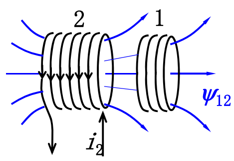
✠ 感生电场是以法拉第电磁感应定律为基础的，源于法拉第电磁感应定律又高于法拉第电磁感应定律。只要以L为边界的曲面内有磁通的变化，就存在感生电场的。

△ 10.4 互感 （mutual inductance）

一．互感系数 （coefficient of mutual inductance）



线圈1、2不变
相对位置不变
介质不变
无铁磁质

$$\boxed{\begin{aligned}\psi_{12} &= M \cdot i_2 \\ \psi_{21} &= M \cdot i_1\end{aligned}}$$

M = const.

M 称互感系数，它由两线圈的大小、形状、圈数、相对位形和介质情况决定。

M 的单位：H（亨利）$= \dfrac{\text{Wb（韦伯）}}{\text{A（安）}}$

互感电动势 $\boxed{\varepsilon_{12} = -\dfrac{d\psi_{12}}{dt} = -M\dfrac{di_2}{dt}}$

规定：i_2正向 $\xrightarrow[\text{螺旋}]{\text{右手}}$ ψ_{12}正向 $\xrightarrow[\text{螺旋}]{\text{右手}}$ ε_{12}正向。

二．互感系数的计算

设$i_1 \to B_1 \to \psi_{21} \to M = \dfrac{\psi_{21}}{i_1}$

或设$i_2 \to B_2 \to \psi_{12} \to M = \dfrac{\psi_{12}}{i_2}$

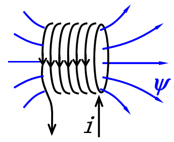
哪条路计算方便，就按哪条路计算

三．互感的应用

变压器，互感器，…

△10.5 自感（self-inductance）

一.自感系数（coefficient of self-inductance）



线圈不变形
介质不变化
无铁磁质

$\boxed{\psi = Li}$

L= const.

L 称自感系数（电感量），它由线圈圈数、形状、尺寸、介质情况等因素决定。

L的单位：H（亨利）

为保证$L > 0$，规定ψ 的正向与i 的正向成右手螺旋关系。

自感电动势 $\boxed{\varepsilon_L = -\dfrac{d\psi}{dt} = -L\dfrac{di}{dt}}$ （ε_L 的正向与 i 的正向一致）

二.自感系数（电感）的计算

1. 由 $\boxed{L=\psi/i}$ 计算：设 $i \to B \to \psi \to L$

例如长直螺线管：$B \approx \mu n i \to \psi \approx nl \cdot \mu n i \cdot S$

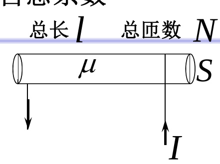
→自感系数 $\boxed{L \approx \mu\, n^2 V}$ ($V=lS$)

2. 由 $\boxed{L = \left| -\dfrac{\varepsilon_L}{di/dt} \right|}$ 计算：ε_L，$\dfrac{di}{dt} \to L$

由此可知：$\dfrac{\text{V·s（伏秒）}}{\text{A（安）}} = \dfrac{\text{Wb（韦伯）}}{\text{A（安）}}$

例1：求长直螺线管的自感系数

几何条件如图



解：设通电流 I

$$\boxed{B = \mu \frac{N}{l} I}$$

$$\psi = N\phi = NBS$$

$$\boxed{L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu N^2 S}{l}}$$

几何条件

介质

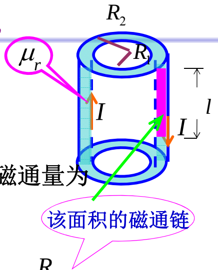
固有的性质

电惯性

例2：计算同轴电缆单位长度的自感

根据对称性和安培环路定理，在内圆筒和外圆筒外的空间磁场为零。两圆筒间磁场为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad R_1 \le r \le R_2$$



考虑 l长电缆通过面元 ldr 的磁通量为

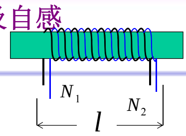
$$d\Phi = B\cdot dr\cdot l = \frac{\mu I}{2\pi r} ldr$$

$$\Psi = \Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_o \mu_r I}{2\pi r} ldr = \frac{\mu I l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

电缆单位长度的自感：$\therefore L = \frac{\Psi}{l\cdot I} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

例3：计算同轴螺旋管的互感及自感

两个共轴螺旋管长为 l，匝数分别为N_1、N_2，管内充满磁导率为 μ 的磁介质



$$\because B_1 = n_1 \mu I_1$$

线圈1产生的磁场通过线圈2的磁通链数

$$\Psi_{21} = \mu\frac{N_1}{l} I_1 S N_2$$

由互感定义

$$\therefore M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} = \mu n_1 n_2 V$$

