第一章 行列式

第二节 行列式的主要性质

本节目的与重点：

讨论行列式的性质，利用这些性质可以化简行列式的计算。

n阶行列式的定义

定义1 由n^2个数（实数或复数）排成一个n行n列的表，并在两边各画一条竖线的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所表示的数称为n阶行列式。

有时简记为 $|a_{ij}|$, $|A|$, $\det(a_{ij})$, $\det(b_{ij})$

类似二、三阶行列式可得 （称为n阶行列式的展开式）

$$|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

表示对1,2, …, n的一切排列求和

行列式 $|a_{ij}|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的文字描述：

n阶行列式等于所有这种项（共$n!$项）的代数和：

每项都是取自不同行不同列的n个元的乘积；

每项的符号这样确定：

当每项中n个元按行标的自然顺序排列成 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 时

若 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列，则带正号。

若 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列，则带负号。

掌握行列式的定义：

(1) 展开式共有$n!$ 项。

(2) 每项是取自不同行不同列的n个元乘积，冠以正号或负号。

(3) 行标按自然顺序排列时，每项的正负号由列标构成排列的奇偶性(反序数)决定。$n!$项中一半取正号，一半取负号。

(4) 行列式表示一个数（值）。

(5) 一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值记号相混淆。

总结

- 行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的。
- 掌握行列式的定义。
- 会计算行列式中任意一项的符号。
- 会用行列式的定义进行一些简单行列式的计算。
- 记住一些特殊行列式的计算结果。如三角形行列式等。

记

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \left|A^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式$|A|$与行列式$\left|A^T\right|$互称为转置行列式.

行列式|**A**|的转置行列式有时也记为|**A**′|

性质1 行列式的行与列的顺序互换，其值不变。

（行列互换值不变）

证明 记 $|A| = \det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji}\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$，按定义

$$\left|A^T\right| = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

又因为行列式|A|可表示为

$$|A| = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

故 $|A| = \left|A^T\right|.$ 证毕

性质1表明:

在行列式中行与列的地位式对称的、平等的，所以凡是有关行的性质，对列也同样成立。

性质2 交换行列式任意两行（或两列），行列式仅改变符号.

(**两行互换变号**)

即：若

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \longleftarrow s\text{行} \longrightarrow \\ \\ \longleftarrow t\text{行} \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} |B|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则$|A|=-|B|$.

分析：设$|A|=|a_{ij}|$, $|B|=|b_{ij}|$

$|B|$中任取一项，并将其元按$|B|$中行的自然顺序排列成

对应

$$\begin{array}{ccccccccc} b_{1j_1} & b_{2j_2} & \cdots & b_{sj_s} & \cdots & b_{tj_t} & \cdots & b_{nj_n} \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a_{1j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{tj_s} & \cdots & a_{sj_t} & \cdots & a_{nj_n} \end{array}$$

证明：考察行列式$|B|$中的任意一项（按照行自然排列）

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n} \qquad \text{（B）}$$

它是取自$|B|$中不同行不同列的n个数的乘积，显然在行列式A中也有这样一项，按照行标自然排列有

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n} \qquad \text{(A)}$$

反之亦然。

所以，$|A|$和$|B|$有相同的项，且所对应项的绝对值相同。

$|B|$中项的符号为：$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$

(j_s与j_t互换)

$$= -(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$$

恰为该项在$|A|$中符号的相反数

因此,$|A|$和$|B|$的每一项绝对值相等，但符号相反，

故：$|B| = -|A|$.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

性质3 行列式中某行（列）的元有公因子k，则k可以提到行列式符号外边。

(一行的公因子可以提出)

(以一数k乘行列式的一行就相当于用k乘此行列式。)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明： 利用行列式的定义

$$\text{左式} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (k a_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \text{右式}$$

性质4 若行列式某行(如第i行)的元均可表为两项之和

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

则此行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行（第i行）的元分别为 b_{ij} 和 c_{ij} 外，其余各行与原行列式的一样。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（某行项为两项和，则为两行列式和）

注：可以推广到某一行为多组数的和的情形。

证明：【按照定义立刻证明出】

性质5 若行列式的

（1）某行(列)元全为零,

（2）两行(列)元对应相等,

（3）两行(列)元对应成比例,

则行列式的值为零.

