考核科目：离散数学
授课时间：2022-2023 学年第一学期
考核形式：课程报告/专题论文
截止日期：2022/12/29 23:59

姓名： 李鹏

学号： 2113850

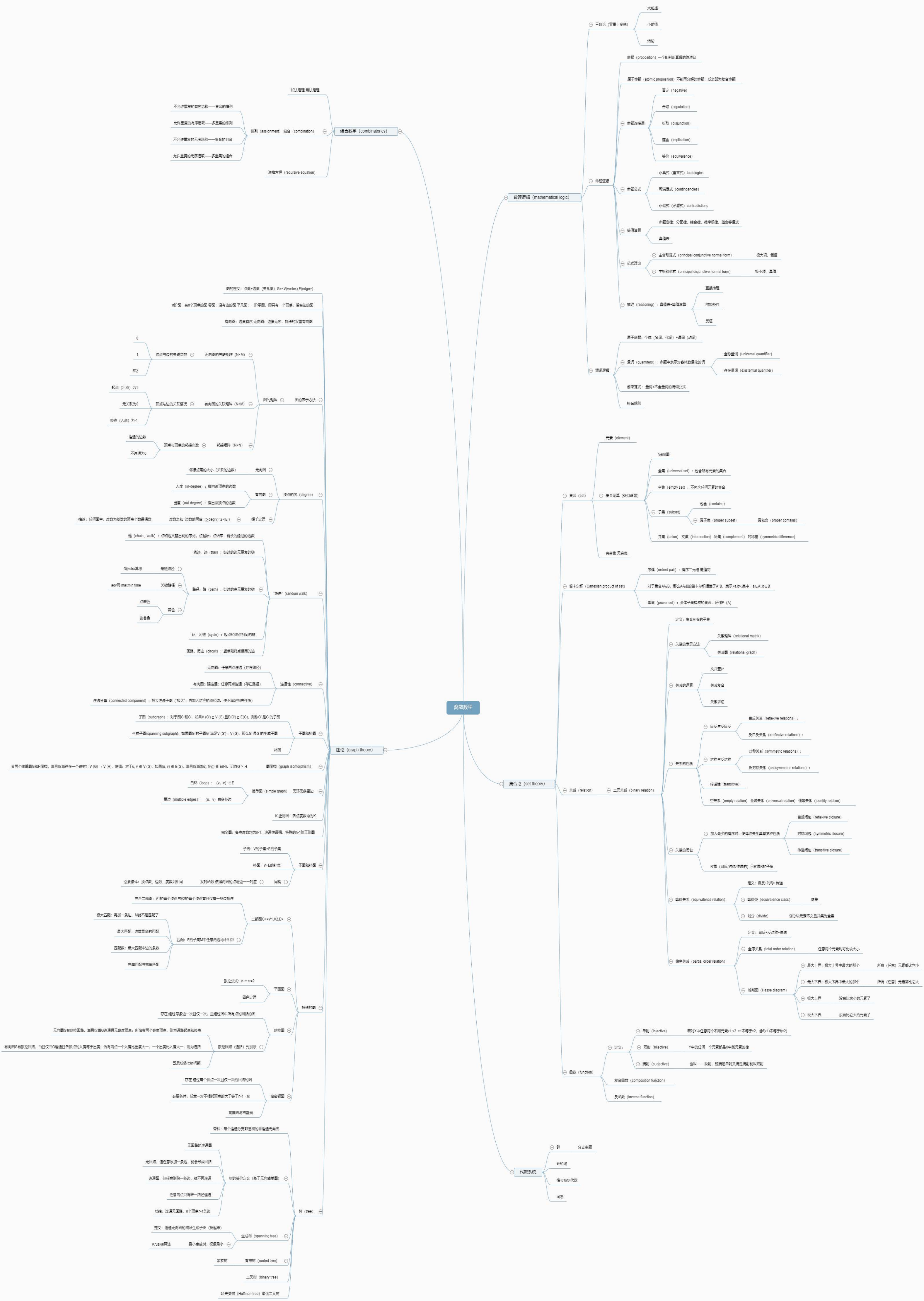
提交时，请填写姓名（请使用电子签名）、学号，并将此页拼接为首页。（截止时间：2022/12/29 23:59）

期末考核包含 2 题，共 100 分（占总成绩的 60%）。

题号	1	2	总计
分数	40	60	100
得分			

1. (40 分) 请根据自己的学习和理解，以图或表的形式，对离散数学的知识点和知识体系进行总结。
   - 请自行采用便捷的方式完成，使用绘图软件、表格、手绘后拍照均可；
   - 此题目完成作答后，请另起一页作答第 2 题。

