第八章

真空中的静电场

主要内容

1　静电的基本现象和基本规律
2　电场、电场强度
3　电通量、高斯定理
4　静电场的环路定理、电势能
5　等势面、电势
6　静电场中的导体
7　电容、电容器

1、 静电的基本现象和基本规律

静电场：

相对于观测者是静止的，数量不随时间变化的电荷在自身周围空间中产生的电场。

真空：

除了静止的电荷及静电场以外，无其他物质的空间，并非一无所有。

1、 静电的基本现象和基本规律

1.1 电荷守恒定律

(1) 电荷

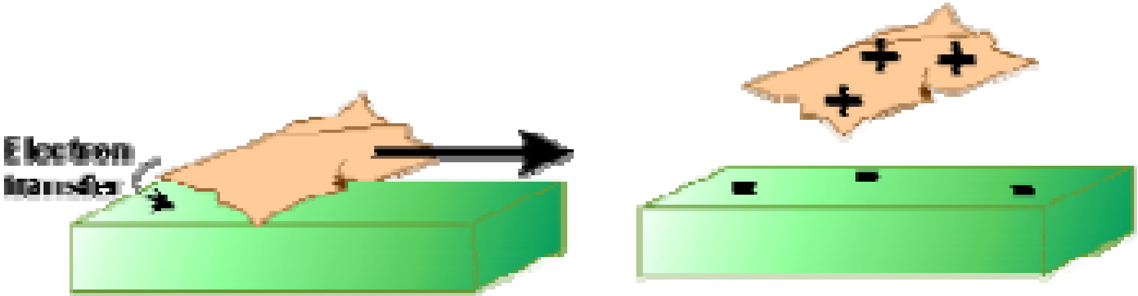
物体有了吸引轻小物体的性质，我们说它带了电或有了**电荷**，带了电的物体叫**带电体**。“净电”使物体带电的过程叫做**起电**。

了解电荷是物质的属性，电荷具有量子性及电荷守恒定律。

1.1 电荷守恒定律

摩擦起电：

经摩擦后的物体具有吸引轻小物体的性质，这时物体带了电。

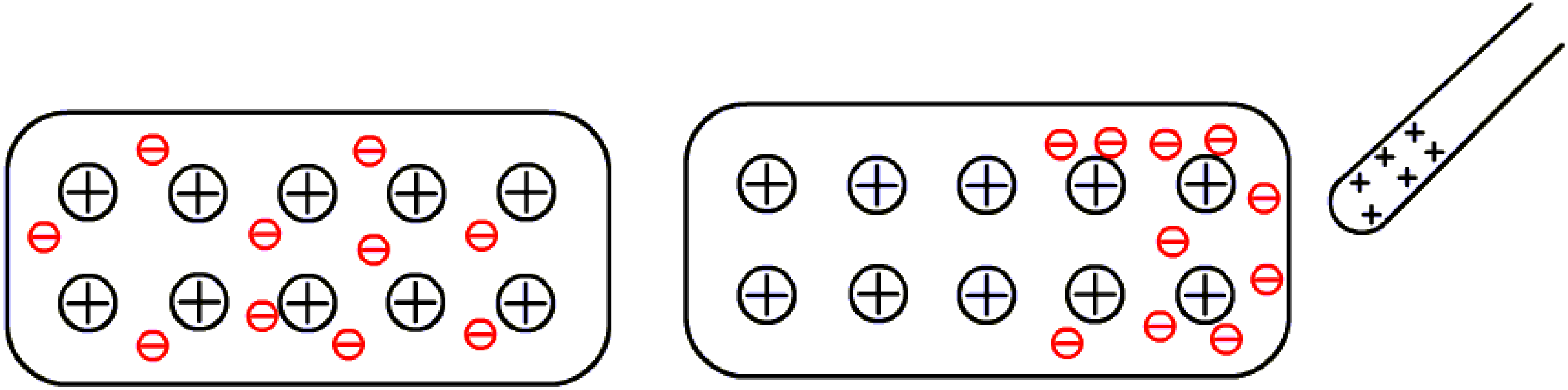


摩擦起电特点：相互摩擦的两个物体总是同时带电，并且所带的电荷等量异号。

1.1 电荷守恒定律

静电感应----另一种起电方法

当带电体靠近而不接触导体时，导体内部所产生电荷移动的现象，称为静电感应。



1.1 电荷守恒定律

电荷→ 只有两种

1747年，美国科学家富兰克林把在室温下用丝绸摩擦过的玻璃棒所带的电荷称为正电荷；毛皮摩擦过的橡胶棒所带的电荷称为负电荷---自然界只有两种电荷：正电荷和负电荷。

丝绸+玻璃棒（正电）

皮毛+橡胶棒（负电）

通过吸引和排斥说明有两种电荷，同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引。

1.1 电荷守恒定律

(2) 电荷的特点

a）同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引。

b）电荷是物质的基本属性，不存在不依附于物质的“单独电荷”

质量 → 物体的引力相互作用本领

电荷 → 物体的电相互作用本领

1.1 电荷守恒定律

c）电荷是量子化的

带电体所带电荷数量的多少称为电量。

1906～1917年，密立根用液滴法测定了电子电荷，证明微小粒子带电量的变化是不连续的，它只能是元电荷 e 的整数倍, 即粒子的电荷是量子化的。

量子化：某物理量的值不是连续可取值而只能取一些分立值，则称其为量子化。

自然界物体所带电荷：$q = Ne$

$$\begin{cases} e = 1.602\times10^{-19}\mathrm{C} \\ N = \pm1、\pm2、\pm3\ldots \end{cases}$$

1.1 电荷守恒定律

d）电荷对称性---反粒子

1931年，狄拉克预言反电子**---**正电子存在。中国科技大学近代物理系首任系主任赵忠尧院士于**1929**年就在实验中发现硬γ射线的反常吸收以及伴随出现的“特殊辐射”，这就是最早观察到的正负电子对产生和湮没的现象。1932年Anderson发现正电子（e^+）。

1.1 电荷守恒定律

(3) 电荷遵从守恒定律

电荷守恒定律的表述：

在一个和外界没有电荷交换的系统内，正负电荷的代数和在任何物理过程中保持不变。

电荷既不能被创造，也不能被消灭，只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一部分转移到另一部分；在转移的过程中，电荷的总量保存不变。也就是说在任何物理过程中，系统的电荷代数和始终保持不变，这就是电荷守恒定律。

1.1 电荷守恒定律

讨论：

- 电荷守恒定律是物理学中普遍的基本定律之一；
- 电荷守恒定律与电荷的量子属性有关：可以设想单个电荷是一种不可再分割的单位，它只能从一个粒子转移给另一个粒子，而决不会被消灭或者分割开；
- 电荷是一个相对论性不变量。

1.2 库仑定律

(1) 点电荷 —— 理想模型

忽略物体形状及电荷的分布，抽象成为具有电荷的几何点

库仑定理给出了两个点电荷之间的相互作用的规律，为定量研究电现象奠定了基础。

库仑定律是静电场的基本定律，要掌握该定律的矢量表达式，明确“点电荷”模型，即库仑定律适用条件。

1.2 库仑定律

(2) 库仑定律

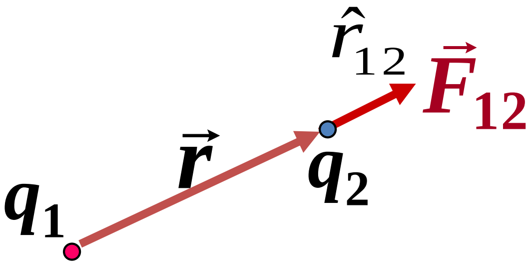
对于两个点电荷，库仑于**1785**年通过实验（扭秤实验）结果的分析，总结出了两个静止点电荷间相互作用力的规律，即库仑定律，其主要内容为：

- 同号电荷相互排斥，异号电荷相互吸引；
- 作用力沿两点电荷的连线；
- 力的大小正比于每个点电荷电量的多少；
- 力的大小反比于两点电荷之间距离的平方。

在真空中两个点电荷q_1,q_2之间的相互作用力为：

$$\vec{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$$

$$\boxed{k=8.99\times10^{9}m^{2}N/c^{2}}$$

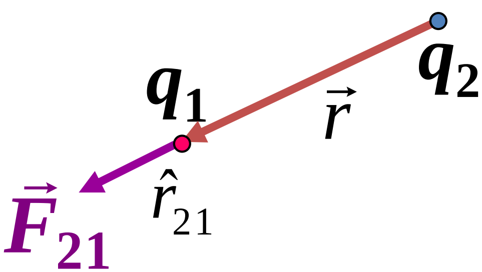


电荷q_1对电荷q_2的力

$$\vec{F}_{12}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

$\hat{r}_{12}$是电荷q_1指向电荷q_2单位矢量

电荷q_2对电荷q_1的力：



$$\vec{F}_{21}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}_{21}$$

$\hat{r}_2$是电荷q_2指向电荷q_1单位矢量

1.2 库仑定律

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

定义，$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

相应的ε_0值为：

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\frac{c^2}{m^2 N}}$$

叫做真空中的介电常数。

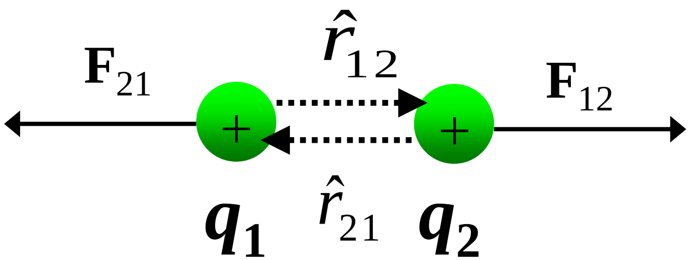
1.2 库仑定律

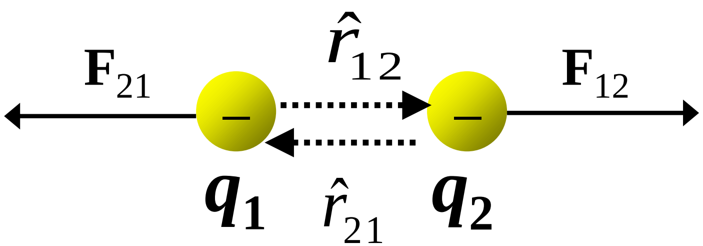
1 $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$ 遵从牛顿第三定律。

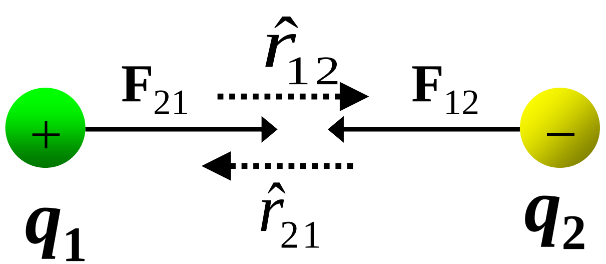
2 库仑定律只适用两个静止点电荷。

q_1、q_2 同号，排斥力 $\vec{F}\parallel\vec{r}$；

q_1、q_2 异号，吸引力 $\vec{F}\uparrow\downarrow\vec{r}$。







1.2 库仑定律

3 若q_1、q_2在介质中，介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_o$；

空气中： $\varepsilon \approx \varepsilon_o$

4 库仑定律是一条实验规律。

在宏观、微观领域都适用。

库仑力

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

万有引力

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

5 库仑定律给出的平方反比律中，r的范围相当大（10^7m---10^{-17}m）

1.3 电力叠加原理

实验证明：多个点电荷存在时，任意一个点电荷受的库仑力等于其它各个点电荷对它的作用力的矢量和。

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

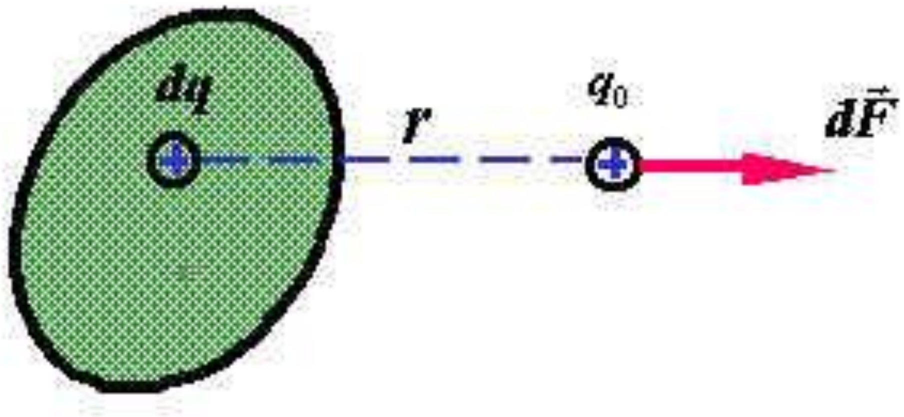
$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \sum_{i=1}^{n} k \frac{q_i q_0}{r_i^{\;2}} \hat{r}_{i0}}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{库仑定律} \\ \text{电力叠加原理}\end{array}\right\}$ 是静止电荷相互作用的基本定律

