第2章 分治策略
（Divide and Conquer）

2.1 分治策略的基本思想

2.1.1 两个熟悉的例子

2.1.2 分治算法的一般性描述

2.2 分治算法的分析技术

2.3 改进分治算法的途径

2.3.1 通过代数变换减少子问题个数

2.3.2 利用预处理减少递归内部的计算量

2.4 典型实例

2.4.1 快速排序算法

2.4.2 选择问题

2.4.3 $n-1$次多项式在全体$2n$次方根上的求值

2.1.1 两个熟悉的例子

二分检索

算法2.1 BinarySearch(T, x)

输入：排好序数组T，数 x

输出：j // 如果 x 在 T 中，j为下标；否则为0

1. $l \leftarrow 1$; $r \leftarrow n$
2. while $l \le r$ do
3. $\quad m \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor$
4. $\quad$ if $T[m]=x$ then return m // x恰好等于中位元素
5. $\quad$ else if $T[m]>x$ then $r \leftarrow m-1$
6. $\qquad$ else $l \leftarrow m+1$
7. return 0

二分归并排序 MergeSort （见第1章）

时间复杂度分析

二分检索最坏情况下时间复杂度 $W(n)$ 满足

$$\begin{cases} W(n) = W\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 \\ W(1) = 1 \end{cases}$$

可以解出 $W(n)=\lfloor \log n \rfloor + 1$.

二分归并排序最坏情况下时间复杂度 $W(n)$ 满足

$$\begin{cases} W(n) = 2W\left(\dfrac{n}{2}\right) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

可以解出 $W(n)=n\log n - n + 1$.

2.1.2 分治算法的一般性描述

分治算法 **Divide-and-Conquer(P)**

P是待求解的问题，**|P|**是问题输入规模

1. **if** $|P| \le c$ **then** $S(P)$. //若问题规模不超c，直接求解
2. **divide** P **into** $P_1, P_2, \ldots, P_k$ //否则将P归约为k个独立子问题
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** k //递归或迭代的归约
4. $\quad y_i \leftarrow$ **Divide-and-Conquer**(P_i)
5. **Return Merge**$(y_1, y_2, \ldots, y_k)$

算法时间复杂度的递推方程

$$\begin{cases} W(n) = W(|P_1|) + W(|P_2|) + \ldots + W(|P_k|) + f(n) \\ W(c) = C \end{cases}$$

一般原则：子问题均匀划分、递归处理.

2.2 分治算法的分析技术

分治策略的算法分析工具: 递推方程

两类递推方程:

$$T(n)=\sum_{i=1}^{k} a_i T(n-i)+f(n)$$

$$T(n)=aT\left(\frac{n}{b}\right)+d(n)$$

例子:

Hanoi塔，$W(n)=2W(n-1)+1$

二分检索，$W(n)=W(n/2)+1$

求解方法:

第一类方程: 直接迭代法、换元法、递归树、尝试法

第二类方程: 直接迭代法、递归树、主定理

利用主定理求解的常见形式

方程 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$，$a \geq 1, b > 1$为常数.

当$f(n)$为常数时，

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \quad \boxed{\text{主定理第一种情况}} \\ \Theta(\log n) & a = 1 \quad \boxed{\text{主定理第二种情况}} \end{cases}$$

当$f(n) = cn$时，

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n) & a < b \quad \boxed{\text{主定理第三种情况}} \\ \Theta(n \log n) & a = b \quad \boxed{\text{主定理第二种情况}} \\ \Theta(n^{\log_b a}) & a > b \quad \boxed{\text{主定理第一种情况}} \end{cases}$$

例2.1 芯片测试

条件：有*n* 片芯片，（好芯片至少比坏芯片多1片).
问题：使用最少测试次数，从中挑出1片好芯片.

对芯片*A*与*B*测试，结果分析如下：

A 报告	*B* 报告	结论
*B*是好的	*A*是好的	*A,B* 都好或 *A,B* 都坏
*B*是好的	*A*是坏的	至少一片是坏的
*B*是坏的	*A*是好的	至少一片是坏的
*B*是坏的	*A*是坏的	至少一片是坏的

算法思想：两两一组测试，淘汰后芯片进入下一轮.
如果测试结果是情况1，那么*A*、*B*中留1片，丢1片；
如果是后三种情况，则把*A*和*B*全部丢掉.

判定芯片A 的好坏

问题：给定芯片A，判定A的好坏

方法：用其他 n-1片芯片对 A 测试 .

n=7：好芯片数 ≥ 4.

A 好，6个报告中至少 3 个 报“好 ”

A 坏，6个报告中至少 4 个 报“坏 ”

n是**奇数**：好芯片数 ≥ $(n+1)/2$.

A 好，至少有 $(n-1)/2$个 报 “好 ”

A 坏，至少有 $(n+1)/2$个 报 告“坏 ”

结论：至少一半报“好”，A是好芯片， 超过一半报“坏”，A是坏芯片.

判定芯片A 的好坏

n=8：好芯片数 ≥ 5.

A 好，7个报告中至少 4 个 报 “好 ”

A 坏，7个报告中至少 5 个 报 “坏 ”

n是偶数：好芯片数 ≥ n/2+1.

A 好，至少有 n/2个 报 告 “好 ”

A 坏，至少有 n/2+1个 报 告 “坏 ”

结论：n-1 份报告中，至 少 一 半 报 “好”, 则 A 为好芯片；超 过 一 半 报 “坏”, 则 A为坏芯片

蛮力方法挑出1片好芯片：最坏情况需要判断n/2个芯片, $W(n)=(n-1)+(n-2)+\ldots+(n/2-1)=O(n^2)$

分治算法

命题2.1 当n是偶数时，在上述规则下，经过一轮淘汰，剩下的好芯片比坏芯片至少多1片.

