第四章第二次与第五章 补充作业题

1、 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)=2$, $D(X)=1$, $E(Y)=2$, $D(Y)=4$，令 $Z = 3X + 2Y$,

（1） 利用切比雪夫不等式求出 $P(0 < Z < 20)$的一个下界。

（2） 假设 X 与 Y 满足的都是正态分布，其它数据同上，重新求 $P(0 < Z < 20)$。（备注：使用正态分布的线性性质，即 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $Z = aX + bY$ 服从正态分布 $N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$）

2、 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{3}{2}x\left(1+y^2\right), & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), E(XY), D(X), D(Y), Cov(X,Y), \rho_{XY}$。

3、 设 $\varphi(x)$ 是正值非递减函数，X 是连续型随机变量，且 $E[\varphi(X)]$ 存在，求证：

$$P(X \ge a) \le \frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)}$$

（提示：借鉴讲义中对切比雪夫不等式的证明过程。）

4、 学校食堂出售盒饭，共有三种价格 8 元，9 元，10 元，出售哪一种盒饭是随机的。售出三种价格盒饭的概率分别为 0.3，0.2，0.5。已知某天共售出 100 盒，试用中心极限定理求这天收入在 910 元至 930 元之间的概率。

5. 补充题：将 n 只球（1~n 号）随机地放进 n 个盒子（1~n 号）中去，一个盒子装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对。记 X 为总的配对数，求 $E(X)$。如果有可能，请求出 $D(X)$。

（备注：有兴趣同学选做，不算分数。）