1.3 电力叠加原理

连续分布带电体对静止点电荷的作用力

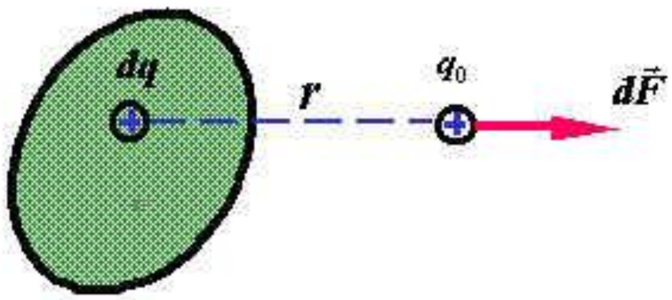
设想把带电体分割成许多称为“电荷元”的小部分，在分析它们各自对试探点电荷q_0的作用时，均可当作点电荷来处理，这样，整个带电体就与一点电荷系统等效。



1.3 电力叠加原理

电荷连续分布的带电体对点电荷q_0的作用力为：$\vec{F}=\int d\vec{F}$ 。

$d\vec{F}$是电荷元dq对点电荷q_0的作用力：



$$d\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 dq}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

$$\vec{F}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

选取合适坐标系，把矢量积分转化成标量积分。例如：

$F_x=\int dF_x$， $F_y=\int dF_y$， $F_z=\int dF_z$ 。

1.3 电力叠加原理

连续分布带电体对静止点电荷的作用力

几个概念：**体电荷**、**体积元**；**面电荷**、**面积元**；**线电荷**、**线元**。

以上涉及的极限叫：物理极限。与数学上的极限不同。

物理极限—变元不能无限小，微观上足够大、可容纳足够多的带电粒子，宏观上足够小，使得空间电荷分布均匀。

体密度：$\rho = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V}$

面密度：$\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta S}$

线密度：$\eta = \lim\limits_{\Delta L \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta L}$

1.4 利用库仑定律的解题方法

利用库仑定律解题时，应注意以下几点：

1、真空中两个静止点电荷的作用可直接用利用库仑定律。

2、当不是点电荷时，应先把连续分布的电荷分割成电荷元，把每个电荷元看作是点电荷。利用库仑定律及叠加原理求解。

3、真空条件，ε_0是真空中的介电常数，如不是真空，$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$ 。

4、静止：如有运动，运动电荷会产生磁场，除了考虑静电力外，还应考虑磁场力。

例1：

均匀带电细棒弯成半圆环，半径为R。带电总量为Q，求圆心处点电荷q_0受半圆环的静电力。

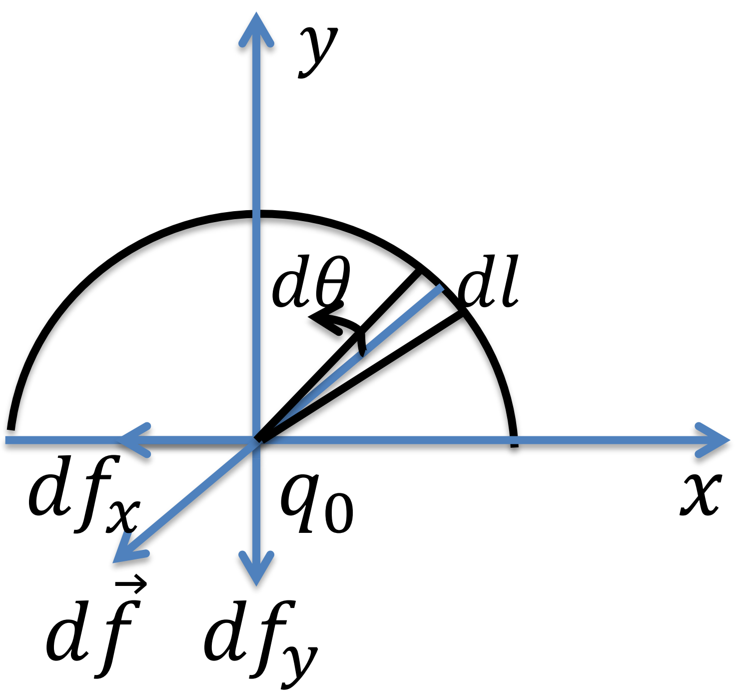
解：线密为$\eta=\dfrac{Q}{\pi R}$

$$dq=\eta dl$$

$$dl=Rd\theta$$

$$df=k\frac{q_0 dq}{R^2}$$

$$=k\frac{q_0\eta R d\theta}{R^2}=k\frac{q_0 Q}{\pi R^2}d\theta$$



因圆环关于y轴对称，环心点电荷在对称轴y上，故$\vec{f}$沿x轴的分量为0。

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

$$df_y=-df\sin\theta$$

$$f=f_y=\int df_y=-k\frac{q_0Q}{\pi R^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=-\frac{q_0Q}{2\varepsilon_0\pi^2R^2}$$

所以，$\vec{f}=-\frac{q_0Q}{2\varepsilon_0\pi^2R^2}\hat{y}$

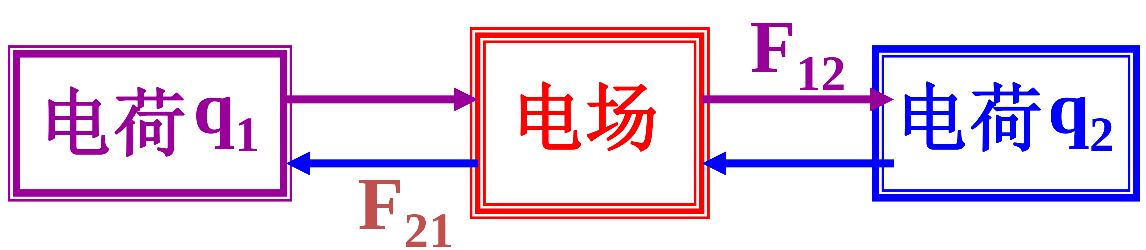
2、静电场、电场强度

2.1 电场

库仑力如何传递？

两种观点
- 近距作用：通过接触或媒介，作用需要时间
- 超距作用：不需要任何媒介，也不需要时间的传递

近代物理学证明：



什么是电场

现代实验与实践证明，电场是一种物质（只不过不是由原子、分子等组成），具有能量、动量等属性，并且可以脱离电荷而存在，是物质的一种形态。

若空间某一区域内各点，具有对其它静止电荷施加作用力的属性，就说该区域内存在电场。

静止电荷会在其周围激发电场；静止电荷受到的作用力仅与该电荷所在位置的电场有关。

电场的基本属性就是对处于其中电荷具有力的作用。

电场的基本性质：

1 对放其内的任何电荷都有作用力

2 电场力对移动电荷作功

3 电场和磁场与实物（由原子或分子构成的物质）一样，具有动量和能量，服从一定的运动规律，可以脱离电荷和电流单独存在。与物质的实物形式一样，电磁场也是物质的一种形式。

静电场：相对观察者静止的电荷激发的电场。

——是电磁场的一种特殊形式

特点：静电场与电荷相伴而生。

2.2 电场强度矢量$\vec{E}$

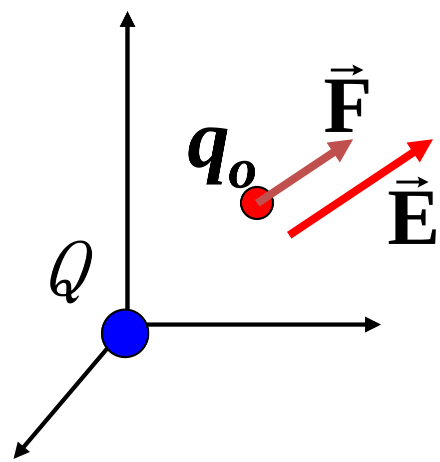
$$\vec{F}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

(1) $\vec{E}$ 的定义：

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 Q}{r^2}\hat{r}$$

（q_o很小, 是试验电荷）

$$\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_o}$$



即：$\vec{E}$ $\begin{cases}\text{大小等于单位电荷在该处受电场力大小.}\\ \text{方向为单位正电荷在该处受电场力方向.}\end{cases}$

单位：N/C (牛顿 / 库仑)　或 V/m（伏特/米）

2.2 电场强度矢量$\vec{E}$

静电力是通过电场相互作用的。

静止电荷可以在周围激发电场，同样，任何带电体都会在其周围激发电场。产生电场的带电体称作场源，其所在位置叫做场源位置。

电场所在空间中其它各点称为场点，当场源为点电荷时，场源位置称为源点。场源产生的电场是由场源本身的特性决定的，与其它电荷无关。

2.2 电场强度矢量$\vec{E}$

如场源为任意带电体，可以把带电体看作许多点电荷组成的，根据静电力叠加原理：

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\cdots+\vec{F_n}$$

由上面结论知：$\dfrac{\vec{F_i}}{q_0}$是与q_0无关，那么

$$\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\vec{F_1}}{q_0}+\frac{\vec{F_2}}{q_0}+\ldots+\frac{\vec{F_n}}{q_0}$$也与q_0无关。

2.2 电场强度矢量$\vec{E}$

一般地:

电场空间不同点的场强 $\vec{E}$ 大小方向都不同。

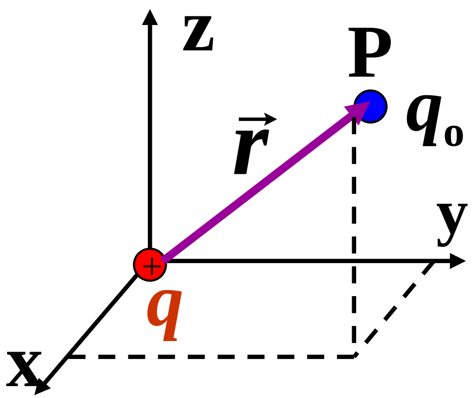
若场中各点的$\vec{E}$ 大小方向都相同 $\longrightarrow$ 均匀电场

电场强度是静电场一个重要的基本物理量，要求牢固掌握电场强度的概念。明确电场强度是矢量，服从矢量叠加原理。

(2) $\vec{E}$ 的计算：

1) 带电粒子的电场

求一带电 q 位于原点处的粒子的电场$\vec{E}$。



在任意点P放入一点电荷q_o

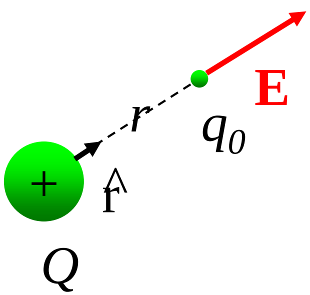
根据库仑定律q_o受力：

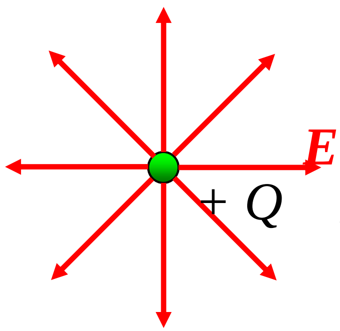
$$\vec{F}=\frac{qq_o}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$$