2. (60 分) 请自选离散数学中的某一个知识点或者某一个知识体系作为主题，通过查阅学习相关资料，以论文或报告的形式对所学内容进行总结并展开深入讨论。
   - 主题包括但不限于：（选题重点在于学习过程中的兴趣和领悟）
     1. 对某个或者某类实际问题，如何应用离散数学模型进行建模；
     2. 对某个知识点或者某些重要性质的巧妙证明；
     3. 对某个离散数学具体题目或者系列题目的求解与分析；
     4. 对某个离散数学相关前沿领域的学习体会或文献综述；
     5. 对某类离散数学问题求解算法的程序实现，或者对某个性质或结论的程序模拟；
     6. ……
   - 论文报告的内容包括：
     1. 题目、摘要；
     2. 问题描述（背景、意义等，力求明确阐述）；
     3. 具体内容：证明方法、建模方式、求解过程、实验结果、伪代码等；
     4. 附录（可选，比如程序代码等）。
   - 评分标准主要考虑：
     1. 论文报告的完成质量（语法正确、表述清晰、格式正确等）；
     2. 论文的逻辑性与思路的连贯性；
     3. 数学表达的规范性与严谨性；
     4. 图和表的准确性与规范性；
     5. 内容翔实，正文篇幅适中（附录不计入篇幅）；
     6. 选题难度；
     7. 根据要求按时完成。


离散数学
组合数学（combinatorics）
加法定理 乘法定理
排列（assignment） 组合（combination）
不允许重复的有序选取——集合的排列
允许重复的有序选取——多重集的排列
不允许重复的无序选取——集合的组合
允许重复的无序选取——多重集的组合
递推方程（recursive equation）
图论（graph theory）
图的定义：点集+边集（关系集）G=<V(vertex),E(edge)>
n阶图：有n个顶点的图 零图：没有边的图 平凡图：一阶零图，即只有一个顶点，没有边的图
有向图：边集有序 无向图：边集无序，特殊的双重有向图
图的表示方法
图的矩阵
无向图的关联矩阵（N×M）
顶点与边的关联次数
0
1
环2
有向图的关联矩阵（N×M）
顶点与边的关联情况
起点（出点）为1
无关联为0
终点（入点）为-1
邻接矩阵（N×N）
顶点与顶点的邻接次数
连通的边数
不连通为0
顶点的度（degree）
无向图
邻接点集的大小（关联的边数）
有向图
入度（in-degree）：指向该顶点的边数
出度（out-degree）：指出该顶点的边数
握手定理
度数之和=边数的两倍（∑deg(v)=2×|E|）
推论：任何图中，度数为基数的顶点个数是偶数
“游走”（random walk）
链（chain、walk）：点和边交替出现的序列。点起始，点结束，链长为经过的边数
轨迹、迹（trail）：经过的边无重复的链
路径、路（path）：经过的点无重复的链
最短路径
Dijkstra算法
关键路径
aov网 maxmin time
着色
点着色
边着色
环、闭链（cycle）：起点和终点相同的链
回路、闭迹（circuit）：起点和终点相同的迹
连通性（connective）
无向图：任意两点连通（存在路径）
有向图：强连通：任意两点连通（存在路径）
连通分量（connected component）：极大连通子图（“极大”：再加入对应的点和边，便不满足相关性质）
子图和补图
子图（subgraph）：对于图G 和G'，如果V (G') ⊆ V (G) 且E(G') ⊆ E(G)，则称G' 是G 的子图
生成子图(spanning subgraph)：如果图G 的子图G' 满足V (G') = V (G)，那么G' 是G 的生成子图
补图
图同构（graph isomorphism）
若两个简单图G和H同构，当且仅当存在一个映射f : V (G) → V (H)，使得：对于u, v ∈ V (G)，如果(u, v) ∈ E(G)，当且仅当(f(u), f(v)) ∈ E(H)。记作G ≃ H
简单图（simple graph）：无环无多重边
自环（loop）：（v，v）∈E
重边（multiple edges）：（u，v）有多条边
K-正则图：各点度数均为K
完全图：各点度数均为n-1，连通性最强，特殊的n-1阶正则图
子图和补图
子图：V的子集+E的子集
补图：V+E的补集
同构
双射函数 使得两图的点与边一一对应
必要条件：顶点数、边数、度数列相同
特殊的图
二部图G=<V1,V2,E>
完全二部图：V1的每个顶点与V2的每个顶点有且仅有一条边相连
匹配：E的子集M中任意两边均不相邻
极大匹配：再加一条边，M就不是匹配了
最大匹配：边数最多的匹配
匹配数：最大匹配中边的条数
完美匹配与完备匹配
平面图
欧拉公式：n-m+r=2
四色定理
欧拉图
存在 经过每条边一次且仅一次，且经过图中所有点的回路的图
欧拉回路（通路）判别法
无向图G有欧拉回路，当且仅当G连通且无奇度顶点；所恰有两个奇度顶点，则为通路起点和终点
有向图G有欧拉回路，当且仅当G连通且各顶点的入度等于出度；恰有两点一个入度比出度大一，一个出度比入度大一，则为通路
哥尼斯堡七桥问题
哈密顿图
