第五章 线性变换

线性空间中向量之间的联系是通过线性空间到线性空间的映射（变换）来实现的.

第一节 线性变换的定义

一、线性变换的概念

1. 映射

定义1：设有两个非空集合X, Y，如果有一个确定的法则f，使得X中每个元x在f的作用下有集合Y中唯一确定的元y与之对应，则称此法则f是X到Y的一个映射，记为

$$f : X \to Y$$

若X中的元x通过f得到Y中的对应元y，则记为

$$f : x \mapsto y$$

称y为在映射f下元x的象，并记为$y = f(x)$.

而x称为y在映射f下的原象.

若用$f(X)$代表X在映射f象的集合，则显然 $f(X)\subseteq Y$，如果 $f(X)=Y$ ，映射f就称为是映上的或满射.

特别的

- 若在映射f下，X中不同的元的象也一定不同，即有$\alpha_1\neq\alpha_2$时一定有 $f(\alpha_1)\neq f(\alpha_2)$，则称$f$是1－1的或单射.
- 一个映射如果既是单射又是满射，就称为1－1对应或双射.

2. 变换

定义2 线性空间V到自身的映射称为V的一个变换，即

$$T: V\to V$$

这时，向量α在变换T下的象β记为$T(\alpha)$，即

$$\beta=T(\alpha) \text{ 或 } \beta=T\alpha$$

注：变换概念是函数概念的推广.

3. 线性变换

定义3 设线性空间V上的一个变换T满足：

(1) 对$\forall \alpha,\beta \in V$,有$T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta$.

(2)对$\forall \alpha \in V$和$\lambda \in F$，有$T(\lambda\alpha)=\lambda T\alpha$.

则称T是线性空间V上的一个**线性变换**.

由(1)(2)有对于V上的任意向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$

$$T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1T\alpha_1+k_2T\alpha_2+\cdots+k_sT\alpha_s$$

定理 数域F上线性空间V上的变换T是线性变换

$\Leftrightarrow \forall \alpha,\beta\in V$及$\forall a,b\in F$ 恒有$T(a\alpha+b\beta)=aT(\alpha)+bT(\beta)$成立.

例1： 线性空间V中的零变换O: $O(\alpha)=0$是线性变换.

证明: 设$\alpha, \beta \in V$, $k \in F$, 则有

$$O(\alpha+\beta)=0=0+0=O(\alpha)+O(\beta),$$

$$O(k\alpha)=0=k0=kO(\alpha).$$

所以, 零变换O是线性变换.

注意： 零变换中对应的元素必须是空间的零元0.

例2： 由关系式 $$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

确定xoy平面上的一个变换, 说明T的几何意义.

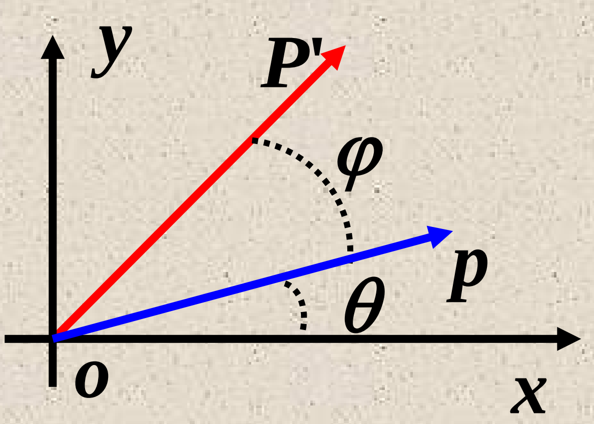
解: 先证明变换T是线性变换. 设

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad p_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ k \in R$$

则 $$T(p_1+p_2)=A(p_1+p_2)=Ap_1+Ap_2=T(p_1)+T(p_2),$$

$$T(kp_1)=A(kp_1)=kAp_1=kT(p_1).$$

所以, 变换T是线性变换.



记 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$,于是

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix},$$

上式表明: 变换T把任一向量按逆时针方向旋转φ角.

一般地, 在线性空间R^n中, 设A为n阶方阵, $x\in R^n$, 变换 $T(x)=Ax$是本节所定义的线性变换.