P点处的场强：$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_o}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}\quad \begin{cases} q>0 & \vec{E}\parallel\hat{r} \\ q<0 & \vec{E}\uparrow\downarrow\hat{r} \end{cases}$$

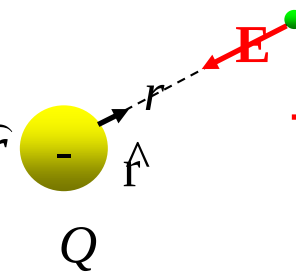
电场分布特点：

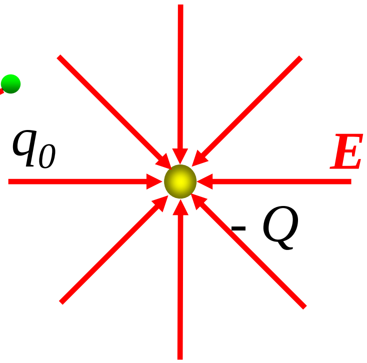
1　$\vec{E}$的方向，处处是以 q 为中心的矢径方向（或反方向）。





$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

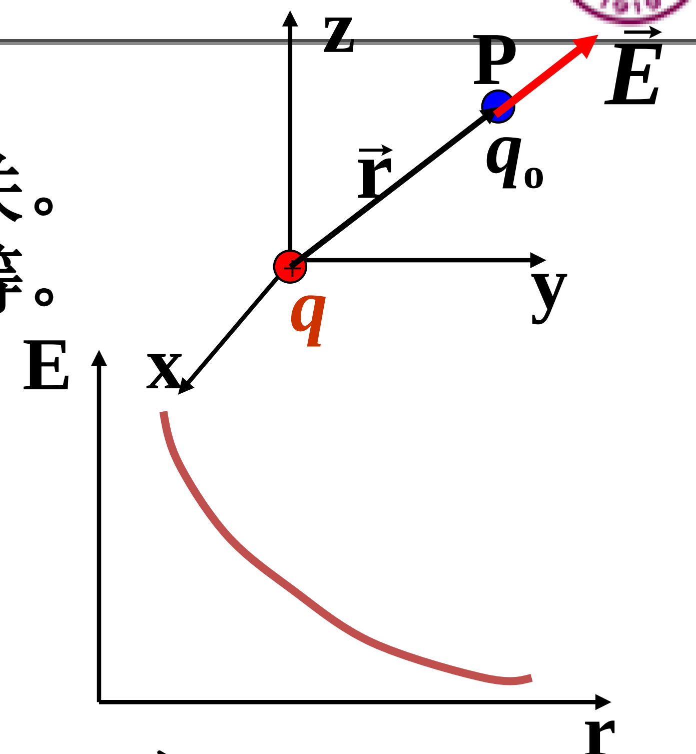




点电荷的电场

2　对于点电荷，电场球对称分布

P点处的场强： $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$



3 q 一定时， $\vec{E}$的大小只与r有关。
在相同 r 的球面上 $\vec{E}$ 大小相等。

4 $E\propto\dfrac{1}{r^2}$ $\begin{cases} r\to\infty & E\to 0 \\ r\to 0 & E\to\infty \end{cases}$?

5 电场中每一点都对应有一个矢量 $\vec{E}$，
这些矢量的总体构成一个矢量场。

因此在研究电场时，不是只着眼于个别地方的场强，而是求它与空间坐标的函数。

例1.求点电荷系q_1、 q_2、 …q_k 在空间任一点P处的电场。

对q_0的合力 $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_k$ $\qquad \dfrac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\vec{F}_i}{q_0}$

除以q_0 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_k$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

$\hat{r}_i$ 为q_i指向场点的单位矢量。

即：电场中一点的场强 = 各点电荷在该点各自产生的场强的矢量和

场强叠加原理

例2. 求电偶极子的电场分布。

电偶极子：相隔某一微小距离l的等量异号的两点电荷结构。

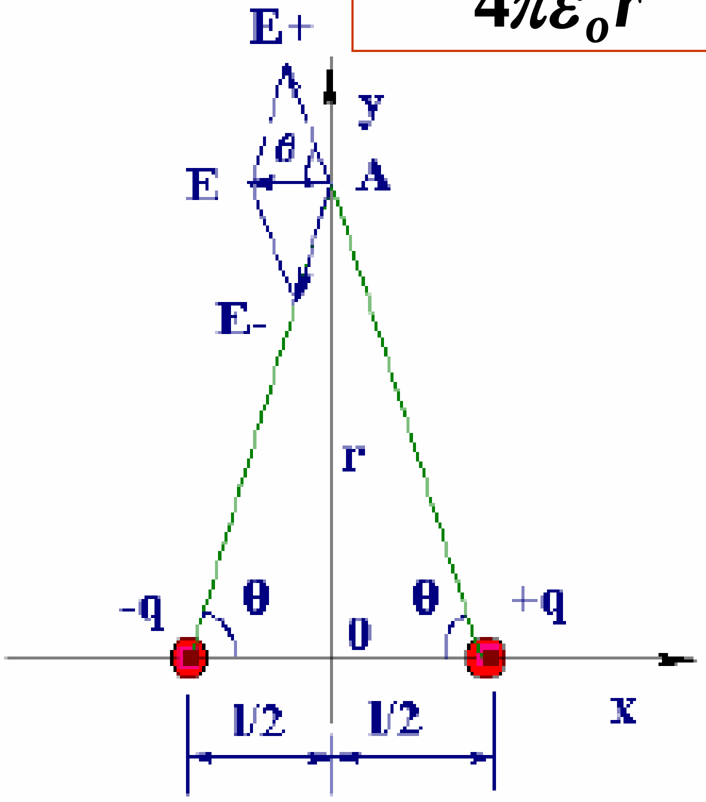
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$$

负电荷至正电荷的长度矢量$\vec{l}$与电量q的乘积叫电偶极子的电偶极矩

矢量：$\vec{P}=q\vec{l}$，简称电矩矢量。

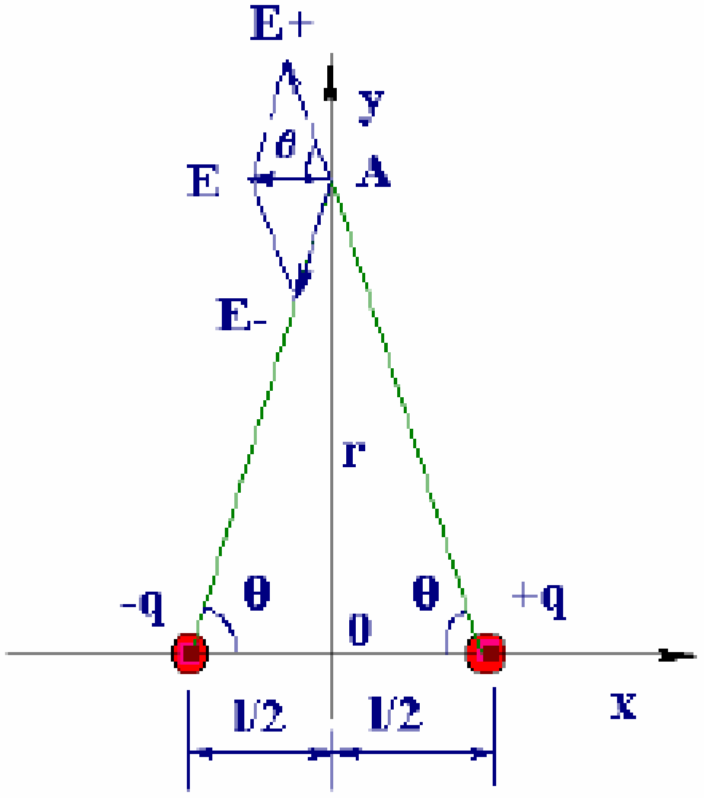
当r≫l时，称A在电偶极子的远区。

电偶极子是物理学中的一个重要物理模型，它在研究电介质极化，电磁波辐射和接收，分子间相互作用等问题中具有重要意义。



$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$\cos\theta = \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$



电偶极子轴线的中垂线上E：

$$\boxed{E=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_o\left(r^2+l^2/4\right)^{3/2}}}$$

$$\vec{p}_e=q\vec{l}$$

——电偶极矩

$\vec{l}$: 表示负电荷到正电荷的矢量线段。

当 $\boldsymbol{r}>>\boldsymbol{l}$ $\quad E\approx\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_o r^3}$ 即：$\vec{E}\approx-\frac{\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_o r^3}$

$\boldsymbol{E}$与 $\boldsymbol{r}^3$ 成反比，比点电荷电场递减得快。

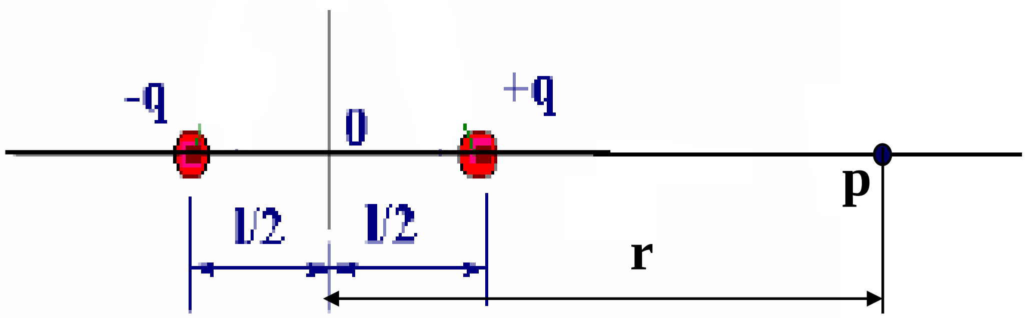
$\boldsymbol{E}\propto q\cdot l$, $q\uparrow l\downarrow$, $q\downarrow l\uparrow$ $\boldsymbol{E}$在远处不变。

$\vec{p}_e=q\vec{l}$ 是描述电偶极子属性的物理量。

电偶极子轴线的延长线上的电场：

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2} \qquad E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2}$$

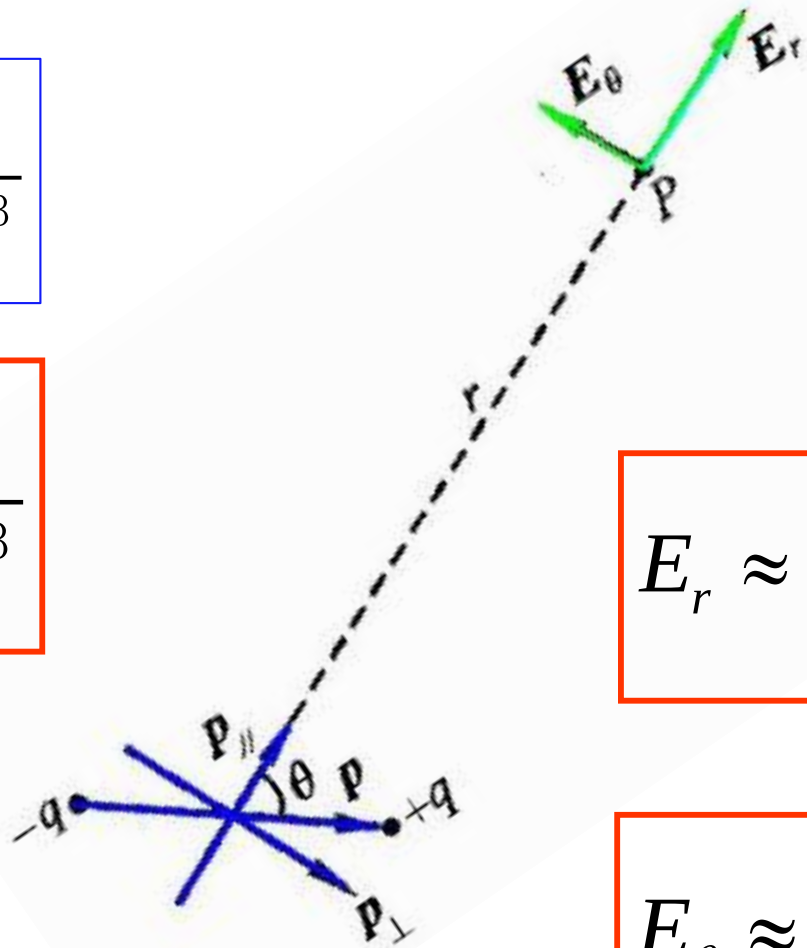
$$\boxed{\vec{E}_p \approx \frac{2\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_o r^3}}$$



