1、行列式

1. n 行列式共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ **项**，可分解为 2^n 行列式；
2. 代数余子式的性质：

   ①、A_{ij} 和 a_{ij} 的大小无关；

   ②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；

   ③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为 $|A|$；
3. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$　　　　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
4. 设 n 行列式 D：

   将 D 上、下翻转或左右翻转，所得行列式为 D_1，则 $D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；

   将 D 顺时针或逆时针旋转 90°，所得行列式为 D_2，则 $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；

   将 D 主对角线翻转后（转置），所得行列式为 D_3，则 $D_3=D$；

   将 D 主副角线翻转后，所得行列式为 D_4，则 $D_4=D$；
5. 行列式的重要公式：

   ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；

   ②、副对角行列式：副对角元素的乘积 $\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

   ③、上、下三角行列式（$|◥|=|◣|$）：主对角元素的乘积；

   ④、$|◤|$ 和 $|◢|$：副对角元素的乘积 $\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

   ⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|$、$\begin{vmatrix}C & A\\ B & O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O & A\\ B & C\end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}|A||B|$

   ⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；

   ⑦、特征值；
6. 对于 n 阶行列式 $|A|$，恒有：$|\lambda E-A|=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k\lambda^{n-k}$，其中 S_k 为 k 阶主子式；
7. 证明 $|A|=0$ 的方法：

   ①、$|A|=-|A|$；

   ②、反证法；

   ③、构造齐次方程组 $Ax=0$，证明其有非零解；

   ④、利用秩，证明 $r(A)<n$；

   ⑤、证明 0 是其特征值；

2、矩阵

1. A 是 n 阶可逆矩阵：

   $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$（是非奇异矩阵）；

   $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$（是满秩矩阵）

   $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组线性无关；

   $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解；

   $\Leftrightarrow$ $\forall b\in R^n$，$Ax=b$ 总有唯一解；

   $\Leftrightarrow$ A 与 E 等价；

   $\Leftrightarrow$ A 可表示成若干个初等矩阵的乘积；

   $\Leftrightarrow$ A 的特征值全不为 0；

   $\Leftrightarrow$ A^TA 是正定矩阵；

   $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组是 R^n 的一组基；

   $\Leftrightarrow$ A 是 R^n 中某两组基的过渡矩阵；
2. 对于 n 阶矩阵 A：$AA^*=A^*A=|A|E$　**无条件恒**成立；
3. $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$　　　　$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$　　　　$(A^*)^T=(A^T)^*$

$(AB)^T = B^T A^T$ $\qquad (AB)^* = B^* A^*$ $\qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；
5. 关于分块矩阵的重要结论，其中均 A 、 B 可逆：

若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则：

Ⅰ、$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

Ⅱ、$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

②、$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（主对角分块）

③、$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；（副对角分块）

④、$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

⑤、$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m\times n$ 矩阵 A，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的：$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$；

   等价类：所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

   对于同型矩阵 A 、 B，若 $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \sim B$；
2. 行最简形矩阵：

   ①、只能通过初等行变换获得；

   ②、每行首个非 0 元素必须为 1；

   ③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；
3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

   ①、 若 $(A, E) \overset{r}{\sim} (E, X)$，则 A 可逆，且 $X = A^{-1}$；

   ②、对矩阵 (A,B) 做初等行变化，当 A 变为 E 时，B 就变成 $A^{-1}B$，即：$(A,B) \overset{c}{\sim} (E, A^{-1}B)$；

   ③、求解线形方程组：对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax = b$，如果 $(A,b) \overset{r}{\sim} (E, x)$，则 A 可逆，且 $x = A^{-1}b$；
4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

   ①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

   ②、$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，左乘矩阵 A，λ_i 乘 A 的各行元素；右乘，λ_i 乘 A 的各列元素；

   ③、对调两行或两列，符号 $E(i, j)$，且 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$，例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$；

   ④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$，且 $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$，例如：$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$；

   ⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$,且 $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$；

5. 矩阵秩的基本性质：

①、$0 \le r(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$；

②、$r(A^T) = r(A)$；

③、若 $A \sim B$，则 $r(A) = r(B)$；

④、若 P、Q 可逆，则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$；（**可逆矩阵不影响矩阵的秩**）

