第三章　　习题课

一、填空题

1. 设 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}, P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$,

则　$P\{\max\{X,Y\} \geq 0\} =$ ______ .

解　$\{\max\{X,Y\} \geq 0\} \Leftrightarrow \{X \geq 0\} \cup \{Y \geq 0\}$

所以　$P\{\max\{X,Y\} \geq 0\} = P\{(X \geq 0) \cup (Y \geq 0)\}$

$$= P\{X \geq 0\} + P\{Y \geq 0\} - P\{X \geq 0, Y \geq 0\}$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{5}{7}$$

2. 已知 X、Y 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1
0	$1/3$	b
1	a	$1/6$

且$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$独立，则 $a=$ ____ , $b=$ ____ .

解 $P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} = a$

$$P\{X=0\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = a + \frac{1}{3}$$

$$P\{X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = a + b$$

因为$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$独立，所以

$$P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\}$$

即

$$a=(a+\frac{1}{3})(a+b)$$

联立

$$a+b+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

得到

$$a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}.$$

二、选择题

1. 已知 X_1、X_2 相互独立，且分布律为

X_i	0	1
P	$1/2$	$1/2$

$(i=1,2)$

那么下列结论正确的是______

$A.\ X_1 = X_2$　　　　$B.\ P\{X_1 = X_2\} = 1$

$C.\ P\{X_1 = X_2\} = 1/2$　　$D.$ 以上都不正确

解 $\{X_1 = X_2\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0\} + \{X_1 = 1, X_2 = 1\}$

因为 X_1、X_2 相互独立，所以

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = P\{X_1 = 0\} \cdot P\{X_2 = 0\} = 1/4$$

$$P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = P\{X_1 = 1\} \cdot P\{X_2 = 1\} = 1/4$$

故 $P\{X_1 = X_2\} = 1/2$

2. 设离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
P	$1/6$	$1/9$	$1/18$	$1/3$	α	β

且 X、Y 相互独立 ,则________.

$A.\quad \alpha=2/9,\beta=1/9$　　$B.\quad \alpha=1/9,\beta=2/9$

$C.\quad \alpha=1/6,\beta=1/6$　　$D.\quad \alpha=8/15,\beta=1/18$

解 因为 X、Y 相互独立，所以

$$P\{X=1,Y=3\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=3\}$$

即

$$\frac{1}{18}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{18}+\beta\right)$$

解得

$$\beta=1/9$$

又因为 $\alpha+\beta+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}=1$ 或者 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$

故

$$\alpha=\frac{2}{9}$$

3.设 $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$，那么 X 和 Y 的联合分布为__C__.

A. 二维正态分布,且 $\rho = 0$

B. 二维正态分布,且 ρ 不定

C. 未必是二维正态分布

D. 以上都不对

当 X、Y 相互独立时，则 X 和 Y 的联合分布为 A .

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

三、解答题

1.设 X、Y 相互独立且服从 $U[-b,b]$,求方程 $t^2+tX+Y=0$ 有实根的概率,并求当 $b\to\infty$ 时这概率的极限.

解 X、Y 相互独立且服从$U[-b,b]$，所以 X、Y 的联合密度为

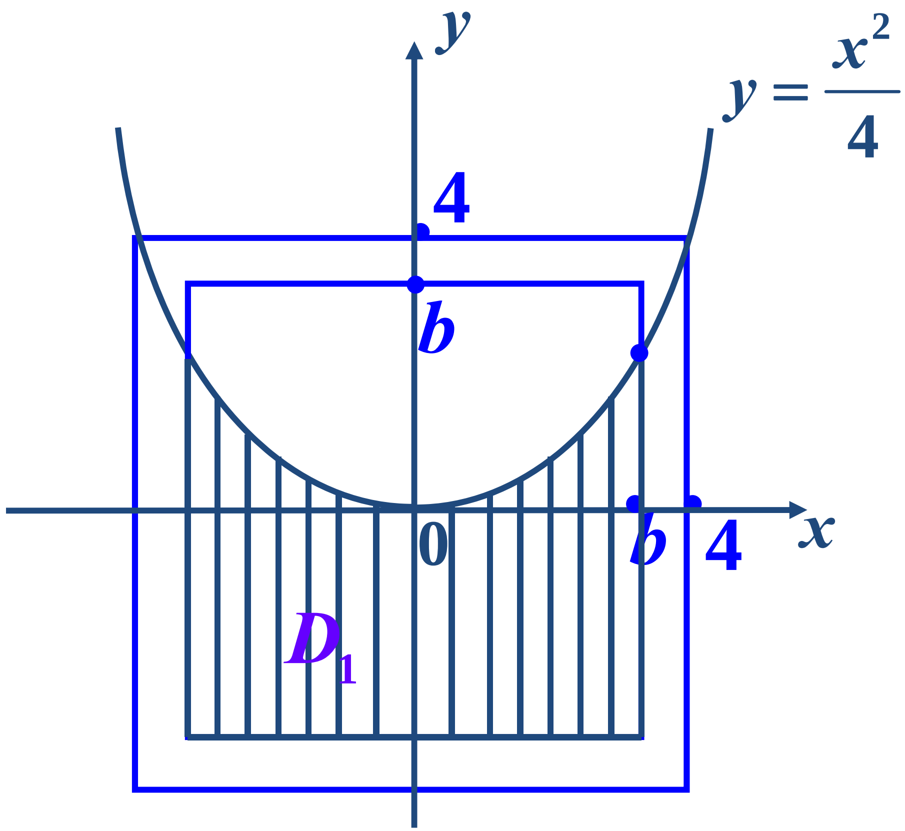
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4b^2}, & |x|\le b, |y|\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

