

第七章 n 元实二次型

- n 元实二次型的定义
- n 元实二次型的标准形
- 正定二次型及其性质
- 用正交变换化二次型为标准形

§ 7.1 n 元实二次型及其标准形

§ 7.1.1 n 元实二次型的定义

定义1 n 个实变元的实系数二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + a_{33}x_3^2 + \dots + 2a_{3n}x_3x_n \\ & + \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \quad (1)$$

称为实数域上的一个 n 元二次型，简称实二次型。

把变元交叉项 $2a_{ij}x_ix_j$ ($i < j$) 写成对称的两项之和

$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$ ($a_{ij} = a_{ji}$)，于是有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \quad (2) \\ + \dots$$

$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

把(2)式的系数排成一个矩阵： $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

称为实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵.

显然 A 为(实)对称矩阵.

再记 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 对于上述对称矩阵 A , 有

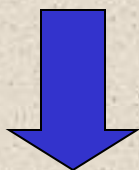
$$\begin{aligned} X^T A X &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

于是得到: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = X^T A X \quad (3)$

由此可见, 按照上述规则

任给一个二次型, 可**唯一**确定一个对称矩阵;
反之, 任给一个对称矩阵, 可**唯一**确定一个二次型.

即**二次型与对称矩阵之间是1-1对应关系.**



对称矩阵 A 称为**二次型** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **的矩阵.**

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为**对称矩阵 A 的二次型.**

A 的秩就称为二次型 f 的**秩.**

例：二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + \underbrace{2x_1x_2}_{\text{red dotted}} - \underbrace{x_1x_3}_{\text{red dotted}} + \underbrace{4x_2x_3}_{\text{blue dotted}}$$

的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 3 & \underbrace{1}_{\text{red dotted}} & -\frac{1}{2} \\ \underbrace{1}_{\text{red dotted}} & 1 & \underbrace{2}_{\text{blue dotted}} \\ -\frac{1}{2} & \underbrace{2}_{\text{blue dotted}} & -1 \end{pmatrix}$$

注意：

$$X^T B X = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2x_3$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

但是矩阵B并不是对称矩阵，也不是该二次型的矩阵。

以 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩阵二次型的为

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3$$

该二次型的秩为3.

对二次型进行坐标变换

定理 n 元实二次型 X^TAX 可经**坐标变换** $X=CY$ (C 为**可逆实矩阵**)化为二次型 Y^TBY , 其中 $B=C^TAC$.

定义2 设 A, B 是数域 F 上的 n 阶矩阵, 若存在 F 上的可逆矩阵 C , 使得 $B=C^TAC$ 成立, 则称 **A 与 B 是合同矩阵**.
(或简称 **A 与 B 合同**) (有的书上记为: $A \cong B$)

合同性质

- 1) **反身性(自反性)**: 任意矩阵 A 都与自身合同.
- 2) **对称性**: 若 A 与 B 合同, 则 B 与 A 合同.
- 3) **传递性**: 若 A 与 B 合同, B 与 C 合同, 则 A 与 C 合同.

非退化线性替换或者可逆线性变换/替换

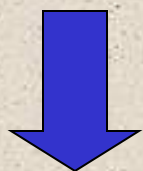
设 $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ 是两组文字，系数在数域 F 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由 x_1, \dots, x_n 到 y_1, \dots, y_n 的一个线性替换，
或简称线性替换. 如果系数行列式 $|c_{ij}| \neq 0$ ，那么线性替换就称为非退化的.

【非退化线性替换】

若两个 n 元实二次型 X^TAX 与 Y^TBY 可经坐标变换相互转化，则称这两个二次型是等价的.



而前面定理又可表述为：

两个 n 元实二次型等价 \Leftrightarrow 它们的矩阵是合同矩阵.

另外，两个等价的 n 元实二次型必有相同的秩.

§ 7.1.2 二次型的标准形

只含变元平方项的二次型：

$$f = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2 \quad (1)$$

称为二次型的**标准形**.

二次型(1)的矩阵是对角矩阵 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

它的秩等于 D 的主对角线上非零元的个数，即(1)中非零平方项的个数.

