南开大学

第六章 振动

（Vibration）

振动

单摆，鼓皮，吉他弦——机械振动

电压电流振动，电磁波的振动——非机械振动

振动
- 受迫振动 → 共振
- 自由振动
  - 阻尼自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 无阻尼自由非谐振动
    - 无阻尼自由谐振动（简谐振动）

本章内容

- 6.1简谐振动 √
- 6.2简谐振动的合成
- 6.3阻尼振动，受迫振动和共振

本章重点：简谐振动

（理想化模型）

1. 简谐振动是某些实际振动的近似

2. 简谐振动可用来研究复杂振动

6.1简谐振动

一 简谐运动

1 机械振动

物体或物体的某一部分在一定位置附近来回往复的运动

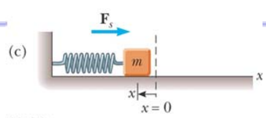
平衡位置

实例：

心脏的跳动，钟摆，乐器， 地震等

二．简谐振动

1、弹簧谐振子



$$F = -kx = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$ 弹簧振子运动的动力学方程

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$ 谐振子的运动学方程

得 $$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

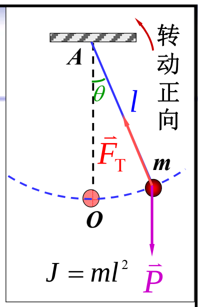
$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

其中 $$\begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+(\frac{v_0}{\omega})^2} \\ \varphi=\arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0}) \end{cases}$$

简谐运动的特征：加速度与位移的大小x成正比，方向相反

2、单摆

摆线偏角以竖直方向向右为正



$$\vec{M}_z=[\vec{r}\times(m\vec{g}+\vec{T})]_z=(\vec{r}\times m\vec{g})_z$$

$$=-mgl\sin\theta\approx mgl\theta$$

$\theta<5^\circ$ 时，$\sin\theta\approx\theta$

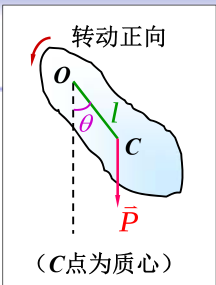
$\boxed{M_{外z}=J_z\alpha}$ —转动定律

$$-mgl\theta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgl\theta=ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$$

$$\omega^2=g/l \qquad \theta=\Theta\cos(\omega t+\varphi) \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

3、复摆（$\theta<5^\circ$）



$$\vec{M}=\vec{l}\times\vec{F}$$

$$M=-mgl\sin\theta$$

$$=J\beta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgl\,\theta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

令 $$\omega^2=\frac{mgl}{J}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega^2\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega^2\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$\theta=\Theta\cos(\omega t+\varphi)$ 角谐振动

简谐振动，定义如下

（1）动力学定义：凡是受弹性力或准弹性力作用而引起的运动，是简谐振动。也是凡是运动微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

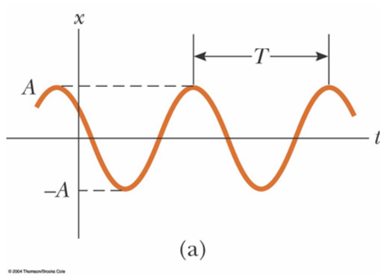
（二阶齐次线性常微分方程）

的运动称简谐振动

（2）运动学定义：一个物理量随时间的变化规律为 $A\cos(\omega t+\varphi)$

其中 ω 由系统本身性质决定。则这个物理量描述的运动为简谐振动。

二. 描述简谐振动的几个物理量



(a)

1、周期，频率，固有角频率

余弦函数描述的运动都具有周期性。物体做一次完全振动所需要的时间称为振动的周期，记作：T。

$$A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$
$$=A\cos[(\omega t+\varphi)+\omega T]$$

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=-\omega A\sin[(\omega t+T)+\varphi]$$
$$=-\omega A\sin[(\omega t+\varphi)+\omega T]$$

2017/3/17 13

T的最小值满足 $\omega T=2\pi$ 即 $T=\frac{2\pi}{\omega}$

弹簧振子 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

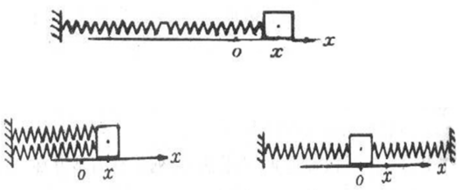
单摆 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\gamma=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$

复摆 $T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$

$\omega=2\pi\gamma$ 振动体系的固有角频率（角频率又称圆频率）它由振动体系本身的性质决定。

2017/3/17 14

例. 两弹簧劲度系数都为 k，（1）串联后与质量为m的质点相连，（2）并联后与该质点相连，（3）将质点串在两弹簧中间。在坐标原点两弹簧正好无形变，分别求振动体系的固有角频率。



