概率论与数理统计

第三章　多维随机变量及其分布

练习：设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-x^2y}, & x\geq 1,\ y\geq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 C.

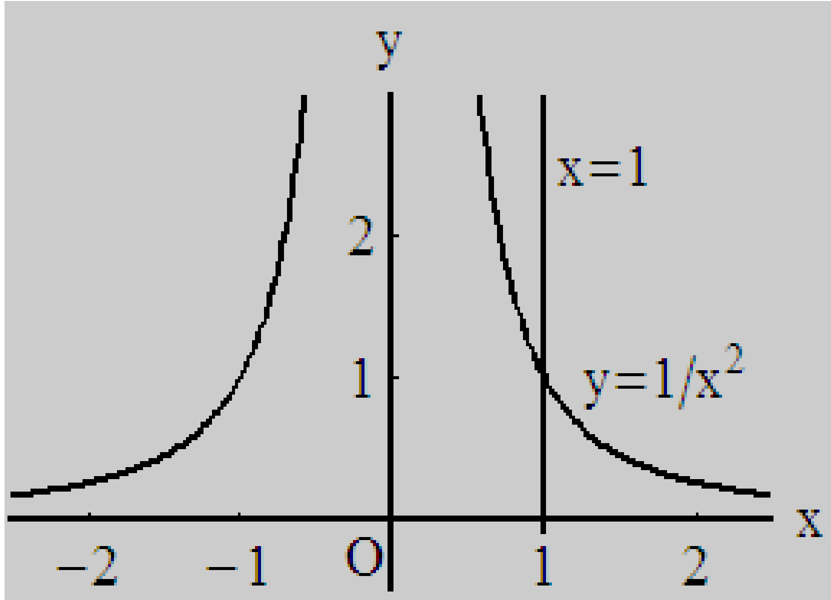
(2) 求概率 $P\{X^2Y>1\}$.

解 $1=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}Ce^{-x^2y}\mathrm{d}y$

$$=C\int_1^{+\infty}\frac{-1}{x^2}e^{-x^2y}\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}x$$

$$=C\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=C,\text{ 得 } C=1.$$

$$(2)\ P\{X^2Y>1\}=P\{Y>\frac{1}{X^2}\}$$



$$=\int_1^{+\infty}dx\int_{1/x^2}^{+\infty}e^{-x^2y}dy$$

$$=\int_1^{+\infty}-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y}\Big|_{1/x^2}^{+\infty}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-1}}{x^2}dx=-\frac{e^{-1}}{x}\Big|_1^{+\infty}=e^{-1}.$$

§2 边缘分布

- 边缘分布函数
- 离散型随机变量的边缘分布律
- 连续型随机变量的边缘分布
- 两个常用的分布

一、边缘分布函数

问题　已知(X,Y)的分布,如何确定X,Y 的分布?

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},\quad F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

(X,Y)关于X的边缘分布函数 .

定义　设 $F(x,y)$ 为随机变量 (X,Y) 的分布函数，

则　　$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$.

令 $y\to\infty$, 称 $P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)$

为随机变量 (X,Y) 关于X的边缘分布函数 .记为

$$F_X(x)=F(x,\infty).$$

同理令　$x\to\infty$,

$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty,Y\le y\}=P\{Y\le y\}$

为随机变量 (X,Y)关于Y 的边缘分布函数.

二、离散型随机变量的边缘分布律

定义　设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$

记

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\ i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\ j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律 .

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ j = 1,2,\cdots.$$

因此得离散型随机变量关于X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \le y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

例1 已知下列分布律，求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布 $\rightleftarrows$ 边缘分布

例2　一整数 N 等可能地在 $1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数 (注意1不是素数). 试写出 D 和 F 的联合分布律，并求边缘分布律.