证 设A与B都是好芯片有 i 组，A与B一好一坏有 j 组，A与B都坏有 k 组，淘汰后，好芯片数 i，坏芯片数至多 k

$$2i + 2j + 2k = n$$

$$2i+j > 2k+j \Rightarrow i > k$$

注：当n是奇数时，用其他芯片测试轮空芯片. 如果轮空芯片是好的，算法结束；否则淘汰轮空芯片.

每轮淘汰后，芯片数至少减半，时间复杂度是：

$$\begin{cases} W(n) = W\left(\dfrac{n}{2}\right) + O(n) & n > 3 \\ W(n) = 1 & n \le 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W(n) = O(n)$$

伪码描述

算法2.3 Test(n)

1. $k \leftarrow n$
2. **while** k >3 **do**
3. 将芯片分成$\lfloor k/2 \rfloor$组 // 如有轮空芯片，特殊处理
4. **for** i =1 **to** $\lfloor k/2 \rfloor$ **do**
   if 2片好，则任取1片留下
   else 2片同时丢掉
5. $k \leftarrow$剩下的芯片数
6. **if** k =3
   then 任取2片芯片测试
   if 1好1坏 **then** 取没测的芯片
   else 任取1片被测芯片
7. **if** k =2 **or** 1 **then** 任取1片

例2.2 幂乘计算

问题：设a是给定实数，计算 a^n，n为自然数

传统算法: $\Theta(n)$

分治法

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \times a^{n/2} & n \text{ 为偶数} \\ a^{(n-1)/2} \times a^{(n-1)/2} \times a & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$W(n) = W(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow W(n) = \Theta(\log n) .$$

计算 Fibonacci 数

Fibonacci 数

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

满足 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

增加F_0=0，得到数列 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

通常算法：从 $F_0, F_1, \ldots,$ 根据定义陆续相加，时间为$\Theta(n)$

定理2.1 设 $\{F_n\}$为 Fibonacci 数构成的数列，那么

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

易用归纳法证明

算法：令矩阵 $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，用分治法计算 M^n

时间复杂度 $T(n)=\Theta(\log n)$.

2.3 改进分治算法的途径

改进途径1：减少子问题个数

- 适用于：子问题个数多，划分和综合工作量不太大的算法。

$$W(n) = aW(n/b) + f(n),$$

当 a 较大, b较小, $f(n)$不大:

$$W(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

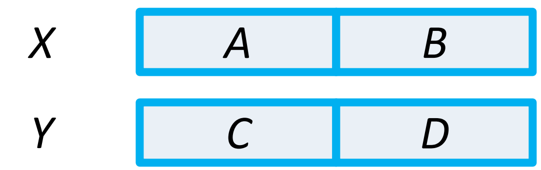
- 减少a是降低函数$W(n)$的阶的途径：利用子问题依赖关系，用某些子问题解的代数表达式表示另一些子问题的解，减少独立计算子问题个数.

- 综合解的工作量可能会增加，但增加的工作量不影响 $W(n)$的阶.

2.3 改进分治算法的途径

2.3.1 通过代数变换 减少子问题个数

例2. 3 位乘问题



设X ,Y 是 n 位二进制数， $n = 2^k$, 求 XY.

一般分治法 令$X = A2^{n/2} + B$, $Y = C2^{n/2} + D$.

$$XY = AC\,2^n + (AD + BC)\,2^{n/2} + BD$$

$$W(n) = 4W(n/2) + cn, \quad W(1) = 1$$

$$W(n) = O(n^2)$$

代数变换 $AD + BC = (A - B)(D - C) + AC + BD$

$$W(n) = 3\,W(n/2) + cn, \quad W(1) = 1$$

$$W(n) = O(n^{\log 3}) = (n^{1.59})$$

矩阵乘法

例2.4 A,B 为两个n 阶矩阵，$n=2^k$, 计算 $C=AB$.

传统算法 $W(n)=O(n^3)$

分治法 将矩阵分块，得

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \qquad C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \qquad C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

递推方程 $W(n) = 8\,W(n/2) + cn^2$

$W(1) = 1$

解 $W(n) = O(n^3)$.

Strassen 矩阵乘法

变换方法：

$$M_1 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$
$$M_2 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$
$$M_3 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$
$$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$
$$M_5 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$
$$M_6 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$
$$M_7 = (A_{11} - A_{21})(B_{11} + B_{12})$$

$$C_{11} = M_5 + M_4 - M_2 + M_6$$
$$C_{12} = M_1 + M_2$$
$$C_{21} = M_3 + M_4$$
$$C_{22} = M_5 + M_1 - M_3 - M_7$$

时间复杂度：

$$W(n) = 7W\left(\frac{n}{2}\right) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2$$
$$W(1) = 1$$

$$W(n) = O(n^{\log_2 7})$$
$$= O(n^{2.8075})$$

目前已知矩阵乘法最好上界：

Coppersmith–Winograd算法：$O(n^{2.376})$

2.3.2 利用预处理减少递归内部操作

改进途径2：增加预处理，减小$f(n)$.

算法中的处理尽可能提到递归外面作为预处理.

例2.5 平面点对问题

输入：集合S 中有n 个点，$n>1$，

输出：所有的点对之间的最小距离.