⑤、$\max(r(A), r(B)) \le r(A,B) \le r(A) + r(B)$；（※）

⑥、$r(A+B) \le r(A) + r(B)$；（※）

⑦、$r(AB) \le \min(r(A), r(B))$；（※）

⑧、如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB = 0$，则：（※）

Ⅰ、B 的**列**向量全部是齐次方程组 $AX = 0$ 解（转置运算后的结论）；

Ⅱ、$r(A) + r(B) \le n$

⑨、若 A、B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为**列矩阵（向量）$\times$ 行矩阵（向量）**的形式，再采用结合律；

②、型如 $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$；

注：Ⅰ、$(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项；

Ⅱ、$C_n^m = \dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$　　$C_n^0 = C_n^n = 1$

Ⅲ、组合的性质：$C_n^m = C_n^{n-m}$　　$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$　　$\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$　　$rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$；

③、利用特征值和相似对角化：

7. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩：$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$；

②、伴随矩阵的特征值：$\dfrac{|A|}{\lambda}$ $(AX = \lambda X, A^* = |A| A^{-1} \Rightarrow A^* X = \dfrac{|A|}{\lambda} X)$；

③、$A^* = |A| A^{-1}$、$|A^*| = |A|^{n-1}$

8. 关于 A 矩阵秩的描述：

①、$r(A) = n$，A 中有 n 阶子式不为 0，$n+1$ 阶子式全部为 0；（两句话）

②、$r(A) < n$，A 中有 n 阶子式全部为 0；

③、$r(A) \ge n$，A 中有 n 阶子式不为 0；

9. 线性方程组：$Ax = b$，其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，则：

①、m 与方程的个数相同，即方程组 $Ax = b$ 有 m 个方程；

②、n 与方程组得未知数个数相同，方程组 $Ax = b$ 为 n 元方程；

10. 线性方程组 $Ax = b$ 的求解：

①、对增广矩阵 B 进行初等行变换（**只能使用初等行变换**）；

②、齐次解为对应齐次方程组的解；

③、特解：自由变量赋初值后求得；

11. 由 n 个未知数 m 个方程的方程组构成 n 元线性方程：

①、$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_n \end{cases}$；

②、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=b$（向量方程，$A$ 为 $m\times n$ 矩阵，m 个方程，n 个未知数）

③、$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$（全部按列分块，其中 $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$）；

④、$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\beta$（线性表出）

⑤、有解的充要条件：$r(A)=r(A,\beta)\le n$（n 为未知数的个数或维数）

4、向量组的线性相关性

1. m 个 n 维列向量所组成的向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$；

   m 个 n 维行向量所组成的向量组 B：$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$ 构成 $m\times n$ 矩阵 $B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$；

   含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 有、无非零解；（齐次线性方程组）

   ②、向量的线性表出 $\Leftrightarrow Ax=b$ 是否有解；（线性方程组）

   ③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$ 是否有解；（矩阵方程）

3. 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解；(P_{101} 例 14)

4. $r(A^TA)=r(A)$；(P_{101} 例 15)

5. n 维向量线性相关的几何意义：

   ①、α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$；

   ②、α,β 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha,\beta$ 坐标成比例或共线（平行）；

   ③、α,β,γ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha,\beta,\gamma$ 共面；

6. 线性相关与无关的两套定理：

   若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 必线性相关；

   若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 必线性无关；（向量的个数加加减减，二者为对偶）

   若 r 维向量组 A 的每个向量上添上 $n-r$ 个分量，构成 n 维向量组 B：

   若 A 线性无关，则 B 也线性无关；反之若 B 线性相关，则 A 也线性相关；（向量组的维数加加减减）

   简言之：无关组延长后仍无关，反之，不确定；

7. 向量组 A（个数为 r）能由向量组 B（个数为 s）线性表示，且 A 线性无关，则 $r\le s$ (二版 P_{74} **定理 7**)；

   向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则 $r(A)\le r(B)$；（P_{86} **定理 3**）