2017/3/17 15

解：（1）设某时刻弹簧总伸长x，两弹簧分别伸长 x_1, x_2

$$x=x_1+x_2$$

$$x_1=\frac{F}{k_1}\qquad x_2=\frac{F}{k_2}\qquad x=\frac{F}{k_0}$$

$$\therefore\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k_0}\qquad k_1=k_2=k\qquad \therefore k_0=\frac{k}{2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{2}x=0\qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

2017/3/17 16

（2）某时刻两弹簧均伸长x，则

$$F=-(k_1+k_2)x=-k_0'x$$

$$\therefore k_0'=k_1+k_2$$

$$k_1=k_2=k\qquad \therefore k_0'=2k$$

$$\therefore\omega=\sqrt{2k/m}$$

2017/3/17 17

（3）当物体位移到x时

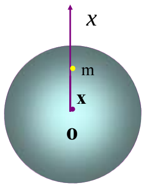
$$F=-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)x=-2kx=-k_0''x$$

$$k_0''=2k$$

$$\therefore\omega=\sqrt{2k/m}$$

2017/3/17 18

例．设地球为密度均匀的球，密度为 ρ ，在其内沿直径隧道放一质点，若只考虑万有引力，求小质点作何种运动？



解：从动力学进行分析

（1）地球球心为坐标原点作ox轴，当质点处于某位置x时，其受力

$$F=-G\frac{M'm}{x^2}$$

式中 M'为半径为 x 的地球质量，若地球质量密度为 ρ，则

$$M'=\frac{4}{3}\pi x^3\rho$$

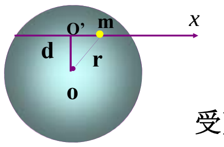
所以 $F=-G\dfrac{\frac{4}{3}\pi x^3\rho m}{x^2}=-Gm\rho\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)x=-kx$

∴ 质点作简谐振动

振动周期及频率

$$T=2\pi/\omega \qquad \omega^2=\frac{Gm\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{m}=G\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

如果隧道不是沿直径，而是沿一条弦，设想在离地心d距离处开一条内壁光滑的小孔道，则再解此题



解：从动力学进行分析

（1）地球球心为坐标原点作oo'垂直于弦， om距离为r，设o'm为x时，

受万有引力为 $-\frac{4}{3}Gm\pi r\rho$

其x分量为：$-\frac{4}{3}Gm\pi r\rho\cdot\frac{x}{r}=-\frac{4}{3}\pi Gm\rho x$

x方向微分方程：$-\frac{4}{3}\pi Gm\rho x=m\frac{d^2x}{dt^2}$

质点作简谐振动 $\omega=\sqrt{4\pi G\rho/3}$

振动周期及频率

$$T=2\pi/\omega \qquad \omega^2=\frac{Gm\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{m}=G\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

这种情况得到的周期与通过地心的情况相同

2、振幅，相位和初相位

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

A为物体离开平衡位置最大位移的绝对值，称为简谐振动的振幅

$(\omega t+\varphi)$ 振动的相位

φ 初相位

大小决定于体系的初始状态

相位的意义：表征任意时刻（t）物体振动状态. 物体经一周期的振动，相位改变 2π .

设 $t=0$ 时 $x=x_0$ $v=v_0$

$$\begin{cases}x_0=A\cos\varphi\\ v_0=-\omega A\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$tg\varphi=-v_0/\omega x_0\Rightarrow\varphi=tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

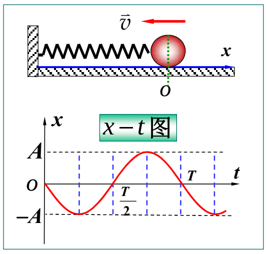
讨论　已知 $t=0, x=0, v_0<0$ 求 φ

$$0 = A\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

$$\therefore \sin\varphi > 0 \text{ 取 } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