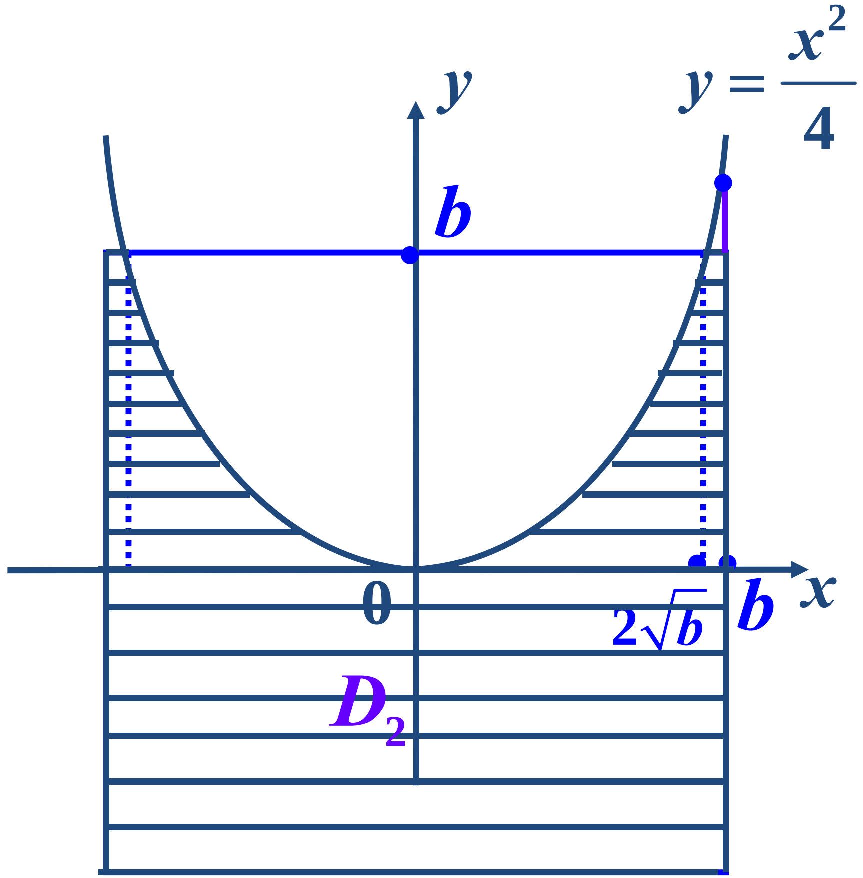
方程 $t^2+tX+Y=0$ 有实根的概率为

$$P\left\{X^2-4Y\ge 0\right\}$$

$$=P\left\{Y\le\frac{X^2}{4}\right\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy,$$ 其中 $D: y\le\dfrac{x^2}{4}$.

$$\begin{cases} y = x^2/4 \\ x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ y = b^2/4 \le b\,(> b) \end{cases}$$





当 $b\le 4$ 时,

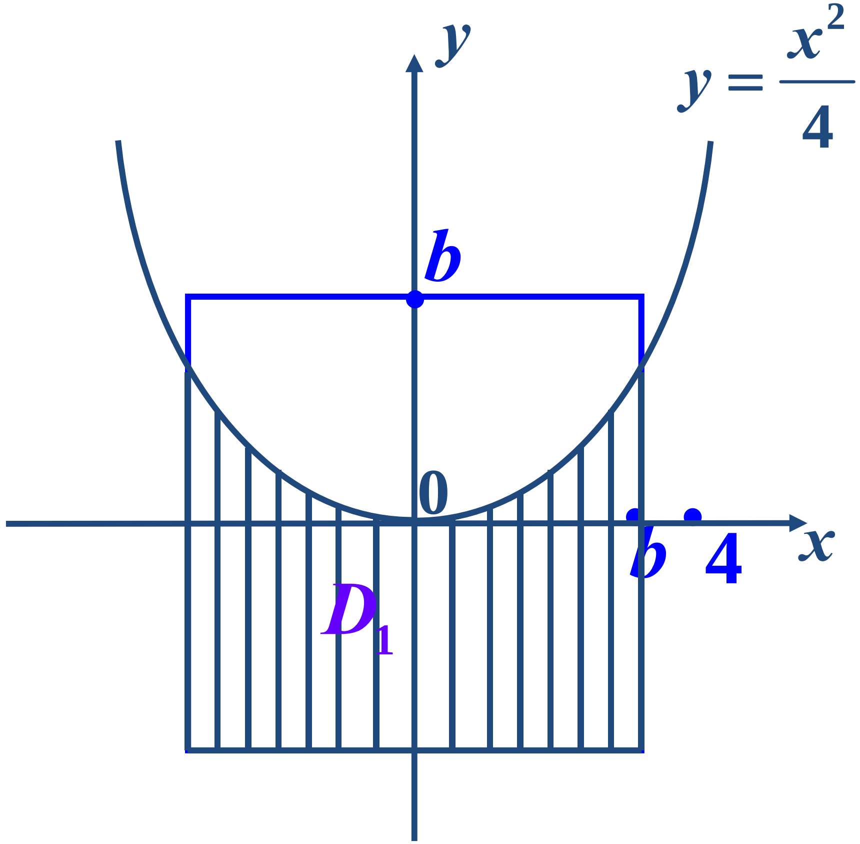
$$P\left\{X^2-4Y\ge 0\right\}$$

$$=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\frac{1}{4b^2}\iint\limits_{D_1} dxdy$$

$$=\frac{2}{4b^2}\left(b^2+\int_0^b dx\int_0^{x^2/4} dy\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{b}{24}$$

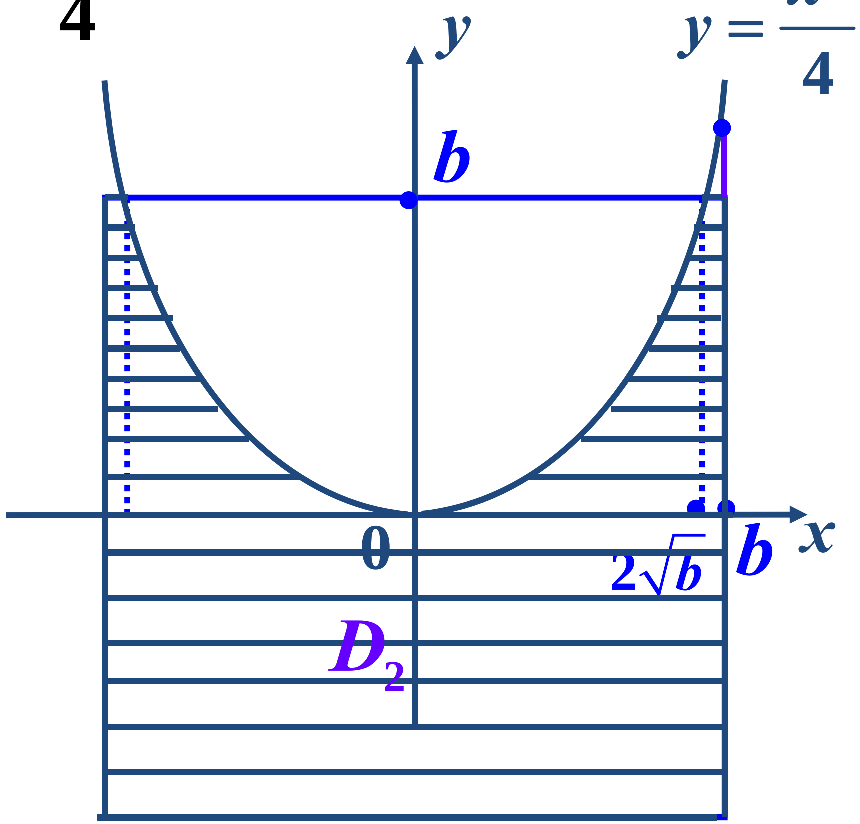


当 $b>4$ 时,

$$P\left\{X^2-4Y\geq 0\right\}=\iint\limits_{D_2} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{1}{4b^2}\iint\limits_{D_2} dxdy$$