任意一点的场强：

$$\vec{E}_{\perp} \approx -\frac{\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

$$\vec{E}_{\parallel} \approx \frac{2\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$



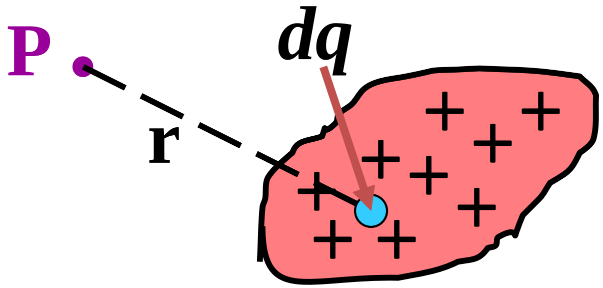
$$E_r \approx \frac{P_e \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{//}$$

$$E_\theta \approx \frac{P_e \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{\perp}$$

2) 连续分布带电体的电场*E* 的计算

对连续分布的带电体，可将其无限划分成许多电荷元 ***dq***，然后利用场强叠加原理。

dq在任意点P处产生的电场为：



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$$

所有*dq*产生的电场：$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$

2) 连续分布带电体的电场E 的计算

$$\vec{E}=\int d\vec{E} \xrightarrow{\text{化矢量积分为标量积分}} \begin{cases} E_x=\int dE_x \\ E_y=\int dE_y \\ E_z=\int dE_z \end{cases}$$

大小为：

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2+E_z^2}$$

与x，y，z轴的夹角α，β，γ为

$$\cos\alpha=\frac{E_x}{E},\quad \cos\beta=\frac{E_y}{E},\quad \cos\gamma=\frac{E_Z}{E}$$

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$$

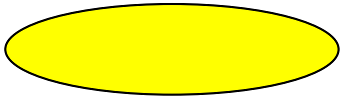
线分布

$$dq=\eta_e(\vec{r})dl$$

线密度

$$\boxed{\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\eta_e(\vec{r})}{r^2}dl\hat{r}}$$

面分布

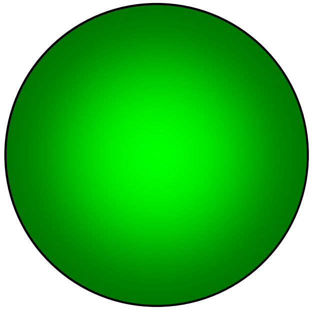


$$dq=\sigma_e(\vec{r})ds$$

面密度

$$\boxed{\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma_e(\vec{r})}{r^2}dS\hat{r}}$$

体分布



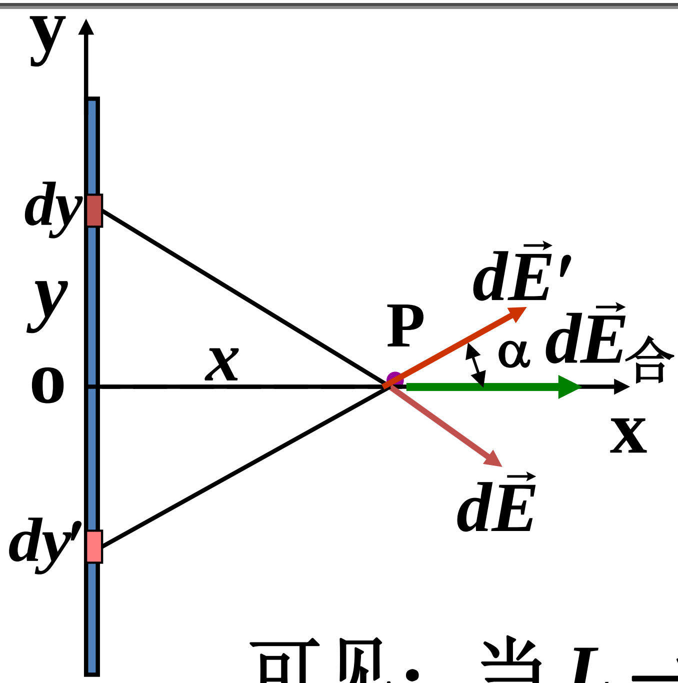
$$dq=\rho_e(\vec{r})dV$$

体密度

$$\boxed{\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_e(\vec{r})}{r^2}dV\hat{r}}$$

例3. 求均匀带电细棒中垂线上电场分布。

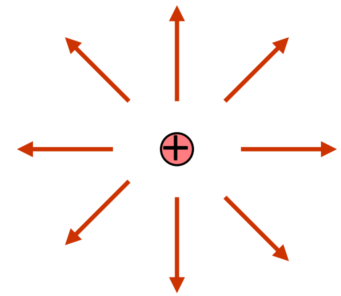
$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$$



已知：棒长L，线电荷密度η

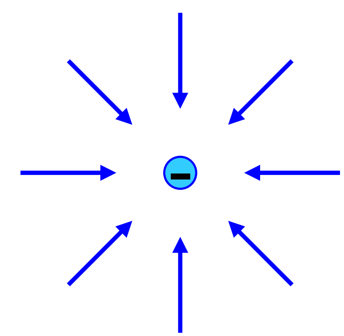
$$E = \frac{\eta L}{4\pi\varepsilon_o x\sqrt{x^2 + L^2/4}}$$

方向沿X轴



可见：当 $L \to \infty$ (或$L>>x$)，则：

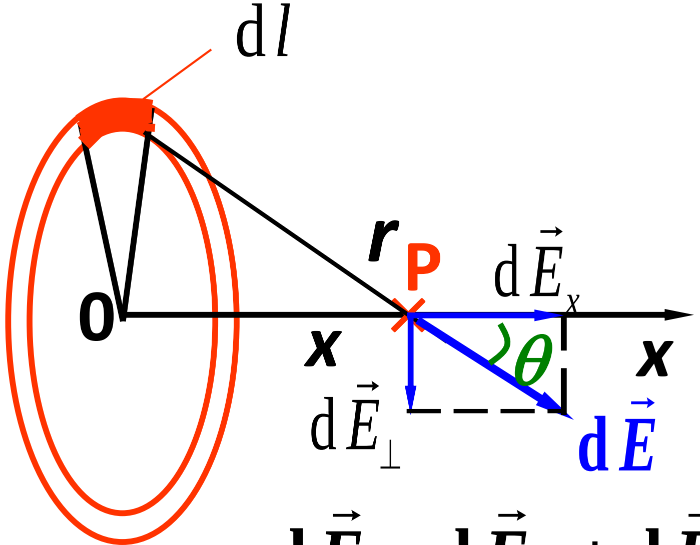
$$E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o x} \xrightarrow{x=r} \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o r}$$



方向沿径向向外（或向内） $\vec{E} = \dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r}$

柱对称电场

例 4. 一半径为R的均匀带电细圆环，带电量为Q，试求圆环轴线上距环心距离为x处的p点电场矢量$\vec{E}$，并画出E随x变化的曲线。



$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}\vec{E}_x + \mathrm{d}\vec{E}_\perp$$

解: 选线元dl，$dq = \frac{Q}{2\pi R} dl$,

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{R^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qdl}{2\pi R(R^2 + x^2)}$$

例 4.

圆环分成的不同线元产生的场强的大小相等，方向各不相同，但与x轴的夹角相同。设为θ，因此在垂直于x轴的方向上，电场分量为0，所以只求与x轴方向平行的分量。

$$E=E_x=\int dE_x=\int dE\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi R}\int_0^{2\pi R}\frac{dl}{R^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

当Q>0时，E方向沿x轴正方向。 $(x>0)$

当Q<0时，E方向沿x轴负方向。

讨论：

（1）当x=0时， E=0；

（2）当$|x| \gg R$时，$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}$ 点电荷电场，

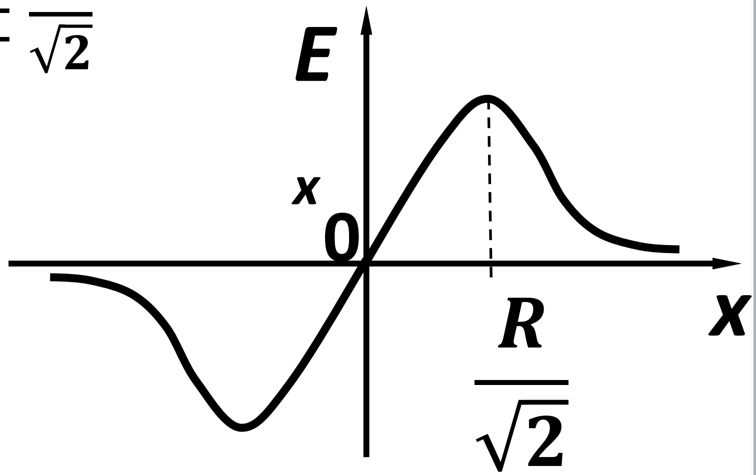
再次说明点电荷的相对意义。

（3）当 $|x| \to \infty$， $E \to 0$

$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{R^2-2x^2}{(R^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$， 令$\frac{dE}{dx}=0 \Rightarrow x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$

可以证明：$\frac{d^2E}{dx^2}<0, x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ 极大值

$\frac{d^2E}{dx^2}>0, x = -\frac{R}{\sqrt{2}}$ 极小值



E随x轴的分布曲线

对于电荷连续分布的带电体，应用叠加原理求场强的方法和步骤：

（1）根据给定的电荷分布，选定便于计算的坐标系，确定电荷元***dq***。

（2）将***dq***作为点电荷，列出场点处 $d\vec{E}$ 的大小，并图示 $d\vec{E}$ 方向：

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

写出 $d\vec{E}$ 的分量式$dE_x=dE\cos\theta$，$dE_y=dE\sin\theta$。

（3）分析电场的对称性，如果能得出对另一个分量的积分为零，例$\Sigma dE_y=0$，则合电场强度简化为对另一个分量的积分：

$$E=\int dE_x$$

（4）有些问题可以利用已有的计算结果：如利用均匀带电细圆环的场强 $E=\dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$，“无限长”均匀带电直线的场强 $E=\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 等，应用叠加原理直接进行运算。（应注意电场的对称性分析，化矢量积分为标量积分。）

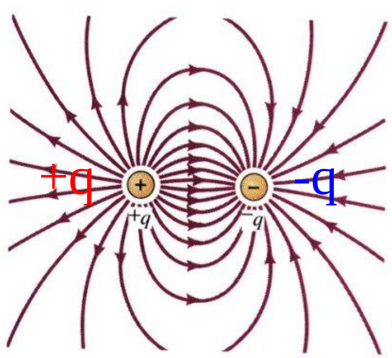
3、 高斯定律

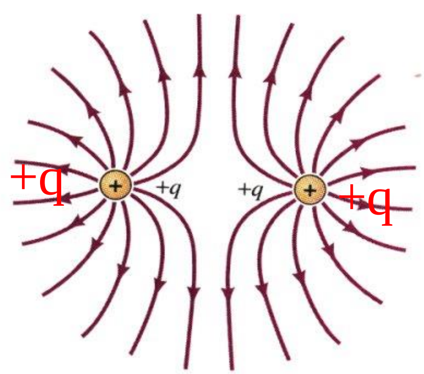
高斯定理反映的是电场矢量的通量与电荷之间的定量关系。当电荷分布具有某种对称关系时，利用此定理能够简便地求出电场的空间分布。

