

4 安培环路定理

主要内容

- 安培环路定理的表述与证明
- 安培环路定理的应用
- 磁场对载流导线的作用
- 电流单位“安培”的定义

- 静电场的环路定理:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- 稳恒磁场的环流关系
—— 描述磁场的性质



静电场是保守场，可引入电势概念

一 安培环路定理

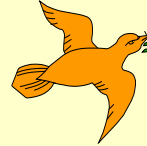
1. 安培环路定理的表述与证明

安培环路定理：磁感应强度沿任意闭合路径一周的线积分等于穿过这闭合路径所有的电流代数和的 μ_0 倍，即

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I$$

证明:

以无限长载流导线为例



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

1) 闭合曲线L围绕电流, 且曲线所在平面垂直载流导线

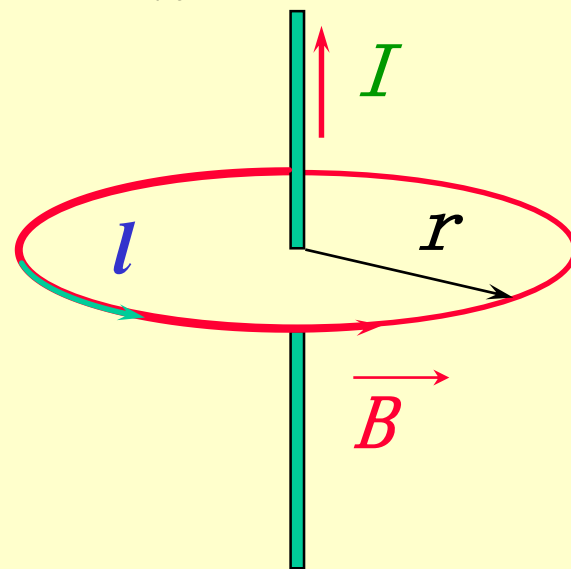
(1) 圆形环路

由毕-萨定律求得: 长直导线旁

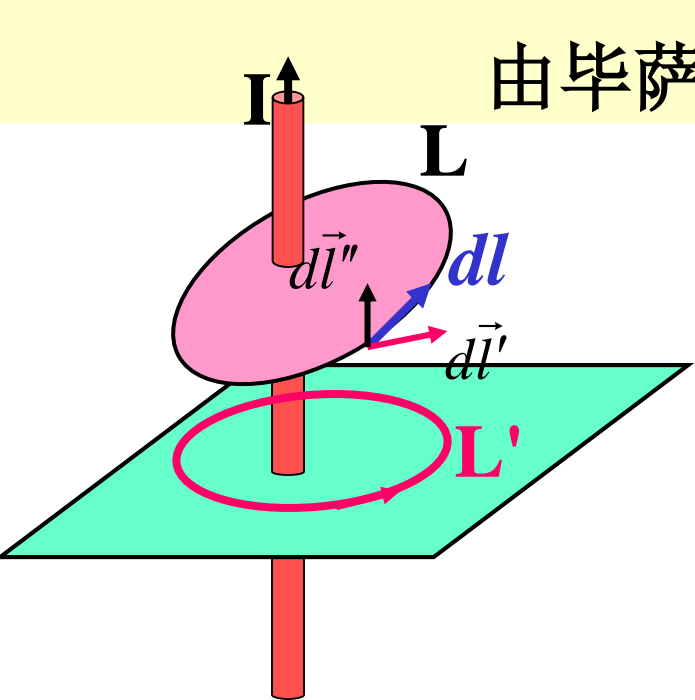
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint B dl = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r \end{aligned}$$

$$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



(2) 任意回路，曲线所在平面垂直载流导线



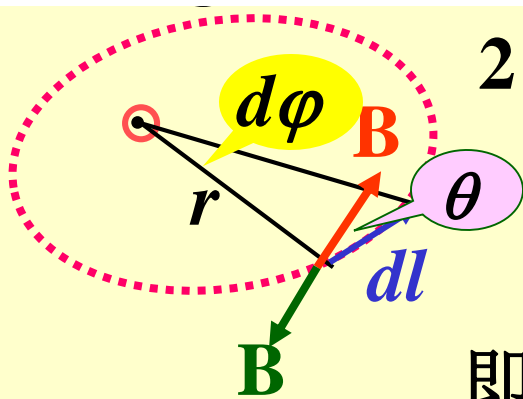
由毕萨定律求得：长直导线旁 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos\theta dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi$$

$$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

若L的方向不变，而电流反向

则： $\vec{B} \uparrow \downarrow d\vec{l}$ $\cos\theta < 0$ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$



2) 若闭合曲线不在垂面上： $d\vec{l}$ 分解 $\begin{cases} d\vec{l}' \\ d\vec{l}'' \end{cases}$

$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{B} \cdot (d\vec{l}' + d\vec{l}'')$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{而 } \vec{B} \perp d\vec{l}'' \\ \text{所有 } d\vec{l}' \text{ 在} \\ \text{垂面上形成 } L' \end{array} \right.$

即： $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}' = \mu_0 I$

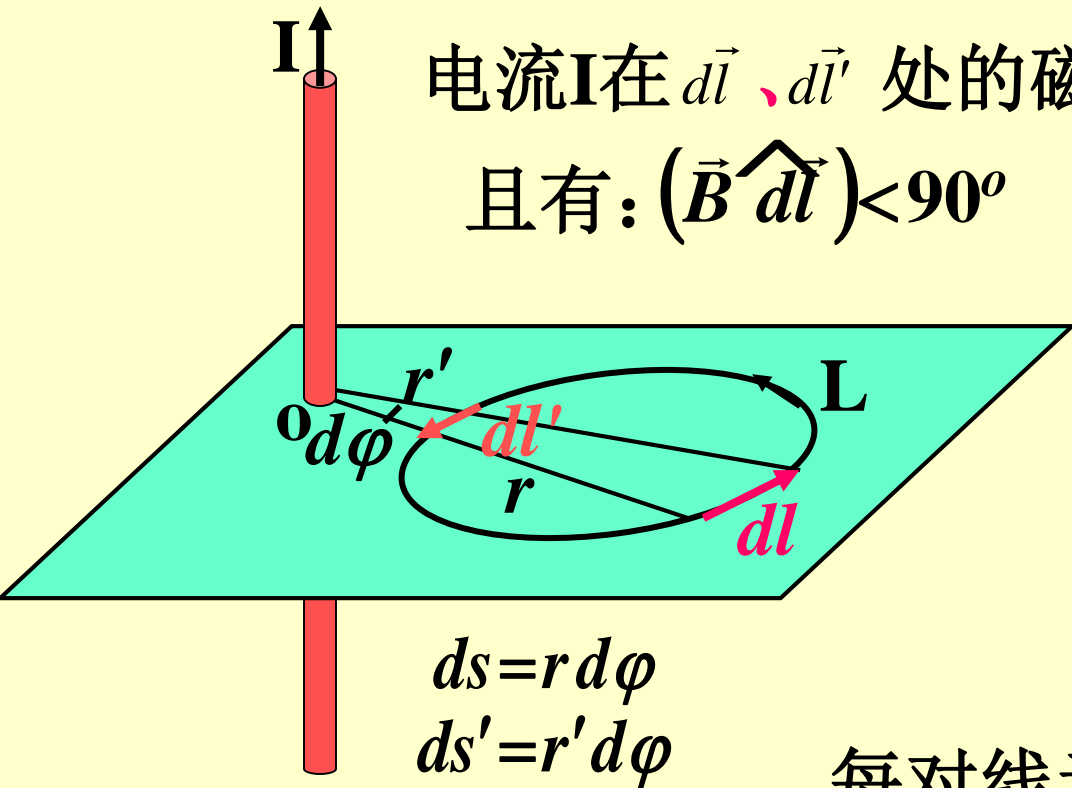
3) 闭合曲线L不包围载流导线

从o点引出夹角为 $d\varphi$ 的两条射线，在L上截得 $d\vec{l}$ 、 $d\vec{l}'$

电流I在 $d\vec{l}$ 、 $d\vec{l}'$ 处的磁场分别为：

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} \end{array} \right.$$

且有： $(\vec{B} \wedge d\vec{l}) < 90^\circ$ $(\vec{B}' \wedge d\vec{l}') > 90^\circ$



$$ds = r d\varphi$$

$$ds' = r' d\varphi$$

$$\begin{aligned} & \vec{B} \cdot d\vec{l} + \vec{B}' \cdot d\vec{l}' \\ &= B dl \cos\theta + B' dl' \cos\theta' \\ &= B ds - B' ds' \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cancel{r} d\varphi - \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} \cancel{r'} d\varphi = 0 \end{aligned}$$

每对线元的 $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ 之和均为0

\therefore 整个闭合路径积分 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

注： 不穿过闭合回路L 的电流 I 对 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 无贡献，
但对L上各点的B贡献不为0

• 环路不包围电流，则磁场环流为零

4) 闭合曲线L包围多根载流导线

1),2)已证一长直导线I, 当它穿过L时, 由I的方向不同

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I \\ -\mu_0 I \end{cases}$$

3)已证, I不穿过L时, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

若同时有K根载流导线, 并且 $I_1 \dots I_n$ 穿过L,

而 $I_{n+1} \dots I_K$ 不穿过L


$$\text{那么: } \oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1 \quad \oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_2 \quad \dots \quad \oint \vec{B}_n \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_n$$

$$\text{而: } \oint \vec{B}_{n+1} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \dots \quad \oint \vec{B}_K \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\text{矢量叠加: } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_k) \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \oint \vec{B}_K \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 (I_1 + I_2 + \dots + I_n)$$

