△2.4 基本的自然力

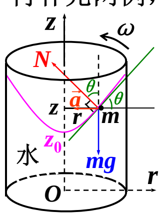
种类	相对强度	力场范围	效应
万有引力	10^{-38}	infinite	重量，物体落下，天体运动(有质量的物体)
电磁力	10^{-2}	infinite	化学反应、电灯，电视，X-光，摩擦力，神经信号等
弱力	10^{-6}	10^{-17}m	quark 和lepton之间
强力	1	10^{-15}m	quark之间

- 引力（引力子？）（质量之间）1种质量
- 电磁力（光子）（电荷之间）2种电荷
- 弱相互作用（中间玻色子）（味之间）6种味道
- 强相互作用(胶子)(色之间)（存在于质子、中子、介子等强子之间）3种颜色

2.5 牛顿定律应用举例（续）

书第二章 § 2.3的各个例题一定要认真看。

再补充两例，说明做题的要求。



已知：桶绕 z 轴转动，ω= const. 水对桶静止（静止时水深h, 桶径R。

求：水面形状（z - r关系）

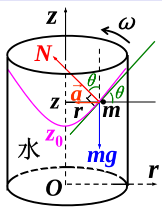
解：▲ 选对象：任选表面上一小块水为隔离体 m；

▲ 看运动：m作匀速率圆周运动：$\vec{a}=\omega^2\vec{r}$；

▲ 查受力：受重力$m\vec{g}$ 及其余水的压力$\vec{N}$，

$\vec{N}\perp$水面（非粘滞流体间只能承受相互的压力）；

▲ 列方程：$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}=m\omega^2\vec{r}$



z向：$N\cos\theta-mg=0$ (1)

r向：$N\sin\theta=m\omega^2 r$ (2)

由导数关系：$\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$ (3)

(1)(2)(3)得：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}=\dfrac{\omega^2}{g}r$

分离变量：$\mathrm{d}z=\dfrac{\omega^2}{g}r\,\mathrm{d}r$

等号双方积分：$\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}z=\int_0^r\dfrac{\omega^2}{g}r\,\mathrm{d}r$

解得：$z=\dfrac{\omega^2}{2g}r^2+z_0$ （旋转抛物面）

若已知不旋转时水深为h，桶半径为R，

则由旋转前后水的体积不变，有：

$$\int_0^R z\cdot 2\pi\ r\,\mathrm{d}r=\pi R^2 h$$

$$\int_0^R\left(\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0\right)2\pi r\,\mathrm{d}r=\pi R^2 h$$

得：$z_0=h-\dfrac{\omega^2R^2}{4g}$

▲ 验结果：$z=\dfrac{\omega^2}{2g}r^2+z_0=\dfrac{\omega^2}{2g}r^2-\dfrac{\omega^2}{4g}R^2+h$

- 量纲的分析：$[\omega]=1/\mathrm{T}^2$，$[r]=\mathrm{m}$，$[g]=\mathrm{m}/\mathrm{T}^2$，

  $[\dfrac{\omega^2}{2g}r^2]=[\dfrac{\omega^2}{4g}R^2]=\dfrac{(1/\mathrm{T}^2)\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}/\mathrm{T}^2}=\mathrm{m}=[h]=[z]$，正确。
- 过渡到特殊情形：$\omega=0$，有 $z=z_0=h$，正确。
- 看变化趋势：r 一定时，$\omega\uparrow\rightarrow(z-z_0)\uparrow$，合理。

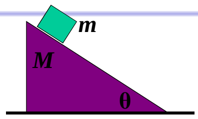
课后作业的基本要求与此例相同。

复杂问题往往除动力学方程外，还需补充一些运动学方程或几何关系[如前面（3）式]。

例2 已知：M, m, θ，桌面水平，各接触面光滑。

求：m 对M 的压力；m 相对M 的加速度。

解：M, m受力及坐标如图。

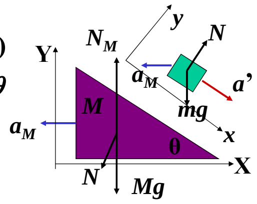


对M： $N\sin\theta = Ma_M$

对m： $\vec{a}_m = \vec{a}' + \vec{a}_M$

$mg\sin\theta = m(a' - a_M\cos\theta)$

$N - mg\cos\theta = -ma_M\sin\theta$



$$\rightarrow \begin{cases} N = \dfrac{Mmg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} \\ a' = \dfrac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta} \end{cases}$$