通常算法：$C(n,2)$个点对计算距离，比较最少需$O(n^2)$时间

分治策略：子集P 中的点划分成两个子集 P_L和 P_R

$$|P_L| = \left\lceil \frac{|P|}{2} \right\rceil \qquad |P_R| = \left\lfloor \frac{|P|}{2} \right\rfloor$$

平面最邻近点对算法

MinDistance(P,X,Y)

输入：n 个点的集合P, X 和Y 分别为横、纵坐标数组

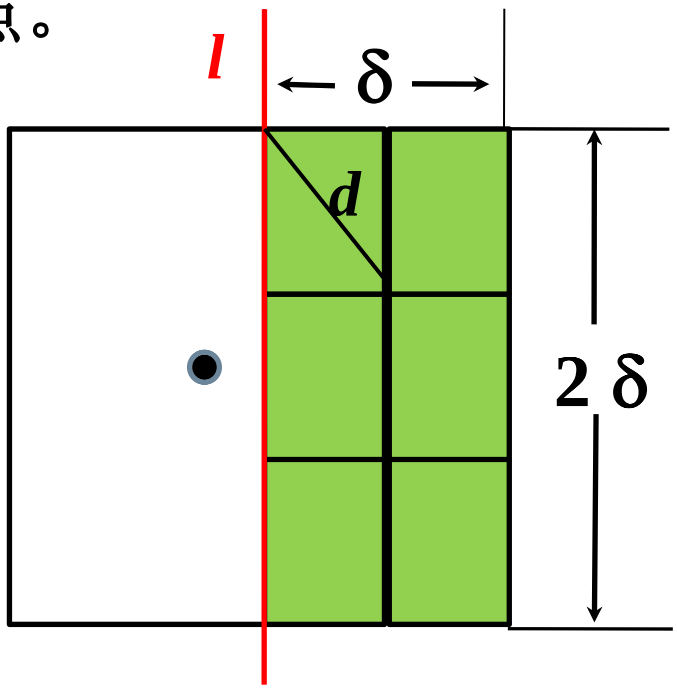
输出：最近的两个点及距离

1. 如果P 中点数小于等于3，则直接计算其中的最小距离
2. 排序X,Y
3. 做垂直线 l 将P划分为P_L和P_R，P_L的点在 l 左边，P_R的点在 l 右边
4. MinDistance(P_L,X_L,Y_L); $\delta_L = P_L$中的最小距离
5. MinDistance(P_R,X_R,Y_R); $\delta_R = P_R$中的最小距离
6. $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$
7. 对于在l 线左边距离δ内每个点， 检查右边是否有与之距离小于δ的点，如果存在则将δ修改为新值

跨边界的最邻近点

第7步分析：先考虑左侧距离*l* 小于δ的一个点，*l*右侧最多需比较几个点。

$$d = \sqrt{(\delta/2)^2 + (2\delta/3)^2}$$
$$= \sqrt{\delta^2/4 + 4\delta^2/9}$$
$$= \sqrt{25\delta^2/36} = 5\delta/6$$