存在 经过每个顶点一次且仅一次的回路的图
必要条件：任意一对不相邻顶点的大于等于n-1（n）
竞赛图与格雷码
树（tree）
森林：每个连通分支都是树的非连通无向图
树的等价定义（基于无向简单图）
无回路的连通图
无回路，但任意添加一条边，就会形成回路
连通图，但任意删除一条边，就不再连通
任意两点只有唯一路径连通
总结：连通无回路，n个顶点n-1条边
生成树（spanning tree）
定义：连通无向图的树状生成子图（拎起来）
最小生成树：权值最小
Kruskal算法
有根树（rooted tree）
家族树
二叉树（binary tree）
哈夫曼树（Huffman tree）最优二叉树
数理逻辑（mathematical logic）
三段论（亚里士多德）
大前提
小前提
结论
命题逻辑
命题（proposition）一个能判断真假的陈述句
原子命题（atomic proposition）不能再分解的命题；反之即为复合命题
命题连接词
否定（negative）
合取（copulation）
析取（disjunction）
蕴含（implication）
等价（equivalence）
命题公式
永真式（重言式）tautologies
可满足式（contingencies）
永假式（矛盾式）contradictions
等值演算
命题定律：分配律、结合律、德摩根律、蕴含等值式
真值表
范式理论
主合取范式（principal conjunctive normal form）
极大项、假值
主析取范式（principal disjunctive normal form）
极小项、真值
推理（reasoning）：真值表+等值演算
直接推理
附加条件
反证
谓词逻辑
原子命题：个体（名词、代词）+谓词（动词）
量词（quantifers）：命题中表示对客体数量化的词
全称量词（universal quantifier）
存在量词（existential quantifer）
前束范式：量词+不含量词的谓词公式
换名规则
集合论（set theory）
集合（set）
元素（element）
集合运算（类似命题）
Venn图
全集（universal set）：包含所有元素的集合
空集（empty set）：不包含任何元素的集合
子集（subset）
包含（contains）
真子集（proper subset）
真包含（proper contains）
并集（union） 交集（intersection） 补集（complement） 对称差（symmetric difference）
有穷集 无穷集
笛卡尔积（Cartesian product of set）
序偶（orderd pair）：有序二元组 键值对
对于集合A与B，那么A与B的笛卡尔积相当于A*B，表示<a,b>,其中：a∈A ,b∈B
幂集（power set）：全体子集构成的集合，记作P（A）
关系（relation）
二元关系（binary relation）
定义：集合A×B的子集
关系的表示方法
关系矩阵（relational matrix）
关系图（relational graph）
关系的运算
交并查补
关系复合
关系求逆
关系的性质
自反与反自反
自反关系（reflexive relations）：
反自反关系（irreflexive relations）：
对称与反对称
对称关系（symmetric relations）：
反对称关系（antisymmetric relations）：
传递性（transitive）
空关系（empty relation） 全域关系（universal relation） 恒等关系（identity relation）
关系的闭包
加入最少的有序对，使得该关系具有某种性质
自反闭包（reflexive closure）
对称闭包（symmetric closure）
传递闭包（transitive closure）
R'是（自反/对称/传递的）且R'是R的子集
等价关系（equivalence relation）
定义：自反+对称+传递
等价类（equivalence class）
商集
划分（divide）
划分块元素不交且并集为全集
偏序关系（partial order relation）
定义：自反+反对称+传递
全序关系（total order relation）
任意两个元素均可比较大小
哈斯图（Hasse diagram）
最大上界：极大上界中最大的那个
所有（任意）元素都比它小
最大下界：极大下界中最大的那个
所有（任意）元素都比它大
极大上界
没有比它小的元素了
极大下界
没有比它大的元素了
函数（function）
定义：
单射（injective）
若对X中任意两个不同元素x1,x2. x1不等于x2，像f(x1)不等于f(x2)
双射（bijective）
Y中的任何一个元素都是X中某元素的像
满射（surjective）
也叫一 一映射，既满足单射又满足满射就叫双射
复合函数（composition function）
反函数（inverse function）
代数系统
群
分支主题
环和域
格与布尔代数
同态

