数学文化

见面课（五）

联系方式

李军　数学科学学院**416**办公室

邮箱：lijun@nankai.edu.cn

鼓励师生课下的联系和交流。上周已经建立了课程的飞书群，教学通知会发到飞书群。大家在学习中遇到问题，就及时通过飞书联系我。

- 千万不要错过平台上做题的截止时间！

  即：每周日的晚上**23**点**30**分。

第**4**讲、第**5**讲测验题和第**1**次作业的截止时间都是**10**月**23**日（周日）的晚上**23**点**30**分。

下列集合中，哪些集合是可数无穷的集合?

A 整数集合

B 有理数集合

C 无理数集合

D $\{(m,n)|m,n\in\mathbb{N}\}$

E $[0,1]$上可微函数全体组成的集合

F 整系数多项式全体组成的集合

提交

投票(匿名) 最多可选1项

设置

下面两个命题中哪个是真的?

A 无穷多个无穷小量的乘积一定是无穷小量

B 无穷多个无穷小量的乘积未必是无穷小量

提交

主观题 10分

设置

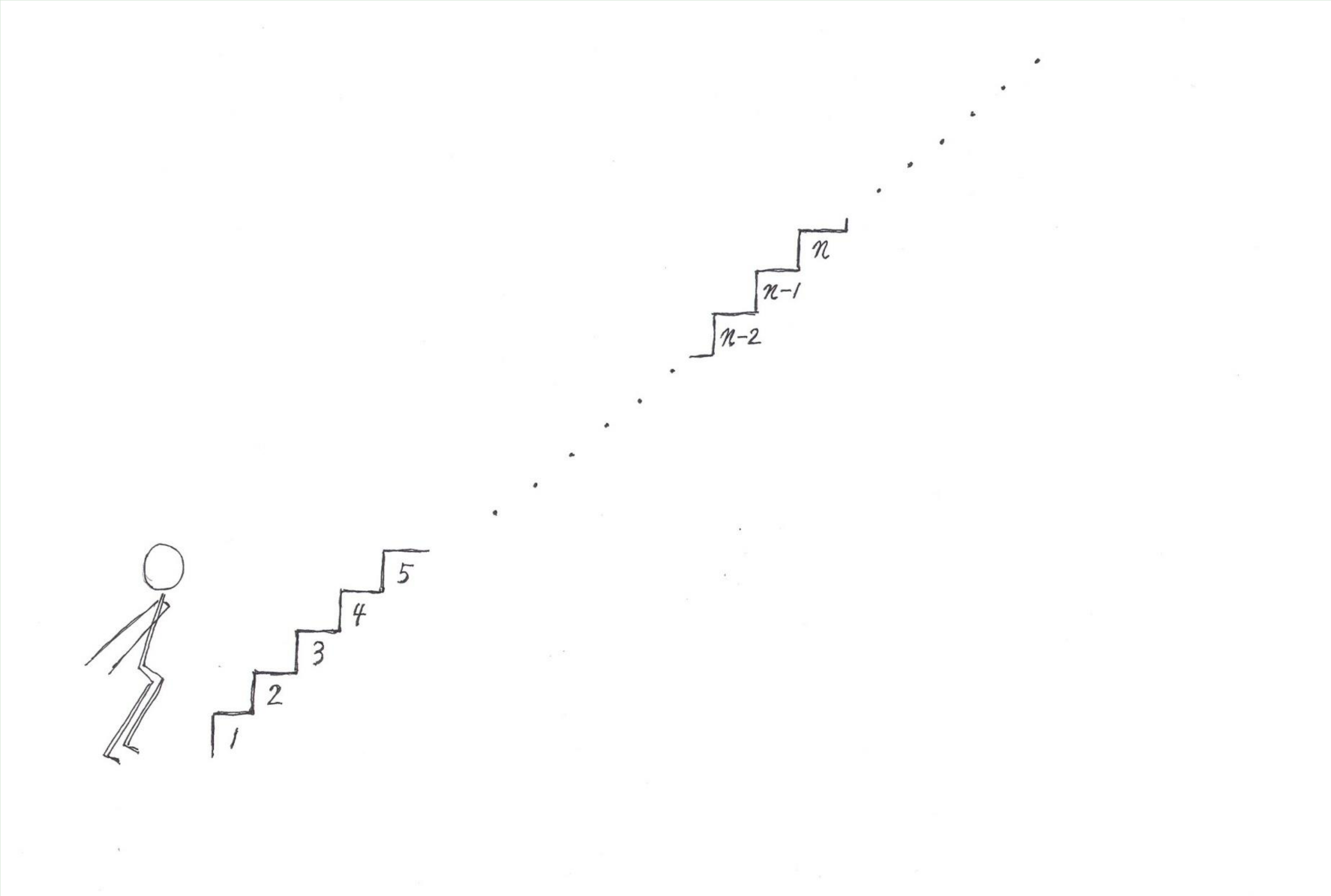
说说你在数学文化的学习中感到困惑的问题或很有兴趣的问题。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