右边每个方格至多1个点，左侧每个点至多比较对面的6个点。

检查1个点是常数时间，至多$O(n)$ 个点需要$O(n)$时间

算法分析

分析：步1 $O(1)$

步2 $O(n\log n)$

步3 $O(1)$

步4-5 $2T(n/2)$

步6 $O(1)$

步7 $O(n)$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n\log n)$$

$$T(n) = O(1) \qquad\qquad n \le 3$$

由递归树估计$T(n) = O(n\log^2 n)$

预排序的处理方法

在每次调用时将已经排好的数组分成两个排序的子集，每次调用这个过程的时间为$O(n)$

$W(n)$总时间，$T(n)$算法递归过程，$O(n\log n)$预处理排序

$$W(n)=T(n)+O(n\log n)$$

$$T(n)=2T(\tfrac{n}{2})+O(n)$$

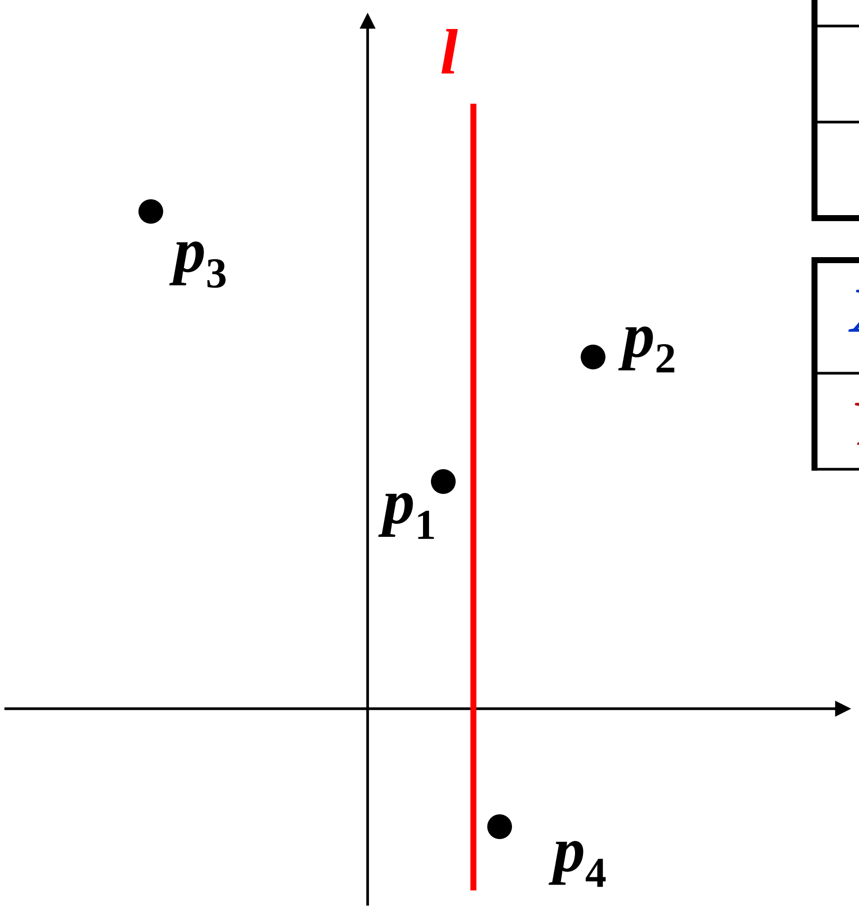
$$T(n)=O(1) \qquad n\le 3$$

解得

$$T(n)=O(n\log n)$$

$$W(n) = O(n\log n)$$

实例：递归中的拆分



P	1	2	3	4
X	0.5	2	-2	1
Y	2	3	4	-1

X	-2(3)	0.5(1)	1(4)	2(2)
Y	-1(4)	2(1)	3(2)	4(3)

X_L	-2(3)	0.5(1)
X_R	1(4)	2(2)
Y_L	2(1)	4(3)
Y_R	-1(4)	3(2)

小结

- 依据

$$W(n) = aW(n/b) + f(n)$$

- 提高算法效率的方法:
  - 减少子问题个数a:

$$W(n)=O(n^{\log_b a})$$

  - 增加预处理，减少$f(n)$

2.4 典型实例分析

2.4.1 快速排序

算法2.5 Quicksort(A,p,r)

输入：数组$A[p..r]$

输出：排好序的数组A

1. if $p < r$
2. then $q \leftarrow$ Partition(A, p, r)
3. $A[p] \leftrightarrow A[q]$
4. Quicksort($A,p,q-1$)
5. Quicksort($A,q+1,r$)

初始置p=1, r=n，然后调用上述算法

划分实例

27	99	0	8	13	64	86	16	7	10	88	25	90
	i										*j*	
27	25	0	8	13	64	86	16	7	10	88	99	90
					i				*j*			
27	25	0	8	13	10	86	16	7	64	88	99	90
						i		*j*				
27	25	0	8	13	10	7	16	86	64	88	99	90
							j	*i*				
16	25	0	8	13	10	7	27	86	64	88	99	90

划分过程

算法2.6 Partition(*A*,*p*,*r*)

输入：数组$A[p,r]$

输出：j，A的首元素在排好序的数组中的位置

1. $x \leftarrow A[p]$
2. $i \leftarrow p$
3. $j \leftarrow r+1$
4. while true do
5.   repeat $j \leftarrow j-1$
6.   until $A[j] \le x$
7.   repeat $i \leftarrow i+1$
8.   until $A[i] > x$
9.   if $i < j$
10.   then $A[i] \leftrightarrow A[j]$
11.   if $i=j-1$ then return j
12.   else return j

不同情况下的时间复杂度

最坏情况

$$W(n) = W(n-1) + n - 1$$

$$W(1) = 0$$

$$W(n) = \frac{1}{2}n(n-1) = \Theta(n^2)$$

最好划分

$$T(n) = 2T(\tfrac{n}{2}) + n - 1$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \Theta(n\log n)$$