一种图同构问题的证明及其判定算法

摘要

本文介绍了图同构问题中的同构对应关系，证明了同构的两个图，各自新增一个顶点和与该顶点关联的若干条边。如果新增顶点的所有关联边 (新增顶点的邻接点) 依然保持同构对应关系，则形成的新图必同构；如果新增顶点至少存在一条关联边 (一个新增顶点的邻接点) 不保持同构对应关系，则形成的新图必不同构。基于此结论，给出了基于子图同构的母图同构判定算法。

关键词： 同构双射函数；同构对应关系；子图同构与母图同构。

对于两个 N 阶图 $G=<V_G,E_G>,H=<V_H,E_H>$，若**存在双射函数** f：$V(G)\to V(H)$，使得任意 $v_i,v_j\in V(G),(v_i,v_j)\in E(G)$ 当且仅当 $(f(v_i),f(v_j))\in E(H)$，并且边 (V_i,V_j) 与边 $(f(V_i),f(V_j))$ 的重数相同，则称 G 和 H 同构。

图同构 (graph isomorphism) 也称图重构，描述的是图论中两个图之间的**完全等价**关系。在图论的观点下，两个同构的图可以视为同一个图来研究。因此，研究图同构问题意义重大。

两个平凡图是**最简单的同构图**（也就是两个点形成的图同构）。此时，同构双射函数 f 是两点间的映射。基于平凡图，加入更多的点和边，如何才能确保所得图仍然保持同构呢？直觉上，由于图同构本质上是一种一一对应的映射关系，所以，我们只需要确保新增加的点和边保持某种“**对应关系**”，便能确保所得的新图仍然保持同构。那么，这种神奇的“对应关系”是怎样的呢？

结论：我们把**同构**的两个图称为**原图**，各自**新增加**一个顶点和与该顶点关联的若干条边 (若干个邻接点) 之后，形成的两个图称为**新图**。(为方便描述，此处使用“原图和新图”，而非“子图和母图”) 那么，以下结论成立 (对于含自环、多重边的复杂图，此结论依然适用)：

结论 1： 两个新图同构的充分必要条件是：新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中保持同构对应关系。

结论 2： 两个新图不同构的充分必要条件是：新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中不保持同构对应关系。

为方便证明叙述，给出如下定义：

1. 点的**邻接点**：若存在从顶点 u 到 v 的边，则称 v 为 u 的邻接点。易知，一个点可有多个邻接点。
2. 点的**关联边**：若顶点 u 和 v 是边 e 的端点，则称 e 为 u 和 v 的关联边。易知，一个点可有多条关联边，一条边有且仅有两个端点，称为边的关联点。
3. 点的**同构对应关系**：若两个 N 阶图 G 和 H 同构，同构双射函数为 f。对于任意的 $u\in V(G),v\in V(H)$，如果 $v=f(u)$，则称顶点 u 和 v 具有点的同构对应关系，记为

$u \leftrightarrow v$。否则称顶点 u 和 v 没有点的同构对应关系，记为 $u \not\leftrightarrow v$。如果是有向图，则邻接点的同构函数关系需要保持相同的有向性。同理，可定义边的同构对应关系，$e_1 \leftrightarrow e_2$，亦即 $(U_1,U_2) \leftrightarrow (V_1,V_2)$。

记　两个 N 阶原图分别为 G 和 H，新增顶点分别为 Unew,Vnew，新图分别为 $G+U$new,$H+V$new。

首先，证明结论 1 的必要性：两个原图同构，新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中保持同构对应关系 $\Rightarrow$ 两个新图同构。考虑到新增顶点 Unew 和 Vnew 都无关联边时，易知，只需在同构双射函数中加入新增顶点的同构对应关系：Unew$\leftrightarrow V$new, 即可证明新图同构。

已知：$G \cong H$，不妨设新增顶点 Unew 的邻接点为 $U_1,U_2,\cdots,U_k$, 新增顶点 Vnew 的邻接点为 $V_1,V_2,\cdots,V_k$, 其中 $k \le N$, 且 $U_1 \leftrightarrow V_1, U_2 \leftrightarrow V_2, \cdots, U_n \leftrightarrow V_n$。

证明：欲证新图 $G+U$new$\cong H+V$new, 由于同构双射函数可能不唯一，我们只需要找到一个确定的同构双射函数 f, 使得 $V(G) \to V(H)$, 任意 $v_i,v_j \in V(G),(v_i,v_j) \in E(G)$ 当且仅当 $(f(v_i),f(v_j)) \in E(H)$，并且边 (V_i,V_j) 与边 $(f(V_i),f(V_j))$ 的重数相同即可。因为原图 $G\cong H$, 所以在原图中是存在同构双射函数的，根据已知条件，原图中点的同构对应关系：$U_1 \leftrightarrow V_1, U_2 \leftrightarrow V_2, \cdots, U_n \leftrightarrow V_n$, 边的同构对应关系：$(U_1,U_2) \leftrightarrow (V_1,V_2),\cdots,(U_i,U_j) \leftrightarrow (V_i,V_j)$, 那么，在新增顶点 Unew,Vnew 及其关联边之后，只需要在原同构函数中加入新增点的同构对应关系：Unew$\leftrightarrow V$new, 新增边的同构对应关系：$(U\text{new},U_1) \leftrightarrow (V\text{new},V_1),\cdots,(U\text{new},U_i) \leftrightarrow (V\text{new},V_i)$, 即可构造出新图中的同构双射函数，故两个新图同构。

其次，证明结论 2 的必要性：两个原图同构，存在新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中不保持同构对应关系 $\Rightarrow$ 两个新图不同构。考虑到新增顶点 Unew 和 Vnew 都无关联边或都有 n 条关联边时，易知两个新图同构，故此种情况不符合题设。若新增顶点 Unew 和 Vnew 关联边数不同，则易知两个新图边数不同，必不同构。故只需证明新增顶点 Unew 和 Vnew 都关联 k 条边 (也就是邻接 k 个顶点)，且至少存在一条边 (一个邻接点) 不保持同构对应关系时，两个新图不同构，其中 $1 \le k \le N-1$。