$$=\frac{2}{4b^2}\{b^2+[b(b-2\sqrt{b})+\int_0^{2\sqrt{b}}\frac{x^2}{4}dx\}$$

$$=1-\frac{2}{3\sqrt{b}}$$



因而

$$P\left\{X^2-4Y\geq 0\right\}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{b}{24}, & 0\leq b\leq 4\\ 1-\dfrac{2}{3\sqrt{b}}, & b>4\end{cases}$$

可见 $\lim\limits_{b\to\infty}P\left\{X^2-4Y\geq 0\right\}$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{2}{3\sqrt{b}}\right)=1.$$

2. 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} Ay(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad, & \text{其它} \end{cases}$$

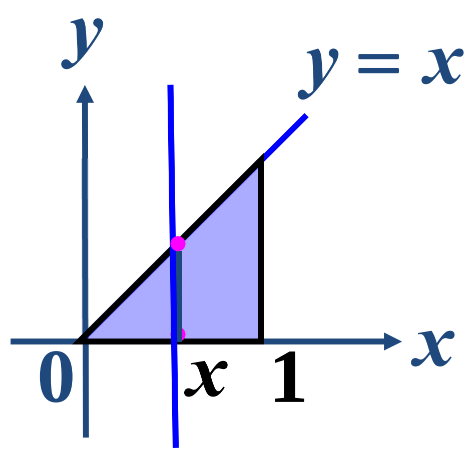
求 (1) A的值 (2) (X,Y)的分布函数 (3) 两个边缘密度.

解 (1) $1=\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x Ay(1-x)\,dy$$

$$=\frac{A}{2}\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$

$$=A/24$$



故 $A=24.$

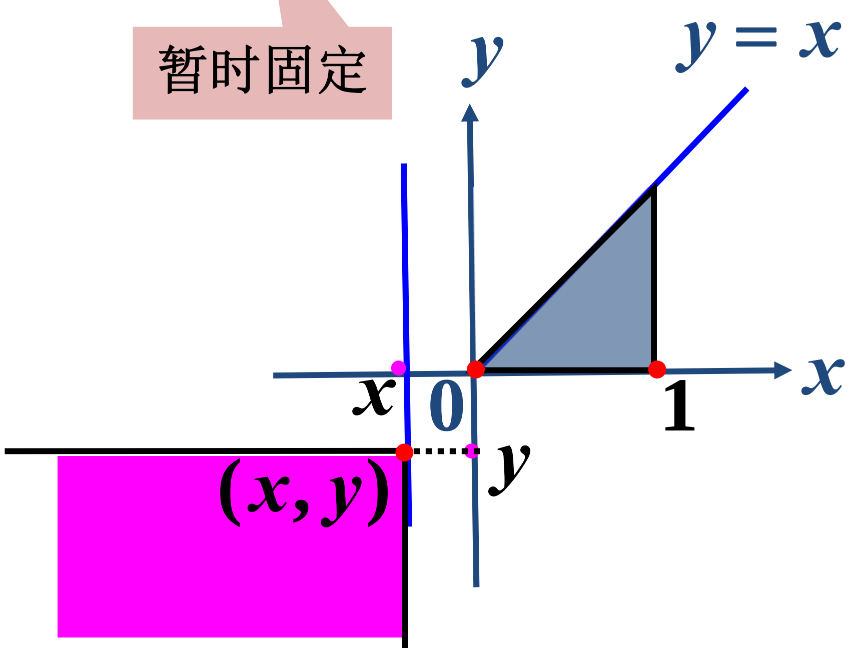
解 (2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$