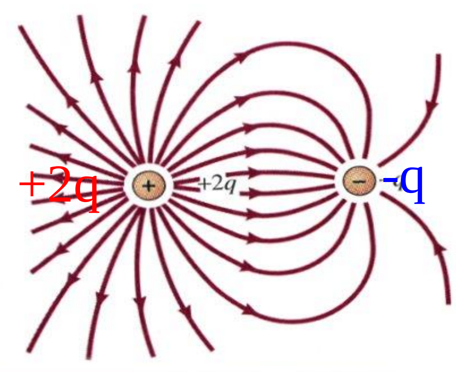
3.1 电场线（或称电力线）

定义：电场空间的一簇曲线，每点的切线方向与该点的电场强度方向一致---电场线

一些典型电荷分布的电场线







电场线的性质

（A）静电场中电力线是从正电荷发出（或来自无穷远），终止于负电荷（或延伸到无穷远），在没有电荷处不会中断。

（B）电场中没有电荷的地方，由于电场不为零，电场矢量只有一个方向，因而任意两条电力线不会相交。

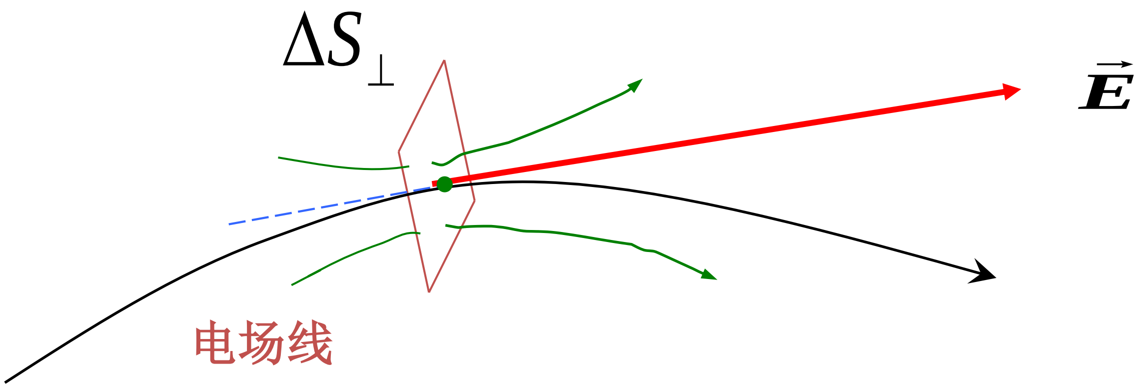
（C）静电场的电力线不会形成闭合曲线。

（D）若带电体中，正、负电荷一样多，则由正电荷发出的全部电力线，都将回到负电荷上去。

（E）电力线是假想的，电场空间并没有一根根的电力线，而且未画出电力线的地方不一定电场为零。

规定：

a 空间中任意一点处，通过该处垂直于 $\vec{E}$ 的单位面积上电场线根数 = 电场线数密度



$$\frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}}$$

（电场线数密度）

电场线数密度与场强量值关系 $\begin{cases} \text{电场线密---场强大} \\ \text{电场线疏---场强小} \end{cases}$

b 电场线数的密度与该点的场强大小成正比

$$E \propto \frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}} \qquad \Delta N = E \Delta S_{\perp}$$

3.2 电通量 Φ_E

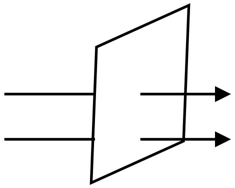
$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_S A\cos\theta dS$$

定义：通过电场中任一给定面的电场线总根数，就是该面的电通量$\mathbf{\Phi_E}$。

(1) $\vec{E}$为均匀场

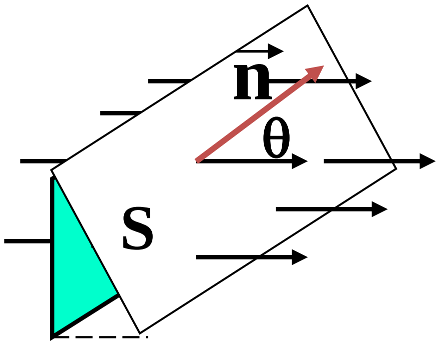
1) 设场中有一平面S，$S \perp \vec{E}$ 或其面法线 $\vec{n} \parallel \vec{E}$

该面的电通量：$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$



3.2 电通量 Φ_E

2) 若$\vec{n}$ 与$\vec{E}$ 成 θ 角

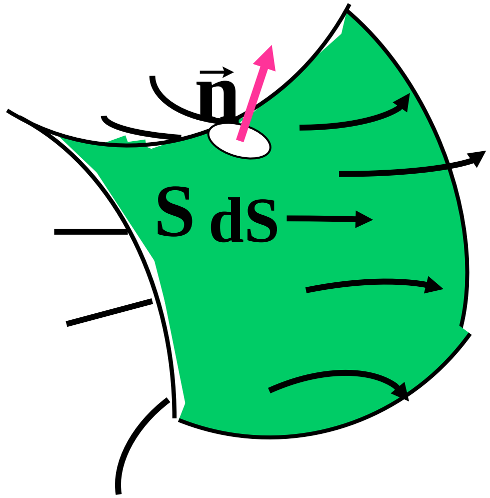


$$\Phi_E = SE\cos\theta = E(S\cos\theta)$$

$$= \vec{E}\cdot\vec{S} = \vec{E}\cdot S\vec{n}$$

$$\Phi_E \begin{cases} \theta < 90^o & \Phi_E > 0 \\ \theta > 90^o & \Phi_E < 0 \end{cases}$$

(2) $\vec{E}$ 为非均匀场



曲面S上,各点的E大小方向均不同

取面积元dS，其上的电通量:

$$d\Phi_E = EdS\cos\theta = \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

S面上的总通量:

$$\boxed{\Phi_E = \iint d\Phi_E = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S E\cos\theta dS}$$

当S为闭合曲面时:

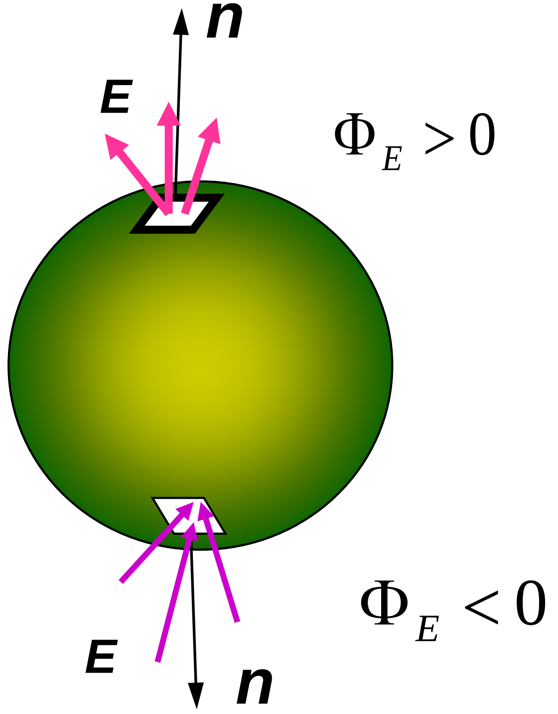
$$\boxed{\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E\cos\theta dS}$$

通量Φ_E的正负：

曲面法线方向规定：

开曲面：凸侧一方的方向的外法线方向为正；

闭合面：自内向外为法线的正方向。



$\therefore$ E线从曲面内向外穿出：$\Phi_E > 0$

而从曲面外向内穿进：$\Phi_E < 0$

Φ_E的单位： $\boxed{\mathrm{N \cdot m^2 / C}}$

讨论：

1 $$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

表示通过闭合面的净电场线的总根数。如果闭合曲面内无电荷，则通过该闭合曲面的电通量为**0**。

2 引入电场线，只是为了形象理解电场**E**的分布，实际上**E**是连续分布于空间。

3 电通量是标量。

电通量的叠加原理

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

$$\Phi_E = \iint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \cdots + \iint_S \vec{E}_n \cdot d\vec{S}$$