即: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$  适用于稳恒磁场的任何情况

结论： 稳恒电流的磁场中，磁感应强度沿一闭合路径 L 的线积分等于路径 L 包围的电流强度的代数和的 μ_0 倍

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I$$

—— 安培环路定理

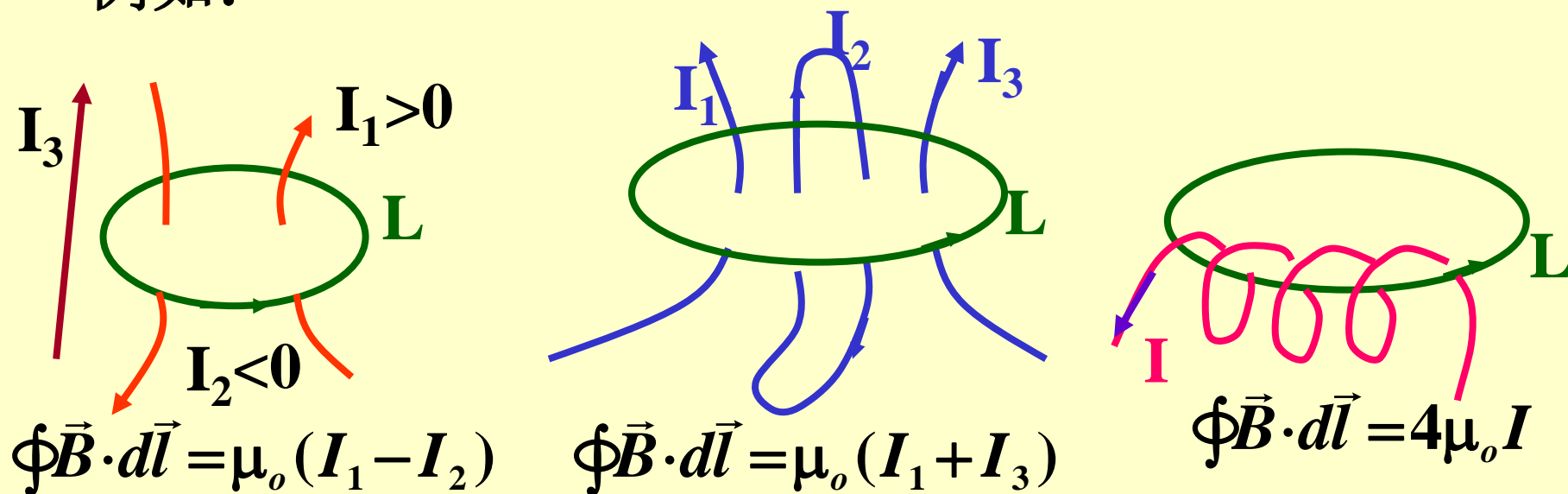
若穿过回路的电流是连续分布： $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$

讨论:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

- 电流强度 I 的符号规定: 穿过回路 L 的电流方向与 L 的环绕方向服从右手螺旋关系的 $I_i > 0$, 否则 $I_i < 0$ 。
若 I 不穿过 L , 则 $I=0$

例如:



- 它只适用于稳恒电流。
- 表明磁场是非保守场，有旋场（电流是磁场涡旋的中心）
- $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 不代表磁场力的功，仅是磁场与电流的关系
- 环路上各点的磁场为所有电流的贡献（由环路内外电流产生）
但只有 $I_{\text{内}}$ 对环流 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 有贡献

稳恒磁场的性质

高斯定理: $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{无源场}$


安培环路定理: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i \quad \rightarrow \quad \text{有旋场}$

比较静电场:

静电场高斯定理: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{闭合面内}} q_i \quad \rightarrow \quad \text{有源场}$

静电场环路定理: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{无旋场}$

二 安培环路定理的应用

 毕—萨定律可以计算任意电流的磁场 \vec{B}
安培环路定理可以计算对称性磁场的 \vec{B}

安培环路定理为我们提供了求磁感应强度的另一种方法。但利用安培环路定理求磁感应强度要求磁场具有高度的对称性。

利用安培环路定理求磁感应强度的关键：根据磁场分布的对称性，选取合适的闭合环路。


1. 选取环路原则

若电流分布具有对称性，

(1) 环路要经过所研究的场点。

(2) 环路的长度便于计算；

(3) 要求环路上各点 \vec{B} 大小相等， \vec{B} 的方向与环路方向一致，
目的是将：

$$\vec{B} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I \quad \text{写成} \quad B = \frac{\mu_0 \sum I}{\oint dl}$$


或 \vec{B} 的方向与环路方向垂直，

$$\vec{B} \perp d\vec{l} \quad , \quad \cos\theta = 0 \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

2. 例题

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i$$

例1 求无限长圆柱面电流的磁场分布。

解：无限长，具有沿 z 方向的平移不变性

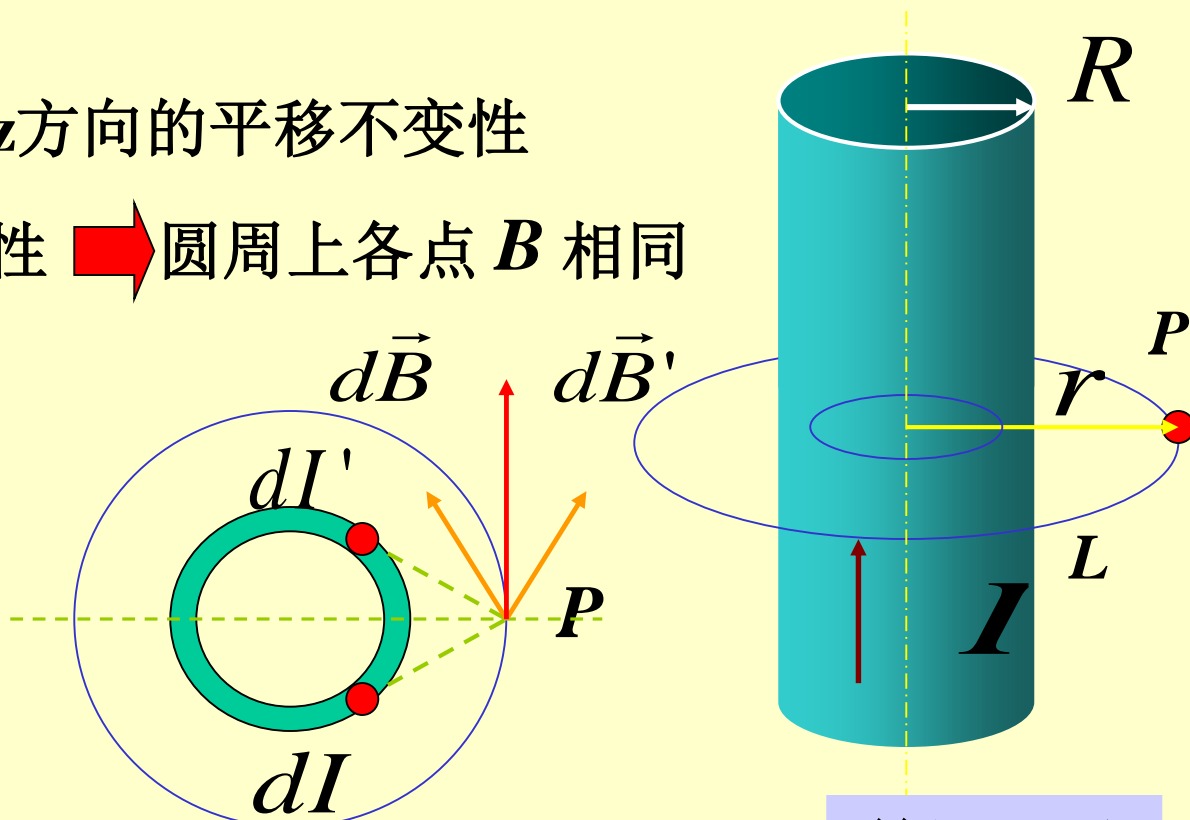
系统具有轴对称性 \Rightarrow 圆周上各点 B 相同

P 点磁感应强度方向
沿圆周的切线方向

$r > R$ 区域：

$$\oint_L B \cos \theta dl$$

$$= B \oint_L dl = B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



等同于无限长载流直线公式

$r < R$ 区域: 在柱面内以轴为圆心做一圆周

$$\oint_L B \cos \theta dl = B \oint_L dl = B 2\pi r = 0 \Rightarrow B = 0$$

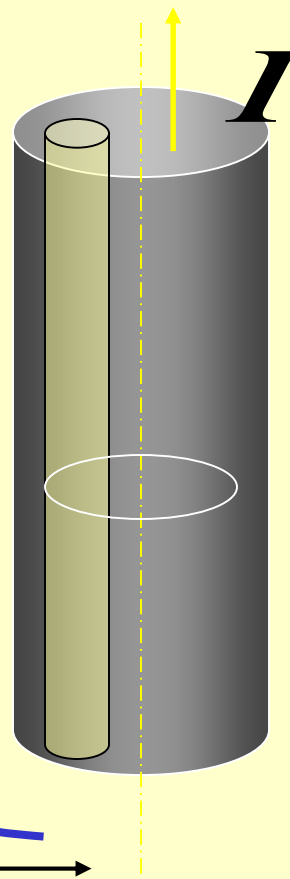
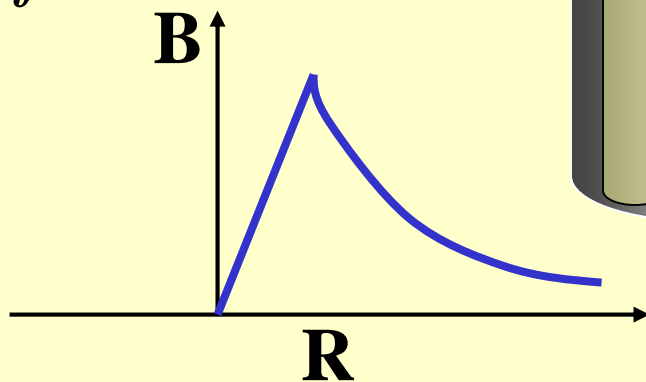
推广到无限长圆柱形载流直导线的磁场分布

$r > R$ 区域: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

$r < R$ 区域: $B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$

$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$



思考: 具有一圆柱形空腔的无限长载流圆柱, 求空腔内的磁场

补偿法

+

安培环路定理

例2 求螺绕环电流的磁场分布

解： 由于电流对称分布，与环共轴的圆周上，各点**B**大小相等，方向沿圆周切线方向。

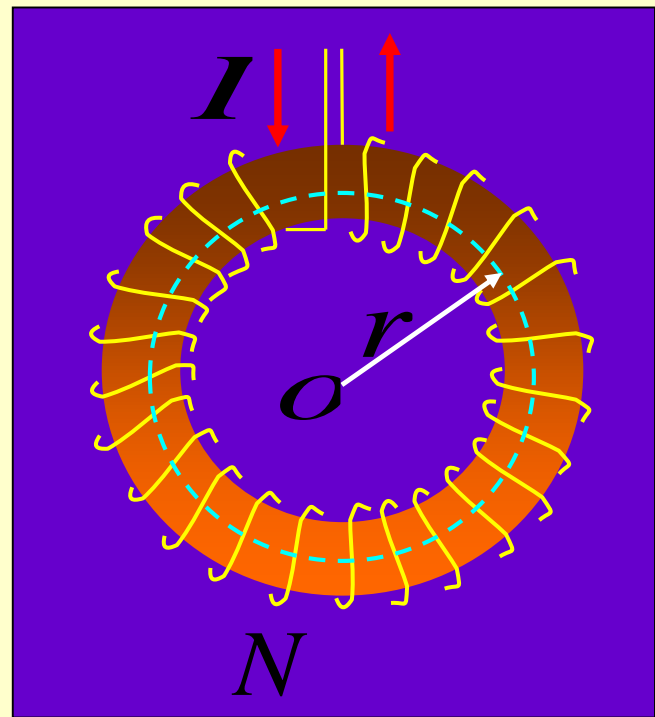
取以o为中心，半径为r的圆周为L

$$\oint_L B \cos \theta dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r$$
$$= \mu_0 N I \longrightarrow B = \mu_0 N I / 2\pi r$$