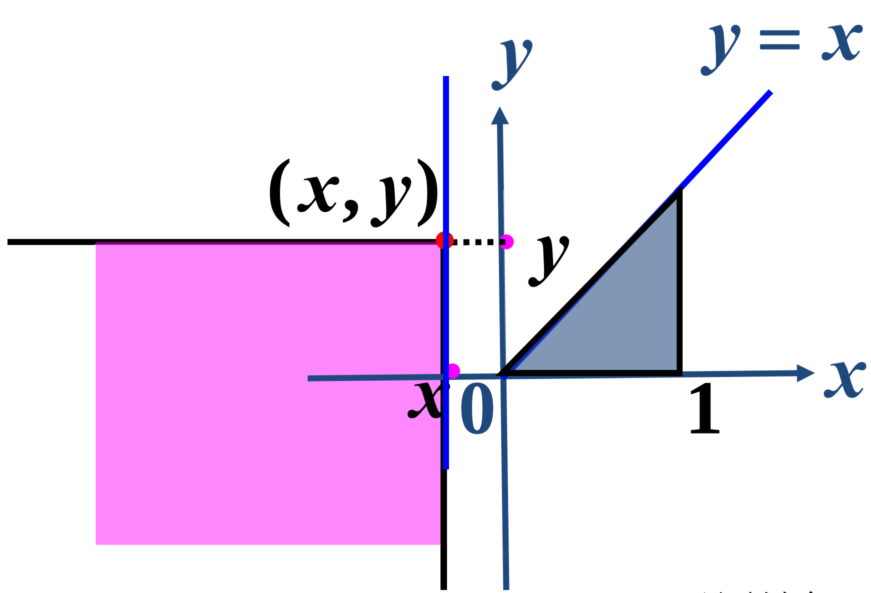
积分区域 $D=(-\infty,x]\times(-\infty,y]$

$f(x,y)\neq 0$ 区域 $\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$

当 $x<0$ 时，不论 $y<0$ 还是 $y\ge 0$，都有 $F(x,y)=0.$

暂时固定





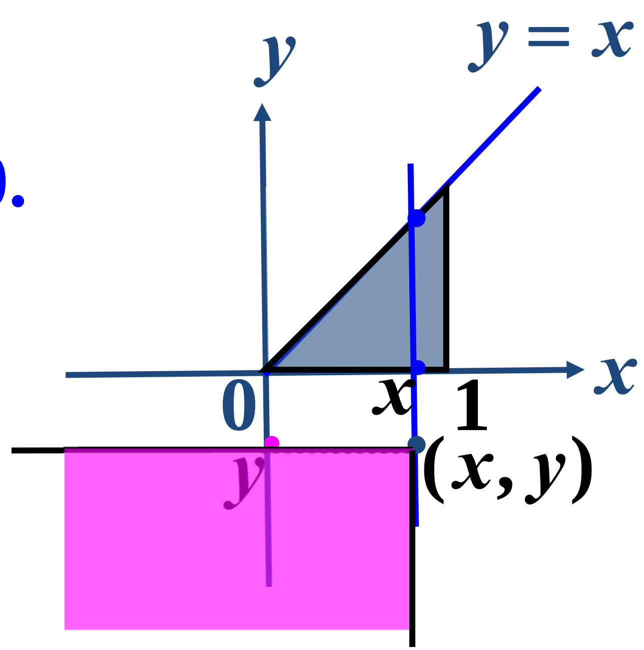
当$0\le x<1, y<0$时，$F(x,y)=0.$

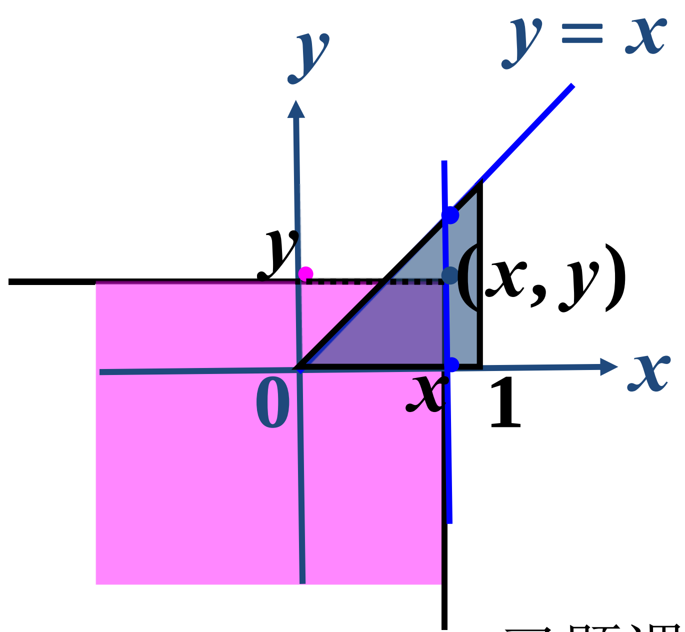
当$0\le x<1, 0\le y<x$时，

$$F(x,y)=24\int_0^y y\,dy\int_y^x (1-x)\,dx$$

$$=24\int_0^y [(x-\frac{x^2}{2})y-y^2+\frac{y^3}{2}]dy$$

$$=3y^4-8y^3+12\left(x-x^2/2\right)y^2.$$



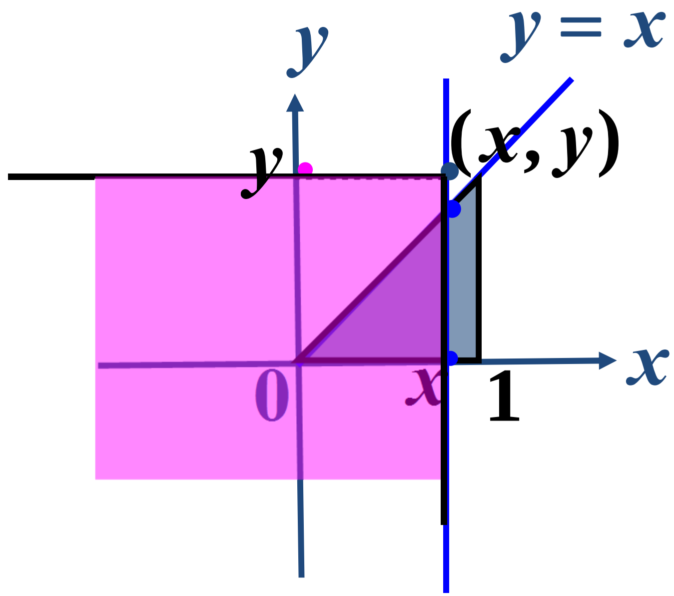


当 $0 \le x < 1, y \ge x$ 时,

$$F(x,y) = 24\int_0^x (1-x)dx \int_0^x y\,dy$$

$$= 12\int_0^x (x^2 - x^3)dx$$

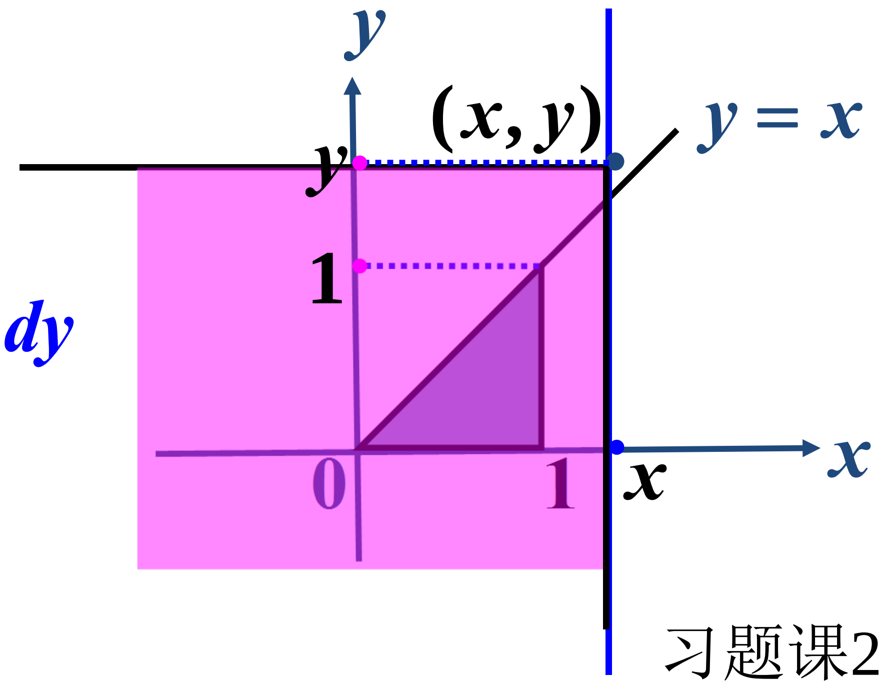
$$= 4x^3 - 3x^4.$$



当 $x \ge 1, y \ge 1$ 时,

$$F(x,y) = 24\int_0^1 (1-x)dx \int_0^x y\,dy$$

$$= 1.$$

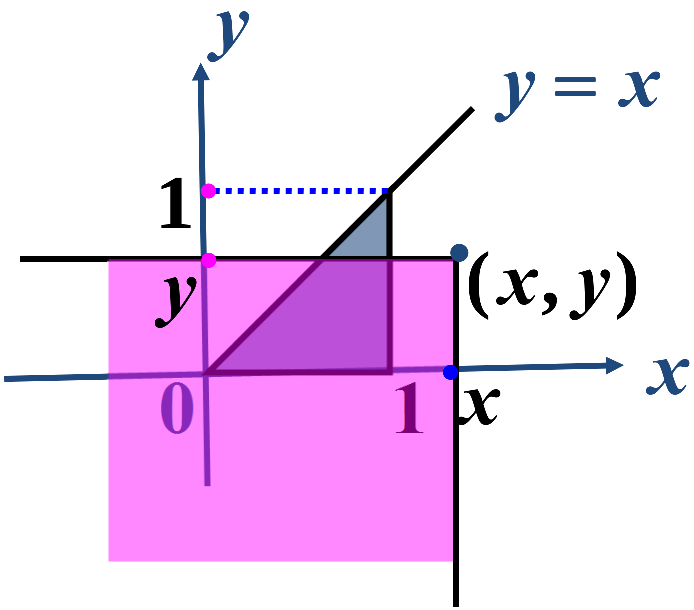


当 $x \geq 1, 0 \leq y < 1$ 时,

$$F(x,y) = 24\int_0^y y\,dy \int_y^1 (1-x)\,dx$$