均衡划分

$$T(n) = T(\tfrac{9n}{10}) + T(\tfrac{n}{10}) + n$$

$$T(1) = 0$$

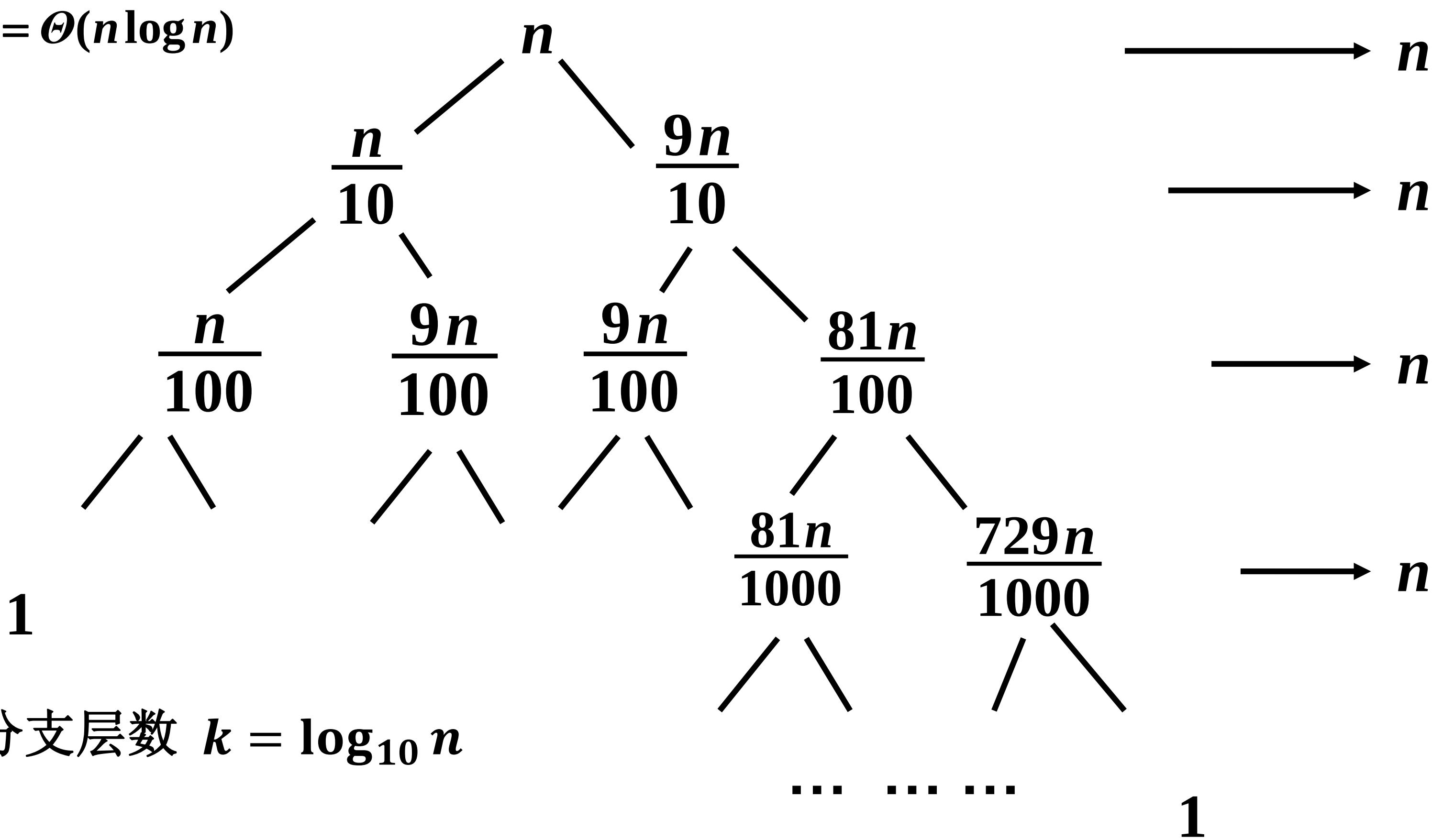
$$T(n) = \Theta(n\log n)$$

均衡划分

$T(n)=T(\frac{9n}{10})+T(\frac{n}{10})+n$

$T(1)=0$

$T(n)=\Theta(n\log n)$



最左分支层数 $k=\log_{10} n$

最右分支层数 $k=\log_{\frac{10}{9}} n$

$$n\log_{10} n = O(n\log n) \le \mathrm{T}(n) \le \log_{\frac{10}{9}} n = O(n\log n)$$

平均情况下时间复杂度

假设输入数组首元素排好序后的正确位置处在**1, 2, …,** n 各种情况是等可能的，概率为$1/n$.

$$T(n)=\frac{1}{n}\{[T(0)+T(n\text{-}1)]+[T(1)+T(n\text{-}2)]+\ldots+[T(n\text{-}1)+T(0)]\}+O(n)$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}T(i)+O(n)$$

例1.14

$$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+O(n)$$

$$T(1)=0$$

利用差消法求得 $\mathrm{T}(n)=\Theta(n\mathbf{log}n)$

2.4.2 选择问题

问题：从给定的集合 *L* 中选择第 *i* 小的元素

不妨设 *L* 为 *n* 个不等的实数

$i=1$, 称为最小元素；

$i=n$，称为最大元素；

$i=n-1$，称为第二大元素；

位置处在中间的元素，称为中位元素

当 *n*为奇数时，中位数只有1个，$i=(n+1)/2$；

当 *n*为偶数时，中位数有2个，$i=n/2$, $n/2+1$. 也可以规定其中的一个

选最大

算法2.7 Findmax

输入：*n* 个数的数组 *L*

输出：*max*, *k*

1. $max \leftarrow L[1]$； $k \leftarrow 1$
2. for $i \leftarrow 2$ to n do
3.   if $max < L[i]$
4.   then $max \leftarrow L[i]$
5. $k \leftarrow i$
5. return max, k

算法最坏情况下的时间复杂度 $W(n)=n-1$

选最大和最小

通常算法：顺序比较

复杂性：$W(n)=2n-3$

算法2.9 FindMaxMin

输入：n个数的数组L

输出：max，min

1. 将n个元素两两一组分成$\lfloor n/2 \rfloor$组
2. 每组比较，得到$\lfloor n/2 \rfloor$个较小和$\lfloor n/2 \rfloor$个较大
3. 在$\lceil n/2 \rceil$个(n为奇数，是$\lfloor n/2 \rfloor+1$)较小中找最小min
4. 在$\lceil n/2 \rceil$个(n为奇数，是$\lfloor n/2 \rfloor+1$)较大中找最大max

复杂性：行2 比较$\lfloor n/2 \rfloor$次，行3--4 比较至多$2\lceil n/2 \rceil-2$次，

$$W(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 2\lceil n/2 \rceil - 2 = n + \lceil n/2 \rceil - 2 = \lceil 3n/2 \rceil - 2$$

找第二大

通常算法：顺序比较

1．顺序比较找到最大 *max*;