同理可求出：$\therefore M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu N_2 N_1 S}{l} = \mu n_2 n_1 V$

$$\therefore M = M_{21} = M_{12}$$

同理可求出每个线圈的自感：

$$\because L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_1 S}{l} = \mu n_1^2 V$$

$$\because L_2 = \frac{\Psi_2}{I_2} = \frac{\mu N_2 N_2 S}{l} = \mu n_2^2 V$$

$$\therefore M = \sqrt{L_1 L_2}$$

以上是无漏磁情况下推导的，即彼此磁场完全穿过。当有漏磁时：

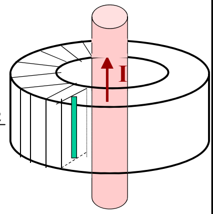
$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

耦合系数 $0 \le k \le 1$ 与线圈的相对位置有关。

例4：真空中截面为矩形的螺绕环，总匝数为N，内外半径为R_1，R_2，高h，另一半径为r_0的无限长圆柱导体与螺绕环同轴，1)求互感系数．2) 设在圆柱导体上通以电流 $I=I_0\sin\omega t$，求螺绕环中的互感电动势．

解：

1) 长圆柱导体外 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



通过每匝线圈的磁通量：

$$\Phi_m = \int Bh\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$M = \frac{N\Phi_m}{I} = \frac{N\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

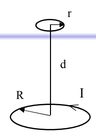
2)

$$\varepsilon_i = -M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -MI_0\omega\cos\omega t = -\frac{N\mu_0 h I_0\omega}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\cos\omega t$$

例5：半径分别为R和r（R>>r）的两个同轴线圈，相距为d，且d>>R，大线圈中通有电流I＝I_0sint。

求：（1）两线圈的互感系数；

（2）小线圈中的互感电动势。



解：（1）大线圈中的电流在小线圈中心处产生的磁感应强度的大小为：

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+d^2)^{3/2}}$$

由于两线圈相距很远，小线圈又小，故可认为小线圈中的磁场是均匀分布的，因此小线圈的磁通量为：

$$\Phi_{小} = BS = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+d^2)^{3/2}}\pi r^2$$

根据互感的定义：

$$M = \frac{\Phi_{小}}{I} = \frac{\mu_0}{2}\frac{\pi R^2 r^2}{(R^2+d^2)^{3/2}} \approx \frac{\pi\mu_0 R^2 r^2}{2d^3}$$

（2）小线圈中的互感电动势为：

$$\varepsilon = -M\frac{dI}{dt} = -\frac{\pi\mu_0 R^2 r^2 I_0\omega}{2d^3}\cos\omega t$$

三. 自感（电感）的特点

自感线圈中 $\varepsilon_L \ne \infty \rightarrow \frac{di}{dt} \ne \infty \rightarrow i$不能突变

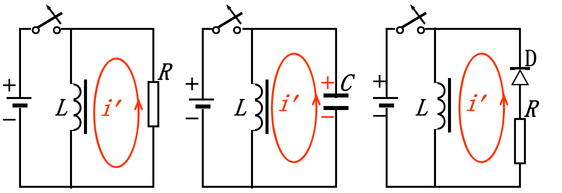
由楞次定律得知，i 的变化受到 ε_L 的阻碍，

∴L对交流电流有感抗，但对直流电流畅通。

（对比：电容器电压不能突变，可以通过交流电流，而隔断直流电流。）

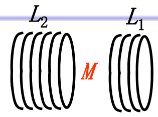
大电感（L大）断电时（di/dt 大），可产生很高的ε_L，易造成线圈绝缘被击穿和触点电腐蚀。

减小断电时的电流变化率（di/dt）的措施：



R：泄放电阻（消耗磁能）　C：续流电容（充电续流）　D：续流二极管（导通续流）

*四 自感与互感的关系



可以证明：$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}}$

k —— 耦合系数（coupling coefficient），

$0 \le k \le 1$

k 由介质情况和线圈1、2的相对位形决定。

自感的利弊

自感现象在电工、电子技术中有广泛的应用。如日光灯镇流器，自感与电容组成的谐振电路和滤波器等。

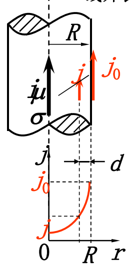
但过大的自感电动势也是造成回路短路的原因。

互感的利弊

互感现象被广泛应用于无线电技术和电磁测量中。通过互感线圈能够使能量或信号由一个线圈传递到另一个线圈。各种电源变压器、中周变压器、输入输出变压器及电压互感器、电流互感器等都是利用互感原理制成的。但是，电路之间的互感也会引起互相干扰，必须采用磁屏蔽方法来减小这种干扰。