   向量组 A 能由向量组 B 线性表示

   $\Leftrightarrow AX=B$ 有解；

   $\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$（$P_{85}$ **定理 2**）

   向量组 A 能由向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$（$P_{85}$ **定理 2 推论**）

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$；

   ①、矩阵行等价：$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow PA=B$（左乘，$P$ 可逆）$\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

   ②、矩阵列等价：$A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow AQ=B$（右乘，$Q$ 可逆）；

   ③、矩阵等价：$A\sim B\Leftrightarrow PAQ=B$（$P$、$Q$ 可逆）；

9. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$：

   ①、若 A 与 B 行等价，则 A 与 B 的行秩相等；

   ②、若 A 与 B 行等价，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；

   ③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；

   ④、矩阵 A 的行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$，则：

    ①、C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵；

②、$\boldsymbol{C}$ 的行向量组能由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示，$\boldsymbol{A}^T$ 为系数矩阵；（转置）

11. 齐次方程组 $\boldsymbol{Bx}=0$ 的解一定是 $\boldsymbol{ABx}=0$ 的解，**考试中可以直接作为定理使用，而无需证明**；

①、$\boldsymbol{ABx}=0$ 只有零解 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{Bx}=0$ 只有零解；

②、$\boldsymbol{Bx}=0$ 有非零解 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{ABx}=0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $\boldsymbol{B}_{n\times r}:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}_{n\times s}:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性表示为：（$\boldsymbol{P}_{110}$ **题 19 结论**）

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s)\boldsymbol{K} \quad (\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK})$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为 $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}$，且 $\boldsymbol{A}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{B}$ 组线性无关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{r}$；（**$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 的列向量组具有相同线性相关性**）

（必要性：$\because \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{AK})\le\boldsymbol{r}(\boldsymbol{K}),\boldsymbol{r}(\boldsymbol{K})\le\boldsymbol{r},\therefore\boldsymbol{r}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{r}$；充分性：反证法）

注：当 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}$ 时，$\boldsymbol{K}$ 为方阵，可当作定理使用；

13. ①、对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，存在 $\boldsymbol{Q}_{n\times m}$，$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{E}_m$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{Q}$ 的列向量线性无关；（$\boldsymbol{P}_{87}$）

②、对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，存在 $\boldsymbol{P}_{n\times m}$，$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E}_n$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{P}$ 的行向量线性无关；

14. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_s$，使得 $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$ 成立；（定义）

$\Leftrightarrow (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解，即 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<\boldsymbol{s}$，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

15. 设 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $\boldsymbol{r}$，则 $\boldsymbol{n}$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解集 $\boldsymbol{S}$ 的秩为：$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{S})=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$；

16. 若 η^* 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系，则 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；（$\boldsymbol{P}_{111}$ **题 33 结论**）

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$（定义），性质：

①、$\boldsymbol{A}$ 的列向量都是单位向量，且两两正交，即 $\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=\begin{cases}1 & \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\\ 0 & \boldsymbol{i}\ne\boldsymbol{j}\end{cases}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2,\cdots\boldsymbol{n})$；

②、若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$ 也为正交阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$；

③、若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 正交阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵；

注意：求解正交阵，千万不要忘记**施密特正交化**和**单位化**；

2. 施密特正交化：$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$

$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$；

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\cdot\boldsymbol{b}_1$$

………

$$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\cdot\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\cdot\boldsymbol{b}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{b}_{r-1}]}\cdot\boldsymbol{b}_{r-1};$$

3. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

对于**实对称阵**，不同特征值对应的特征向量正交；

4. ①、$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换得到 $\boldsymbol{B}$；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 同型；

②、$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，其中可逆；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Bx}$ 有相同的正、负惯性指数；

③、$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$；

5. 相似一定合同、合同未必相似；

若 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

6. $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为二次型矩阵；

7. $\boldsymbol{n}$ 元二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 为正定：

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 $\boldsymbol{n}$；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{E}$；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的所有特征值均为正数；

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于 0；

$\Rightarrow \boldsymbol{a}_{ii}>0,|\boldsymbol{A}|>0$；**(必要条件)**