2．从剩下的 $n-1$ 个数中找最大，就是第二大 *second*

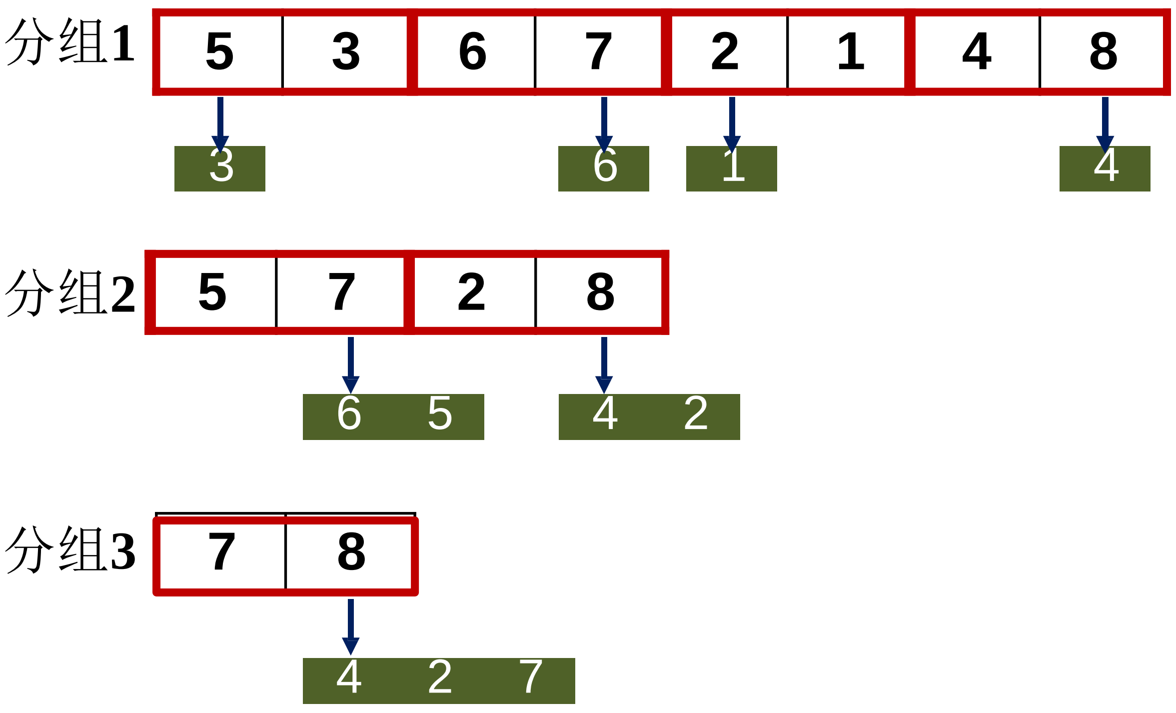
复杂性：$W(n)=n-1+n-2=2n-3$

锦标赛算法：

两两分组比较，大者进入下一轮

每个元素用数表记录每次比较时小于自己的元素

实例



锦标赛算法

算法2.10 FindSecond

输入：n个数的数组L

输出：*Second*

1. $k \leftarrow n$
2. 将 k 个元素两两一组，分成$\lfloor k/2 \rfloor$组
3. 每组的2个数比较，找到较大的数
4. 将被淘汰的较小的数在淘汰它的数所指向的链表中做记录
5. if k 为奇数 then $k \leftarrow \lfloor k/2 \rfloor + 1$
6. else $k \leftarrow \lfloor k/2 \rfloor$
7. if $k>1$ then goto 2
8. $max \leftarrow$最大数
9. $Second \leftarrow max$ 的链表中的最大

时间复杂度分析

命题2.2 max在第一阶段的分组比较中总计进行了$\lceil \log n \rceil$次比较.

证 设本轮参与比较的有 t 个元素，经过分组淘汰后进入下一轮的元素数至多是$\lceil t/2 \rceil$. 假设 k 轮淘汰后只剩下一个元素 max，利用

$$\lceil \lceil t/2 \rceil / 2 \rceil = \lceil t/2^2 \rceil$$

的结果并对 k 归纳，可得到 $\lceil n/2^k \rceil=1$.

若 $n=2^d$，那么有 $k = d = \log n = \lceil \log n \rceil$

若 $2^d<n<2^{d+1}$，那么 $k = d+1 = \lceil \log n \rceil$

算法时间复杂度是

$$W(n)=n-1+\lceil \log n \rceil-1= n+\lceil \log n \rceil-2.$$

一般性选择问题

问题：选第 k 小.

输入：数组 S, S的长度 n, 正整数 k, $1 \le k \le n$.

输出：第 k 小的数

通常算法

1. 排序
2. 找第 k 小的数

时间复杂性：$O(n\log n)$

实例：n=15, k=6

8	2	3	5	7	6	11	14	1	9	13	10	4	12	15

	8	14	15	
	7	11	13	
M	5	9	12	$m^* = 9$
	3	6	10	
	2	1	4	

	8	14	15	
A	7	11	13	B
	5	9	12	
C	3	6	10	D
	2	1	4	

- **C中都比*m**小，B中都比*m**大**
- **A和D中的数（8, 7, 10, 4）需要与*m**比较**
- **比*m**小的构成S_1,大的构成S2,判断K落在哪个子集,淘汰另一个**