平台上慕课内容的拓展

跳格游戏



如图，一个人站在“梯子格”的起点处向上跳，从格外只能进入第1格，从格中，每次可向上跳一格或两格，问：可以用多少种方法，跳到第n格?

解：设跳到第n格的方法有 t_n 种。

由于他跳入第1格，只有一种方法；跳入第2格，必须先跳入第1格，所以也只有一种方法，从而 $t_1 = t_2 = 1$

而能一次跳入第n格的，只有第 $n-1$ 和第 $n-2$ 两格，因此，跳入第 n 格的方法数，是跳入第 $n-1$ 格的方法数 t_{n-1}，加上跳入第 $n-2$ 格的方法数 t_{n-2} 之和。

即 $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ 。综合得递推公式

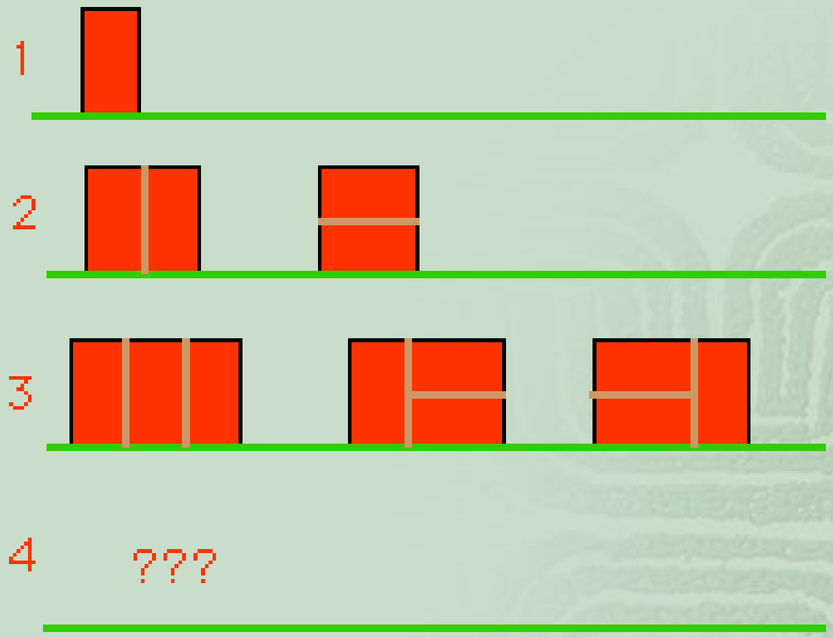
$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad (n = 3, 4, 5, \cdots) \end{cases}$$

容易算出，跳格数列 $\{t_n\}$ 就是斐波那契数列

1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

筑墙

以长×高为2×1的砖块为基本素材，组合成高度为2，长度为n的墙。请问：砖块的组合方式有多少种可能?