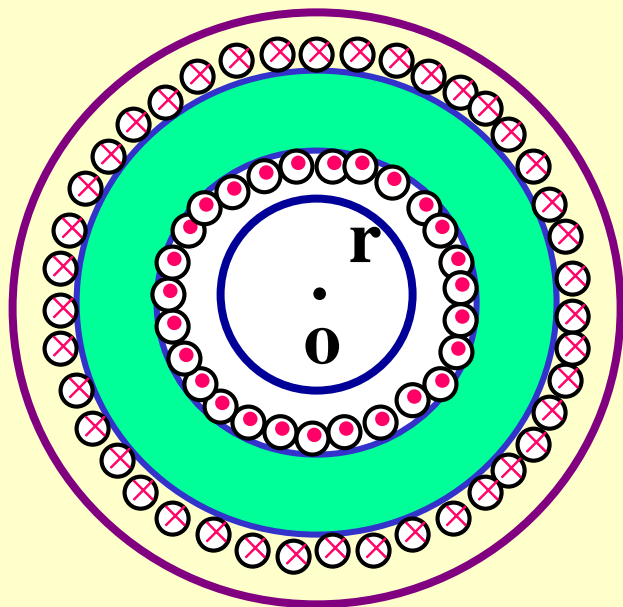
• 若螺绕环的截面很小， $r = \bar{r}$

$$B_{\text{内}} = \mu_0 \frac{N}{2\pi \bar{r}} I = \mu_0 n I$$

内部为
均匀磁
场



- 若在外部再做一个环路，可得



$$\text{若 } r < R_1 \quad \because \mu_0 \sum I_i = 0 \quad \therefore B = 0$$

$$\text{若 } r > R_2 \quad \because \mu_0 \sum I_i = \mu_0 (NI - NI) = 0 \\ \therefore B = 0$$

$$\sum I_i = 0 \quad \longrightarrow \quad B_{\text{外}} = 0$$

结论：螺绕环与无限长螺线管一样，磁场全部集中在管内部。

例3 求无限大平面电流的磁场 (i 是流过单位长度的电流)

解: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i$

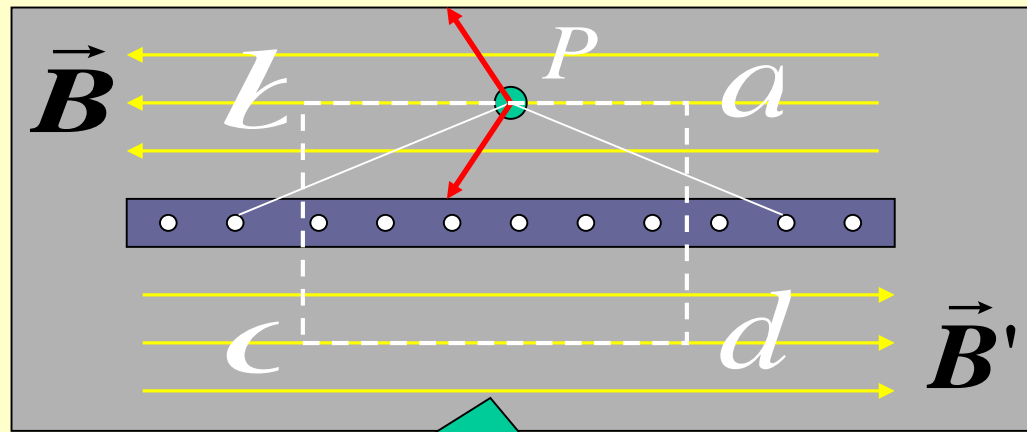
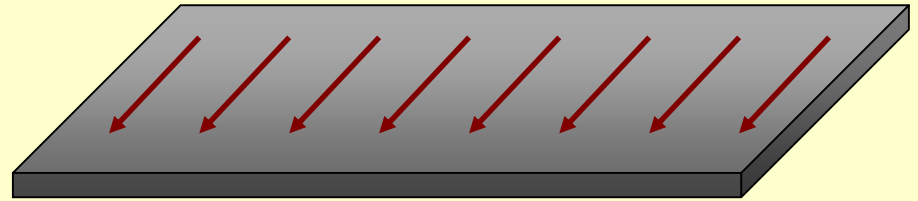
面对称

$$\oint_L B \cos \theta dl = 0$$

$$= \int_a^b + \cancel{\int_b^c} + \int_c^d + \cancel{\int_d^a}$$

$$= B \int_a^b dl + B \int_c^d dl = 2 B a b$$

$$= \mu_0 a b i \quad \longrightarrow \quad B = \mu_0 i / 2$$

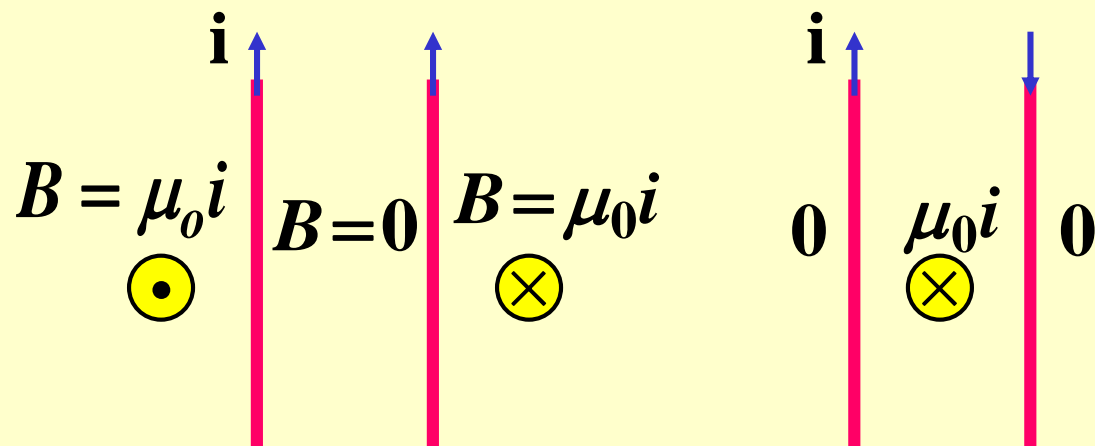


无限大平面电流在每一侧都产生匀强磁场，且两侧磁感应强度的大小相等、方向相反。

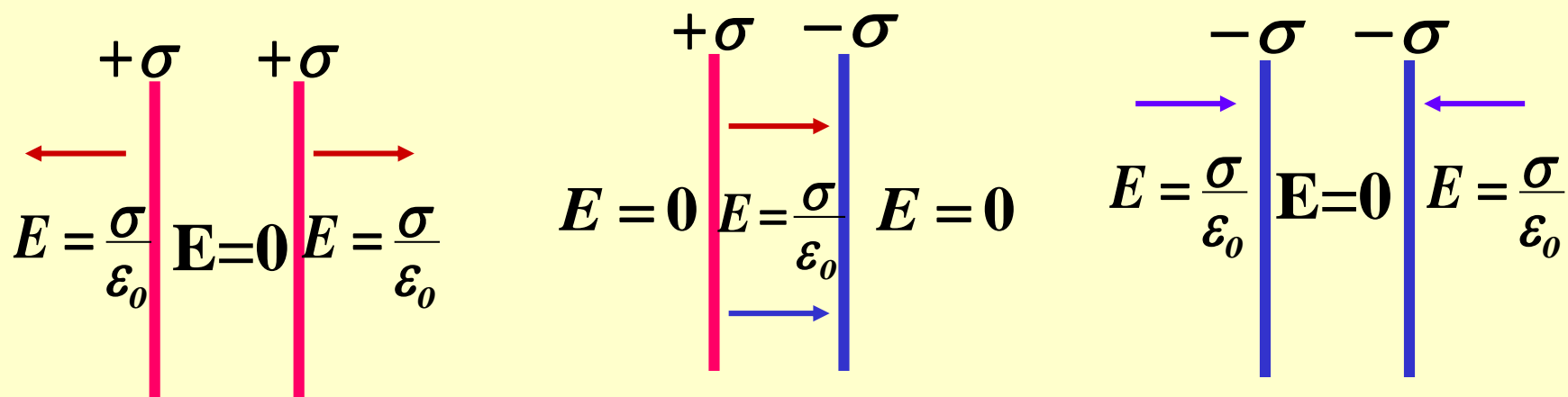
与P点到平板的距离无关。

$$B = \mu_0 i / 2$$

推广:



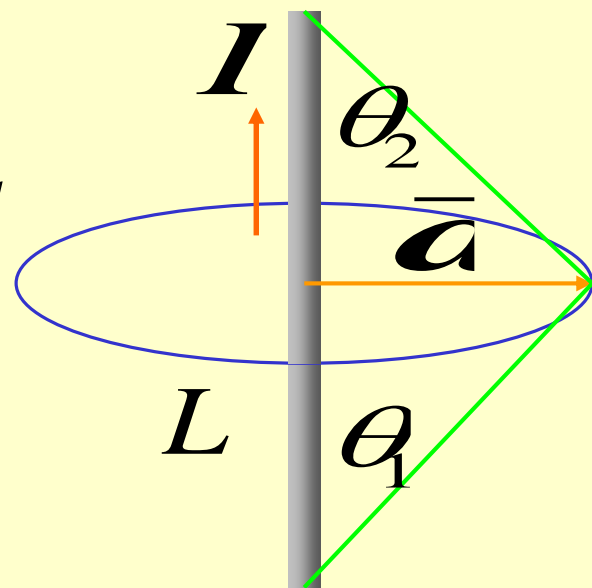
比较:



例：设 $\theta_1 = \theta_2 = \pi / 4$

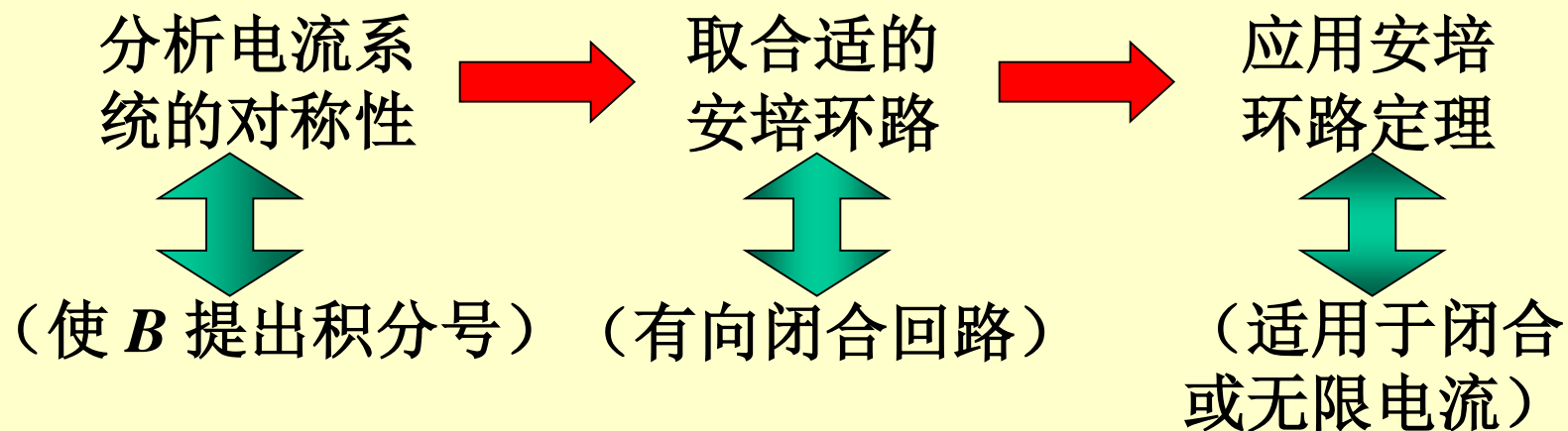
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} 2\pi a = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{2} \neq \mu_0 I$$



安培环路定理只能计算无限长导线或闭合回路的磁场

小结:



电场、磁场中典型结论的比较

		电荷均匀分布	电流均匀分布
长直线		$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
长直圆柱面	内	$E = 0$	$B = 0$
	外	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
长直圆柱体	内	$E = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2}$	$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$
	外	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

5 磁场对电流的作用

载流导体产生磁场



磁场对电流有作用

一. 安培定律

安培力 $\boxed{d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{大小: } dF = IdlB \sin \theta \\ \text{方向: 由右手螺旋法则确定} \end{array} \right.$

任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\boxed{\vec{F} = \int d\vec{F} = \int Id\vec{l} \times \vec{B}}$$

★ 讨论

(1) 安培定律是矢量表述式 $d\vec{F} \Rightarrow dF_x, dF_y, dF_z$

(2) 若磁场为匀强场 $\longrightarrow \vec{F} = \left(\int Id\vec{l} \right) \times \vec{B}$

在匀强磁场中的闭合电流受力 $\longrightarrow \vec{F} = \left(\oint Id\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$

例1 在均匀磁场中放置一任意形状的导线，电流强度为 I

求 此段载流导线受的磁力。

解 在电流上任取电流元 $I d\vec{l}$

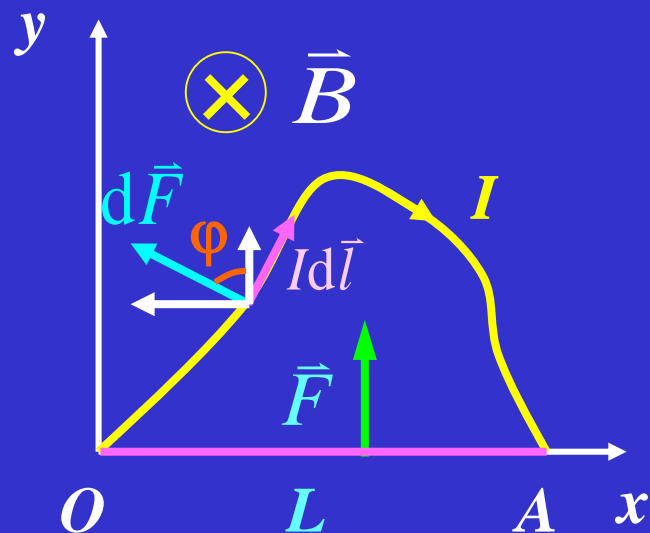
$$|d\vec{F}| = |I d\vec{l} \times \vec{B}| = IB dl$$

$$dF_x = IB dl \sin \varphi = IB dy$$

$$dF_y = IB dl \cos \varphi = IB dx$$

$$F_x = \int_0^0 IB dy = 0$$

$$F_y = \int_0^L IB dx = IBL$$



相当于载流直导线 \overline{OA} 在匀强磁场中受的力，方向沿 y 向。

例2 求两平行无限长直导线之间的相互作用力？

解 电流 2 处于电流 1 的磁场中

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

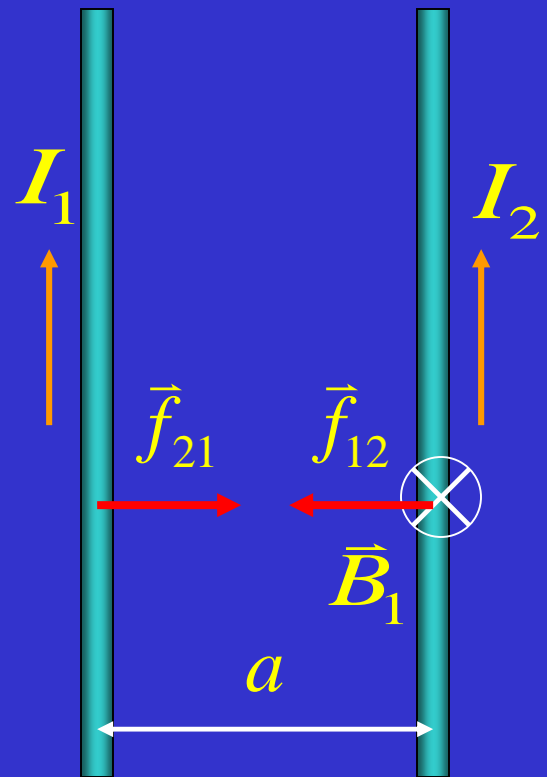
电流 2 中单位长度上受的安培力

$$f_{12} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

同时，电流 1 处于电流 2 的磁场中，

电流 1 中单位长度上受的安培力

$$f_{21} = I_1 B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$



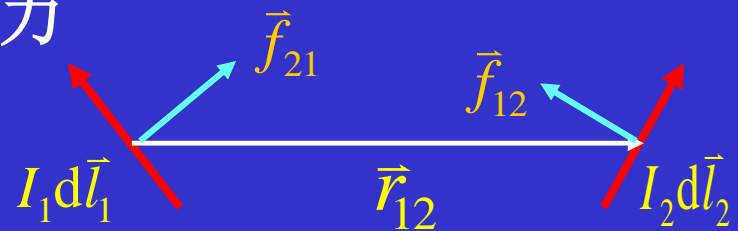
★ 讨论:

(1) “安培” 单位的定义: $f_{21} = I_1 B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \longrightarrow f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{a}$

定义: 真空中通有同值电流的两无限长平行直导线, 若相距 1 米, 单位长度受力 $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ 则这时导线内的电流为 1 安培。

(2) 分析两电流元之间的相互作用力

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$



$$d\vec{f}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

同理

$$d\vec{f}_{21} = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

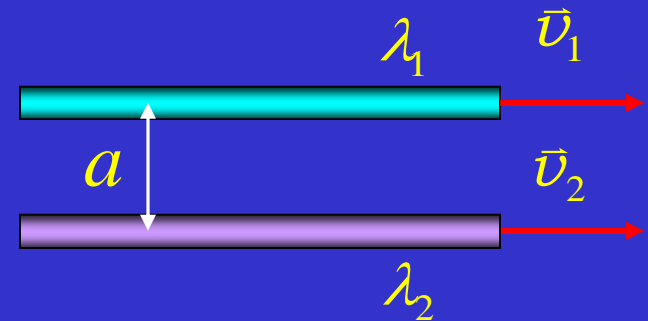
两电流元之间的相互作用力, 一般不遵守牛顿第三定律

(3) 分析两根带电长直线沿长度方向运动时，带电线之间的作用力。

两带电线上的电流为

$$I_1 = \lambda_1 v_1 \quad I_2 = \lambda_2 v_2$$

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \longrightarrow f_m = \frac{\mu_0 \lambda_1 v_1 \lambda_2 v_2}{2\pi a}$$



两带电线单位长度上的电荷之间的库仑力

$$f_e = E_1 \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi \epsilon_0 a}$$

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{\mu_0 \lambda_1 v_1 \lambda_2 v_2}{2\pi a} \frac{2\pi \epsilon_0 a}{\lambda_1 \lambda_2} = \epsilon_0 \mu_0 v_1 v_2 = \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

在一般情况下，磁场力远小于电场力

例3 求一载流导线框在无限长直导线磁场中的受力和运动趋势

解

① $f_1 = I_2 b B_1 = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$
方向向左

③ $f_3 = I_2 b B_3 = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}$
方向向右

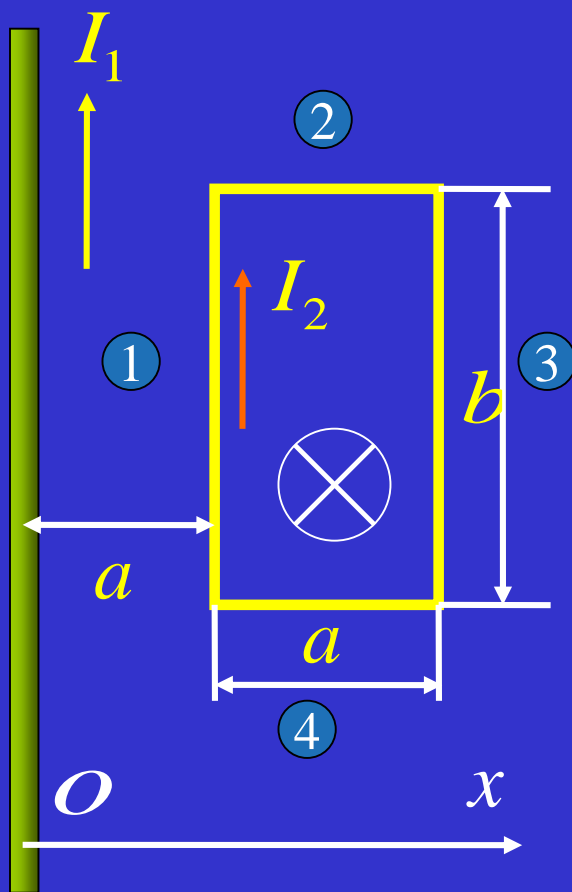
② $f_2 = \int_a^{2a} I_2 dl B_1 \sin \frac{\pi}{2}$
 $= \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 2$