*五（高频）趋肤效应 （skin effect）

高频电流通过导线时，越靠表面电流密度越大。电流集中在临近导线外表的一薄层，导线电阻的增加，损耗功率也增加



电流密度 $j(d) = j_0 e^{-d/d_S}$

d_S — 趋肤深度 （skin depth）

$d_S \propto \dfrac{1}{\sqrt{\mu\sigma f}}$　　f —频率

$d = d_S$ 时，$j = \dfrac{j_0}{e} \approx 0.37 j_0$

$f = 100k$ Hz时，　Cu 的 $d_S \approx 0.21$mm

在高频电路中可以采用空心导线代替实心导线。此外，为了削弱趋肤效应，在高频电路中也往往使用多股相互绝缘细导线编织成束的辫线来代替同样截面积的粗导线。

△10.6 磁场能量

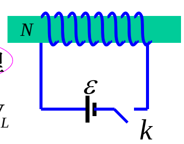
电容器充电以后储存了能量，当极板电压为U时储能为：

● 自感磁能：

同样考虑线圈，当它通有电流时，在其周围建立了磁场，所储存的磁能等于建立磁场过程中，电源反抗自感电动势所做的功。

$W_C = \dfrac{1}{2}CU^2$

功能原理



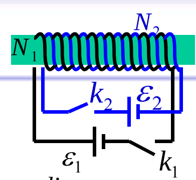
$A_L = \int -\varepsilon_L dq = \int_0^I L\dfrac{di}{dt}\cdot idt = \dfrac{1}{2}LI^2 = W_L$

同理自感为 L的线圈，通有电流 I所储存的磁能应该等于这电流消失时自感电动势所做的功.

$A_L = \int \varepsilon_L \cdot idt = \int_I^o -Li\cdot di = \dfrac{1}{2}LI^2 = W_L$　自感磁能

● 互感磁能

先使线圈1电流从0到 I_1，电源ε_1做功，储存为线圈1的自感磁能



$W_1 = \dfrac{1}{2}L_1 I_1^2$

合上开关k_2电流 i_2 增大时，在回路1中的互感电动势：$\varepsilon_{12} = -M_{12}\dfrac{di_2}{dt}$

线圈1的电源维持 I_1，反抗互感电动势的功，转化为磁场的能量

$W_{12} = \int \varepsilon_{12} I_1 \cdot dt = \int_o^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = M_{12} I_1 I_2$

线圈2的电流从0到 I_2，电源 ε_2做功，储存为线圈2的自感磁能　$W_2 = \dfrac{1}{2}L_2 I_2^2$

经过上述步骤电流分别为I_1 和 I_2的状态，储存在磁场中的总磁能：

$$W_m = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{12}I_1I_2$$

同理，先合开关 k_2使线圈 2充电至 I_2，然后再合开关k_1保持 I_2 不变，给线圈 1 充电，得到储存在磁场中的总能量为：

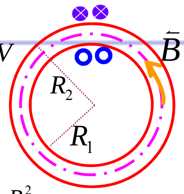
$$W_m' = W_2 + W_1 + W_{21} = \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}L_1I_1^2 + M_{21}I_2I_1$$

这两种通电方式的最后状态相同，所以 $W_m = W_m'$

$\therefore M_{12} = M_{21} = M$ 　　称MI_1I_2 为互感磁能

M为互感系数

- 磁场的能量密度



前面得到螺绕环的自感 $L = \mu n^2 V$

磁能：$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V I^2$

$\because B = \mu n I$

所以得螺绕环内的磁场能量：$W_m = \frac{B^2}{2\mu}V$

定义磁场的能量密度：$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

磁场所储存的总能量：$W_m = \int w_m dV = \int \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2} dV$

自感磁能：

对长直螺线管 $\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$ （类比：$W_e = \frac{1}{2}CV^2$ ）

由得： $B = \mu n I$ 和 $L = \mu n^2 V$

$$\boxed{W_m = \frac{B^2}{2\mu}V}$$

磁能密度：$\boxed{w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$

这说明磁能储存于磁场中。

上结果适用于除铁磁质外的一切线性磁化介质。

磁场能量 $W_m = \int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\, dV$

从能量角度理解电感中电流之所以不能突变，是因为磁能不能突变，否则功率将为无限大。

从磁能角度看，任何一个电流系统都有相应的电感量L，故也可以从能量出发计算L：

$$\boxed{L = \frac{2W_m}{I^2}}$$

作业

- 10.3, 10.7, 10.8, 10.15, 10.19, 10.20, 10.22