

电磁轨道炮

金属熔块如铜块
导电导轨
弹块
电枢
 $I \sim 10^6 \text{ A}$

比普通枪弹的速度快2至3倍，重量只有普通炮弹的十分之一，不会产生强大的冲击波和弥漫的烟雾，因而具有良好的隐蔽性

弹块 $\bar{a} \sim 10^6 \text{ m/s}^2$ ，在1ms内，速度可达10km/s

9.2 磁场的规律

1. 基本定律-电流元产生磁场

(1) 毕 — 萨定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ — 真空的磁导率

电流元不在自身方向上激发磁场。

电流元的磁感应线在垂直于电流元的平面内，是圆心在电流元轴线上的一系列同心圆。磁感应线绕向与电流流向成右手螺旋关系。

(2) 叠加原理 $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$, $\vec{B} = \int d\vec{B}$

例题1: 直线电流的磁场。

$$B = \int_L \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}$$

因为各电流元产生的磁场方向相同，磁场方向垂直纸面向里所以只求标量积分。磁场方向垂直纸面向里。

$\therefore l = -r \cos \theta \quad \therefore l = -r_0 \cot \theta$
 $\therefore r_0 = r \sin \theta \quad \therefore dl = r_0 d\theta / \sin^2 \theta$

$$B = \int_L \frac{\mu_0 I \cdot r_0 d\theta \cdot \sin \theta}{4\pi \sin^2 \theta \cdot r_0^2 / \sin^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cdot d\theta$$

$$B = \int_L \frac{\mu_0 I \cdot r_0 d\theta \cdot \sin \theta}{4\pi \sin^2 \theta \cdot r_0^2 / \sin^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

磁感应强度 \vec{B} 的方向，与电流成右手螺旋关系，拇指表示电流方向，四指给出磁场方向。

当 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ 时，

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

(2) 对于任意形状直导线

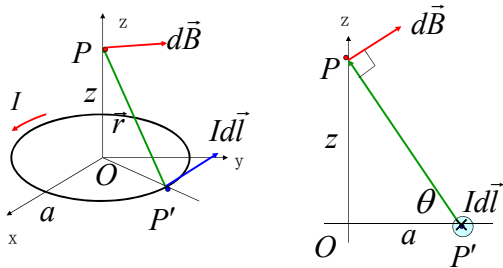
$B_1 = 0$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 90^\circ - \cos 180^\circ)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$



【例2】求环状电流轴线上任意点P的磁场



2017/4/24

40



(1) 微电流源的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

分析场的对称性只沿Z轴

(2) 沿z方向的投影

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos \theta}{r^2}$$

2017/4/24

41



(3) 积分

$$\begin{aligned} B_z &= \int_C dB_z = \int_C \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi r^2} dl \\ &= \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi r^2} \int_C dl = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi r^2} 2\pi a \\ &= \frac{\mu_0 I \cos \theta}{2r^2} a = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

2017/4/24

42

$$B_z = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + r_o^2)^{3/2}}$$

得出圆电流环，在其轴上一点的磁场，磁场方向与电流满足右手螺旋法则。

两种特殊的情况：

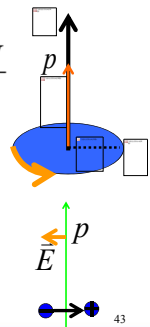
$r_o = 0$ 圆电流环中心的场强 $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$
 $r_o = \infty$ 轴上无穷远的场强为

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 \vec{P}_m}{4\pi r_o^3} \quad \text{磁矩 } \vec{P}_m = I\pi R^2 \hat{S}$$

[附]: 电偶极子在中垂线上无穷远处的电场强度:

$$\vec{E} = \frac{-\vec{P}_e}{4\pi\epsilon_0 r_o^3}$$

$$\text{电偶极矩 } \vec{P}_e = q\vec{l}$$



2017/4/24

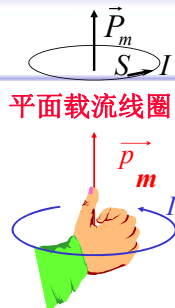
43

磁矩

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \quad (z \gg a) \\ &= \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi z^3} \\ \vec{P}_m &= IS\vec{n} \end{aligned}$$

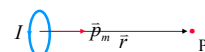
如果 场点距平面线圈的距离很远，这样的平面载流线圈称为**磁偶极子**

磁偶极子的场用磁偶极矩 \vec{P}_m 表示



2017/4/24

44



$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I\pi R^2}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 P_m}{2\pi r^3}$$