参考题：取石头（Fibonacci Nim）

有一堆石头共20块，两人轮流取，先取的一方第一次可任意取，但不可全取；以后双方每次所取的石头数不得超过对方刚取石头数目的2倍；而且，我们规定取得最后一块石头者获胜。试问：先取者较有利，还是后取者较有利？有没有必胜的策略？

(1) 设一共有n(>1)块石头，依次讨论了n等于2,3,4,5,6,7,8的情形后就可能会大胆猜测：n是斐波那契数时后取者胜，n不是斐波那契数时先取者胜。

(2) 小于20的最大的斐波那契数是13，但第一次取时不能取7块（否则乙将剩下的全取走）。看看n等于9,10,11,12的情形，请指出n等于20时第一次取几块？

(3) 本问题的一般取胜策略及其证明较复杂，有兴趣的同学可以课下思考。

参考题：威索夫(Wythoff)游戏

有两堆石头，两人轮流取，每次可以从一堆中取任意多块或者从两堆中取相同的块数；而且，我们规定取得最后一块石头者获胜。试问：哪些局面下后取者有获胜的策略？

参考题：威索夫(Wythoff)游戏

用“问题一般化、问题特殊化”的方法可以得到：（1，2），（3，5），（4，7），（6，10），（8，13），…等局面下，后取者有获胜的策略。这些数字的规律是什么？

参考题：威索夫(Wythoff)游戏

取 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（黄金比），则第n个后取者获胜的局面可以写成

$$\left(\left[\frac{n}{x}\right],\left[\frac{n}{x}\right]+n\right)\text{或}\left(\left[\frac{n}{x}\right],\left[\frac{n}{x^2}\right]\right),$$

其中[ ]是取整函数。

课堂讨论

- 对于预先给定的正整数n，“全体正实数”的集合与“全体正实数中去掉1、2、3、……、n”的集合之间，能否建立一一对应？

课堂讨论提示一

- 对于预先给定的正整数**n**，“全体正整数”的集合与“全体正整数中去掉**1**、**2**、**3**、**……**、**n**”的集合之间，能否建立一一对应？

课堂讨论提示二

- 正整数以外的数，自己对应到自己。

该命题如何推广？

- 定理：…… ……，…… …… 。

该命题如何推广？

- 定理：任意无限集中，… …，… … 。

该命题如何推广？

- 定理：任意无限集中，… …，能够一一对应。

该命题如何推广？

- 定理：任意无限集中，… …， 仍然与原集合能够一一对应。

该命题的推广

- 定理：任意无限集中，去掉有限个元素后，仍然与原集合能够一一对应。

在下面的希尔伯特旅馆场景中，时间长度是无限的，客人的生命也是无限的。希尔伯特旅馆第一天恰有一位客人，第二天这位客人离开，又来了两位客人，以后每天都有一位客人离开，又来了两位客人。在无穷多天之后，旅馆里一个客人都没有了，这种情况可能发生吗？