解

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分布律：

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$1/10$	0	0	0	$1/10$
1	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
2	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

或将边缘分布律表示为：

D	1	2	3	4
p_k	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$

F	0	1	2
p_k	$1/10$	$7/10$	$2/10$

三、连续型随机变量的边缘分布

定义　对于连续型随机变量 (X,Y), 设它的概率密度为 $f(x,y)$, 由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x,$$

记

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

称其为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度．

同样, Y也是一个连续型随机变量,其概率密度为

$$F_Y(y) = F(\infty, y)$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

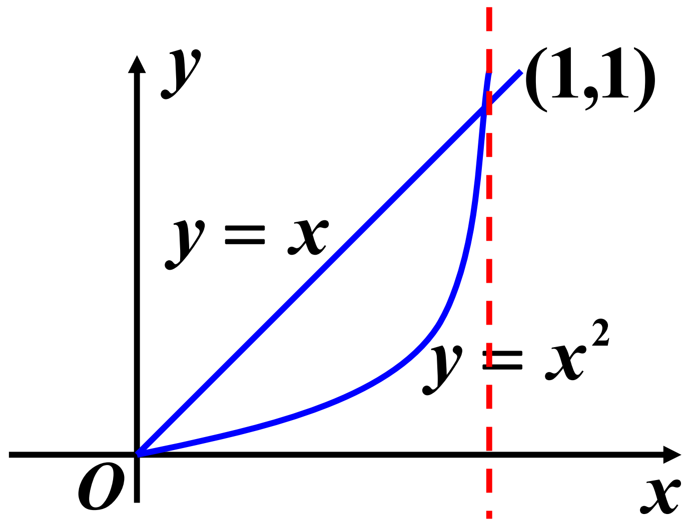
Y 的边缘概率密度.

例3 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2 \le y \le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$



当 $0 \le x \le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

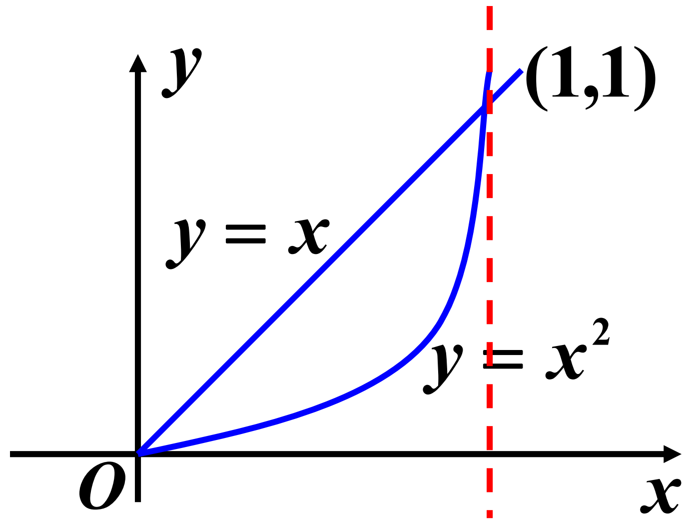
$$=\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}\,y$$

$$=6(x-x^2).$$

当 $x<0$ 或 $x>1$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=0.$$



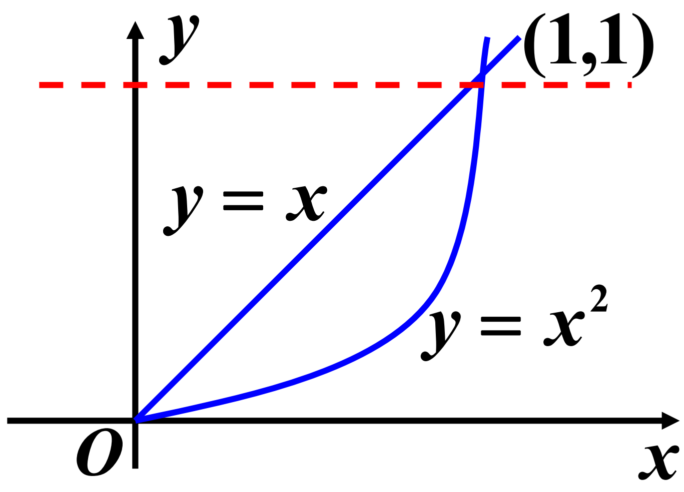
因而得 $f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $0 \le y \le 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x$$

$$= 6(\sqrt{y} - y),$$



当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0.$

得 $$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty,$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$ $-1<\rho<1.$ 我们称 (X,Y)为服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,$ σ_2,ρ 的二维正态分布．记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