结果分析：
$$N = \frac{Mmg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$$
$$a' = \frac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

1）量纲无误；

2）特例： $\theta = 0 \rightarrow N = mg,\ a' = 0$

m平放在光滑平板上；

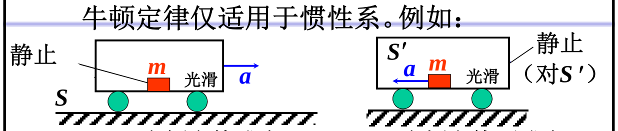
$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow N = 0,\ a' = g$

m靠在光滑竖直面上，自由下落。

结果合理！

△2.6非惯性系中的动力学问题

牛顿定律仅适用于惯性系。例如：



S： 牛顿定律成立　　S'：牛顿定律不成立

为何还要在非惯性系中研究问题呢？ 理由：

▲有些问题需要在非惯性系中研究，如：

地面参考系，地球自转加速度 $a \approx 3.4\times10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$ （赤道）

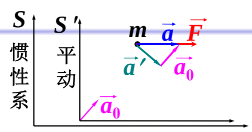
地心参考系，地球绕太阳公转加速度 $a \approx 6\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$

太阳参考系，太阳绕银河系转加速度 $a \approx 1.8\times10^{-10}\ \mathrm{m/s^2}$

▲有些问题在非惯性系中研究较为方便。

- 惯性参照系：参照系本身没有加速度。
- 牛顿第二定律只适于惯性参照系。
- 有很多情况参照系具有加速度。

一．平动非惯性系中的惯性力



S： $\vec{F} = m\vec{a}$

S'： $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 \neq \vec{a}$

$\vec{F}' = \vec{F}$， $m' = m$，

故 $\vec{F}' \neq m'\vec{a}'$

修改牛顿第二定律，使之适用平动非惯性系：

由 $\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$

得 $\vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}'$

定义惯性力（inertial force）— $\boxed{\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0}$

则有 $\boxed{\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}'}$ — 非惯性系中的牛顿第二定律

惯性力是参考系加速运动引起的附加力，本质上是物体惯性的体现。它不是物体间的相互作用，没有反作用力，但有真实的效果。

二战中的小故事：

美 Tinosa号潜艇　携带16枚鱼雷　在太平洋海域

离敌舰4000码　斜向攻击　发射4枚　使敌舰停航

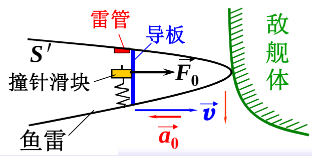
离敌舰 875码　垂直攻击　发射11枚　均未爆炸！

分析：近距、垂直

$\rightarrow a_0$ 大 $\rightarrow F_0$ 大

$\rightarrow$滑块受摩擦力大

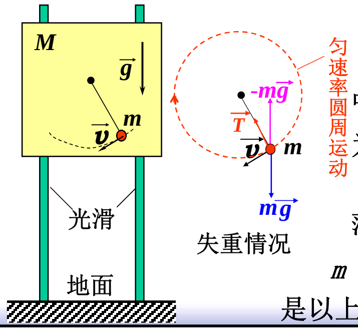
$\rightarrow$雷管不能被触发



▲在非惯性系中讨论问题更方便的情况举例：

讨论 M 自由下滑后，m 对地面的运动情况。

$M >> m$ 直接讨论 m 对地面的运动较困难。



可分两步讨论：

（1）在 M 参考系中观察，m 作速率为 v 的圆周运动。

（2）M 对地作自由落体运动。

m 对地面的运动，是以上两种运动的叠加。

▲ 失重问题

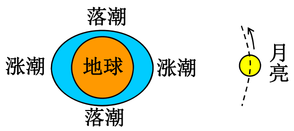
在太空中自由降落的升降机或绕地球自由飞行的飞船均可以视为平动的非惯性系（有地球引力引起的指向地心的加速度），其中物体所受的引力被惯性离心力完全抵消而出现失重。在那里物体可以真正做到“不受力”。所以在这样的非惯性系中，反而能够真正做到验证惯性定律。