若考虑方向，则可写成

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi r^3}$$

结论：磁偶极子的场沿磁矩方向

2017/4/24

45

△电磁学中物质分子的模型

电场时:电偶极子 电偶极矩 $\vec{p}_e \xrightarrow{- \rightarrow +}$
 磁场时:磁偶极子 磁偶极矩 $\vec{p}_m \circ \rightarrow$

场量的表达形式相同

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [-\vec{p}_e + 3(\vec{p}_e \cdot \hat{r})\hat{r}]$$

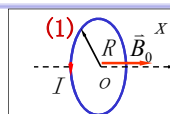
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [-\vec{p}_m + 3(\vec{p}_m \cdot \hat{r})\hat{r}]$$

2017/4/24

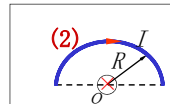
46

对带电圆环中心点产生的磁场强度结果推广

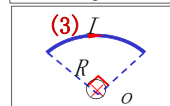
推广



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$



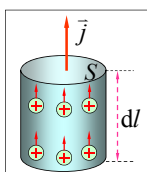
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

2017/4/24

47



运动电荷的磁场



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$Id\vec{l} = \vec{j}Sdl = nSdlq\vec{v}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nSdlq\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dN = nSdl$$

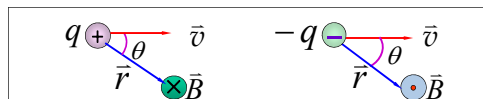
2017/4/24

48

运动电荷的磁场

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

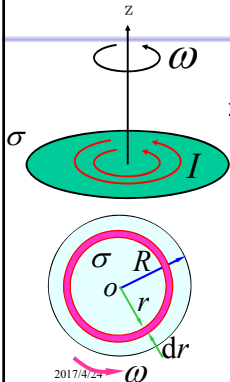
适用条件 $v \ll c$



2017/4/24

49

[例3] 求绕轴旋转的带电圆盘轴线上的磁场



$$dI = \sigma \omega r dr$$

利用带电圆环的结果:

$$dB_z = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma r^3 dr}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

2017/4/24

50



对r积分

$$B_z = \int_0^a \frac{\mu_0 \omega \sigma r^3 dr}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{z^2 + r^2}} \Big|_0^a$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left(\frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2z \right)$$

2017/4/24

51

例4: 载流螺旋管(Solenoid)在其轴上的磁场

求半径为 R , 总长度 L , 单位长度上的匝数为 n 的螺线管在其轴线上一点的磁场?

解: 长度为 dl 内的各匝圆线圈的总效果, 是一匝圆电流线圈的 ndl 倍。

选坐标如图示 $\therefore dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 In \cdot dl}{[R^2 + (x-l)^2]^{3/2}}$ (带电圆环结果)

$$\frac{R^2}{[R^2 + (x-l)^2]^{3/2}} = \frac{\sin^3 \beta}{R}$$

选坐标如图示

$x-l = R \cot \beta$

$dl = \frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta$

又 $\therefore \frac{R^2}{[R^2 + (x-l)^2]^{3/2}} = \frac{\sin^3 \beta}{R}$

$\therefore B = \frac{\mu_0}{2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{R^2 In \cdot dl}{[R^2 + (x-l)^2]^{3/2}}$

$\therefore B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta \cdot d\beta$

载流螺旋管在其轴上的磁场, 磁场方向与电流满足右手螺旋法则。

$\therefore B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$

$\beta_1 = 0, \beta_2 = \pi$

$\therefore B = \mu_0 n I$

在管端口处, 磁场等于中心处的一半。

在距管轴中心约七个管半径处, 磁场就几乎等于零了。

作业

➤ P430 9.4, 9.6, 9.7

2. 基本性质 (基本定理)

(1) 磁通连续原理 (\vec{B} 的高斯定理)

$d\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 > 0$ $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

$d\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 < 0$

这说明 \vec{B} 线闭合, 无头无尾, 也就是不存在单独磁荷 (磁单极子)。

因此, 磁场是不发散的 (无源场):

散度 $\text{div } \vec{B} \equiv \nabla \cdot \vec{B} = 0$

***电场仅有散度 (而无旋度), 而磁场仅有旋度 (而无散度)**

*磁单极 (magnetic monopole):

根据电和磁的对称性:

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0 \rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_m$ q_m — 磁荷