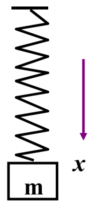


一根原长为L，劲度系数为K的轻质弹簧竖直悬挂，下端系一质量为m的重物，如图所示。求：

（1）忽略空气阻力，写出系统振动的动力学方程；

（2）证明该系统为一简谐振动系统；

（3）求系统的固有角频率。



解：（1）选重物的平衡位置为坐标原点，向下为正方向的x轴坐标系，设重物平衡时，弹簧的伸长量为X_0，则重物在X坐标处时：

$$mg = kx_0$$

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = mg - k(x_0 + x)$$

即 $$m\frac{dx^2}{dt^2} = -kx$$

（2）令 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

则 $\dfrac{dx^2}{dt^2} = -\omega^2 x$

其解为　$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

证明该运动为简谐振动

（3）系统的固有角频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

另一解法：也可选弹簧自然长度时重物位置为坐标原点

三、简谐振动（Simple Harmonic Motion）的表示法

定义式　$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$

这种用时间的正弦或余弦函数来描述的振动，称为简谐振动.（简谐振动可用 SHM表示）

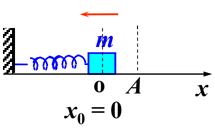
x 可作广义理解（位移、电流、场强、温度…）

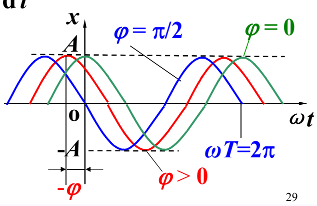
SHM的表示法

①解析式

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = \dfrac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}) \\ a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi) \end{cases}$$

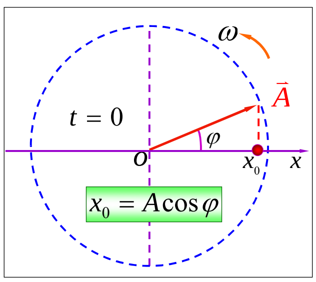
②振动曲线



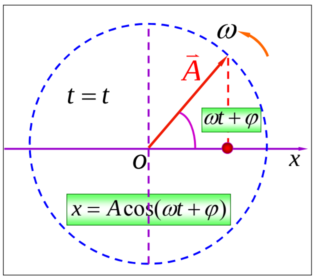


★③旋转矢量法

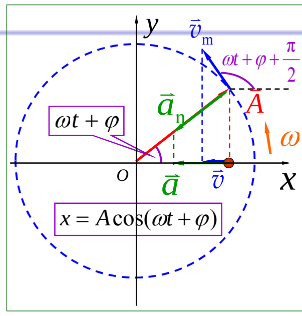
旋转矢量



自Ox轴的原点O作一矢量$\vec{A}$，使它的模等于振动的振幅A，并使矢量$\vec{A}$在 Oxy平面内绕点O作逆时针方向的匀角速转动，其角速度 ω与振动频率相等，这个矢量就叫做旋转矢量.



以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.



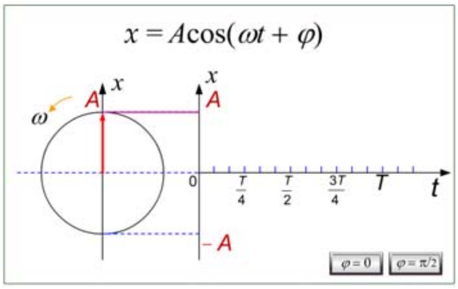
$v_m = A\omega$

$\boxed{v = A\omega\cos(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2})}$

$a_n = A\omega^2$

$\boxed{a = A\omega^2\cos(\omega t+\phi+\pi)}$

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图



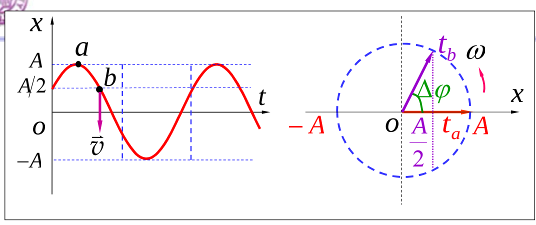
讨论 相位差：表示两个相位之差

（1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间.

$$x_1 = A\cos(\omega t_1+\varphi) \qquad x_2 = A\cos(\omega t_2+\varphi)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t_2+\varphi)-(\omega t_1+\varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$



$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad \Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi}T = \frac{1}{6}T$$

（2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异（解决振动合成问题）.

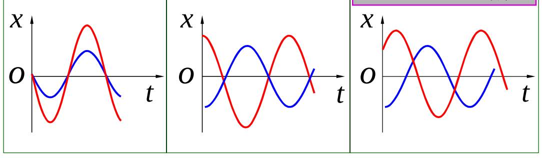
$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$

$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$

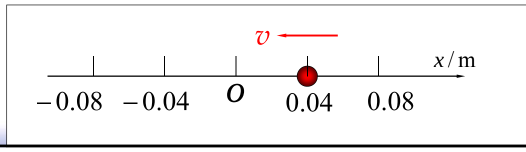
$\Delta\varphi = 0$ 同步　　$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相　　$\Delta\varphi$为其它 $\begin{cases}\text{超前}\\ \text{落后}\end{cases}$



例　一质量为0.01 kg的物体作简谐运动，其振幅为0.08 m，周期为4 s，起始时刻物体在x=0.04 m处，向ox轴负方向运动（如图）．试求

（1）t=1.0 s时，物体所处的位置和所受的力；

（2）由起始位置运动到x = −0.04 m处所需要的最短时间.



