以概率1取常数C,即

$$P\{X=C\}=1. \text{ 其中，} C=E(X).$$

也就是： $D(X)=0 \Longleftrightarrow P(X=E(X))=1$

称为X依概率1等于常数$E(X)$

证明：充分性

设 $P\{X=E(X)\}=1$,则有 $P\{X^2=[E(X)]^2\}=1$

于是，$\boldsymbol{D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0}$

必要性的证明在讲过切比雪夫不等式之后给出

例6 设$X \sim B(n,p)$，求E(X)和D(X).

解 $X \sim B(n,p)$, 则X表示n重伯努利试验中的“成功” 次数 .

若设 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{如第}i\text{次试验成功} \\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败} \end{cases}$ $i=1,2，\ldots，n$

则 $\boldsymbol{X} = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}$是$n$次试验中 “成功” 的次数

可知X_i 是0-1分布，所以

$E(X_i) = p, \quad D(X_i) = p(1-p)$ ，$i=1,2，\ldots，n$

由于$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

于是 $$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p)$$

若$X\sim B(n,p)$，则

$$E(X)=np,D(X)=np(1-p)$$

例7 设$X \sim N(0,1)$,求$E(X)$和$D(X)$.

解 X的概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

于是 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

所以 若$X \sim N(0,1)$,则 $E(X) = 0, D(X) = 1$

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$E(Z)=0, D(Z)=1$$

而$X=\sigma Z+\mu$,由数学期望和方差的性质得

$$E(X)=E(\sigma Z+\mu)=\sigma E(Z)+E(\mu)=\mu$$

$$D(X)=D(\sigma Z+\mu) \ =\sigma^2 D(Z)=\sigma^2$$

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$

这就是说，正态分布的概率密度中的两个参数μ和σ^2分别是该分布的数学期望和方差，因而正态分布完全可由它的数学期望和方差所确定。

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots n,$且它们相互独立，则

它们的线性组合$: C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$

$(C_1, C_2, \cdots C_n$是不全为0的常数)仍然服从正态分布.

且$C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2\sigma_i^2)$

例如, 若$X \sim N(1,3), Y \sim N(2,4),$且$X$和$Y$相互独立,

则$Z = 2X - 3Y$也服从正态分布，而$E(Z) = -4,$

$D(X) = 48,$故有$Z \sim N(-4,48)$

例8　设活塞的直径(以cm计)$X\sim N(22.40,0.03^2)$,气缸的直径$Y\sim N(22.50,0.04^2)$,X和Y相互独立.任取一支活塞,任取一只气缸,求活塞能装入气缸的概率.

解　按题意需求$P\{X<Y\}$,即求$P\{X-Y<0\}$.

由于　$X-Y\sim N(-0.10,0.0025)$

故有

$$P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}$$

$$=P\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}<\frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\}$$

$$=\Phi(\frac{0.10}{0.05})=\Phi(2)=0.9772$$

四、契比雪夫不等式（Chebyshev 不等式)

设随机变量 X 有数学期望 $E(X)=\mu$,方差 $D(X)=\sigma^2$,
则对任意 $\varepsilon>0$, 有 $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\sigma^2/\varepsilon^2$;

或 $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\sigma^2/\varepsilon^2$.

由切比雪夫不等式可以看出，若 σ^2越小，则事件$\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$的概率越大，即随机变量X集中在期望附近的可能性越大.

证明：(只证 X 是连续型)

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx \leq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

其中不等式 $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\sigma^2/\varepsilon^2.$

给出了随机变量X的分布未知情况下，事件

$$\{|X-\mu|<\varepsilon\}$$

的概率的下限的估计方法。

切比雪夫不等式给出了在随机变量的分布未知,而只知道$E(X)$和$D(X)$的情况下估计概率$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$的界限.

例如取 $\varepsilon = 3\sqrt{D(X)}, 4\sqrt{D(X)}$ 得到

$$P\{|X-E(X)|<3\sqrt{D(X)}\} \geq 0.8889,$$

$$P\{|X-E(X)|<4\sqrt{D(X)}\} \geq 0.9375,$$

这个估计是比较粗糙的,如果已经知道随机变量的分布时,那么所需求的概率可以确切地计算出来,也就没有必要利用这一不等式来作估计了.