④ $f_4 = f_2$

整个线圈所受的合力: $\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{f}_4 = \vec{f}_1 + \vec{f}_3$

$$\because |\vec{f}_1| > |\vec{f}_3|$$

\therefore 线圈向左做平动



二. 磁场对平面载流线圈的作用

1. 在均匀磁场中的刚性矩形载流线圈

$$F_{DA} = F_{BC} = l_1 B I \sin \varphi$$

(方向相反在同一直线上)

$$F_{CD} = F_{AB} = B I l_2$$

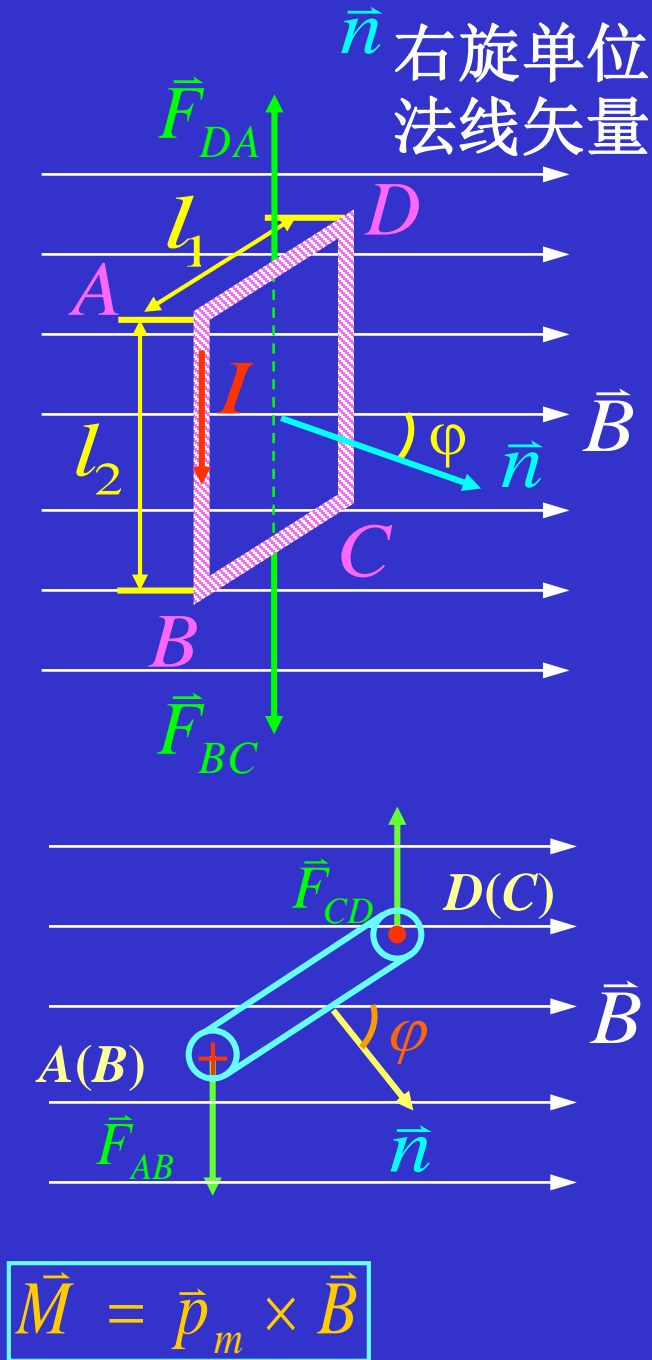
(方向相反不在一条直线上)

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (\text{线圈无平动})$$

对中心的力矩为

$$\begin{aligned} M &= F_{AB} \frac{l_1}{2} \sin \varphi + F_{CD} \frac{l_1}{2} \sin \varphi \\ &= l_1 l_2 B I \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\text{令 } \vec{S} = S \vec{n} = l_1 l_2 \vec{n} \quad \vec{p}_m = I S \vec{n}$$



2. 在均匀磁场中的刚性任意闭合载流线圈的力矩



$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

★ 讨论

(1) 线圈若有 N 匝线圈

$$\vec{M} = N\vec{p}_m \times \vec{B}$$

(2) 非均匀磁场中的平面电流环

$$\sum \vec{F}_i \neq 0 \quad \vec{M} \neq 0 \quad \text{线圈有平动和转动}$$

3. 载流线圈在磁场中转动时磁力矩的功

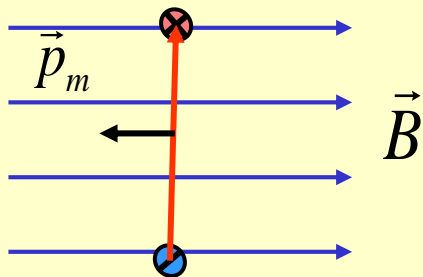
$$\begin{aligned} dA &= -M d\varphi = -BIS \sin \varphi d\varphi \quad \text{负号表示力矩作正功时 } \varphi \text{ 减小} \\ &= Id(BS \cos \varphi) = Id\Phi_m \end{aligned}$$

$$A = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} Id\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m$$

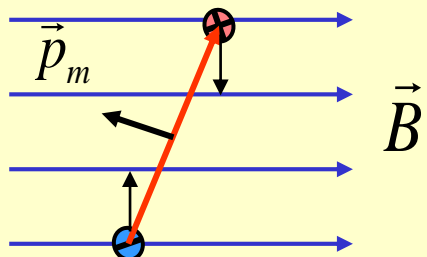
力矩

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

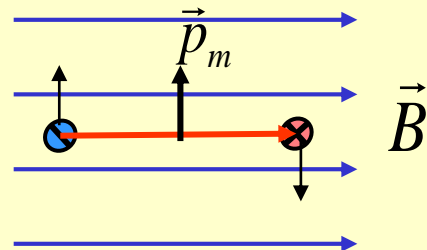
\vec{p}_m : 磁矩



非稳定平衡态

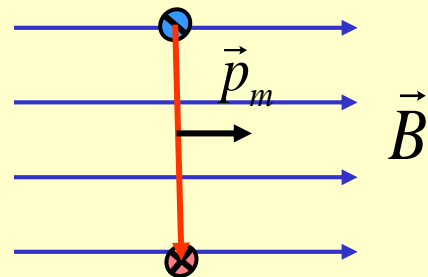


\vec{B}



\vec{B}

力矩最大

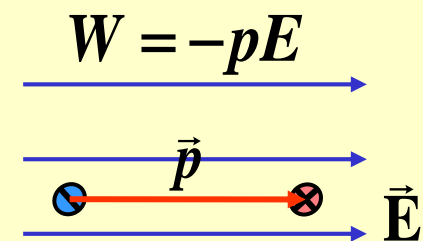


稳定平衡态

电偶极子

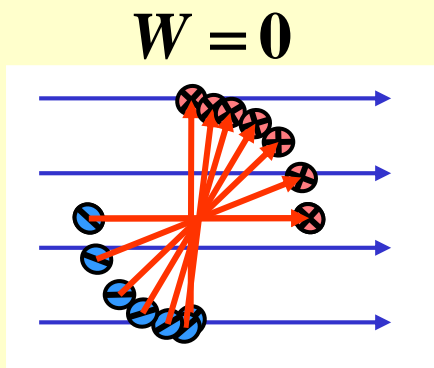
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

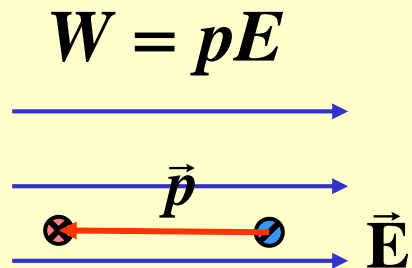


$\vec{F} = 0$ $\vec{\tau} = 0$

能量最低
稳定平衡态

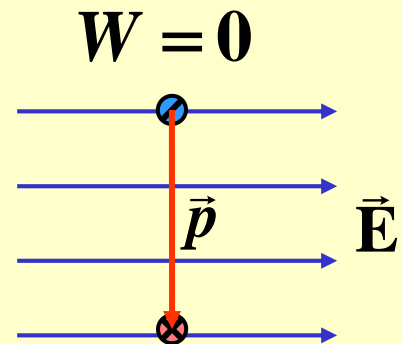


$\vec{F} = 0$ $\vec{\tau} \neq 0$
非平衡态



$\vec{F} = 0$ $\vec{\tau} = 0$

能量最高
非稳定平衡态



$\vec{F} = 0$ $\vec{\tau} \neq 0$

非平衡态

The end !

6 带电粒子在磁场中的运动

1. 洛伦兹公式
2. 洛伦兹力与安培力的关系
3. 带电粒子在均匀磁场中的运动
4. 磁偏转效应的应用
5. 霍耳效应

6 带电粒子在磁场中的运动

一 洛伦兹公式

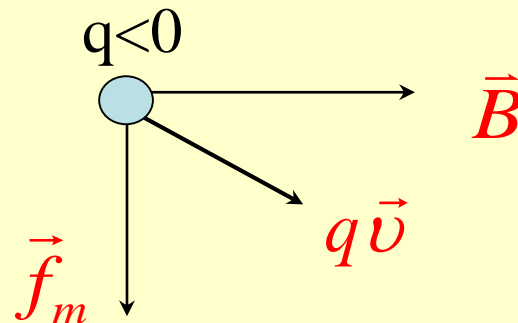
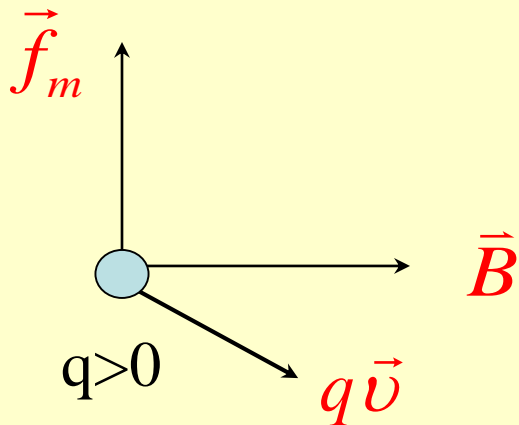
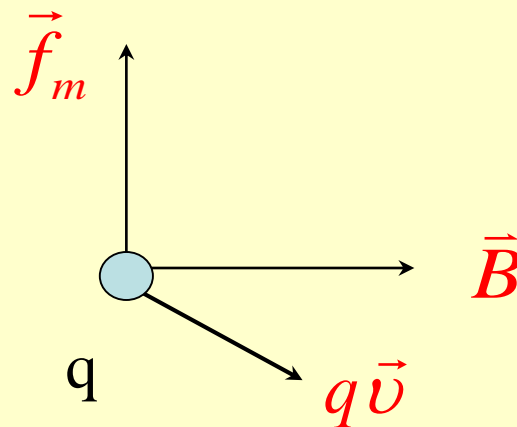
1. 洛伦兹力 运动电荷在磁场中所受的力。