例1 化二次型为标准形并求所用的坐标变换.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_2^2 - 2x_2x_3 - 5x_3^2$$

$$\begin{aligned}\text{解: } f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2 + 6x_1x_2) + 8x_2^2 - 2x_2x_3 - 5x_3^2 \\ &= (x_1 + 3x_2)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 5x_3^2 \\ &= (x_1 + 3x_2)^2 - (x_2^2 + 2x_2x_3) - 5x_3^2 \\ &= (x_1 + 3x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 4x_3^2\end{aligned}$$

$$\text{做坐标变换 } \begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\text{可得二次型的标准形} \quad f = y_1^2 - y_2^2 - 4y_3^2$$

注意：坐标变换的矩阵一定为可逆矩阵.

引理 数域 F 上任何一个二次型都可经坐标变换化平方和形式.

证明：对变量个数 n 做数学归纳法.

对于 $n=1$ ，二次型为 $f(x_1)=a_{11}x_1^2$ ，已经是平方和形式.

现在假设对于 $n-1$ 元二次型，定理结论成立，

再设 n 元二次型为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ji} = a_{ij})$$

分三种情况讨论：

1) a_{ii} ($i=1, 2, \dots, n$)中有一个不为零，不妨设 $a_{11} \neq 0$.

【否则 $a_{11}=0$, $a_{ii} \neq 0$ ($i \neq 1$)，则可先令 a_{ii} 与 a_{11} 交换】

这时

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^n a_{i1}x_ix_1 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^n a_{1j}x_j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j$$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } ax^2 + 2bx = a \left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \right)$$

$$= a_{11} \left(x_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)^2 - \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j$$

$$\text{令 } g(x_2, \dots, x_n) = -\frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n b_{ij}x_ix_j,$$

则 g 为一个关于 x_2, x_3, \dots, x_n 的 $n-1$ 元二次型.

于是做坐标变换 $\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n a_{11}^{-1} a_{1j} x_j \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n. \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^n a_{11}^{-1} a_{1j} y_j, \\ x_2 = y_2, \\ \vdots \\ x_n = y_n. \end{cases}$

它使 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} y_1^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n b_{ij} y_i y_j$

由归纳法假设, 对于 $n-1$ 元二次型 $\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n b_{ij} y_i y_j$

有坐标变换 $\begin{cases} z_2 = c_{22} y_2 + c_{23} y_3 + \dots + c_{2n} y_n \\ z_3 = c_{32} y_2 + c_{33} y_3 + \dots + c_{3n} y_n \\ \vdots \\ z_n = c_{n2} y_2 + c_{n3} y_3 + \dots + c_{nn} y_n \end{cases}$

能使之化成平方和 $d_2 z_2^2 + d_3 z_3^2 + \dots + d_n z_n^2$

于是, 坐标变换

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = c_{22}y_2 + c_{23}y_3 + \cdots + c_{2n}y_n \\ z_3 = c_{32}y_2 + c_{33}y_3 + \cdots + c_{3n}y_n \\ \vdots \\ z_n = c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

就使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变成

$$a_{11}z_1^2 + d_2z_2^2 + d_3z_3^2 + \cdots + d_nz_n^2$$

为平方和形式. 根据归纳法假设, 引理得证.

2) $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 但有一 $a_{1j} \neq 0, j \neq 1$.

不失普遍性, 设 $a_{12} \neq 0$, 令

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \\ \vdots \\ x_n = z_n \end{cases}$$

该坐标变换使

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 2a_{12}x_1x_2 + \dots \\ &= 2a_{12}(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + \dots \\ &= 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \\ \vdots \\ x_n = z_n \end{cases}$$

右端为 z_1, z_2, \dots, z_n 的二次型, 且 z_1^2 前的系数不为零, 属第一种情况, 引理得证.

3) $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 且 $a_{1j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$. 由对称性,

$$a_{j1} = 0, j = 1, 2, \dots, n, \text{ 于是 } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} x_i x_j$$

是 $n-1$ 元二次型. 由归纳法假设, 可用坐标变换化为平方和形式.

证毕.

拉格朗日配方法的步骤

1. 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项**集中**，然后**配方**，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形；

2. 若不含有平方项，但是 $a_{ij} \neq 0$ ($i \neq j$)，则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } k \neq i, j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

定理1 秩为 r 的 n 元实二次型 $f = X^TAX$ 必可经坐标变换 $X = CY$ 化成标准形

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2, (d_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r)$$

例2 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形，并求所用坐标变换.

