第六章　　样本及抽样分布
习　题　课

1

例1　设 X 服从 $N(0,1)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_6)$为来自总体 X 的简单随机样本,

$$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$$

试决定常数 C, 使得 CY 服从 χ^2 分布.

解　根据正态分布的性质,

$$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3),$$
$$X_4+X_5+X_6\sim N(0,3),$$

2

则 $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$, $\dfrac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$,

故 $\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(1)$, $\left(\dfrac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(1)$,

因为 $X_1,X_2,\cdots,X_6$相互独立及 χ^2 分布的可加性,

$$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{3}[(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2]\sim\chi^2(2),$$

所以$C=\dfrac{1}{3}$, CY 服从 χ^2 分布.

3

例2　设 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的容量为n的两样本 $(X_{11},X_{12},\cdots,X_{1n})$和$(X_{21},X_{22},\cdots,X_{2n})$的样本均值, 试确定 n, 使得这两个样本均值之差超过σ的概率大约为0.01.

解　$\overline{X}_1\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$,　$\overline{X}_2\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$,

则 $\overline{X}_1-\overline{X}_2\sim N\left(0,\dfrac{2\sigma^2}{n}\right)$,

$$P\{|\overline{X}_1-\overline{X}_2|>\sigma\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{2/n}\,\sigma}\right|>\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$$

4

$$=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{2/n}\,\sigma}\right|\le\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$\approx 1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]=2-2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)=0.01,$$

有 $\Phi\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)\approx 0.995$,　查标准正态分布表知

$\sqrt{\dfrac{n}{2}}=2.58$,　　于是 $n=14$.

5

例3　设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 从此总体中取一个容量为 $n=16$ 的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_{16})$, 求概率

(1) $P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\le 2\sigma^2\right\}$;

(2) $P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\le 2\sigma^2\right\}$.

解 (1) 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自正态总体的样本,

所以 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$,

6

于是 $P\left\{\frac{\sigma^2}{2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \le 2\sigma^2\right\}$

$= P\left\{8 \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)^2 \le 32\right\}$

$= P\{8 \le \chi^2(16) \le 32\}$

$= P\{\chi^2(16) \le 32\} - P\{\chi^2(16) \le 8\}$

$= [1 - P\{\chi^2(16) \ge 32\}] - [1 - P\{\chi^2(16) \ge 8\}]$

$= 0.94;$

(2)因为 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1),$ （定理二）

于是 $P\left\{\frac{\sigma^2}{2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \le 2\sigma^2\right\}$

$= P\left\{8 \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2 \le 32\right\}$

$= P\{8 \le \chi^2(15) \le 32\}$

$= P\{\chi^2(15) \ge 8\} - P\{\chi^2(15) \ge 32\} = 0.98\,.$

例4、在总体$N(12,4)$中随机抽一容量为5的样本$X_1,\cdots,X_5$.

⑴ 求样本均值与总体均值之差的绝对值大于1 的概率；

⑵ 求概率$P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)>15\}$;

$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)<10\}$.

解

(1) 由$\overline{X} \sim N(12,\frac{4}{5})$,有

$P\{|\overline{X}-12|>1\} = 1 - P\left\{\frac{-1}{2/\sqrt{5}} \le \frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}} \le \frac{1}{2/\sqrt{5}}\right\}$

$= 1 - \Phi(2/\sqrt{5}) + \Phi(-2/\sqrt{5})$

$= 2 - 2\Phi(2/\sqrt{5}) = 0.2628$

例4、在总体$N(12,4)$中随机抽一容量为5的样本$X_1,\cdots,X_5$.

⑴ 求样本均值与总体均值之差的绝对值大于1 的概率；

⑵ 求概率$P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)>15\}$;

$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)<10\}$.

(2) $P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)>15\}$

$= 1 - P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5) \le 15\}$

$= 1 - P\{X_1 \le 15, X_2 \le 15, X_3 \le 15, X_4 \le 15, X_5 \le 15\}$

$= 1 - \prod_{i=1}^{5} P\{X_i \le 15\} = 1 - \prod_{i=1}^{5} P\left\{\frac{X_i-12}{2} \le \frac{15-12}{2}\right\}$

$= 1 - \prod_{i=1}^{5}\Phi(1.5)$

$= 1 - \Phi(1.5)^5 = 0.2923$

(3)$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)<10\}$

$= 1 - P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5) \ge 10\}$

$= 1 - P\{X_1 \ge 10, X_2 \ge 10, X_3 \ge 10, X_4 \ge 10, X_5 \ge 10\}$

$= 1 - \prod_{i=1}^{5} P\{X_i \ge 10\}$

$= 1 - \prod_{i=1}^{5}\left[1 - P\left\{\frac{X_i-12}{2} < \frac{10-12}{2}\right\}\right]$

$= 1 - \prod_{i=1}^{5}[1-\Phi(-1)] = 1 - \Phi(1)^5 = 0.5785$