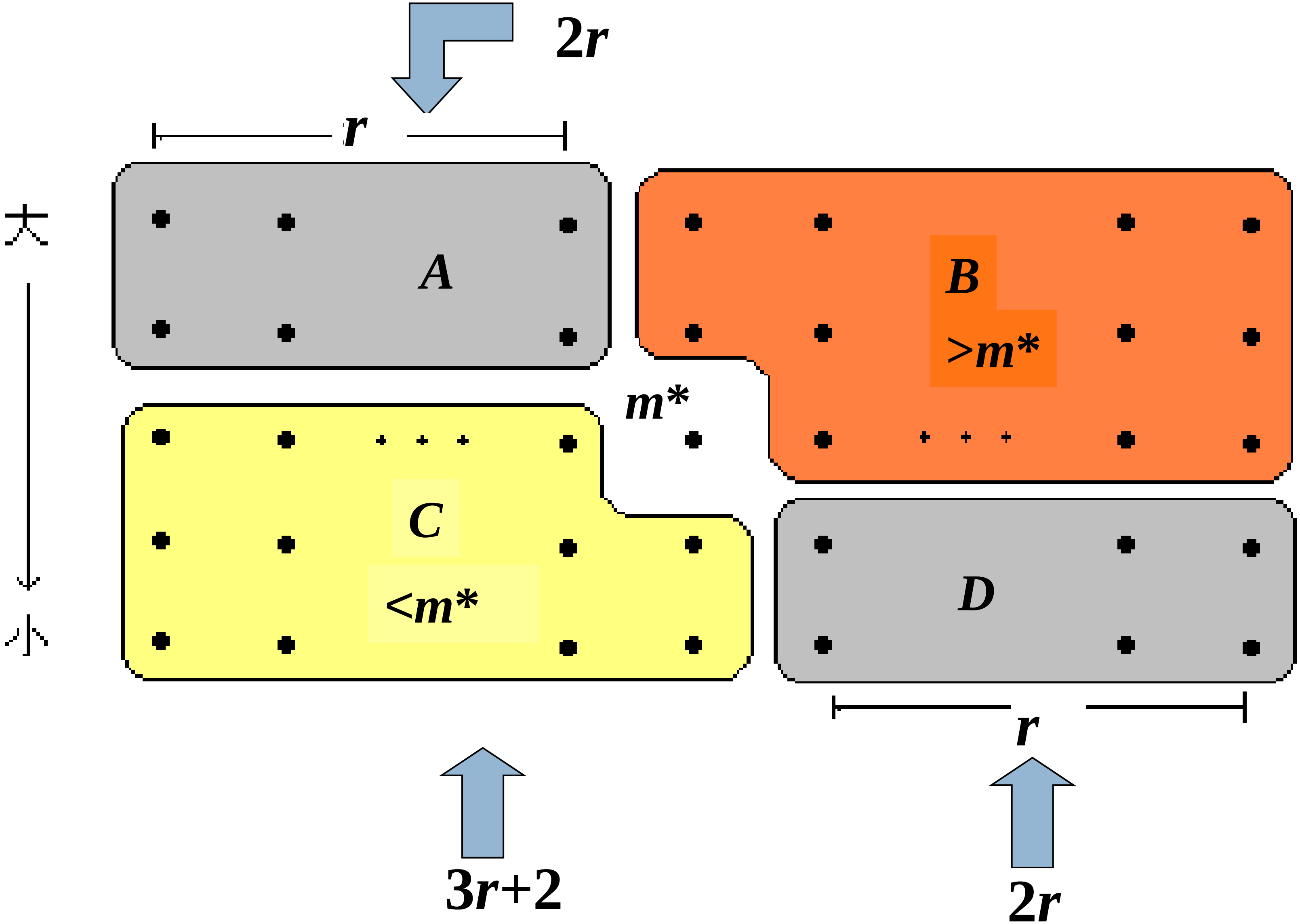
分治选择算法

算法2.11 Select(S,k)

输入：数组 S，正整数 k

输出：S中的第 k 小元素

1．将S划分成 5 个一组，共$\lceil n/5 \rceil$个组
2．每组找一个中位数，所有个中位数放到集合 M
3．$m^* \leftarrow$ Select(M,$\lceil |M|/2 \rceil$)　//将S划分成A,B,C,D四个集合
4．把A和D的每个元素与m^*比较，小的构成S_1, 大的构成S_2
5．$S_1 \leftarrow S_1 \cup C$; $S_2 \leftarrow S_2 \cup B$
6．if $k = |S_1|+1$ then 输出m^*
7．else if $k \le |S_1|$
8．　　then Select(S_1,k)
9．　　else Select(S_2,$k-|S_1|-1$)



最坏情况：子问题大小为 $2r + 2r + 3r + 2 = 7r + 2$

复杂度估计 $W(n)=O(n)$

不妨设 $n=5(2r+1)$, $|A|=|D|=2r$, $r = \dfrac{\frac{n}{5}-1}{2} = \dfrac{n}{10} - \dfrac{1}{2}$

算法工作量

行2： $O(n)$

行3： $W(n/5)$

行4： $O(n)$

行8-9： $W(7r+2)$

$$W(7r+2) = W(7(\frac{n}{10} - \frac{1}{2}) + 2)$$

$$= W(\frac{7n}{10} - \frac{3}{2}) \le W(\frac{7n}{10})$$

用递归树做复杂度估计

$$W(n) \le W(\frac{n}{5}) + W(\frac{7n}{10}) + tn \le tn + \frac{9}{10}tn + \frac{81}{100}tn + \ldots = O(n)$$