在飞船中几个球可以在空中摆成一个圈

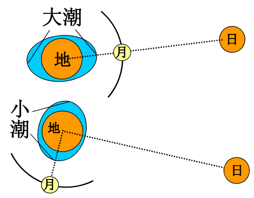
▲ 潮汐（tide）与惯性力

问题：(1) 为什么月球对潮汐的影响比太阳大？
(2)为什么潮汐同时在向月和背月侧发生？

解释：由于引力不均匀（有引力梯度）才引起潮汐。



月球对地面上海水的引潮力



大潮与小潮

经计算，太阳引起的潮高：

$$\Delta h_S = \frac{3}{2}\cdot\frac{M_S}{M_E}\left(\frac{R_E}{r_{S-E}}\right)^3 R_E \approx 0.25\,\text{m}$$

月亮引起的潮高：

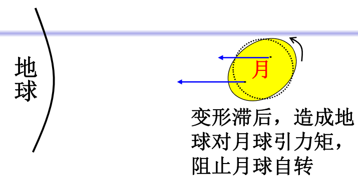
$$\Delta h_M = \frac{3}{2}\cdot\frac{M_M}{M_E}\left(\frac{R_E}{r_{M-E}}\right)^3 R_E \approx 0.56\,\text{m}$$

一般情况下，Δh_S和 Δh_M 是矢量相加的，只有太阳、地球和月亮几乎在同一直线上时，二者才是算术相加的。

引潮力常触发地震，地震常发生于阴历初一、十五附近（大潮期）。

如：1976.阴7.2，唐山
1993.阴8.15，印度
1995.阴12.17，神户
2001.阴2.1，四川雅江
2001.阴2.2，印尼

▲固体潮（形变）：



影响：

- 使月球自转和公转周期最终达到一致。
- 使地球自转变慢。由植物年轮，珊瑚和牡蛎化石生长线判断：3亿年前，一年约400天。
- 使接近大星体的小星体（$r < r_c$）被引潮力撕碎

如SL–9彗星被木星引潮力撕碎（1992）。

根据计算（赵凯华罗蔚茵编《力学》P385），若伴星的轨道半径小于某个临界半径 r_c，它将被主星的引潮力撕碎。

$$r_c = R\left(\frac{3\rho}{\rho'}\right)^{1/3}$$ —— 洛希极限

R —主星半径，ρ — 主星密度，ρ' — 伴星密度

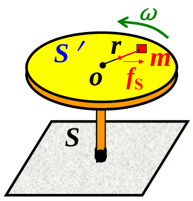
对地球—月球系统：

$$r_{c月} = R_{地}\left(\frac{3\rho_{地}}{\rho_{月}}\right)^{1/3} \approx 1.7R_{地}$$

二. 匀速转动非惯性系中的惯性力

设 S' 系相对惯性系 S 匀速转动。

1. 物体 m 在 S' 中静止



S: $\vec{f}_s = m\vec{a}_n = m\omega^2(-\vec{r})$

即: $\vec{f}_s + m\omega^2\vec{r} = 0$

S': $\vec{a}' = 0$,

令 $\vec{f}_s + \vec{F}_0 = m\vec{a}' = 0$

则 $\boxed{\vec{F}_0 = m\omega^2\vec{r}}$

$m\omega^2\vec{r}$ — 惯性离心力（inertial centrifugal force）

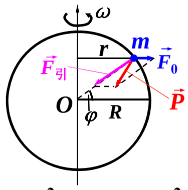
S'中向心力与惯性离心力平衡， m 静止。

▲ 重力和纬度的关系：

由于地球自转，地面物体会受到惯性离心力的作用。重力并非地球引力，而是引力和惯性离心力的合力。

重力加速度 g 和地球纬度φ 的关系式为（自己推导）：

$$\boxed{g \approx g_0\left(1 - \frac{a_0}{g_0}\cos^2\varphi\right)}$$



式中：$g_0 = \dfrac{GM_e}{R^2} \approx 9.83\text{ms}^{-2}$， $a_0 = R\omega^2 \approx 0.034\text{ms}^{-2}$