已知：$G \cong H$, 不妨设新增顶点 Unew 的邻接点为 $U_1,U_2,\cdots,U_k$, 新增顶点 Vnew 的邻接点为 $V_1,V_2,\cdots,V_k$, 其中 $1 \le k \le N-1$。且不存在任何的 $G \cong H$ 的同构双射函数 f: 使得 (1)$U_1 \leftrightarrow V_1, U_2 \leftrightarrow V_2, \cdots, U_{k-1} \leftrightarrow V_{k-1}, U_k \leftrightarrow V_k$, 其余顶点一一对应。(2)$U_1 \leftrightarrow V_1, U_2 \leftrightarrow V_2, \cdots, U_{k-1} \leftrightarrow V_k, U_k \leftrightarrow V_{k-1}$, 其余顶点一一对应。$\cdots\cdots$ (k!)$U_1 \leftrightarrow V_k, U_2 \leftrightarrow V_{k-1}, \cdots, U_{k-1} \leftrightarrow V_2, U_k \leftrightarrow V_1$, 其余顶点一一对应。这 k! 种情况中任何一种情况成立。

证明：采用反证法证明。假设 $G+U$new$\cong H+V$new, 则有两种情况：1.Unew$\leftrightarrow V$new;2.Unew$\not\leftrightarrow V$new。

对于情况 1：因为 Unew 的邻接点 $U_1,U_2,\cdots,U_k$，Vnew 的邻接点 $V_1,V_2,\cdots,V_k$, 由于 $G+U$new$\cong H+V$new 且 Unew$\leftrightarrow V$new，所以 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 和 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 必然存在某种一一对应关系。而且，无论其满足何种一一对应关系，已知的 k! 种情况之一必然是其原图同构双射函数的子集。这与已知中“不存在同构双射函数 f，使得这 k! 种情况种任何一种情况成立”相矛盾，故 Unew$\leftrightarrow V$new 不成立。

对于情况 2：因为 $G+U$new$\cong H+V$new，且 Unew$\not\leftrightarrow V$new, 则必然存在 $U_s \in V(G)$, 其邻接点为 $U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sk}$, 使得在 $G+U$new$\cong H+V$new 下，$U_s \leftrightarrow V\text{new}, U_{s1} \leftrightarrow V_1, U_{s2} \leftrightarrow V_2, \cdots, U_{sk} \leftrightarrow V_k$, 同时，必然存在 $V_t \in V(H)$, 其邻接点为 $V_{t1},V_{t2},\cdots,V_{tk}$, 使得在 $G+U$new$\cong H+V$new 下，$U\text{new} \leftrightarrow V_t, U_1 \leftrightarrow V_{t1}, U_2 \leftrightarrow V_{t2}, \cdots, U_k \leftrightarrow V_{tk}$, 同时，其余顶点一一对应。在删掉 Unew 和 Vnew 后，由于两个原图 $G \cong H$，且 Unew$\not\leftrightarrow V$new，则 $U_1 \not\leftrightarrow V_{t1}, U_2 \not\leftrightarrow V_{t2}, \cdots, U_k \not\leftrightarrow V_{tk}$

;$U_{s1} \nleftrightarrow V_1, U_{s2} \nleftrightarrow V_2, \cdots, U_{sk} \nleftrightarrow V_k$ 共 k 个式子中，至少有一个成立 (也就是说：$U_1, U_2, \cdots, U_k$ 和 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 中至少有一对顶点不保持同构对应关系)。所以在图 H 中，必然存在另外的 k 个顶点 $V_1', V_2', \cdots, V_k'$，使得 $U_1 \leftrightarrow V_1', U_2 \leftrightarrow V_2', \cdots, U_k \leftrightarrow V_k'$。其中，$V_1, V_2, \cdots, V_k$ 可以是部分顶点，但根据已知中" 不存在同构双射函数 f，使得这 k! 种情况种任何一种情况成立 "(也就是说: 这 k! 种情况必定不成立)，若为全部顶点，即：$U_1 \leftrightarrow V_1, U_2 \leftrightarrow V_2, \cdots, U_{k-1} \leftrightarrow V_{k-1}, U_k \leftrightarrow V_k$，则第 (1) 种情况成立，故不可以是全部的顶点。既然如此，那么必然会有" 多余 "的顶点，使得在图 G 中，必然存在另外的 k 个顶点来满足点的同构对应关系，类似地，这 k 个顶点又不能全部是原来的顶点，必然需要新的" 多余 "的顶点来满足点的同构对应关系 …… 由此循环往复，为了能够维持 $G \cong H$ 中点的同构对应关系，需要 N 阶图 G 和 H 有无穷多个顶点，这与 N 阶图有 N 个顶点相矛盾。故 $U\text{new} \nleftrightarrow V\text{new}$ 不成立。

情况 1 说明 $U\text{new} \leftrightarrow V\text{new}$ 不成立，情况 2 说明 $U\text{new} \nleftrightarrow V\text{new}$ 不成立，由此推出假设 $G + U\text{new} \cong H + V\text{new}$ 不成立，故两个新图 G 和 H 不同构。

最后，证明结论 1 的充分性和结论 2 的充分性。

结论 1 的充分性：两个原图同构，且两个新图同构 ⇒ 新增顶点的关联（新增顶点的邻接点）在原图中保持同构对应关系。

证明：假设存在新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中不保持同构对应关系，又因为原图是同构的，那么根据结论 2 的必要性可知，两个新图不同构，这与 "两个新图同构" 矛盾，故假设错误，即新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中保持同构对应关系。结论 1 充分性得证。