1931, Dirac 预言了磁单极子的存在。

量子理论给出电荷 q 和磁荷 q_m 存在关系:

$q \cdot q_m = nh, (n=1, 2, 3 \dots), h$ 是普朗克常量

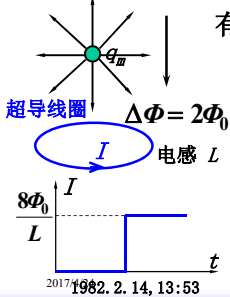
\therefore 只要存在磁单极子就能证明电荷的量子化。

磁单极子质量: $m = 2 \times 10^{-11} \text{ g} \approx 10^{16} m_p$ 。

这么大质量的粒子尚无法在加速器中产生。



人们希望从宇宙射线中捕捉到磁单极子。
斯坦福大学Cabrera等人的研究组利用超
导线圈中磁通的变化测量来自宇宙的磁单极子。



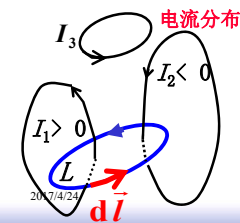
有磁单极子穿过时，感应电流

$$I = 2\Phi_0 / L$$

实验中采用了直径5cm的
铌线圈4匝。经过151天的连
续等待，1982. 2. 14自动记录仪
记录到了预期电流的跃变，
但以后再未观察到此现象。

2009年德国亥姆霍兹联合会研究中心的研究人员在德国德累斯顿大学、圣安德鲁斯大学、拉普拉塔大学及英国牛津大学同事的协作下，在0.6K到2K温度条件下，首次观测到了磁单极子的存在，以及这些磁单极子在一种实际材料中出现的过程。该研究成果发表在9月3日出版的《科学》杂志上。

(2) 安培环路定理



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$$

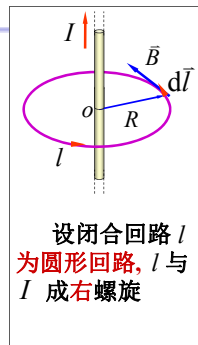
在真空的恒定磁场中，磁感强度 \vec{B} 沿任一闭合路径的积分的值，等于 μ_0 乘以该闭合路径所穿过的各电流的代数和。

一 安培环路定理的证明

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



2017/4/24

60

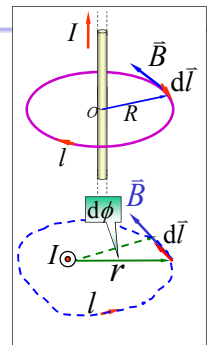
若回路绕向为逆时针

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = -\mu_0 I$$

对任意形状的回路

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



2017/4/24

61

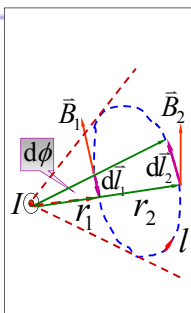
电流在回路之外

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



2017/4/24

62

多电流情况

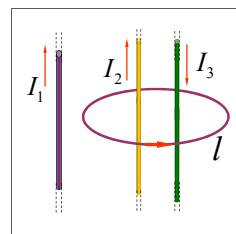
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_3)$$