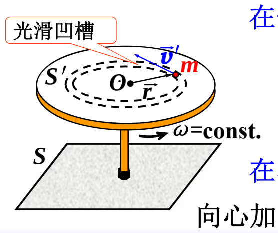
G — 万有引力常量， M_e — 地球质量 ，

R — 地球半径， ω — 地球自转角速度 。

2. 物体 m 在 S' 中运动

（1）科里奥利力

设物体 m 在 S' 中有速度$\vec{v}'$，则在 S' 中看，m 除受惯性离心力外，还要附加一个与速度 $\vec{v}'$ 有关的惯性力。先看一个特例：



在惯性系（地面）S:

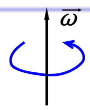
$$F = m\frac{(v' + r\omega)^2}{r} = m\frac{v'^2}{r} + 2mv'\omega + mr\omega^2$$

在非惯性系（桌面）S' ：

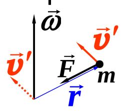
向心加速度 $a' = \dfrac{v'^2}{r}$ ，$F \neq ma'$

把 $F = m\dfrac{v'^2}{r} + 2mv'\omega + mr\omega^2$ 变换为:

$$F - 2mv'\omega - mr\omega^2 = m\frac{v'^2}{r}$$



引入角速度矢量$\vec{\omega}$



$$\vec{F} + 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} + m\omega^2\vec{r} = m\vec{a}'$$

令 惯性力：$\vec{F}_0 = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} + m\omega^2\vec{r}$

则有： $\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}'$

在转动参考系 S' 中，牛顿第二定律形式上成立。

$\vec{F}_0$ 中 $m\omega^2\vec{r}$ 就是惯性离心力，$2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$ 称作科里奥利力（Coriolis force），简称科氏力。

可以证明，一般情况下， 在匀速转动参考系S' 中， 运动物体除受惯性离心力外，都还要附加一个科里奥利力（Coriolis force）：

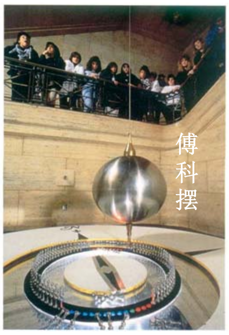
$$\boxed{\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}}$$

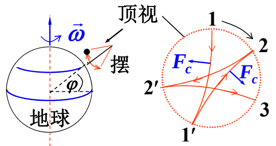
——此力也是惯性力

总惯性力： $\vec{F}_0 = m\omega^2\vec{r} + 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$

S' 中牛顿第二定律为: $\boxed{\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}'}$

▲傅科摆（傅科，1851，巴黎伟人祠，摆长67m，摆锤28kg，摆平面转动）





摆平面转动周期 $\boxed{T = \dfrac{24\text{小时}}{\text{Sin}\,\varphi}}$

巴黎，$\varphi \approx 49^{\circ}$，$T = 31$小时52分

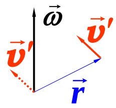
北京，$\varphi \approx 40^{\circ}$，$T = 37$小时15分

这是在地球上验证地球转动的著名的实验。

（2）科里奥利加速度

再回到 惯性系 S 中，牛顿第二定律为：

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' - \vec{F}_0 = m\vec{a}' - m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$



于是有：$\vec{a} = \vec{a}' - \omega^2\vec{r} - 2\vec{v}' \times \vec{\omega}$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$\vec{a}$ — 绝对加速度

$\vec{a}'$ — 相对加速度

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_{牵}$ — 牵连加速度

$2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}_C$ — 科里奥利加速度

第二章结束

作业

- P89 2.5, 2.10, 2.14, 2.16, 2.21