证明：略

回忆思考题

利用 $n(n \geq 2)$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列中，奇偶排列各占一半儿。

性质 6 把行列式的某列（行）的k倍加到另一列(行) 上，行列式值不变.

（某行倍数加到另一行，值不变。）

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \xleftarrow{k\times} & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_i+kc_j]{} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

证明：上式的右端

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj}
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{性质4}}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj}
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{性质5}}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj}
\end{vmatrix}
= \text{左端}
$$

行列式性质总结：

- 行列互换（转置）值不变（性质1）
- 两行互换，反号（性质2）
- 一行的公因子可以提出（性质3）
- 某行元为两项和，则等于两行列式和（性质4）
- 某行为零、两行相同或成比例，值为零（性质5）
- 某行倍数加到另一行，值不变（性质6）

利用行列式的性质可以简化行列式的计算。由于上（下）三角形行列式容易计算，故常利用行列式的性质把行列式化成上（下）三角形行列式再进行计算（三角形法）。

应用举例

计算行列式常用方法：利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上（下）三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2+3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -2 \\ 2 \quad 0 \quad 4 \quad -2 \quad 1 \\ 3 \quad -5 \quad 7 \quad -14 \quad 6 \\ 4 \quad -4 \quad 10 \quad -10 \quad 2 \end{vmatrix} \times(-2) \oplus$$

$$\underline{\underline{r_2 + 3r_1}}$$

$$(-4)\times \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -2 \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \quad -1 \\ 3 \quad -5 \quad 7 \quad -14 \quad 6 \\ 4 \quad -4 \quad 10 \quad -10 \quad 2 \end{vmatrix} \times(-3) \oplus \oplus$$

$$\underline{\underline{r_3 - 2r_1}}$$

$$
\xlongequal[r_4-4r_1]{r_3-3r_1}
\begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\
0 & 0 & 2 & 2 & -2
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4}
-\begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 2 & 2 & -2
\end{vmatrix}
\oplus
$$

$$\xlongequal{r_3 + r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\xlongequal{r_4 + r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_5 - 2r_3}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4 \; \oplus$$

$$\underline{\underline{r_5 + 4r_4}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

例2：计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$$

解：第2,3行减去第1行

$$b^2-ca-(a^2-bc)=b^2-a^2+c(b-a)$$
$$=(b-a)(a+b+c)$$

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & (b-a)(a+b+c) \\ 0 & c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}$$

＝0

例3 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第1列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}$$

$$[a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

另解：第2，3，…，n行都减去第1行

$$
\text{原式}=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}
$$

箭形行列式

【第2,3,…,n列都加到第1列】

$$
=\begin{vmatrix} [a+(n-1)b] & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}
$$

$$
=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}
$$

例4：计算n ($n\geq 1$)阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$$

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ 1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$$（拆项法）

$$=\begin{vmatrix} x_1 & 2 & \cdots & n \\ x_2 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

(讨论)

当$n=1$时， $D_1 = x_1 + 1,$

当$n=2$时， $D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & 2 \\ x_2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1 - x_2,$

当$n>2$时，$Dn=0$。

注意：*n*阶行列式计算时，有时需要讨论*n*的值。

小结

行列式的6个性质(行列式中行列地位同等，凡是对行成立的性质对列也同样成立).

计算行列式常用方法：(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上（下）三角形行列式，从而算得行列式的值.

思考题

分析下面解题是否正确，找出问题所在。

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。

错 解：依据行列式的性质，把行列式的第1行加到第2行上去，再把行列式的第2行加到第1行上去得：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

2．已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 5$ ，计算 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$

错解：

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =2\times5=10$$

3.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

思考题

计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\dfrac{1}{a^2} & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ b^2+\dfrac{1}{b^2} & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ c^2+\dfrac{1}{c^2} & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ d^2+\dfrac{1}{d^2} & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

(已知 $abcd=1$)

思考题解答

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$= 0.$ (注意$abcd$=1)