$$= \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \cdots + \Phi_{En}$$

（代数和）

=电荷单独存在时的叠加（穿出、穿入Φ_E有正有负）

3.3 真空中静电场的高斯定理

——静电场的基本定理之一

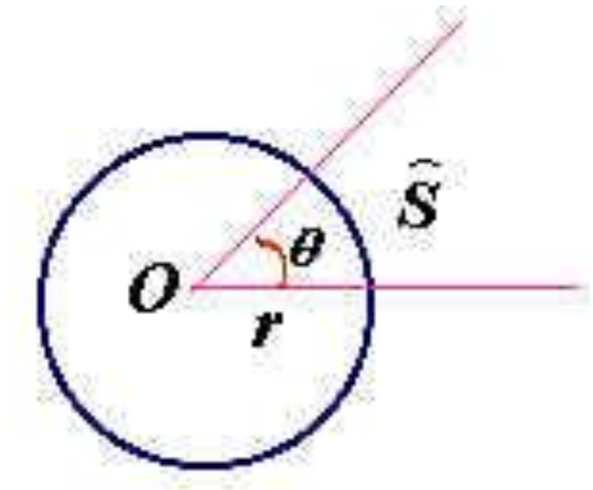
（1）高斯定理（由库仑定理和场强叠加原理导出）

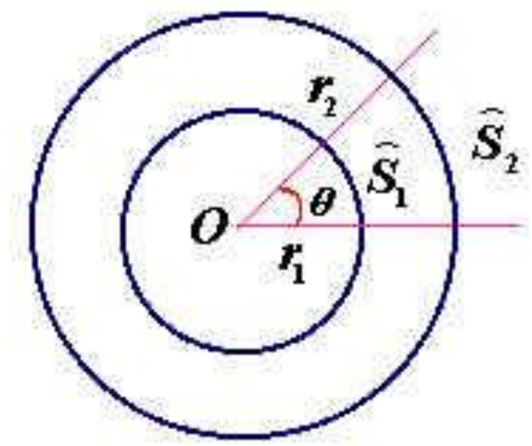
研究封闭曲面的电通量与该曲面内包围的电荷之间的关系

高斯定理是静电场的基本定理，要理解高斯定理的物理意义，要求能应用高斯定理求解特定条件的电场强度。

立体角

1、平面角

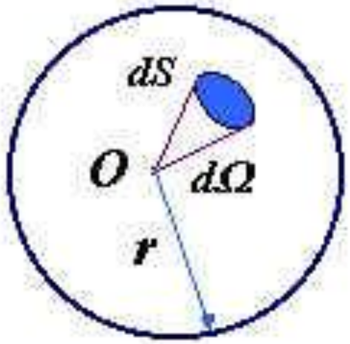


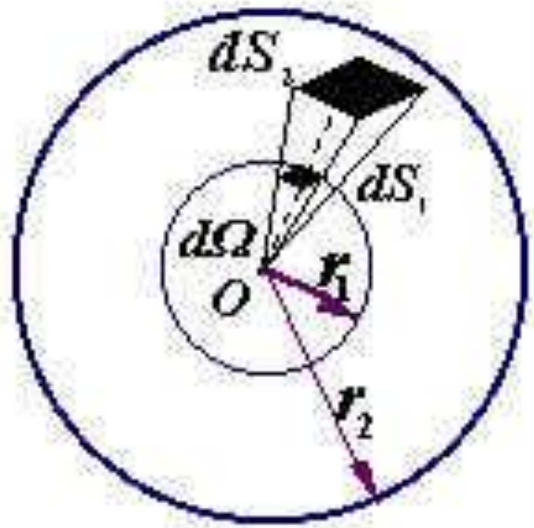


$$\theta = \frac{\widehat{S}}{r}$$

$$\frac{\widehat{S}_1}{r_1} = \frac{\widehat{S}_2}{r_2}$$

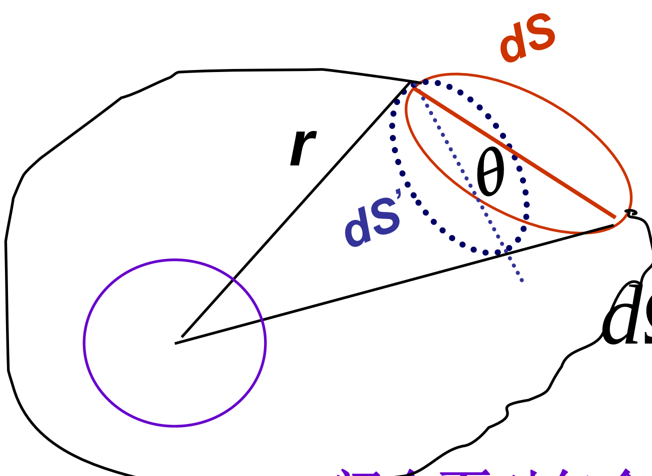
2. 立体角





$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$



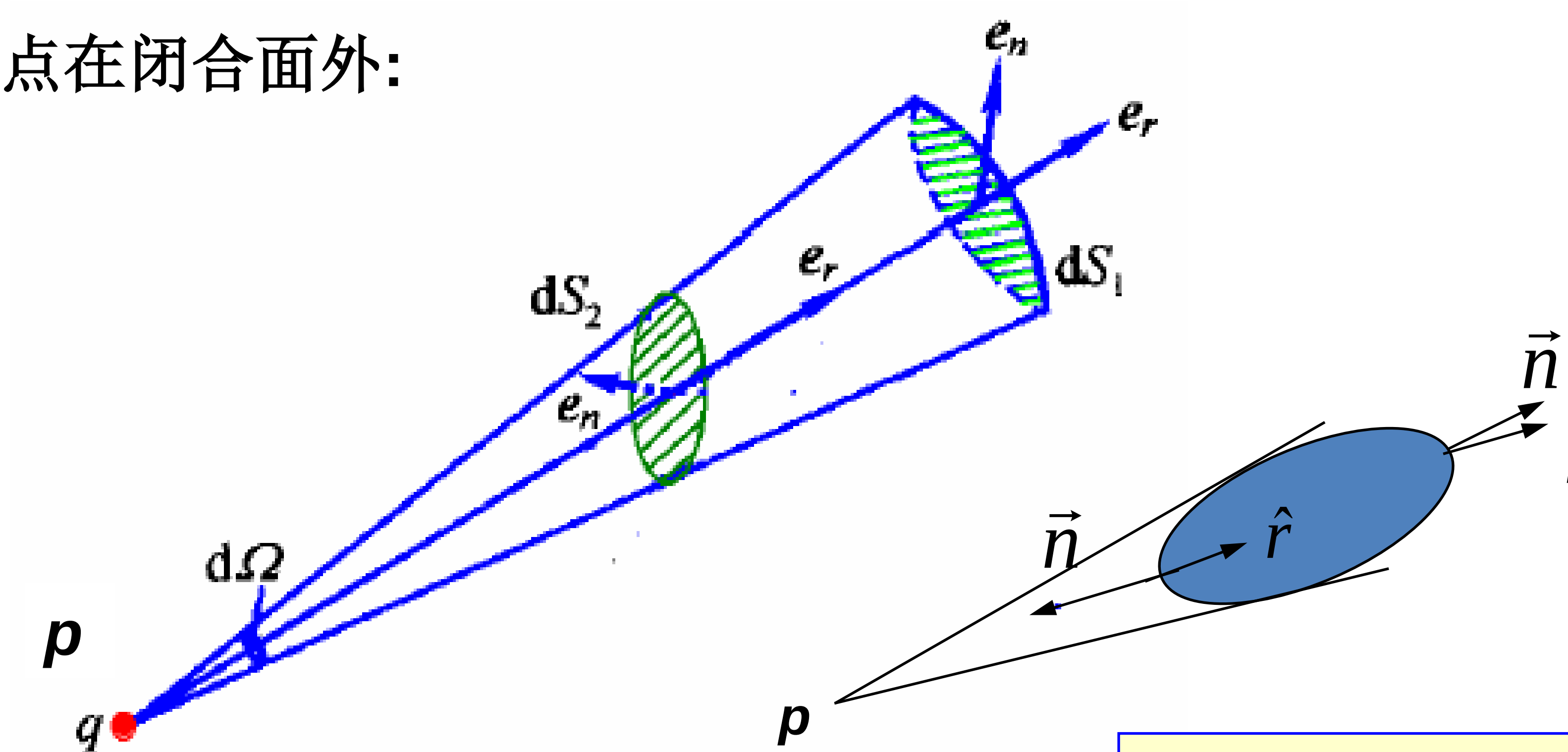
整个球面对球心所张的立体角是4π

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{d\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{dS\vec{n}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

闭合面对包含在其内的任意点所张的总的立体角都是4π球面度

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{d\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{dS\vec{n}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

点在闭合面外:

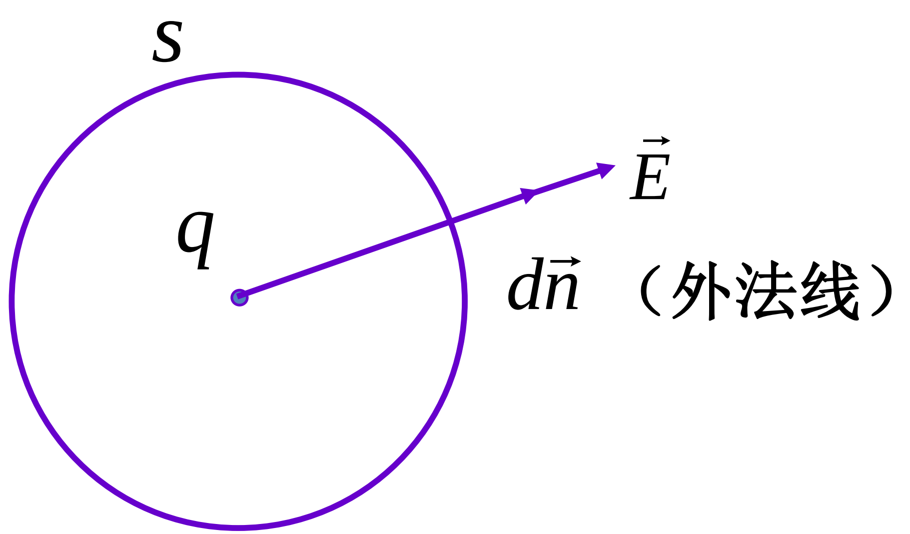


总立体角为0

通过不同闭合面的电通量

$$\Phi_E = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

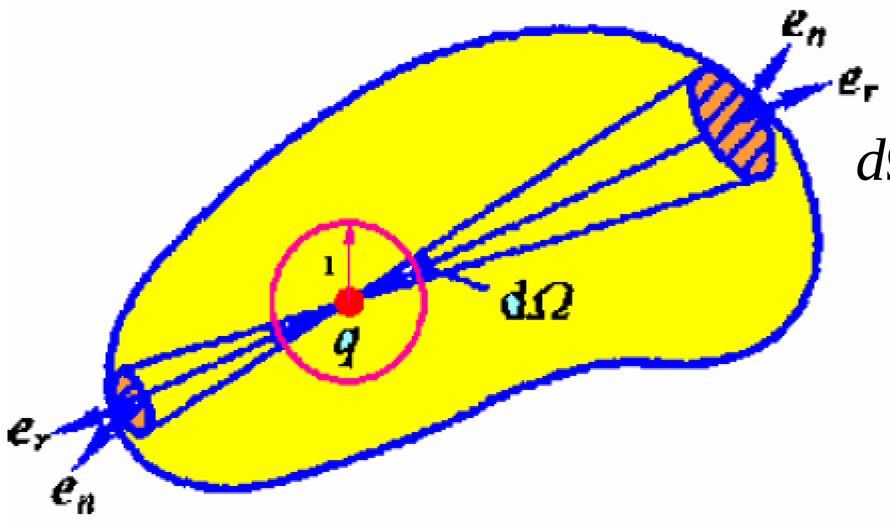
1）通过包围点电荷q的闭合球面的电通量



$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_{S'} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\oiint_{S'} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

2）点电荷在任意曲面内部时的电通量



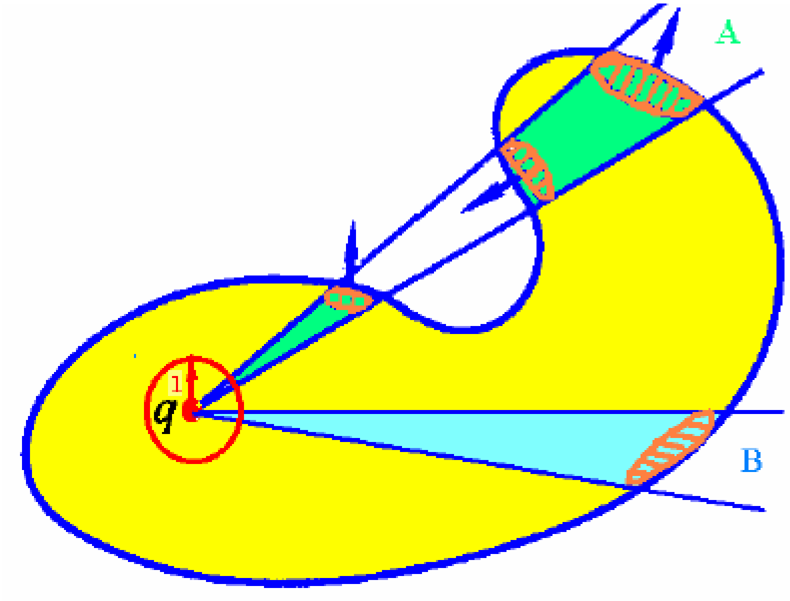
$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{d\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{dS\vec{n}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_{S'} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