实验表明：

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

大小 $f_m = q v B \sin \theta$

方向 $q \vec{v} \times \vec{B}$



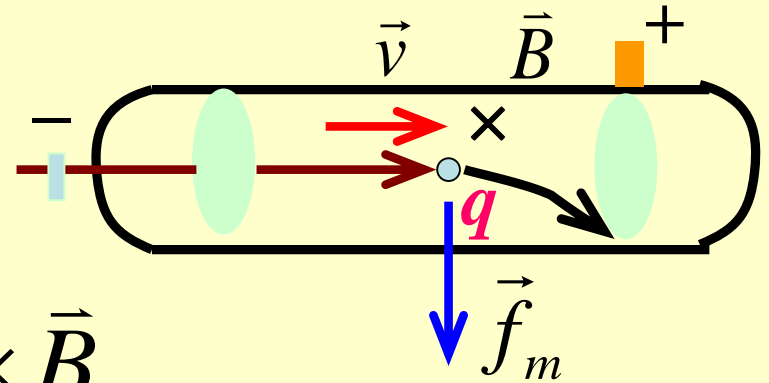
2. 电磁场中的带电粒子

实验表明：电量为 q 的带电粒子，其速度为 \vec{v} ，
在静电场 \vec{E} 中受到一种与速度无关的力 $\vec{f}_e = q\vec{E}$ ；

受到另一种与速度有关
的洛伦兹力： $\vec{f}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$

其合力为： $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

---洛伦兹公式



a. 静电场力 qE 与速度无关

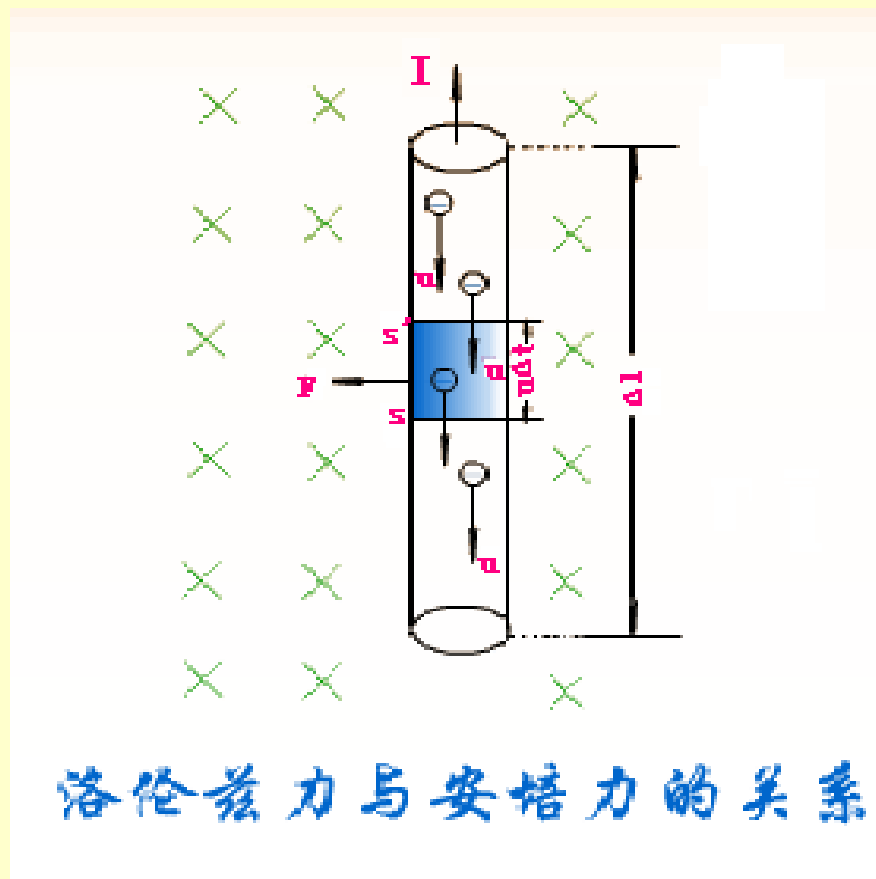
b. 洛伦兹力 \vec{f}_m 与速度有关

c. 由于洛伦兹力始终垂直于速度 v ，与磁力相联系的功始终为零。它只改变粒子运动的方向而不改变它的速率和动能。

二、洛伦兹力与安培力的关系

安培力是作用在自由电子上洛伦兹力的宏观表现。

如图，考虑一段长度为 Δl 的金属导线，它放置在垂直纸面向内的磁场中。设导线中通有电流 I ，其方向向上。



从微观的角度看，电流是由导体中的自由电子向下作定向运动形成的。设自由电子的定向运动速度为 u ，导体单位体积内的自由电子数为（自由电子数密度） n ，每个电子所带的电量为 $-e$ 。所以根据电流的定义：

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{en\Delta V}{\Delta t} = \frac{enSu\Delta t}{\Delta t} = enSu$$

由于这里电子的定向速度 u 与磁感应强度 B 垂直， $\sin \theta = 1$ 所以，每个电子由于定向运动受到的洛伦兹力为 $f=euB$ 。

虽然这个力作用在金属内的自由电子上，但是自由电子不会越出金属导线，它所获得的冲量最终都会传递给金属的晶格骨架。

宏观上看来将是金属导线本身受到这个力。整个长度为 Δl 的这段导线的体积为 $S \Delta l$ ，其中包含自由电子的总数为 $nS \Delta l$ ，每个电子受力 $f=euB$ ，所以这段导线最终受到的总力为

$$F=nS\Delta l e u B=B(enSu)\Delta l$$

而 $I=enSu$ ，所以 $F=BI \Delta l$ 。

这正好是安培力。

例1 宇宙射线中的一个质子以速率 $v = 1.0 \times 10^7 \text{ m/s}$ 竖直进入地球磁场内，估算作用在这个质子上的磁力有多大？

解：在地球赤道附近的地磁场沿水平方向，靠近地面处的磁感应强度约为 $B = 0.3 \times 10^{-4} \text{ T}$ ，已知质子所带电荷量为 $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，按洛伦兹力公式，可算出场强对质子的作用力为

$$\begin{aligned} F &= qvB \sin \theta \\ &= 1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^7 \times 0.3 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ \text{ N} \\ &= 4.8 \times 10^{-17} \text{ N} \end{aligned}$$

这个力约是质子重量 ($mg = 1.6 \times 10^{-26} \text{ N}$) 的 10^9 倍，因此当讨论微观带电粒子在磁场中的运动时，一般可以忽略重力的影响。

三 带电粒子在匀强磁场中的运动

(1) $\vec{v} \parallel \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{f}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = 0$$

磁场对带电粒子作用
为零. 粒子保持 \vec{v} 运动

(2) $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$f_m = qvB = m \frac{v^2}{R} \quad R = \frac{mv}{qB}$$

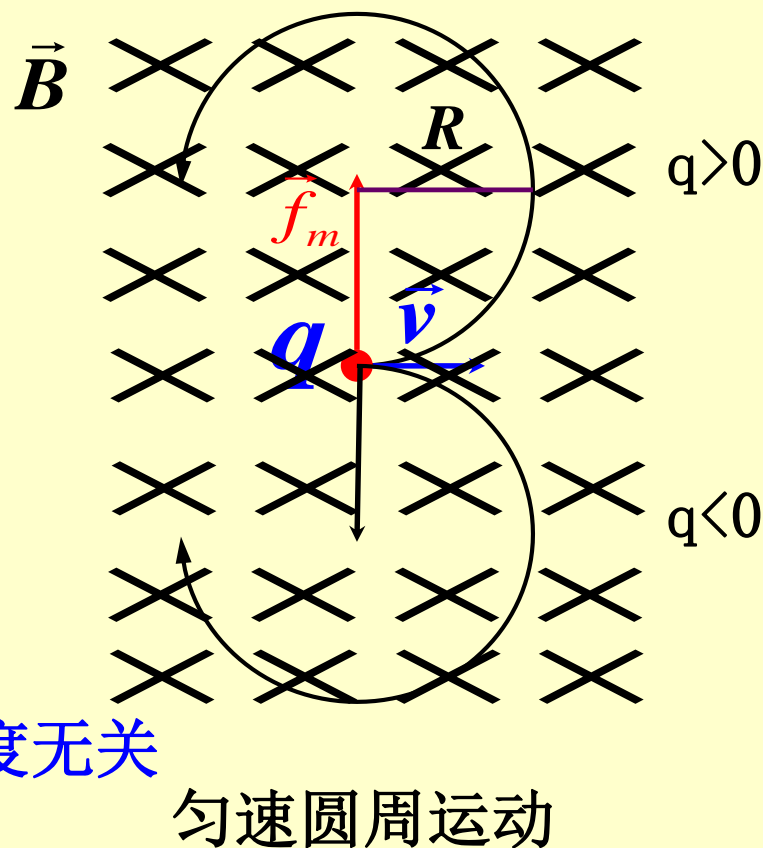
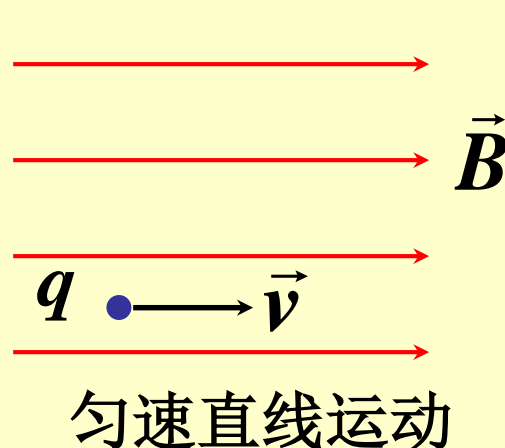
周期

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

回旋共振频率

$$\nu = \frac{qB}{2\pi m}$$

与半径、速度无关

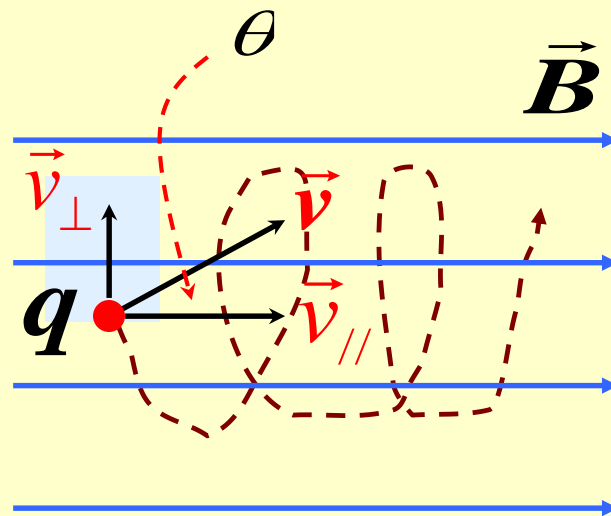


(3) \vec{v} 与 \vec{B} 成 θ 角

$$\vec{v} = v \cos \theta \vec{i} + v \sin \theta \vec{j}$$

$$R = \frac{m v_{\perp}}{q B}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{q B}$$