结论 2 的充分性：两个原图同构，且两个新图不同构 ⇒ 存在新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中不保持同构对应关系。

证明：假设新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中都保持同构对应关系，又因为原图是同构的，那么根据结论 1 的必要性可知，两个新图同构，这与 "两个新图不同构" 矛盾，故假设错误，即存在新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中不保持同构对应关系。结论 2 充分性得证。

综上所述，结论 1、2 成立。即：结论 1：*若两个原图同构，那么两个新图同构的充要条件是新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中保持同构对应关系。*结论 2：*若两个原图同构，那么两个新图不同构的充分必要条件是：存在新增顶点的关联边（新增顶点的邻接点）在原图中不保持同构对应关系。*

基于结论 1，我们便可以从最简单的两个平凡图同构出发，每次各新增一个顶点，使其邻接点在原图中保持同构关系，从而确保新图同构。(*猜测：任意两个同构图均可由两个平凡图经过多次适当的新增顶点及关联边得到——" 数学归纳法"*)

类比 **" 减法是加法的逆运算**"，结合以上结论，猜测：若两个阶数大于等于 2 的图同构，各自删去一个具有对应关系的顶点及其关联边，所得子图同构。换句话说，任意两个阶数大于等于 2 的 N 阶同构图，必然存在同构的 N-1 阶子图。

据此，基于子图同构的母图同构判定算法如下：

Input: 图 G 的顶点集 V（G）和边集 E（G），图 H 的顶点集 V（H）和边集 E（H）。

Output:True ⇔ 图 G 和 H 同构，False⇔ 图 G 和 H 不同构。

Step1：计算图 G 和 H 的所有顶点的度数，并按从小到大的次序重新编号为 $U_1,U_2,\cdots,U_n,V_1,V_2,\cdots,V_n$。如果两个图的顶点度数序列不一致，则说明两个图 G 和 H 不同构，算法结束，返回 False 值。

Step2: 不断删除相同度数的、且最小度数的一个顶点，获得子图，直至子图仅含两个顶点为止。在这个过程中，每一次删除顶点时，应当保证新生成的子图具有顶点度数序列一致性。如果不能得到仅含两个顶点的子图 $G^{(n-2)}$ 和 $H^{(n-2)}$ ，不妨设得到子图 $G^{(n-i)}$ 和 $H^{(n-i)}$（这里 i>2）后中断删除操作，则必有 $G^{(n-i)}$ 和 $H^{(n-i)}$ 的顶点度数序列不一致。所以，必有 $G^{(n-i)}$ 和 $H^{(n-i)}$ 不同构，，转步骤 7 的后半部分操作。否则，得到了仅含两个顶点的子图 $G^{(n-2)}$ 和 $H^{(n-2)}$ ，转步骤 3。不失一般性，假设删除顶点后，获得的一系列的子图为;$G^{(1)}=G-U_1,H^{(1)}=H-V_1;G^{(2)}=G^{(1)}-U_2=G-U_1-U_2,H^{(2)}=H^{(1)}-V_2=H-v_1-V_2;\cdots;G^{(n-2)}=G^{(n-3)}-U_{n-2}=(G-U_1-\cdots-U_{n-3})-U_{n-2},H^{(n-2)}=H^{(n-3)}-V_{n-2}=(H-V_1-\cdots-V_{n-3})-V_{n-2}$。

Step3: 令子图 $SG=G^{(n-2)}=(G-U_1-\cdots-U_{n-3})-U_{n-2},SH=H^{(n-2)}=(H-V_1-\cdots-V_{n-3})-V_{n-2}$。直接判断两个顶点的子图 SG 和 SH 是否同构。若同构，则转步骤 5。若不同构，则转步骤 9。

Step4: 直接判断两个顶点的子图 SG 和 SH 是否同构。若同构，则转步骤 5。若不同构，则转步骤 9。

Step5: 寻找 $SG\cong SH$ (即 $G^{(n-i)}\cong H^{(n-i)}$) 的所有的同构函数。

Step6: 在子图 SG 和 SH 中，新增顶点 U_{n-i} 和 V_{n-i}，以及相应的关联边 (即回溯到上一级子图 $G^{(n-(i+1))}$ 和 $H^{(n-(i+1))}$)。

Step7: 根据新增顶点的邻接点是否有点的同构对应关系，判断 SG+U_{n-i} 和 SH+V_{n-i} 是否同构 (即 $G^{(n-(i+1))}$ 和 $H^{(n-(i+1))}$ 是否同构)。若同构，则 $SG+\mathrm{U}_{n-i}\Leftrightarrow SG,SH+\mathrm{V}_{n-i}\Leftrightarrow SH$,$i+1\Leftrightarrow i$(即 $G^{(n-(i+1))}\Leftrightarrow SG,H^{(n-(i+1))}\Leftrightarrow SH$)，转步骤 8。若不同构，则 $SG+\mathrm{U}_{n-i}\Leftrightarrow SG,SH+\mathrm{V}_{n-i}\Leftrightarrow SH$ ，转步骤 9.