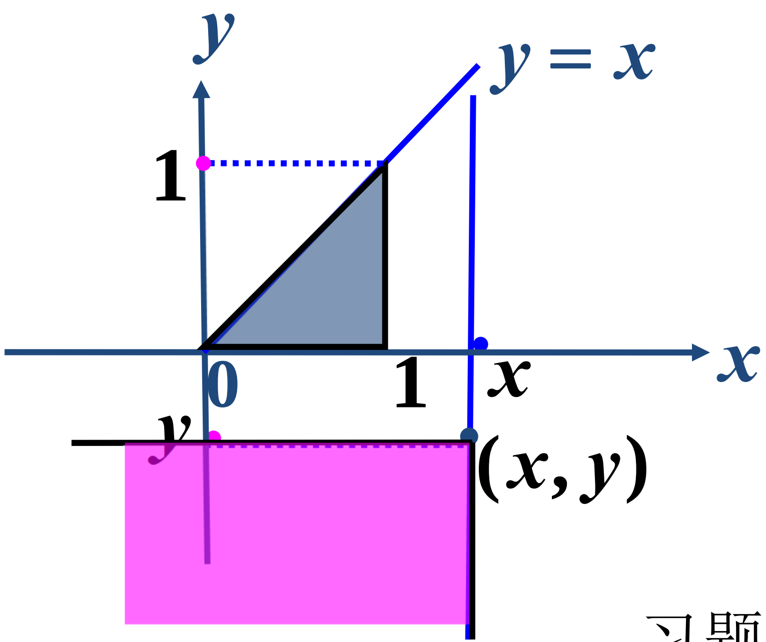
$$= 24\int_0^y \left(\frac{y}{2} - y^2 + \frac{y^3}{2}\right)dy$$

$$= 3y^4 - 8y^3 + 6y^2.$$



当 $x \geq 1, y < 0$ 时,

$$F(x,y) = 0.$$



综上

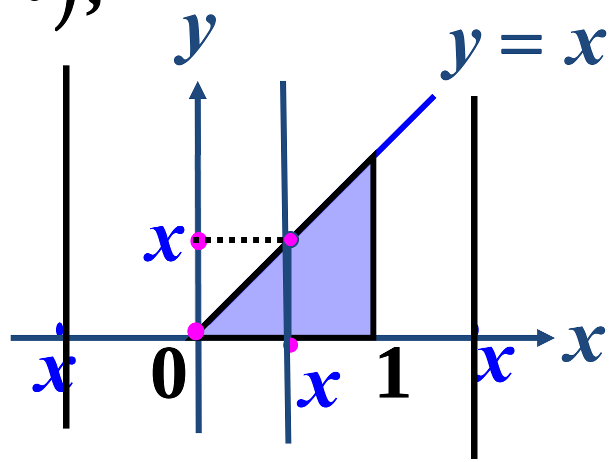
$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0\text{或}y<0 \\ 3y^4-8y^3+12\left(x-x^2/2\right)y^2, & 0\le x<1, 0\le y<x \\ 4x^3-3x^4, & 0\le x<1, y\ge x \\ 3y^4-8y^3+6y^2, & x\ge 1, 0\le y<1 \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$$

暂时固定

解 (3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

当 $x>1$ 或 $x<0$ 时，$\forall y\in(-\infty,+\infty)$，

都有 $f(x,y)=0$，故 $f_X(x)=0$.



当 $0\le x\le 1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0}f(x,y)dy$$

$$+\int_0^x f(x,y)dy+\int_x^{+\infty}f(x,y)dy.$$

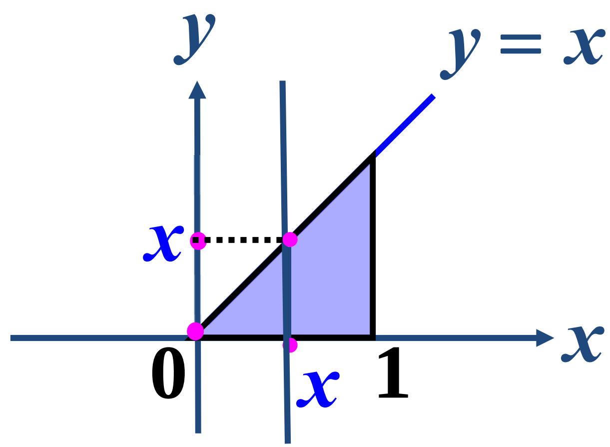
当 $0 \le x \le 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy$$