A 可能发生

B 不可能发生

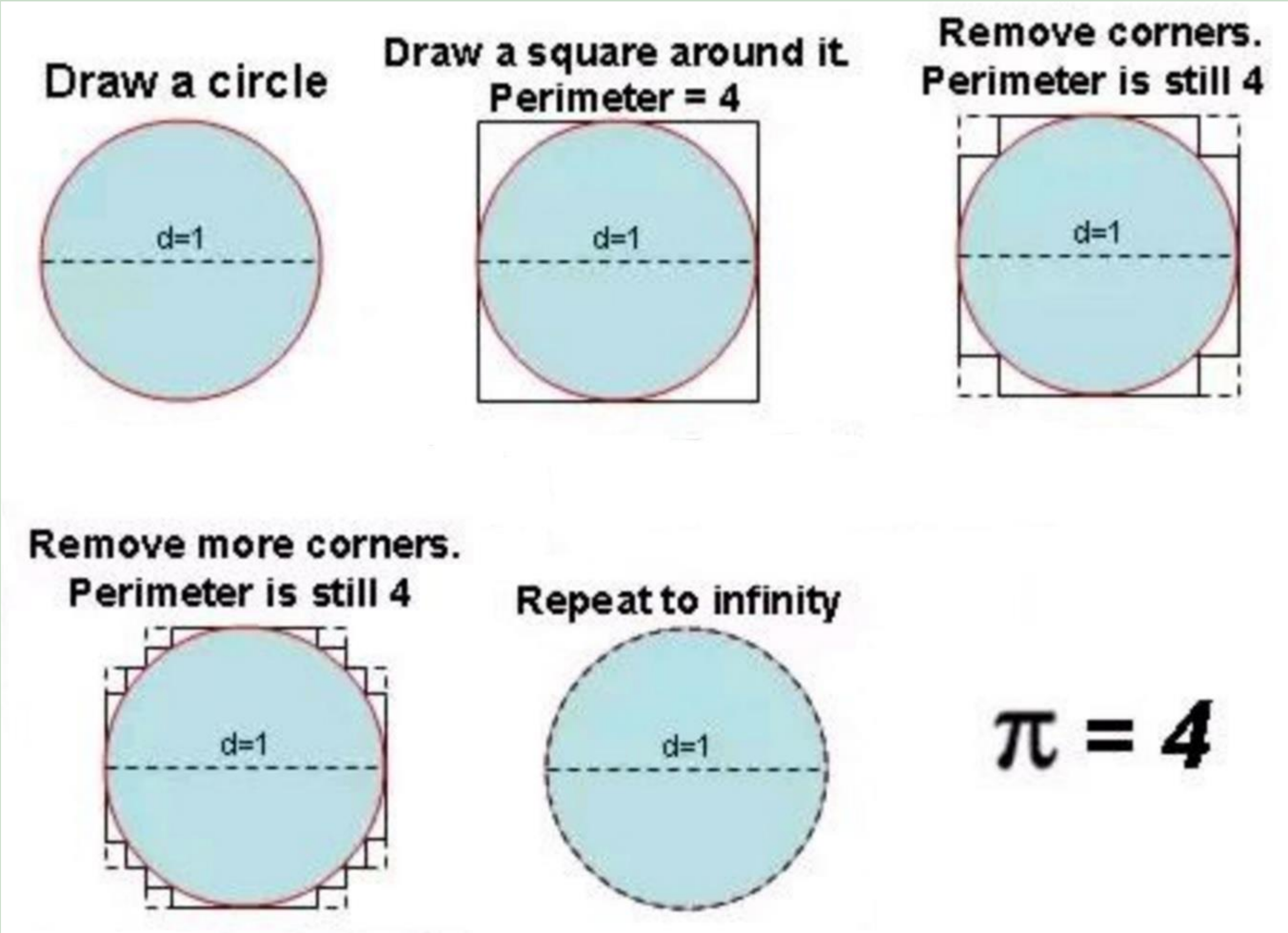
提交

说谎者悖论

说谎者悖论的一种重新表述如下。“这句话是假话”这句话对不对？

如果说这句话对，那么就得承认这句话是假话，因为这是这句话本来的意思；如果说这句话不对，那么就得承认这句话不是假话，可这样就承认这句话是对的了。不管怎么回答，都会导致矛盾。

$\pi = 4$悖论



Draw a circle
d=1
Draw a square around it.
Perimeter = 4
d=1
Remove corners.
Perimeter is still 4
d=1
Remove more corners.
Perimeter is still 4
d=1
Repeat to infinity
d=1
π = 4

汤姆森灯悖论

汤姆森灯悖论由哲学家詹姆斯•汤姆森提出，陈述为：令一盏灯最初是亮着的，过1/2分钟时灯灭；再过1/4分钟时灯亮；再过1/8分钟时灯灭；再过1/16分钟时灯亮……如此地循环往复。注意到无穷级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$，可知这一开灯关灯序列的时长恰好是1分钟。问：到1分钟时，这盏灯是亮着的还是灭着的？

视频：芝诺悖论、汤姆森灯悖论

- https://www.bilibili.com/video/BV1R5411x75C?from=search&seid=11323843004904357101&spm_id_from=333.337.0.0

视频：数学之外的悖论

- https://www.bilibili.com/video/BV1Hh411U7dk?from=search&seid=1132384300490435710 1&spm_id_from=333.337.0.0

逻辑智力题：真话村与谎话村

一个小岛上有两个村子，分别在小岛东侧与西侧，其中一个村子名叫“真话村”，真话村的居民永远说真话，另一个村子名叫“谎话村”，谎话村的居民永远说谎话。

一个外乡人到达了这个小岛，他知道这两个村子名字的由来，但不知道哪个村子是真话村。他找到一个村民，用一个“是”或“否”回答的问题就知道了哪个村子是真话村。怎么提问呢？

本课程的教材请自己去买，有用！

下次“见面课”

2022年10月25日

（周二）

本次“见面课”结束

谢谢！