推广：

安培环路定理

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$



2017/4/24

63

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

在真空的恒定磁场中，磁感强度 \vec{B} 沿任一闭合路径的积分的值，等于 μ_0 乘以该闭合路径所穿过的各电流的代数和。

注意

1. 电流 I 正负的规定： I 与 L 成右螺旋时， I 为正；反之为负。

2017/4/24

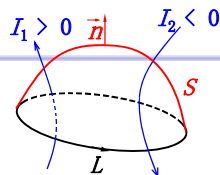
64

几点说明：

2. 安培环路定理只适用于稳恒电流（闭合或伸展到 ∞ ）；

3. $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 中的 \vec{B} 是全空间电流的贡献；

4. $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$ 说明磁场为非保守场（涡旋场）。



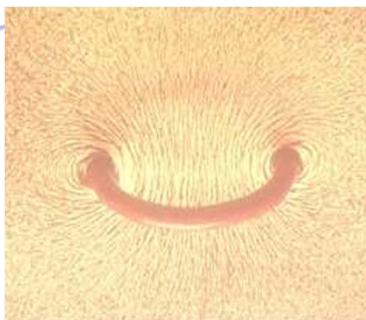
2017/4/24

65

各种典型的磁感应线的分布：



直线电流的磁感线



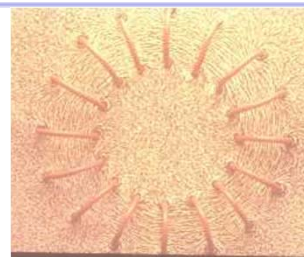
圆形电流的磁感线

2017/4/24

66



直螺线管电流的磁感线



环形螺线管电流的磁感线

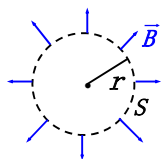
2017/4/24

67

9.3 应用基本定理分析磁场举例

[例1] 证明不存在球对称辐射状磁场： $\vec{B} = f(r)\vec{e}_r$

证：选半径为 r 的球面为高斯面 S ，由题设有：



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = f(r) \cdot 4\pi r^2 \neq 0$$

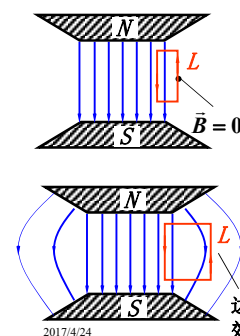
这与 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 矛盾。

不存在 $\vec{B} = f(r)\vec{e}_r$ 形式的磁场。

2017/4/24

68

[例2] 证明不存在突然降到零的磁场。



证：选图示的闭合回路 L ，
应有： $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}} = 0$ 。

但图示情况 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$

所以不存在这样的磁场。

实际情况应有边缘效应。

以保证 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

2017/4/24

69



[例3]

* 求无限长圆柱面电流的磁场分布(半径为 R)

★分析场结构：有轴对称性

★以轴上一点为圆心，取垂直于轴的平面内半径为 r 的圆为安培环路

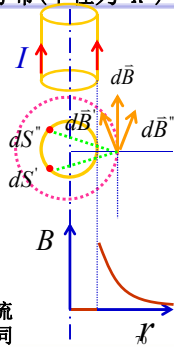
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

$$\therefore B = 0 \quad r \leq R$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r \geq R$$

无限长圆柱面电流外面的磁场与电流都集中在轴上的直线电流的磁场相同

2017/4/24



* 求载流无限长直螺线管内任一点的磁场
一个单位长度上

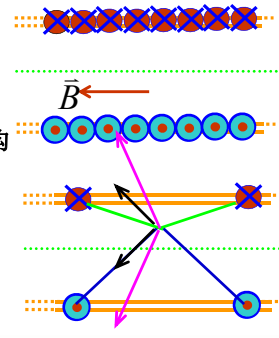
有 n 匝的无限长直螺线管。由于是密绕， \therefore 每匝视为圆线圈。

★由对称性分析场结构

a. 只有轴上的分量；

b. 因为是无限长，在与轴等距离的平行线上磁感应强度相等。

2017/4/24



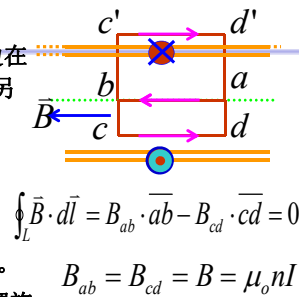
71



★取 L 矩形回路， ab 边在轴上，边 cd 与轴平行，另两个边垂直于轴。

因为无垂直于轴的磁场分量，又无电流穿过 L 回路，根据安培环路定理及轴上磁场得出，管内任一点的磁感应强度。

其方向与电流满足右手螺旋。



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{ab} \cdot \overline{ab} - B_{cd} \cdot \overline{cd} = 0$$

$$B_{ab} = B_{cd} = B = \mu_0 n I$$

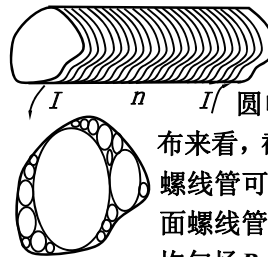
同理可证，无限长直螺线管外任一点的磁场为零。

选矩形回路 $c'd'$ 边在管外。同学自行证明。

2017/4/24

72

思考 截面形状任意的密绕长直螺线管内外的磁场如何？



答：螺线管的每圈电流都可看成是无数大大小小的圆电流叠加而成。故从电流分布来看，截面形状任意的密绕长直螺线管可看成无数大大小小的圆截面螺线管叠加而成。所以管内仍是均匀场 $B = \mu_0 n I$ ，管外场强仍为零。

思考 对截面任意的短粗螺线管能否这样处理？

2017/4/24