$$+\int_0^x f(x,y)dy + \int_x^{+\infty} f(x,y)dy .$$

$$= \int_0^x 24y(1-x)dy$$

$$= 12x^2(1-x),$$

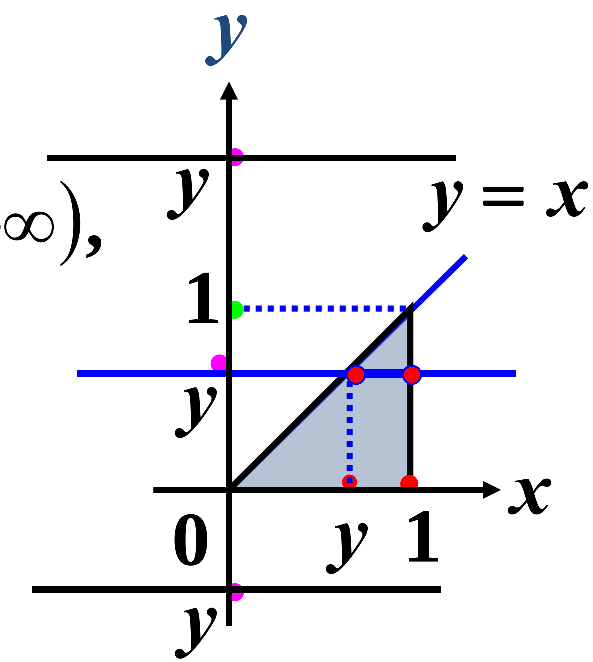


综上,

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意取值范围

解 (2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$



当 $y>1$ 或 $y<0$ 时, 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

都有 $f(x,y)=0$, 故 $f_Y(y)=0$.

当 $0\le y\le 1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx$$

$$+\int_{y}^{1} f(x,y)dx+\int_{1}^{+\infty} f(x,y)dx .$$

$$=\int_{y}^{1} 24y(1-x)dx$$

$$=12y(1-y)^2,$$

综上，

$$f_Y(y)=\begin{cases}24y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

注意取值范围

3. 设 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} Ay(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) X 与Y 是否相互独立?

(2) 求 $f(y|x)$和 $f(x|y)$;

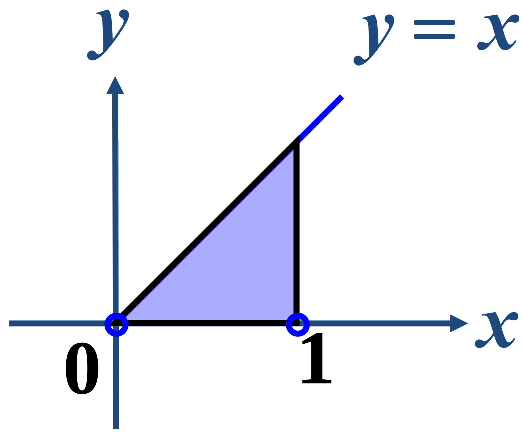
(3) 求 $Z=X+Y$ 概率密度.

解 (1) 因为 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$

所以 X 与Y 不独立 .

$$(2)\quad f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0\quad , & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



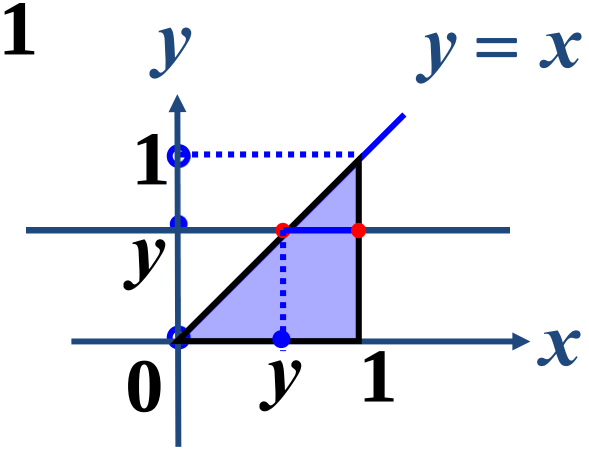
当 $0<x<1$ 时, $f_X(x)\neq 0.$

故 $$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}2y/x^2, & 0<x<1, 0<y\le x\\ 0\quad , & \text{其它}\end{cases}$$

暂时固定

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



当 $0<y<1$ 时, $f_Y(y)\ne 0$.

故

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2(1-x)/(1-y)^2, & y\le x<1, 0<y<1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

暂时固定

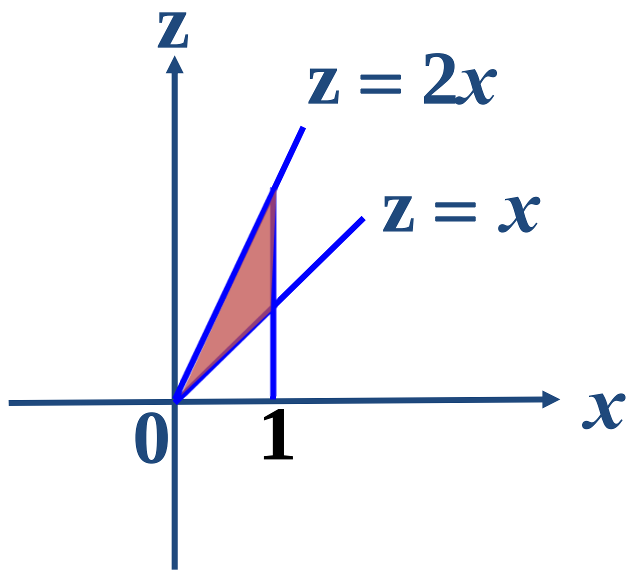
暂时固定

(3) Z=X+Y 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z\text{-}x \le x \end{cases}$$

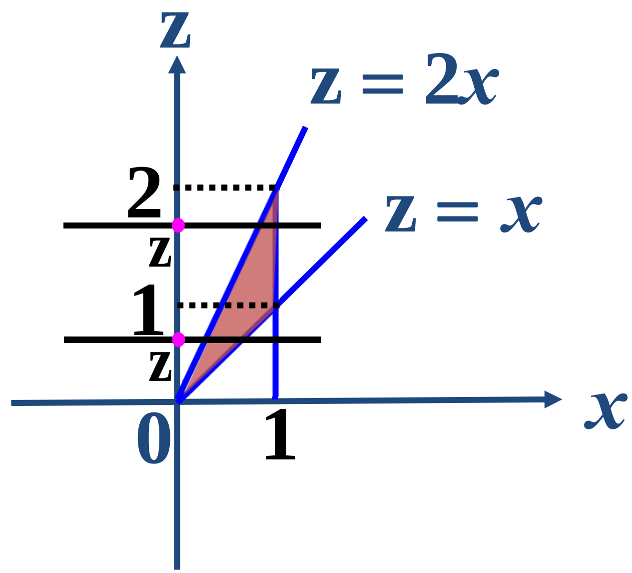
$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le z \le 2x \end{cases}$$



当 $z \le 0$ 或 $z > 2$ 时， $f_Z(z) = 0.$

当 $0 < z \le 1$ 时，

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{z} 24(z-x)(1-x)dx$$



当 $1 < z \le 2$ 时，

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{1} 24(z-x)(1-x)dx$$

四、证明题

在区间 [0,1]上随机地投掷两点,试证这两点间的距离的概率密度为

$$f(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0\le z\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

证明　设这两个随机点分别为 X , Y， 则有

$X\sim U[0,1]$, $Y\sim U[0,1]$. 于是 X , Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因为 X , Y 相互独立， 所以 X , Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1\,,0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0\,,\text{其它}\end{cases}$$

这两个随机点 X , Y 的距离为 $Z=|X-Y|$.