方差性质4°必要性的证明：

设 $D(X)=0$, 要证 $P\{X=E(X)\}=1.$

证　用反证法　假设 $P\{X=E(X)\}<1$, 则对于某一个数 $\varepsilon>0$, 有 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}>0$, 但由切比雪夫不等式, 对于任意 $\varepsilon>0$, 因 $\sigma^2=0$, 有

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}=0,$$

矛盾, 于是 $P\{X=E(X)\}=1.$

例9 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是7300，均方差是700 . 利用切比雪夫不等式估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率 .

解：设每毫升白细胞数为X

依题意，$E(X)=7300, D(X)=700^2$

所求为 $P(5200 \leq X \leq 9400)$

$$P(5200 \leq X \leq 9400)$$

$$= P(-2100 \leq X-E(X) \leq 2100)$$

$$= P\{ |X-E(X)| \leq 2100\}$$

由切比雪夫不等式

$$P\{\ |X\text{-}E(X)| \le 2100\} \ge 1-\frac{D(X)}{(2100)^2}$$

$$=1-(\frac{700}{2100})^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

即估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率不小于8/9 .

课堂练习

1、设随机变量X服从几何分布，分布率为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\ldots$$

其中$0<p<1$，求E(X)，$D(X)$

解：记 $q=1-p$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$$

这时 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots,\qquad |x|\le 1$

两边对x求导，就有

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+kx^{k-1}+\cdots,\qquad |x|\le 1 \qquad (1)式$$

所以 $E(X)=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=p\dfrac{1}{(1-q)^2}=\dfrac{1}{p}$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}=p[\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}]$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}+E(X)$$

$$=pq\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}+E(X)$$

将(1)式两边对x求导，有

$$\frac{2}{(1-x)^3}=1\bullet 2+2\bullet 3x+\cdots+(k-1)kx^{k-2}+\cdots, \qquad |x|\le 1$$

所以 $pq\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}+E(X)=pq\dfrac{2}{(1-q)^3}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{2q}{p^2}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{2-p}{p^2}$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

注：Γ函数的定义 $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \Gamma(\alpha) \quad (\alpha > 0)$

Γ函数的性质 1、递推公式 Γ(α+1)=αΓ(α) α>0

证明：$左式 = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha}d(-e^{-x})$

$$\underline{\underline{分部积分}} x^{\alpha}(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-e^{-x})dx^{\alpha}$$

$$= 0 - 0 + \int_0^{+\infty} \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

$$= \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha) = 右式$$

2、余元$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin\alpha\pi$， $(0<\alpha<1)$

3、$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

4、与阶乘的关系$\Gamma(n+1)=n!$，(n非负整数）

5、 $\Gamma(1)=1$

2、设随机变量$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$,其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad \alpha>0,\beta>0$$

求$E(X)$, $D(X)$

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{x}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx$$

$$\underline{\underline{y=x/\beta}}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}y^\alpha \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\beta\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha\beta$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx$$

$$\underline{\underline{y=x/\beta}}\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}y^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\beta^2\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$=\frac{\beta^2(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)\beta^2$$

$$D(X)=\alpha(\alpha+1)\beta^2-(\alpha\beta)^2=\alpha\beta^2$$

当$\boldsymbol{\alpha}=1$时，X服从参数为$\boldsymbol{\beta}$的指数分布.

3、设随机变量X服从瑞利分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\sigma>0$是常数，求$E(X),D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}x\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

令 $u=\dfrac{x^2}{2\sigma^2}$，得

$$E(X)=\sqrt{2}\sigma\int_0^{\infty}u^{1/2}e^{-u}du=\sqrt{2}\sigma\bullet\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2}\sigma\bullet\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

令 $u=\dfrac{x^2}{2\sigma^2}$，得

$$E\left(X^2\right)=2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-u}du \ =2\sigma^2\Gamma(2)=2\sigma^2$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\sigma^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

几种常用的概率密度的数学期望和方差，见附表1.

作业：课后习题22、23、24