螺旋运动

底面半径

$$R = \frac{m v \sin \theta}{q B}$$

匀速圆周运动的半径仅与速度的垂直分量有关。

螺距

$$h = T v \cos \theta = \frac{2\pi m v \cos \theta}{q B}$$

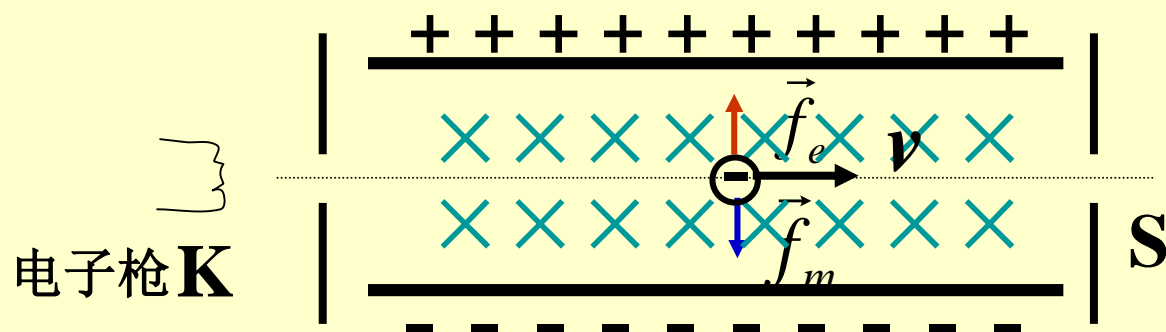
四. 磁偏转效应的应用

- (1) 滤速器
- (2) 阴极射线示波管
- (3) 质谱计 (mass spectrometer)
- (4) 磁聚焦
- (5) 回旋加速器

回旋加速器一般适用于加速质量较大的粒子，不宜用于加速电子。加速电子可利用电子感应加速器。

四、磁偏转效应的应用

1. 滤速器

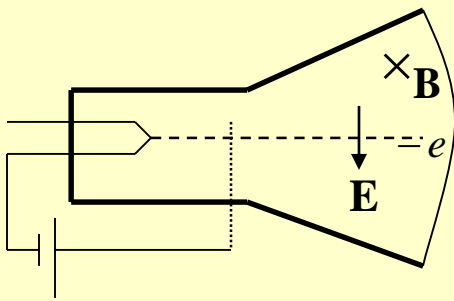


$$qE = qvB$$

$$v = \frac{E}{B}$$

2. 阴极射线示波管

这是汤姆孙发现荷质比装置的现代改进仪器.当然用它能够测荷质比。在很多仪器中，阴极射线示波管也许是最重要的显示部件。

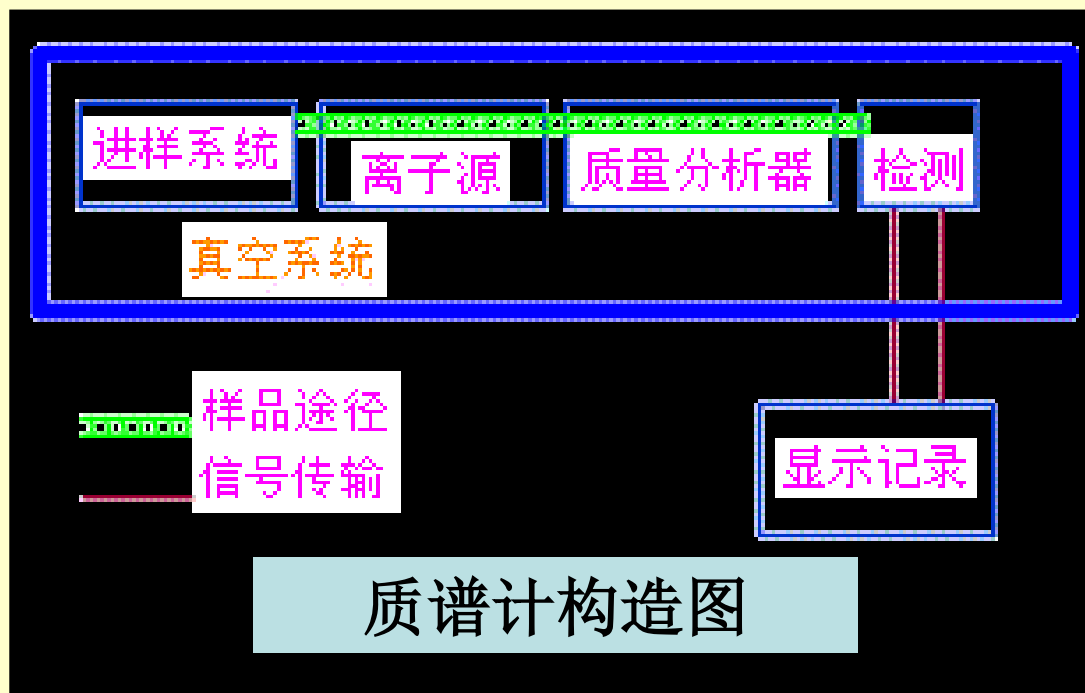


当 **$E=0$** ， **$B=0$** 时，光斑处在荧光屏中心。有限的电场造成偏转量

$$y = \frac{eEL^2}{2mv^2} \quad \text{加磁场不偏转} \quad \left\{ \begin{array}{l} eE = evB \\ \frac{e}{m} = \frac{2yE}{B^2 L^2} \end{array} \right.$$

3. 质谱计(mass spectrometer)

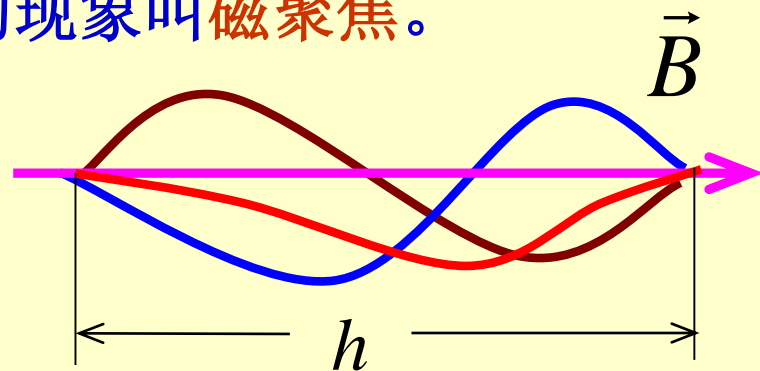
质谱计是一种将物质电离成离子,使带正电的离子加速,并在电磁场的作用下,按不同的质荷比分开,根据质谱峰出现的位置,形成相应的质谱图,从而进行定性和定量分析的仪器。



4. 磁聚焦

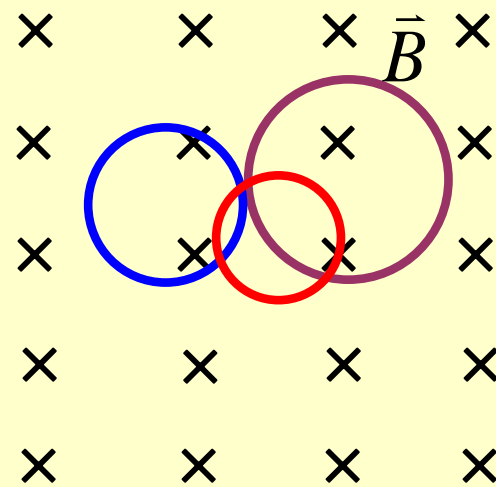
磁聚焦—各粒子在磁场中某点出发，发散角不大，各 $v_{//}$ 几乎一样，它们有相同的螺距，经过一个周期它们将重新会聚在另一点，这种发散粒子束会聚到一点的现象叫**磁聚焦**。

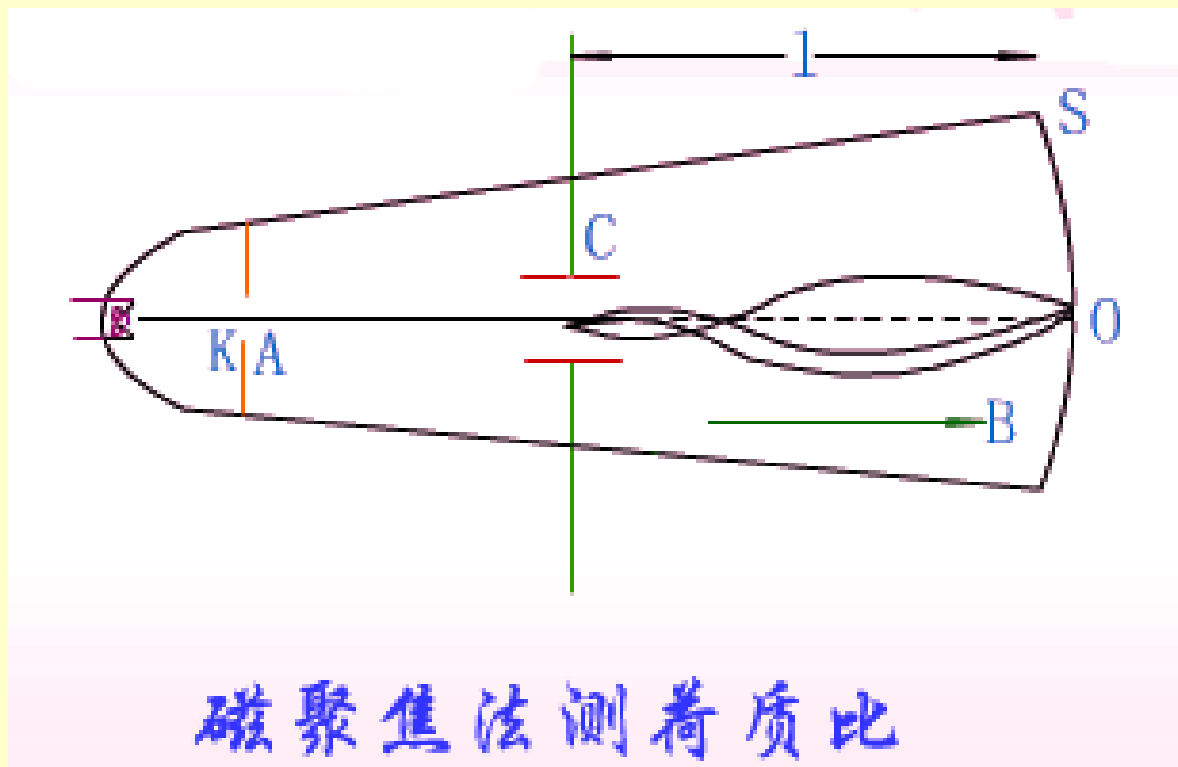
$$R = \frac{m v_{\perp}}{qB} \quad T = \frac{2\pi m}{qB} \quad h = T v_{//}$$