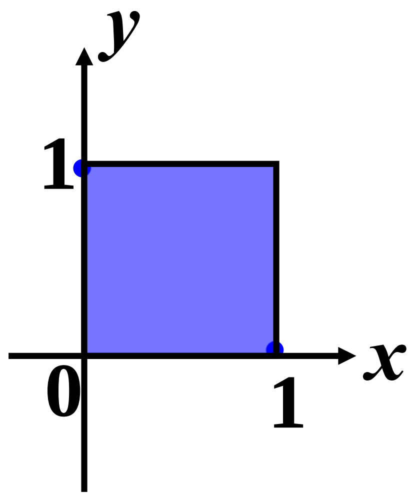
Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}\quad =P\{|X-Y|\le z\}$$

暂时固定

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$, $f_Z(z)=0$.

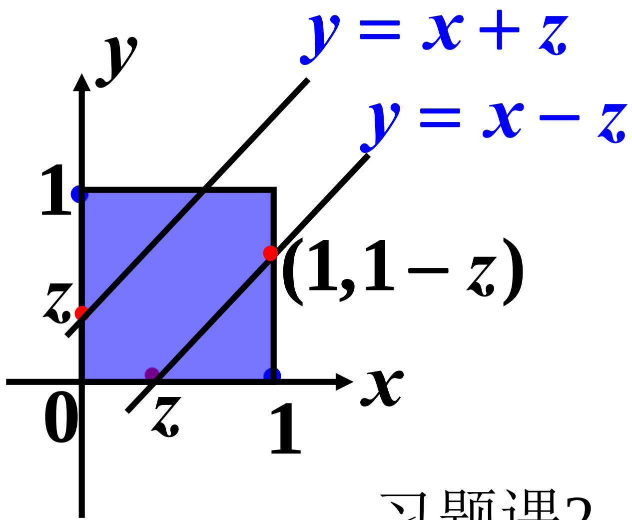
当 $z=0$ 时，$F_Z(z)=0$, $f_Z(z)=0$.



当 $z>0$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)\,dxdy$$

当 $0<z<1$ 时，

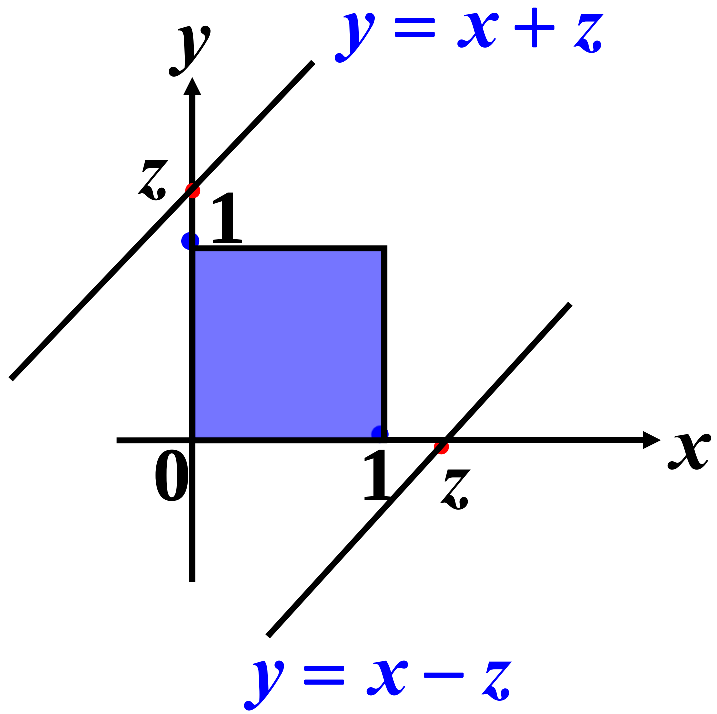


$$F_Z(z)=1-(1-z)^2=2z-z^2$$

$$f_Z(z)=2(1-z).$$

当 $z \geq 1$ 时,

$F_Z(z)=1, \quad f_Z(z)=0.$



综上

$$f(z)=\begin{cases} 2(1-z), & 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

第四章　　习题课

一、填空题

(1)已知$X \sim N(-2, 0.4^2)$，则$E[(X+3)^2]=$____

解：由均值的性质得

$$E[(X+3)^2]=E(X^2+6X+9)$$
$$=E(X^2)+6E(X)+9$$
$$=D(X)+[E(X)]^2+6E(X)+9$$
$$=0.16+4+6(-2)+9=1.16$$

(2)设$X \sim N(10, 0.6)$，$Y \sim N(1, 2)$，且X与Y相互独立，则$D(3X-Y)=$____

解：由方差的性质得

$$D(3X-Y)=9D(X)+D(Y)$$
$$=5.4+2=7.4$$

(3)设X的概率密度为$f(x)=Ae^{-x^2}$,则$D(X)=$____

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-x^2}dx$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=A\sqrt{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$A=1/\sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}\\ \Downarrow \\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\end{gathered}}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}x^2 e^{-x^2}dx=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}x\,de^{-x^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[xe^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}$$

4、设随机变量$X\sim N(0,1)$, $Y\sim U(0,1)$, $Z\sim B(5,0.5)$, 且X, Y, Z相互独立, 则随机变量$W=(2X+3Y)(4Z-1)$的数学期望为 _____

解 $\frac{27}{2}$

二、选择题

(1)掷一颗均匀的骰子600次,那么出现"一点"次数的均值为___

$(A)50 \qquad (B)100 \qquad (C)120 \qquad (D)150$

解:设X "出现一点的次数",则$X \sim b(600,\frac{1}{6})$

$$E(X)=600\times\frac{1}{6}=100$$

(2)设X_1, X_2, X_3相互独立同服从参数$\lambda=3$的泊松分布,令$Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$,则$E(Y^2)=$____

$(A)1$　　$(B)9$　　$(C)10$　　$(D)6$

解$: E(Y)=E[\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)]=\frac{1}{3}\times 3\times\lambda=3$

$$D(Y)=D[\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)]=\frac{1}{9}\times 3\times\lambda=1$$

$$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=1+9=10$$

(3)对于任意两个随机变量X和Y,若

$E(XY)=E(X)E(Y)$,则___

$(A)D(XY)=D(X)D(Y)$ $(B)D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

$(C)X$和Y相互独立 $(D)X$和Y不相互独立

解:$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$

$$=D(X)+D(Y)$$

三、解答题

1、盒中有7个球,其中4个白球,3个黑球,从中任取3个球,求抽到白球数X的期望$E(X)$和方差$D(X)$.