当q在封闭曲面内，曲面S对q张的立体角为4π

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

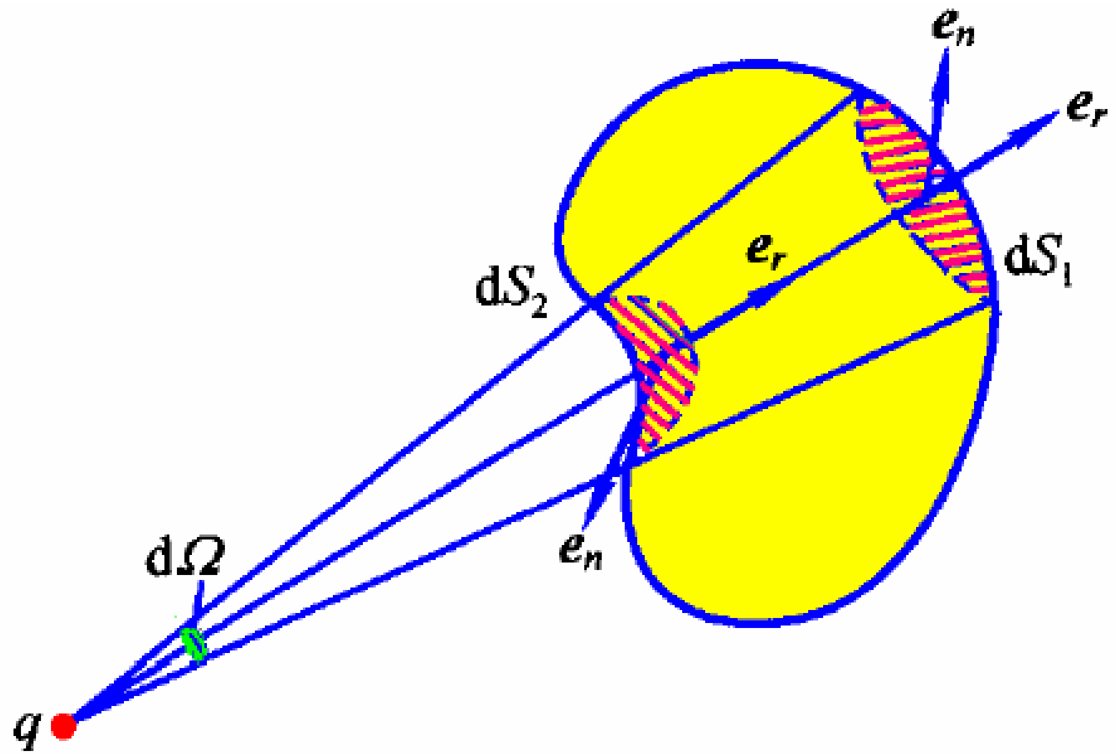
2）点电荷在任意曲面内部时的电通量



$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

点电荷在曲面内部，穿进穿出的次数总是奇数

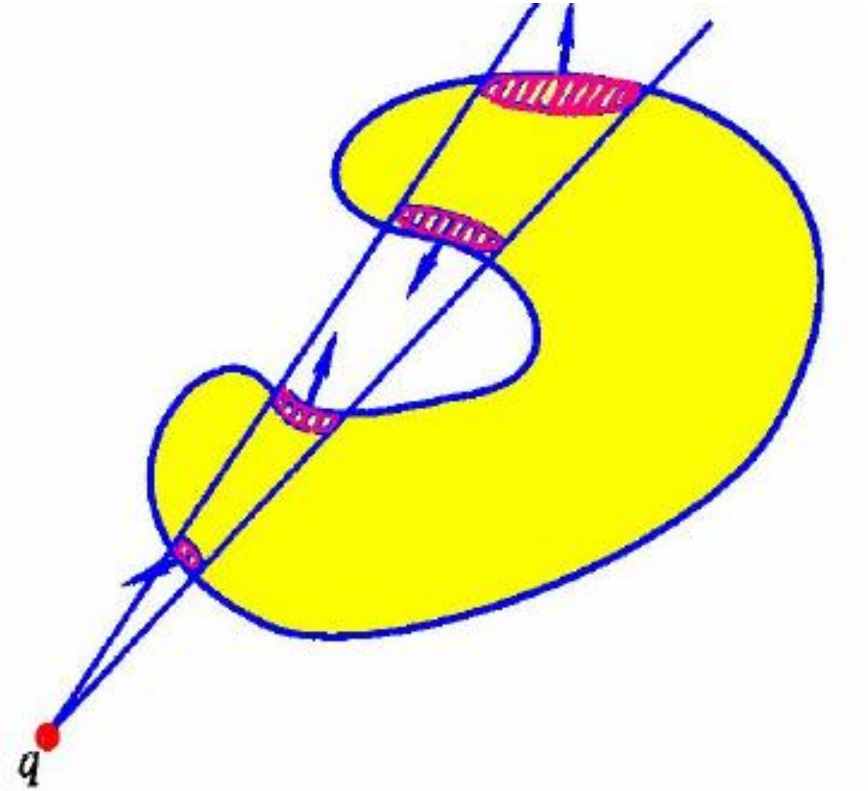
3）点电荷在曲面外部时的电通量



$$\Phi_E = 0$$

电荷在曲面的外部，穿进穿出的两曲面对q所张的立体角相互抵消

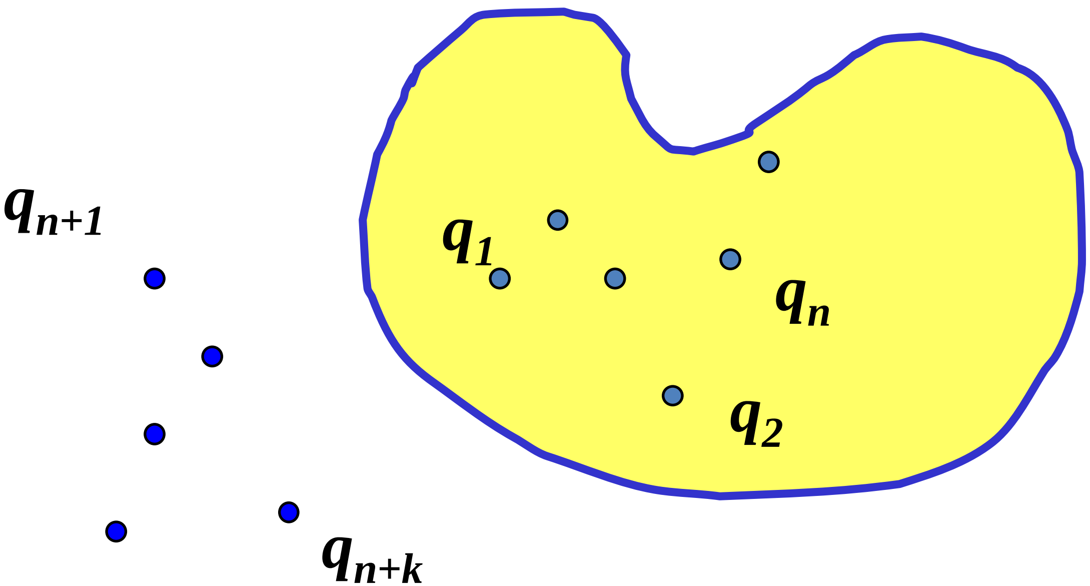
3）点电荷在曲面外部时的电通量



$$\boxed{\Phi_E = 0}$$

电荷在曲面外部，穿进穿出的次数总是偶数

4）点电荷在曲面内外共存时的电通量



$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0}$$

高斯定理：

通过任意闭合曲面S的电通量 = S面包围的电荷的代数和除以ε_0

即：

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{S内} q_i$$

若S内的电荷是连续分布：

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \iiint_V \rho \cdot dV$$

此定理是用电通量表示的电场与场源电荷关系的规律。

高斯定理：

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{S内} q_i$$

或

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \iiint_V \rho \cdot dV$$

说明：

1 定理中E是所取的封闭面S（高斯面）上的场强，它是由全部电荷（S内外）共同产生的合场强，即电场是内外电荷在高斯面上共同激发的；

2 电场对封闭曲面的通量只与曲面所包围的电荷有关，等于内电荷的代数和除以ε_0，高斯面外的电荷对总通量Φ_E没有贡献。即Φ_E只决定于S面包围的电荷，S面外的电荷对Φ_E无贡献。

3 高斯定理表明的只是电通量和电荷的关系

高斯定理的物理意义：

定理给出了静电场的重要性质 —静电场是有源场

正负电荷就是场源 $\begin{cases} \sum q_i > 0 & \Phi_E > 0 \text{ 电场线穿出} \\ \sum q_i < 0 & \Phi_E < 0 \text{ 电场线穿入} \end{cases}$

注：

- 高斯定理来源于库仑定律；
- 高斯定理和库仑定律都是静电场的基本定理。高斯定理是由库仑定律和电场强度叠加原理导出的，但两者适用范围并不相同。库仑定律只适用于静电场，而高斯定理既适用于静电场，也适用于运动电荷和迅速变化的电磁场。高斯定理是电磁场方程组的组成部分；
- 当电荷分布具有某些特殊对称性时，适当选取高斯面，用高斯定理通过电荷分布可以找到电场分布，采用这种方法计算电场强度往往要简便得多。

常见的电量分布的对称性
(均匀带电)

球对称	柱对称	面对称
球体	（无限长）	（无限大）
球面	柱体	平板
点电荷	柱面	平面
	带电线	

(2) 用高斯定理求$\vec{E}$

库仑定律：已知q→求E

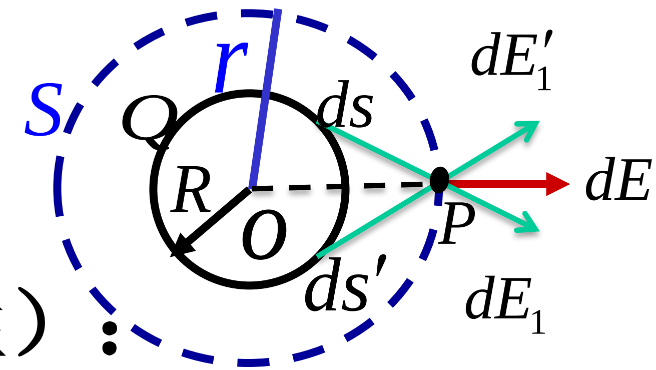
$$\begin{cases} \vec{E} = \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_o r_i^2} \hat{r}_i \\ \vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2} \hat{r} \end{cases}$$

高斯定理：当q对称分布时→求E

$$\begin{cases} \oint\!\!\!\!\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{S内} q_i \\ \oint\!\!\!\!\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \iiint_V \rho \cdot dV \end{cases}$$

例1. 半径为R的球面上均匀带电，带电量为Q,求球面内外的场强分布。

解:



(1) 分析电场的对称性

（包括$\vec{E}$的方向和大小的对称性）:

电场的分布为球对称。即：在半径为r的球面上各点，场强的大小相等，方向与该点矢径平行，或者说垂直于球面。这种分析对球面内外都成立。

(2) 选择高斯面：以O为球心，过场点P，半径为r的球面。

(3) 求解：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oiint_S E ds = E\oiint_S ds = 4\pi r^2 E$$

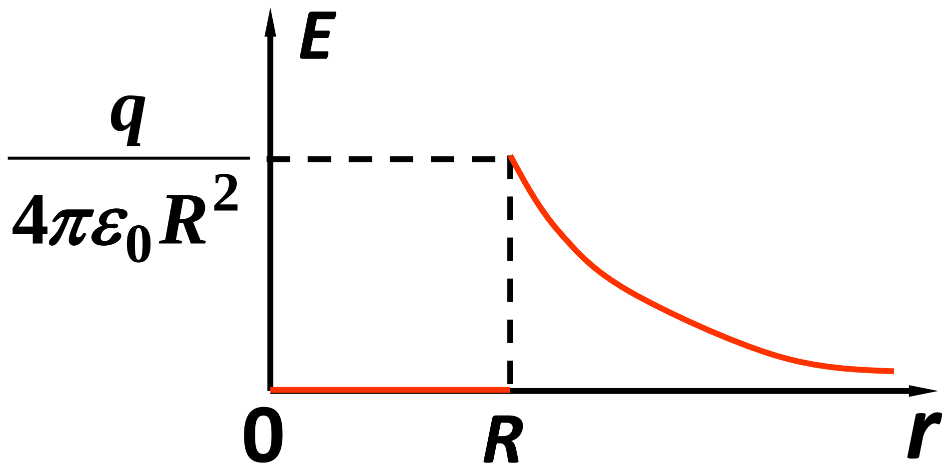
$r > R$，球面外：　$\therefore 4\pi r^2 E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$　（高斯定理）

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\hat{r} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$　（类似点电荷的电场）

r<R，球面内：

$4\pi r^2 E = 0,\quad \therefore E = 0$

结论：均匀带电球面在球面外产生的场强与把所有电荷放在球心产生的场强相同。球面内场强处处为零。

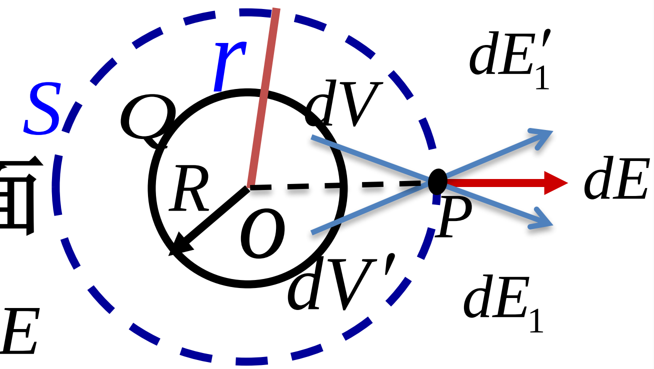


例2. 半径为R的均匀带电球体，电量为Q，求内外的场强。

解：（1）球对称

（2）以o为球心，半径为r的球面

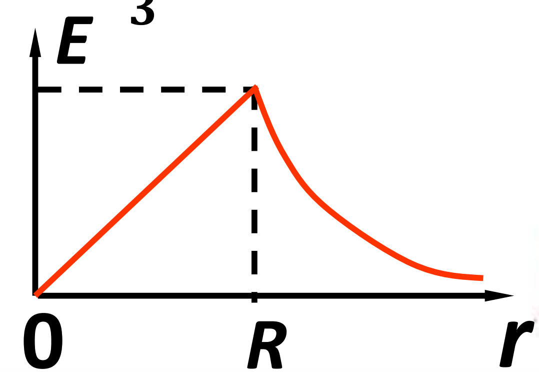
（3）$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s}=\oiint Eds=E\oiint ds=4\pi r^2E$