Step8: 若 |V(SG)|=|V(G)|，则判定图 G 和 H 同构，算法结束，返回 True 值。否则，转步骤 5。

Step9: 若 |V(SG)|=|V(G)|，则说明 $G^{(1)}\cong H^{(1)}$ 而图 G 和 H 不同构。因此，可以判定图 G 和 H 不同构，算法结束，返回 False 值。否则，由于已经执行完步骤 7 的后半部分操作, 使得 $H^{(n-i)}$ 已经回溯到母图 (即上一级子图)$H^{(n-(i+1))}$。因此，可以重新选择相同度数的其他顶点 V_{n-1} 进行删除，重复步骤 2。如果回溯到父图 $H^{(n-(i+1))}$ ，考虑完了所有相同度数的其他顶点 V_{n-1} 进行删除后，仍然有父图的子图 (即 $G^{(n-i)}$ 和 $H^{(n-i)}$) 不同构，则继续回溯到祖父图 (即上上一级子图) $H^{(n-(i+2))}$ ，重新选择相同度数的其他顶点 $V_{n-(i+1)}$ 进行删除，重复步骤 2。这样的回溯过程可以一直进行下去，直至考虑完了原图 G 和 H 的所有相同度数的其他顶点 V_1 后，仍然有 $G-U_1$ 和 $H-V_1$ 不同构，则判定图 G 和 H 不同构，算法结束，返回 False 值。

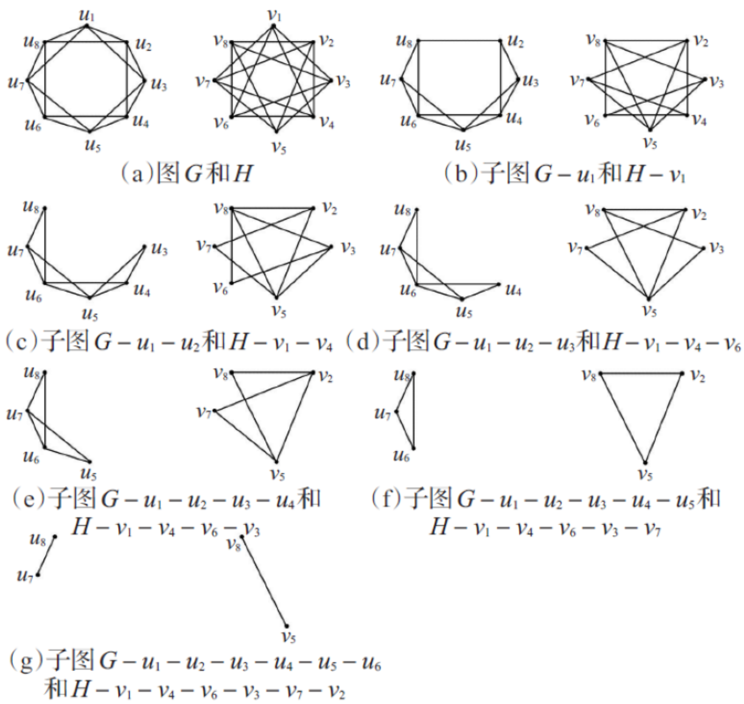


图 1: 图同构的判定算法示例

在图 G 中 $deg(U_1) = deg(U_2) = \cdots = deg(U_8) = 4$ 在图 H 中 $deg(V_1) = deg(V_2) = \cdots = deg(V_8) = 4$,G 和 H 都是八阶 4-正则图。

图 (a) 给出了原图 G 和 H。图 (b) 给出了删除顶点 U_1 和 V_1 后，获得的第 1 代子图 $G-U_1$ 和 $H-V_1$ 。图 (c) 给出了删除顶点 U_2 和 V_4 后，获得的第 2 代子图 $G-U_1-U_2$ 和 $H-V_1-V_4$ 。在 $G-U_1$ 中，$\deg(U_2)$ =3。因此，在子图 $H-V_1$ 中，可以删除顶点 V_3 ，或 V_4 ，或 V_6 ，或 V_7 。又由于要保证删除后的子图具有相同的顶点度数序列，因此，只能删除顶点 V_4 ，或 V_6 。不失一般性，假设选择顶点 V_4 进行删除。其余子图的获得以此类推。

第 0 次迭代：i=2，只有两个顶点的子图同构，$G-U_1-U_2-U_3-U_4-U_5-U_6 \cong H-V_1-V_4-V_6-V_3-V_7-V_2$ 。见图 (g)。所有的同构函数为：$f_1^{(0)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_8$ ，$U_7 \leftrightarrow V_5$ 。$f_2^{(0)}$：$U_8 \leftrightarrow V_5$ ，$U_7 \leftrightarrow V_8$ 。