解:X的分布率为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{C_3^3}{C_7^3}$	$\frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3}$	$\frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3}$	$\frac{C_4^3}{C_7^3}$

$$\boldsymbol{E(X)=12/7}$$

$$\boldsymbol{D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}=\frac{24}{49}$$

2、设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $E(XY),\quad E(X-Y^2)$.

解 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}$

$$E(X-Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y^2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^1(x-y^2)(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1(x^2+xy-xy^2-y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

3、有一物品的重量为1克, 2克, ⋯10克是等概率的, 为用天平称此物品的重量准备了三组砝码, 甲组有五个砝码分别为1, 2, 2, 5, 10克, 乙组为1, 1, 2, 5, 10克, 丙组为1, 2, 3, 4, 10克, 只准备用一组砝码放在天平的一个称盘里称重量, 问哪一组砝码称重物时所用的砝码数平均最少?

解: X "甲组砝码称重物时所用的砝码数"

Y "乙组砝码称重物时所用的砝码数"

Z "丙组砝码称重物时所用的砝码数"

物品的重量是一个随机变量 U,

$$U = k \quad (k = 1, 2, \cdots, 10),$$

$$P\{U = k\} = 1/10 \quad (k = 1, 2, \cdots, 10).$$

$$\{X = 1\} = \{U = 1\} + \{U = 2\} + \{U = 5\} + \{U = 10\}$$

$$\{X = 2\} = \{U = 3\} + \{U = 4\} + \{U = 6\} + \{U = 7\}$$

$$\{X = 3\} = \{U = 8\} + \{U = 9\}$$

X	1	2	3
p_k	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

Y	1	2	3	4
p_k	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Z	1	2	3
p_k	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$\boldsymbol{E(X)=\frac{18}{10},\quad E(Y)=\frac{20}{10},\quad E(Z)=\frac{17}{10}}$$

4、设排球队A和B比赛，若有一队胜4场，则比赛宣告结束，假定A, B在每场比赛中获胜的概率均为$\frac{1}{2}$，试求平均需比赛几场才能分出胜负？

解：设X "需要比赛的场数"

$$\boldsymbol{X} = 4, 5, 6, 7$$

例如

$$\{X = 5\} = \{A\text{胜 4 场}\} \cup \{B\text{胜 4 场}\}$$

$$\{A\text{胜 4 场}\}$$

$$= \{A\text{在前4场中胜 3场}, B\text{胜1场}\} \cap \{\text{第5 场}A\text{必胜}\}$$

$$P(X=4)=2\times(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{8}$$

$$P(X=5)=2\times C_4^3(\frac{1}{2})^3\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=6)=2\times C_5^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

$$P(X=7)=2\times C_6^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

$$E(X)=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}\approx 5.8$$

发行彩票的创收利润

5、某一彩票中心发行彩票10万张, 每张2元. 设头等奖1个, 奖金 1万元, 二等奖2个, 奖金各5千元; 三等奖10个, 奖金各1千元; 四等奖100个, 奖金各1百元; 五等奖1000个, 奖金各10元. 每张彩票的成本费为0.3元, 请计算彩票发行单位的创收利润.

解　设每张彩票中奖的数额为随机变量X, 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X)=10000\times\frac{1}{10^5}+5000\times\frac{2}{10^5}+\cdots+0\times p_0$$

$$=0.5(\text{元}).$$

每张彩票平均可赚 $2-0.5-0.3=1.2(\text{元}).$

因此彩票发行单位发行10万张彩票的创收利润为

$$100000\times1.2=120000(\text{元}).$$

6、设某种商品的需求量X是服从[10,30]上的均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间[10, 30]中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利500元. 若供大于求则削价处理, 每处理1单位商品亏损100元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时每一单位商品仅获利300元.为使商品所获利润期望值不少于9280元, 试确定最少进货量.

解　设进货量为a, 则利润为

$$H(X)=\begin{cases}500a+(X-a)300, & a<X\le 30\\ 500X-(a-X)100, & 10\le X\le a\end{cases}$$

$$=\begin{cases}300X+200a, & a<X\le 30\\ 600X-100a, & 10\le X\le a\end{cases}$$

因此期望利润为

$$E[H(X)]=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}H(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x-100a)\mathrm{d}x+\frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x+200a)\mathrm{d}x$$

$$E[H(X)] = \frac{1}{20}\left(600\times\frac{x^2}{2} - 100ax\right)\Big|_{10}^{a} +$$

$$\frac{1}{20}\left(300\times\frac{x^2}{2} + 200ax\right)\Big|_{a}^{30}$$

$$= -7.5a^2 + 350a + 5250.$$

因此 $-7.5a^2 + 350a + 5250 \geq 9280,$

解得 $20\frac{2}{3} \leq a \leq 26,$ 即最少进货量为21单.

(考研试题)

四、证明题

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty,$

(1)证明$E(X)=0, D(X)=2$

(2)证明X与$|X|$不相互独立

(3)证明X与$|X|$不相关.

证 (1) $\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-|x|}\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

$$=\left[-x^2e^{-x}\right]\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty} \boldsymbol{xe^{-x}dx}$$

$$=2\left[-\boldsymbol{xe^{-x}}\right]\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x}dx}$$

$$=2$$

故 $D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2 = 2$

证明（2）X与$|X|$不相互独立，因为任给$x>0$

$$P(X \le x, |X| \le x) = P(|X| \le x)$$
$$\neq P(X \le x)P(|X| \le x)$$

随机变量函数的数学期望

奇函数

(3) $$E(X|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 0$$

$$Cov(X,|X|) = E(X|X|) - E(X)E(|X|) = 0$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}} = 0$$