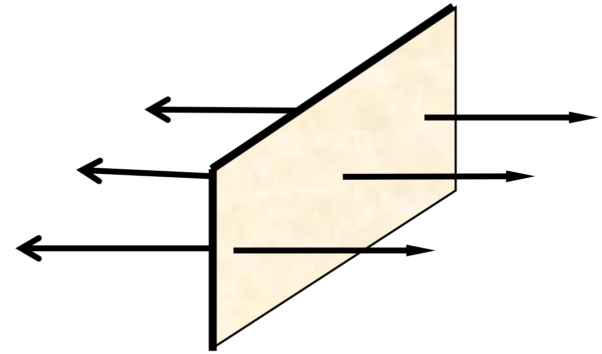
球面外：$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\hat{r}$ （类似点电荷的电场）

球面内：$4\pi r^2E=\frac{q_内}{\varepsilon_0}$，又$q_内=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{r^3}{R^3}Q$

有$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\frac{r}{R^3}\hat{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\frac{\vec{r}}{R^3}$

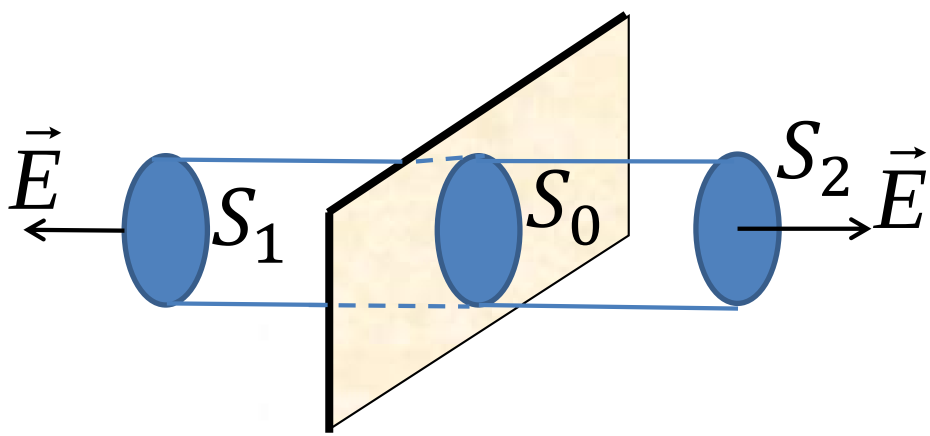


例3. 无限大平面均匀带正电，电荷面密度为σ，求平面外电场矢量分布。



解：（1）由于电荷均匀分布在无限大平面，所以两侧的电场分布对称，而且与带电平面垂直。

（2）选取如图所示的闭合柱面为高斯面。



（3）$\oiint\limits_{S}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{侧}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\iint\limits_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\iint\limits_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}$

由于电场线与高斯面的侧面法线垂直，故侧面的电通量为零。两底面的外法线方向与电场矢量方向一致，故通量都等于$\boldsymbol{ES_0}$。

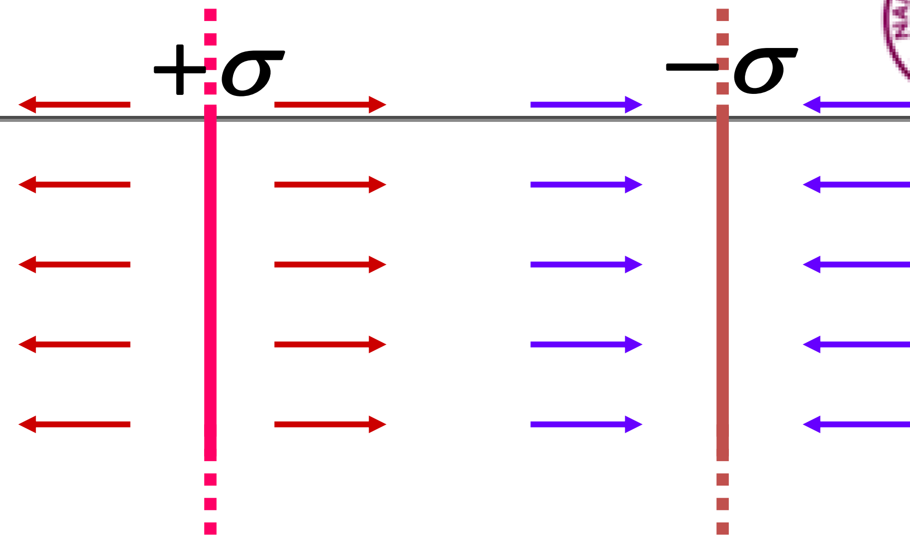
由高斯定理有：

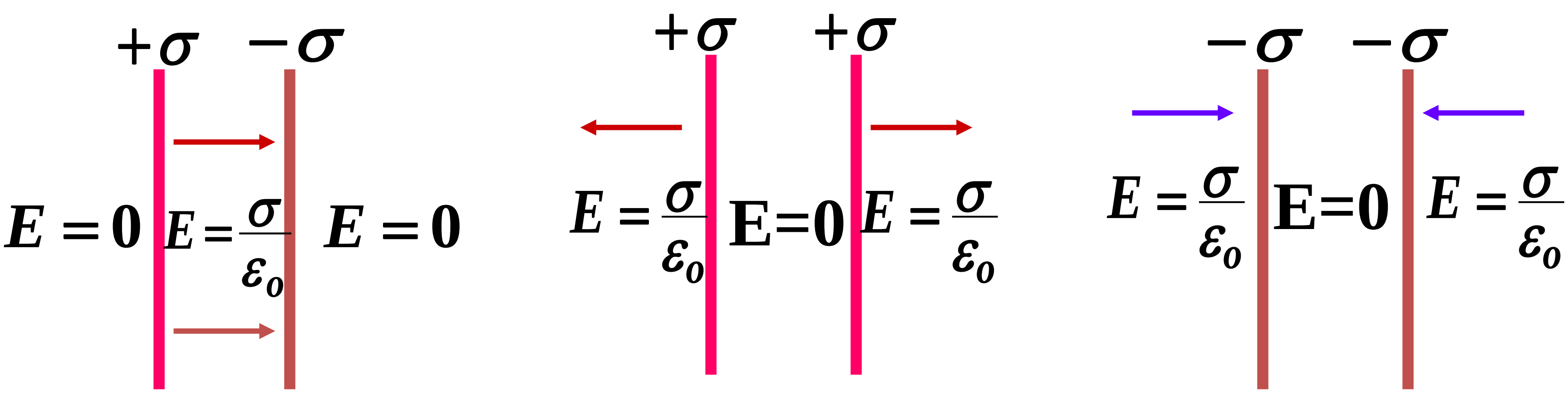
$$\oiint\limits_{S}\vec{E}\cdot d\vec{S}=2ES_0=\frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0}$$

故$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，方向垂直平面向外。

讨论：

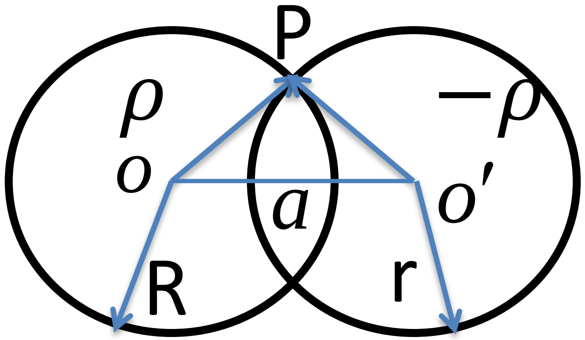
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$ → **均匀场**





例4. 半径分别为R和r的两球均匀带电，且相交，体电荷密度分别为ρ和$-\rho$。两球相距为a，a< R+r，求两球面相交处P的电场矢量。（两球相交部分的电荷体密度为0）

解：

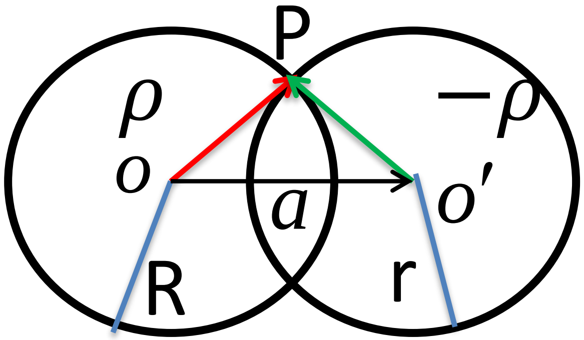


（1）对称性分析，可以利用高斯定律及电场叠加原理求得。

（2）先求单个球在P点产生的场强，然后叠加。可利用例2的结果。

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\frac{r}{R^3}\hat{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\frac{\vec{r}}{R^3}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

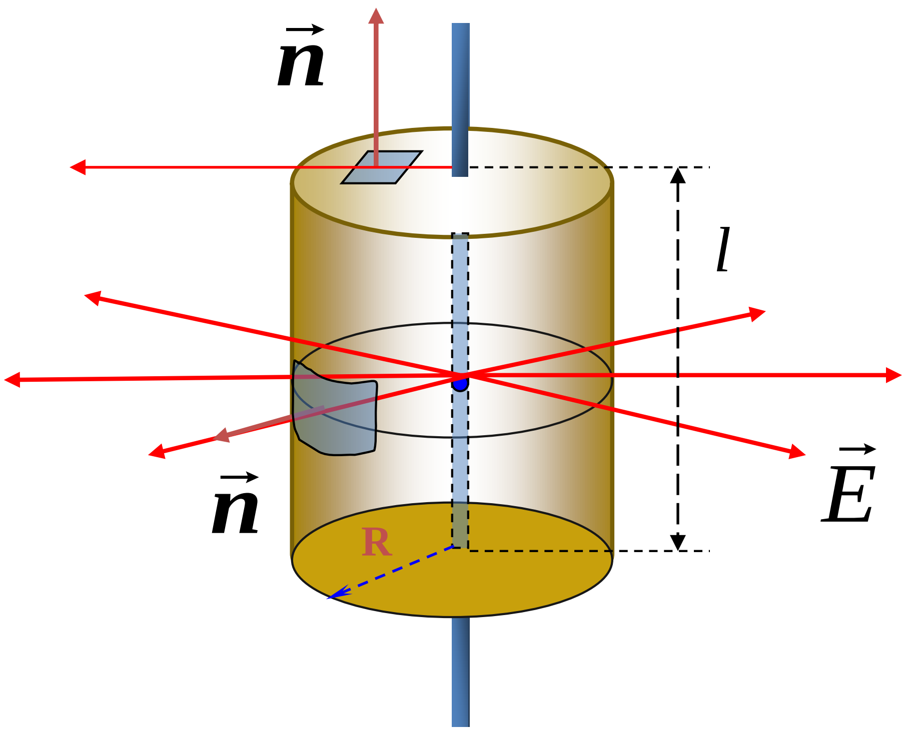
$$\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



$$\vec{E}_R=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OP},\qquad \vec{E}_r=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O'P}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{PO'}$$

$$\vec{E}_p=\vec{E}_R+\vec{E}_r=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PO'})=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}=\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}\hat{O}\hat{O}'$$

例5. 电荷线密度为η的无限长均匀带电导线的场强分布



$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{S内} q_i$$

$$\rightarrow \quad E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o r}$$

利用高斯定理计算电场的说明：

（1）能够运用高斯定理的几种情况：

1）球对称分布：点电荷、均匀带电球体、均匀带电球面、均匀带电球壳等；

2）轴对称分布：无限长带电细直线、无限长带电圆柱体、无限长带电圆柱面等；

3）面对称分布：无限大带电平面、无限大带电平板等；

4）以上三种对称分布带电体的组合。

（2）应用高斯定律解题的步骤：

1）分析电场的对称性。

2）选择高斯面：

A. 高斯面必须通过待求电场的场点；

B. 高斯面的每部分法线与电场矢量的夹角已知值，例如夹角为0或$\frac{\pi}{2}$或确定的角度α；

C. 在高斯面的全部或各部分，电场数值不变；

D. 尽量简单，以使计算简便。

3）利用高斯定理求解。

作业

- P.351-P.353： T8.5、T8.6、T8.10、T8.14、T8.16、T8.20；
- 补充：
  半径为R的带电圆环，电荷线密度为$\eta = \eta_0 \cos\theta$，式中η_0为常数，θ为半径R与x轴（沿直径）的夹角，求环心处的电场强度矢量。