它广泛应用于电真空器件，如电子显微镜（**类比光学透镜**）中。它起了光学仪器中的透镜类似的作用。

1986年，德国的恩斯特·鲁斯卡（Ernst Ruska, 1906-1988）获得了诺贝尔物理学奖，以表彰他在电光学领域作了基础性工作，并设计了第一架电子显微镜。





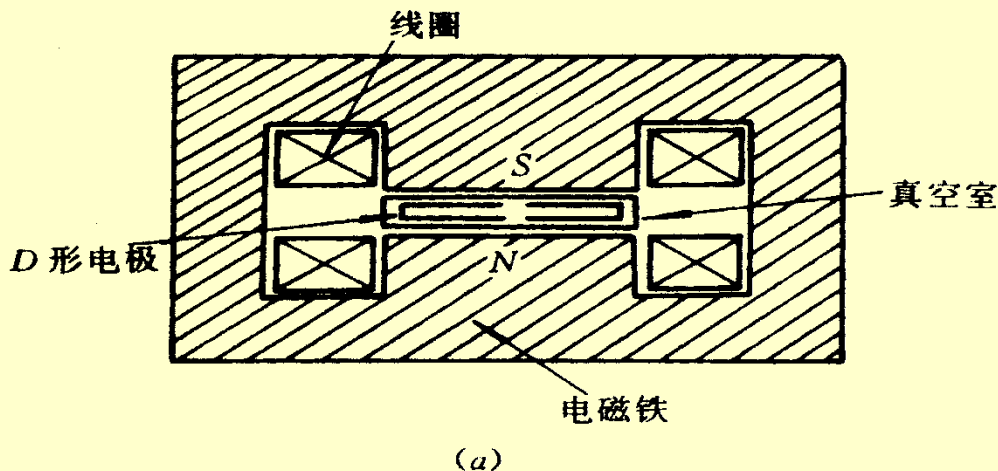
$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta U \quad v = \sqrt{\frac{2e\Delta U}{m}} \quad \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2\Delta U}{l^2 B^2}$$

$$h = \frac{2\pi m v}{eB} = l$$

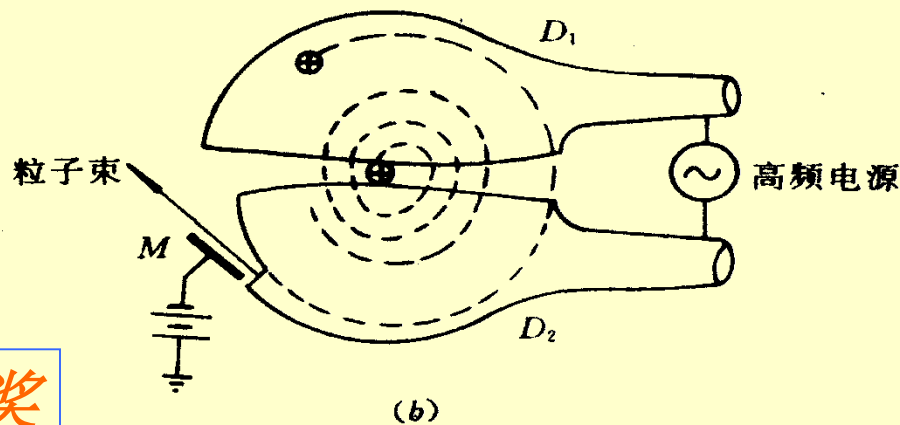
5. 回旋加速器

回旋加速器是用来获得高能带电粒子的设备。
基本性能：

1. 使带电粒子在磁场的作用下作回旋运动。



2. 使带电粒子在电场的作用下得到加速。



劳伦斯, 1939年诺贝尔物理学奖

轨道半径

$$R = \frac{v}{(q/m)B}$$

粒子引出速度

$$v = \frac{q}{m} BR$$

粒子的动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2}{2m} B^2 R^2$$

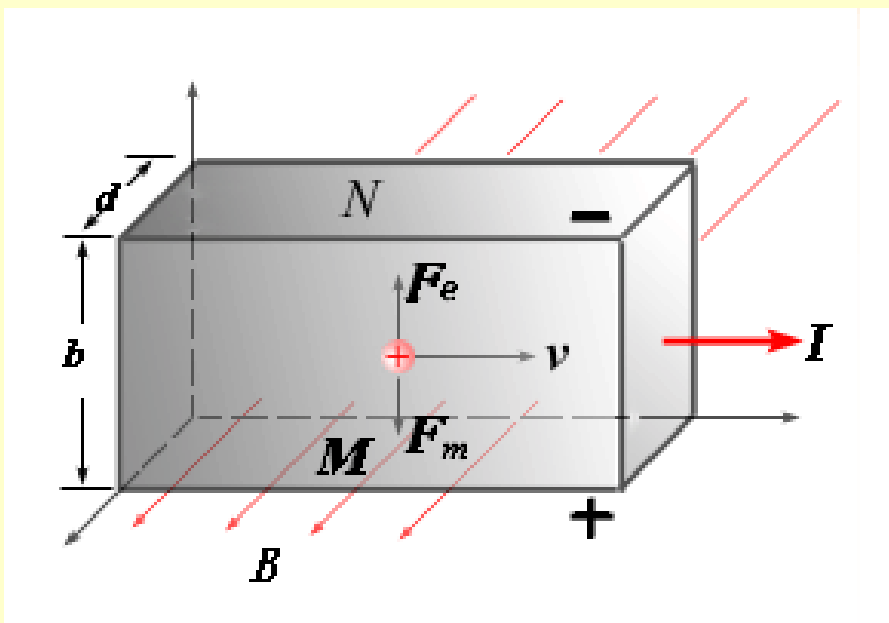


加速器

五 霍耳效应

1879年美国物理学家霍耳

通有电流 I 的金属或半导体板置于磁感强度为 B 的均匀磁场中，磁场的方向和电流方向垂直。在金属板的两侧M和N之间就显示出微弱的**横向电势差**。这种现象称为霍耳效应 (Hall effect)。电势差 $V_M - V_N$ 就称为霍耳电压。



实验表明：霍耳电势差的大小，与电流 I 及磁感强度的大小 B 成正比，而与板的厚度 d 成反比。即：

$$V_M - V_N = R_H \frac{BI}{d}$$

R_H 称为霍耳系数

用磁场中的载流子受到的洛伦兹力来说明：

设载流子带电量为 q ，载流子的数密度为 n ，载流子的平均漂移速度为 v ，它们在洛伦兹力 qvB 作用下向板的一侧聚集，使得在M、N两侧出现等量异号电荷，在板内建立起不断增加的横向电场。

当载流子受到的洛伦兹力和横向电场力相等时，载流子不再做侧向运动，在平衡时有：

$$qvB = qE$$

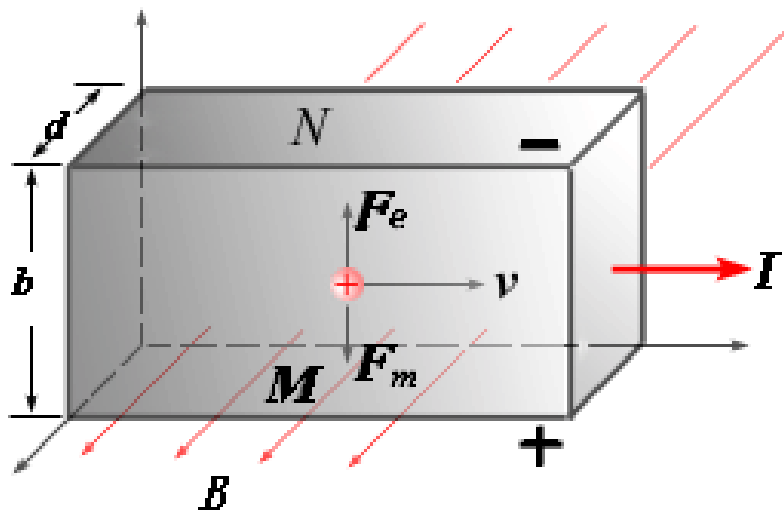
设板的侧向宽度为 b ，则：

$$V_M - V_N = Eb = Bvb$$

由电流强度 I 的定义，

$$I = nqb dv \quad \text{或} \quad v = I / nqb$$

$$\text{霍尔电势差: } V_M - V_N = BI / nqd$$



霍耳系数 R_H : $R_H=1/nq$, 霍耳系数 R_H 与材料性质有关。

应用:

- 利用半导体的霍耳效应制成的器件成为霍耳元件。
- 因为半导体的载流子浓度远小于金属电子的浓度，且易受温度、杂质的影响，所以霍耳系数是研究半导体的重要方法之一。
- 利用霍耳效应还可以测量载流子的类型(p型和n型)和数密度，可以测量磁场。

例： 把一宽为2.0cm，厚1.0cm的铜片，放在B=1.5T的磁场中，磁场垂直通过铜片。如果铜片载有电流200A，求呈现在铜片上下两侧间的霍耳电势差有多大？

解 每个铜原子中只有一个自由电子，故单位体积内的自由电子数n即等于单位体积内的原子数。已知铜的相对原子质量为64，1 mol铜（0.064kg）有 6.0×10^{23} 个原子（阿伏加得罗常数），铜的密度为 $9.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，所以铜片中自由电子的密度

$$n = 6.0 \times 10^{23} \times \frac{9.0 \times 10^3}{0.064} \text{ m}^{-3} = 8.4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

霍耳电势差

$$V_1 - V_2 = -\frac{IB}{ned} = \frac{200 \times 1.5}{8.4 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.001} V$$

$$= -2.2 \times 10^{-5} V = -22 \mu V$$

铜片中电流为200A时，霍耳电势差只有22 μV ，可见在通常情况下铜片中的霍尔效应是很弱的。

在半导体中，载流子浓度n远小于单位金属中自由电子的浓度，因此可得到较大的霍耳电势差。在这些材料中能产生电流的数量级约为1mA，如果选用和例中铜片大小相同的材料，取 $I=0.1mA$ ， $n=10^{20} m^{-3}$ ，则可算出其霍耳电势差约为9.4mV，用一般的毫伏表就能测量出来。

The end !