第 1 次迭代：i=3，新增顶点 U_6 和 V_2 ，以及关联边 (U_6 ，U_7)，(U_6 ，U_8)，(V_2，V_5)，(V_2 ，V_8)。显然，三个顶点的子图同构，$G-U_1-U_2-U_3-U_4-U_5 \cong H-V_1-V_4-V_6-V_3-V_7$。见图 (f)。根据上述结论，同构函数 $f_1^{(0)}$ 和 $f_2^{(0)}$ 依然成立。只需在原同构函数中加入新增顶点的同构对应关系，即可找到新的同构函数。更新后所有的同构函数为：$f_1^{(1)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_8$，$U_7 \leftrightarrow V_5$，$U_6 \leftrightarrow V_2$。f_2 ：$U_8 \leftrightarrow V_5$ ，$U_7 \leftrightarrow V_8$，$U_6 \leftrightarrow V_2$。$f_3^{(1)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_2$，$U_7 \leftrightarrow V_5$，$U_6 \leftrightarrow V_8$。$f_4^{(1)}$：$U_8 \leftrightarrow V_2$ ，$U_7 \leftrightarrow V_8$，$U_6 \leftrightarrow V_5$。$f_5^{(1)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_8$，$U_7 \leftrightarrow V_2$，$U_6 \leftrightarrow V_5$。$f_6^{(1)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_5$，$U_7 \leftrightarrow V_2$，$U_6 \leftrightarrow V_8$ 。

第 2 次迭代：i=4，新增顶点 U_5 和 V_7 ，以及关联边 (U_5 ，U_6)，(U_5 ，U_7)，(V_7 ，V_2)，(V_7，V_5)。显然，四个顶点的子图同构，$G-U_1-U_2-U_3-U_4 \cong H-V_1-V_4-V_6-V_3$ 。见图 (e)。根据上述结论，同构函数 $f_1^{(1)}$ 和 $f_5^{(1)}$ 依然成立。只需在原同构函数中加入新增顶点的同构对应关系，即可找到新的同构函数。更新后所有的同构函数为：$f_1^{(2)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_8$ ，$U_7 \leftrightarrow V_5$ ，$U_6 \leftrightarrow V_2$ ，$U_5 \leftrightarrow V_7$ 。$f_2^{(2)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_8$，$U_7 \leftrightarrow V_2$，$U_6 \leftrightarrow V_5$，$U_5 \leftrightarrow V_7$。$f_3^{(2)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_7$，$U_7 \leftrightarrow V_5$ ，$U_6 \leftrightarrow V_2$，$U_5 \leftrightarrow V_8$ 。$f_4^{(2)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_7$，$U_7 \leftrightarrow V_2$，$U_6 \leftrightarrow V_5$ ，$U_5 \leftrightarrow V_8$ 。

……**依次进行迭代**……

第 6 次迭代：i=8，新增顶点 U_1 和 V_1 ，以及关联边 (U_1 ，U_2)，(U_1 ，U_3)，(U_1 ，U_7)，(U_1 ，U_8)，(V_1 ，V_3)，(V_1 ，V_4)，(V_1 ，V_6)，(V_1，V_7)。显然，八个顶点的子图（即原图）同构，$G \cong H$ 。见图 (a)。根据上述结论，同构函数 $f_1^{(5)}$ 和 $f_2^{(5)}$ 依然成立。只需在原同构函数中加入新增顶点的同构对应关系，即可找到新的同构函数。更新后所有的同构函数为：$f_1^{(6)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_6$ ，$U_7 \leftrightarrow V_3$ ，$U_6 \leftrightarrow V_8$ ，$U_5 \leftrightarrow V_5$ ，$U_4 \leftrightarrow V_2$ ，$U_3 \leftrightarrow V_7$ ，$U_2 \leftrightarrow V_4$ ，$U_1 \leftrightarrow V_1$ 。$f_2^{(6)}$ ：$U_8 \leftrightarrow V_4$ ，$U_7 \leftrightarrow V_7$ ，$U_6 \leftrightarrow V_2$ ，$U_5 \leftrightarrow V_5$ ，$U_4 \leftrightarrow V_8$ ，$U_3 \leftrightarrow V_3$ ，$U_2 \leftrightarrow V_6$ ，$U_1 \leftrightarrow V_1$ 。$f_1^{(6)}$ 和 $f_2^{(6)}$ 是 $G \cong H$ 的同构函数。

至此，已经得出八个顶点的子图同构，即 $G \cong H$。在每次迭代的过程中，可以发现：第 1 次迭代后得到的同构函数，是在第 0 次迭代后得到的同构函数的基础上，直接补充**新的顶点对应关系** $U_6 \leftrightarrow V_2$ 得到的；第 2 次迭代后得到的同构函数，是在第 1 次迭代后得到的同构函数的基础上，直接补充**新的顶点对应关系** $U_5 \leftrightarrow V_7$ 得到的；…… 第 6 次迭代后得到的同构函数, 应当也是在第 5 次迭代后得到的同构函数的基础上，直接补充**新的顶点对应关系** $U_1 \leftrightarrow V_1$ 得到的。即：$G-U \cong H-V$ 的一个同构函数 f，通过直接补充新增顶点的同构对应关系 v=f（u)，必然将 f 升阶为 $G \cong H$ 的一个同构函数, 这也再次证明“同构的两个图，各自新增一个顶点和与该顶点关联的若干条边。如果新增顶点的所有关联边 (新增顶点的邻接点) 依然保持对应关系，则形成的新图必同构”。