事实上, 对任意的$x', x''\in R^n$,

$$T(x'+x'')=A(x'+x'') = Ax'+Ax'' = T(x')+T(x''),$$

$$T(kx')=A(kx')=kAx' = kT(x').$$

例3: 定义在闭区间$[a, b]$上的全体连续函数组成实数域上的一个线性空间$C[a, b]$, 在这个空间中变换.

$$T(f(x)) = \int_a^x f(t)dt$$

是一个线性变换.

证明: 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 则有

$$T[f(x)+g(x)] = \int_a^x [f(t)+g(t)]dt$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt = T[f(x)]+T[g(x)],$$

$$T[k f(x)] = \int_a^x kf(t)dt = k\int_a^x f(t)dt = kT[f(x)]$$

故命题得证.

例4: 线性空间V中的恒等变换(或称单位变换)E:

$$E(\alpha)=\alpha, \quad \alpha\in V,$$

是线性变换.

证明: 设$\alpha, \beta \in V$, $k \in F$, 则有

$$E(\alpha+\beta)=\alpha+\beta=E(\alpha)+E(\beta),$$

$$E(k\alpha)=k\alpha=kE(\alpha).$$

所以, 恒等变换E是线性变换.

例5 设V是数域F上的线性空间, k是F中的某个数, 定义V的变换如下:

$$\alpha\to k\alpha$$

这是一个线性变换, 称为由数k决定的数乘变换.

当$k=1$时, 便得恒等变换, 当$k=0$时, 便得零变换.

例6: 在R^3中定义变换:

$$T(x_1, x_2, x_3)= (x_1^2, x_2+x_3, 0),$$

则T不是R^3的一个线性变换.

证明: 对任意的$\alpha=(a_1, a_2, a_3)$, $\beta=(b_1, b_2, b_3)\in R^3$,

$$\begin{aligned} T(\alpha+\beta) &= T(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \\ &= ((a_1+b_1)^2, (a_2+b_2)+(a_3+b_3), 0) \\ &\neq (a_1^2, a_2+a_3, 0)+(b_1^2, b_2+b_3, 0) \\ &= T(\alpha)+T(\beta). \end{aligned}$$

故, T不是R^3的一个线性变换.

二、线性变换的性质

以下设T为线性空间V_n的线性变换.

1. $T(0)=0$, $T(-\alpha)=-T(\alpha)$.

实际上, $T(0)=T(0\alpha)=0T(\alpha)=0$;

$$T(-\alpha)=T((-1)\alpha)=(-1)T(\alpha)=-T(\alpha).$$

2. 若$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$, 则

$$T\beta=k_1T\alpha_1+k_2T\alpha_2+\cdots+k_mT\alpha_m.$$

此性质表明：线性变换对线性组合保持不变.

3. 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关, 则$T\alpha_1, T\alpha_2, \cdots, T\alpha_m$亦线性相关.

利用性质2即可证明.

注意：若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关, 则$T\alpha_1, T\alpha_2, \cdots, T\alpha_m$不一定线性无关.

性质1—3可表述成：线性变换保持零向量和负向量、保持线性组合与线性线性相关性不变.

4. 线性变换T的象集$T(V_n)$是线性空间V_n的一个子空间，称$T(V_n)$为线性变换T的象空间.

证明: 由于T是V_n上的线性变换, 故$T(V_n)\subseteq V_n$.

又由于$0\in V_n$, 则$0=T(0)\in T(V_n)$, 故$T(V_n)$非空.

则对任意的 $\beta_1, \beta_2\in T(V_n)$,

有$\alpha_1, \alpha_2\in V_n$, 使得$T\alpha_1=\beta_1$, $T\alpha_2=\beta_2$, 从而

$\beta_1+\beta_2=T\alpha_1+T\alpha_2=T(\alpha_1+\alpha_2)\in T(V_n)$, (因$\alpha_1+\alpha_2\in V_n$)

$k\beta_1 = kT\alpha_1 = T(k\alpha_1)\in T(V_n)$, (因$k\alpha_1\in V_n$)

由上述证明知: $T(V_n)$对V_n中的线性运算封闭,故$T(V_n)$是V_n的子空间.

5. (补) $S_T=\{\alpha \mid T\alpha=0, \alpha\in V_n\}$(经$T$变换到0的全体元素构成的集合)是$V_n$的子空间. 称$S_T$为线性变换$T$的**核**.