由于 $$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}y,$$

令 $$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$

则有 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

即 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

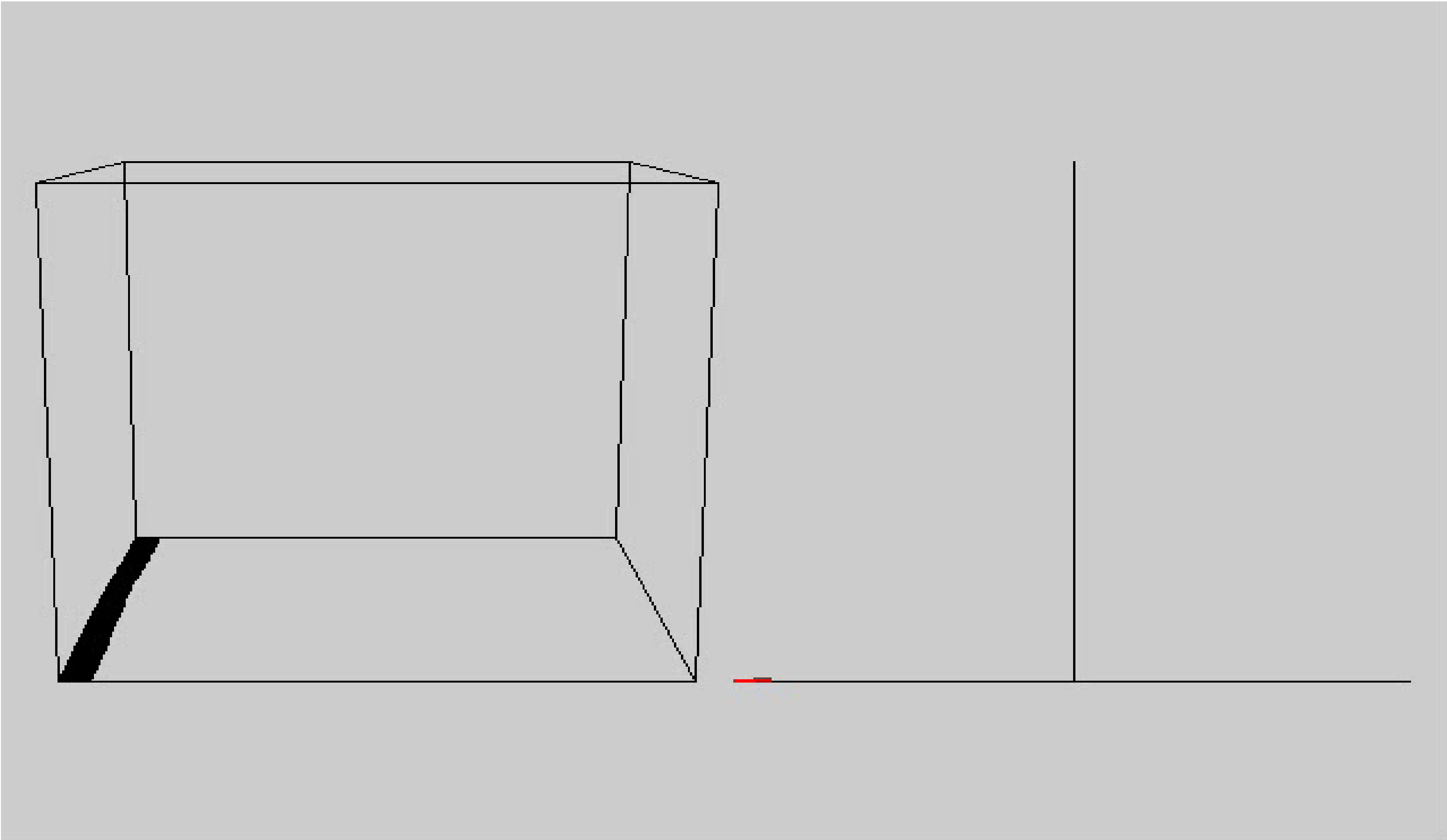
同理 $$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，

并且都不依赖于参数 ρ.

二维正态分布和其边缘分布的关系

单击图形播放/暂停　ESC键退出



请同学们思考

边缘分布均为正态分布的随机变量，其联合分布一定是二维正态分布吗?

答 不一定. 举一反例以示证明.

解答： 令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然, (X,Y) 不服从正态分布，但是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量, 其联合分布不一定是二维正态分布.

小 结

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布

作业：课后习题 6、7、9