（1）t=1.0 s时，物体所处的位置和所受的力；

已知 $m = 0.01\,\text{kg}, A = 0.08\,\text{m}, T = 4\,\text{s}$

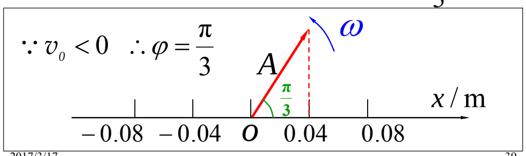
$t = 0, x = 0.04\,\text{m}, v_0 < 0$　求（1）$t = 1.0\,\text{s}, x, F$

解 $A = 0.08\,\text{m}$　$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\,\text{s}^{-1}$

$t = 0,\ x = 0.04\ \text{m}$

代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \dfrac{\pi}{3}$



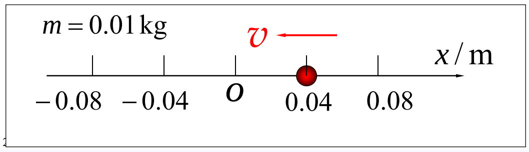
$\because \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore x = 0.08\cos(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{3})$

可求（1）$t = 1.0\,\text{s}, x, F$

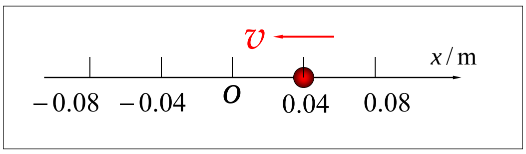
$t = 1.0\,\text{s}$　代入上式得　$x = -0.069\,\text{m}$

$F = -kx = -m\omega^2 x = 1.70\times10^{-3}\ \text{N}$



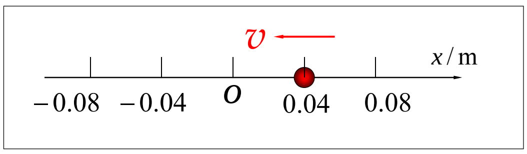
（2）由起始位置运动到x = −0.04 m处所需要的最短时间.

法一　设由起始位置运动到x= −0.04 m处所需要的最短时间为t

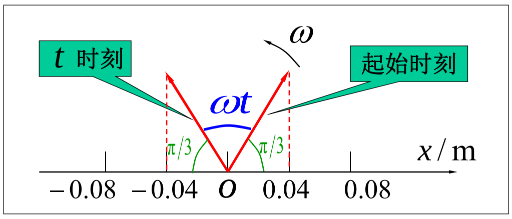


$$x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow -0.04 = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

$$t = \frac{\arccos(-\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{3}}{\pi/2} = \frac{2}{3} = 0.667\ \text{s}$$



法二



$$\omega t=\frac{\pi}{3}\qquad \omega=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\qquad t=\frac{2}{3}=0.667\ \mathrm{s}$$

四．简谐振动的能量

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$=\frac{1}{4}kA^2[1+\cos 2(\omega t+\varphi)]$$

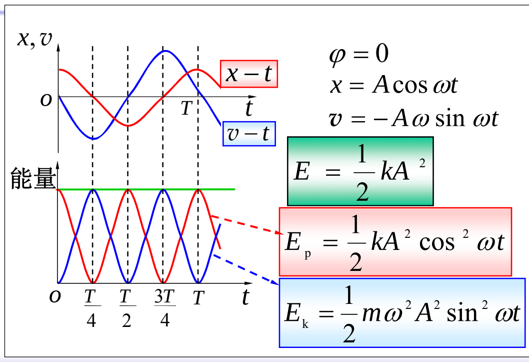
$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=\frac{1}{4}kA^2[1-\cos 2(\omega t+\varphi)]$$

$$E=E_p+E_k=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

简谐振子总机械能守恒

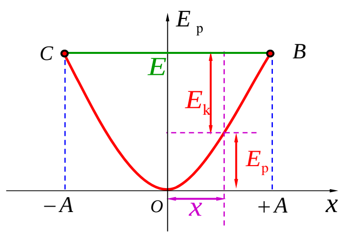
简 谐 运 动 能 量 图



简谐运动能量守恒，振幅不变

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

简谐运动势能曲线



能量守恒 $\xrightarrow{\text{导出}}$ 简谐运动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\mathrm{d}x}{\cancel{\mathrm{d}t}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$