递归树

$$tn \qquad\qquad tn$$

$$\frac{tn}{5} \quad \frac{7tn}{10} \qquad\qquad 0.9tn$$

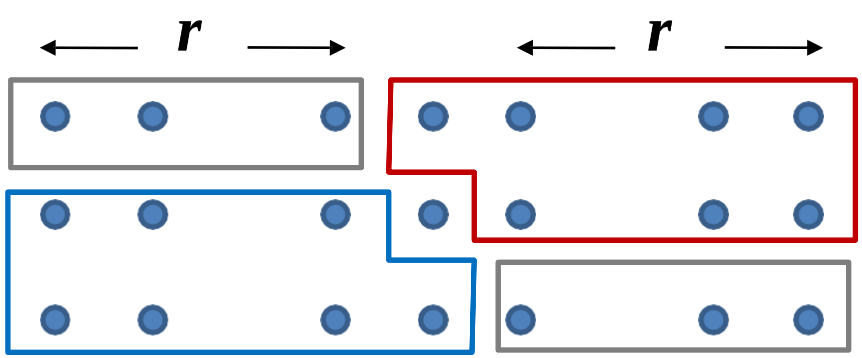
$$\frac{tn}{25} \quad \frac{7tn}{50} \quad \frac{7tn}{50} \quad \frac{49tn}{100} \qquad\qquad 0.81tn$$

……

讨论

分组时为什么5个元素一组？3个一组或 7个一组是否可行？

假设 $t=3$，3个一组：



$$n = 3(2r+1)$$

$$r = (n/3-1)/2 = n/6-1/2$$

子问题规模最多为

$$4r+1 = 4n/6-1$$

算法的时间复杂度满足方程 $W(n) = W(n/3) + W(4n/6) + cn$

由递归树得 $W(n)=\Theta(n\log n)$

关键：递归树每行的工作量构成公比小于 1的等比级数，算法复杂度才是 $O(n)$.

2.4.3 n-1次多项式在全体2n次方根上的求值

欧拉公式 $e^{ix}=cosx+isinx$

1的2n次根

$$\omega_j=\mathrm{e}^{\frac{2\pi j}{2n}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{\pi j}{n}\mathrm{i}}=\cos\frac{\pi j}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi j}{n}\qquad j=0,1,\ldots,2n-1$$

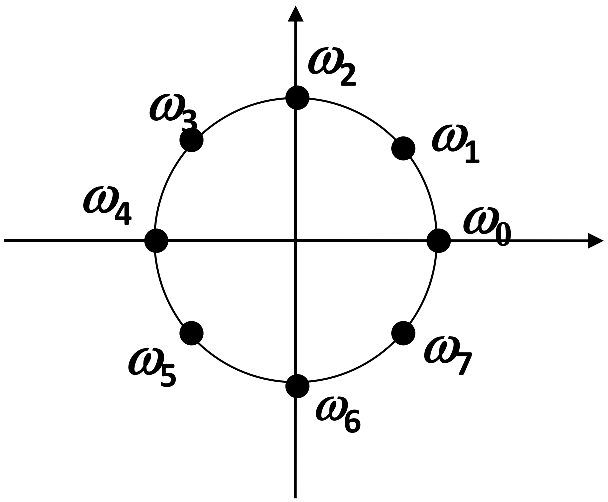
例如 $n=4$，1的8次方根是：

$$\omega_0=1,\qquad \omega_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},$$

$$\omega_2=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=\mathrm{i},\quad \omega_3=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},$$

$$\omega_4=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}=-1,\ \omega_5=\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},$$

$$\omega_6=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}=-\mathrm{i},\ \omega_7=\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$



多项式求值

给定多项式： $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1}$

设 x 为1 的 $2n$ 次方根，对所有的 x 计算 $A(x)$ 的值.

算法1：对每个 x 做下述运算：

依次计算每个项 $a_i x^i$，对 i 求和得到 $A(x)$，

$T_1(n)=O(n^3)$

算法2：$A_1(x)= a_{n-1}$

$A_2(x)= a_{n-2}+ xA_1(x)$

$A_3(x)= a_{n-3}+ xA_2(x)$

…

$A_n(x)= a_0+ xA_{n-1}(x)=A(x)$

对每个x 按照上述顺序求值

$T_2(n) = O(n^2)$

分治算法

原理：

$$A_{even}(x)=a_0+a_2x+a_4x^2+\ldots+a_{n-2}x^{(n-2)/2}$$

$$A_{odd}(x)=a_1+a_3x+a_5x^2+\ldots+a_{n-1}x^{(n-2)/2}$$

$A(x)=A_{even}(x^2)+x\,A_{odd}(x^2)$， x^2 为1 的 n 次根

算法3：

1. 计算1 的所有的 $2n$ 次根
2. 分别计算 $A_{even}(x^2)$ 与 $A_{odd}(x^2)$
3. 利用步2 的结果计算 $A(x)$

复杂度分析：$T(n)=T_1(n)+f(n)$， $f(n)=O(n)$计算$2n$次根时间

$T_1(n)=2T_1(n/2)+g(n)$, $g(n)=O(n)$,

$T_1(1)=O(1)$

$T(n)=O(n\log n)$

第二章小结

2.1 分治策略的基本思想

2.1.1 两个熟悉的例子（二分检索、二分归并排序 ）

2.1.2 分治算法的一般性描述

2.2 分治算法的分析技术

- 两种形式：$W(n)=2W(n-1)+1$；$W(n)=W(n/2)+1$

2.3 改进分治算法的途径

2.3.1 通过代数变换减少子问题个数

2.3.2 利用预处理减少递归内部的计算量

2.4 典型实例

2.4.1 快速排序算法

2.4.2 选择问题

2.4.3 $n-1$次多项式在全体$2n$次方根上的求值

注意：

- 子问题必须与原问题的类型一样，且相互独立
- 一般尽量均匀划分、递归处理
- 最常见的是二分法