证明: 显然$S_T\subseteq V_n$. 由于$T(0)=0$, 则$0\in S_T$, 故S_T非空.

则对任意的$\alpha_1, \alpha_2\in S_T$, 有$T(\alpha_1)=0$, $T(\alpha_2)=0$, 从而

$$T(\alpha_1+\alpha_2)=T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=0+0=0,\ 故\alpha_1+\alpha_2\in S_T,$$

$$T(k\alpha_1)=kT(\alpha_1)=k0=0,\ 故k\alpha_1\in S_T,$$

由上述证明知: S_T对V_n中的线性运算封闭,故S_T是V_n的子空间.

R^n上某些线性变换象空间与核空间含义

设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 其中 $\alpha_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$,

对R^n上的线性变换: $T(x)=Ax$, $x\in R^n$, 则有

(1) $T(x)=Ax$的象空间$T(R^n)$就是由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所生成的向量空间: 即

$$T(R^n)=\{\, y=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n\in R \,\}$$
$$=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

(2) $T(x)=Ax$的核S_T就是齐次线性方程组$Ax=0$的解空间.

小 结

- 知道一些基本概念，如映射、象、原象、变换等
- 线性变换的定义和判定（重点）
- 线性变换的性质

要证明线性空间V_n的一个变换T是线性变换, 必须证明T保持加法和数量乘法运算, 即

$$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta), \quad T(k\alpha)=kT(\alpha).$$

反之, 若要证明一个变换T不是线性变换, 只须证明T不保持加法或数量乘法运算, 实际上只须举出一个反例即可.

思考题

1. 在线性空间V中，定义变换如下

$$T\xi=\xi+\alpha,$$ 其中$\alpha\in V$是一固定向量.

问 T是否为V上的线性变换？

2: 在线性空间$P_3[x]$ 中. 证明

(1) 求导运算D是一个到其自身的线性变换.

(2) 如果$T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=a_0$, 则$T$也是$P_3[x]$ 上的一个线性变换.

(3) 如果$T_1(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=1$, 则$T_1$是$P_3[x]$ 上的一个变换, 但不是线性变换.

思考题解答

1. 在线性空间V中，定义变换如下

$T\xi=\xi+\alpha$， 其中$\alpha\in V$是一固定向量.

问 T是否为V上的线性变换？

解：$\forall \xi,\eta\in V$，$\lambda\in F$，有 $T\xi=\xi+\alpha$, $T\eta=\eta+\alpha$

$$T(\xi+\eta)=(\xi+\eta)+\alpha,\ T(\lambda\xi)=\lambda\xi+\alpha$$

(1)当$\alpha=0$时有 $T(\xi+\eta)=\xi+\eta=T\xi+T\eta$,

$$T(\lambda\xi)=\lambda\xi=\lambda T\xi$$

此时T为线性变换.

(2)当$\alpha\neq0$时有 $T\xi+T\eta=(\xi+\eta)+2\alpha\neq T(\xi+\eta)$

此时T不为线性变换.

2: 在线性空间$P_3[x]$中. 证明

(1) 求导运算D是一个到其自身的线性变换.

证明：对任意的 $p=p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $q=q(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\in P_3[x]$, $k\in R$, 由求导运算性质可得

$$D(p+q)=\frac{d}{dx}(p(x)+q(x))=\frac{d}{dx}p(x)+\frac{d}{dx}q(x)=Dp+Dq$$

$$D(kp)=\frac{d}{dx}(kp(x))=k\frac{d}{dx}p(x)=kDp$$

(2) 如果$T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=a_0$, 则$T$也是$P_3[x]$上的一个线性变换.

事实上, 对任意的

$p=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $q=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\in P_3[x]$,

$T(p+q)=a_0+b_0=T(p)+T(q)$,

$T(kp)=ka_0=kT(p)$.

(3) 如果$T_1(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=1$, 则$T_1$是$P_3[x]$上的一个变换, 但不是线性变换.

由于$T_1(p+q)=1$, 但$T_1(p)+T_1(q)=1+1=2$,

所以 $$T_1(p+q)\neq T_1(p)+T_1(q).$$