解：【属第二种情况】

做坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1^2 - y_2^2) + 2(y_1 + y_2)y_3 - 6(y_1 - y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 - 6y_1y_3 + 6y_2y_3 \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \end{aligned}$$

【属第一种情况】

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$

则 $f = 2z_1^2 \boxed{-2z_2^2 + 8z_2z_3 - 2z_3^2}$ 【属第一种情况】

$$= 2z_1^2 - 2(z_2 - 2z_3)^2 + 8z_3^2 - 2z_3^2 = 2z_1^2 - 2(z_2 - 2z_3)^2 + 6z_3^2$$

令 $\begin{cases} w_1 = z_1 \\ w_2 = z_2 - 2z_3 \\ w_3 = z_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z_1 = w_1 \\ z_2 = w_2 + 2w_3 \\ z_3 = w_3 \end{cases}$

则 $f = 2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2$

总的坐标变换为

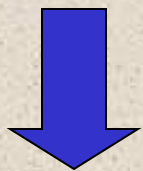
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{1}_1 & 0 & 1 \\ \cancel{0}_2 & 1 & 0 \\ \cancel{0}_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{1}_1 & 0 & 0 \\ \cancel{0}_2 & 1 & 2 \\ \cancel{0}_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

规范形：系数为+1或-1的标准形

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - z_{t+2}^2 - \cdots - z_r^2 \quad (*)$$

定理2 (惯性定理) 在秩为 r 的 n 元实二次型的标准形中，正平方项的个数 t 是唯一确定的，从而负平方项的个数 $r-t$ 也是唯一确定的。

【或说：二次型的规范形(*)是唯一确定的】
称 t 为**正惯性指数**， $r-t$ 为**负惯性指数**。二者之差 $t-(r-t)=2t-r$ 为该二次型的**符号差**。



两个 n 元实二次型等价 \Leftrightarrow 它们有相同的秩和正惯性指数。

定理3 秩为 r 的 n 阶对称矩阵 A 必合同对角形矩阵，即存在满秩矩阵 C ，使得

$$C^T A C = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

其中 d_1, d_2, \dots, d_r 不为零.

合同变换：

设 F 为初等矩阵，则变换 $F^T B F$ 称为 B 的合同变换.

注：变换 $F^T B F$ 可通过一对相同行与列的初等变换得到.

例：(1) 互换单位矩阵 E 的 i, j 两行(列)得到初等矩阵 E_{ij} ，则

$$E_{ij}^T B E_{ij}$$

相当于将矩阵 B 的 i, j 两行互换，再将 i, j 两列互换得到.

(2)用 $\lambda(\lambda \neq 0)$ 乘 E 的第 i 行(列)得到初等矩阵 $E_{ii}(\lambda)$, 则

$$E_{ii}^T(\lambda)BE_{ii}(\lambda)$$

相当于将矩阵 B 的第 i 行乘以 λ , 再将第 i 列乘以 λ 得到.

再看定理3

由于可逆矩阵可以写成一系列初等矩阵的乘积:

则有 $C = F_1F_2 \cdots F_m$, 其中 F_1, F_2, \dots, F_m 为初等矩阵.

$$C^TAC = F_m^T \cdots F_2^T F_1^T AF_1F_2 \cdots F_m = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

即: 可以用一系列合同变换把 A 化为对角形.

同时又有 $EF_1F_2 \cdots F_m = C$

用一系列合同变换把 A 化为对角形时, 若同时只对单位矩阵 E 做同样顺序的列的变换, 则 E 化为变换矩阵 C .

合同变换法化二次型为标准形步骤:

(1) 写出二次型的矩阵 A

(2) 构造 $2n \times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$, 对 A 做合同变换的同时, **只**

对 E 施行初等列变换, 直到把 A 所在位置的子矩阵化为对角形矩阵.

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} EF_1F_2\cdots F_m \end{matrix}]{\begin{matrix} F_m^T \cdots F_2^T F_1^T A F_1 F_2 \cdots F_m \end{matrix}} \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

C

则坐标变换 $X=CY$ 化二次型
为标准形.

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

例1 化二次型为标准形，并给出所用的变换矩阵.

$$f = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

解 二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

解 二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \dots \\ E \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_1 / 3]{r_1 + r_2 / 3 + c_1 / 3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 + c_1 / 3]{c_2 + c_1 / 3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{相似变换}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+c_1/3]{r_3+r_1/3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+c_2 \times 5]{r_3+r_2 \times 5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以经过变换 $X = CY$, 所给二次型化为标准形

$$f = 3y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + 8y_3^2, \quad \text{其中 } C = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例2 化二次型 $f = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$ 成标准形,
并求所用的变换矩阵.

解: 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 + c_2]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 - c_1 / 2]{r_2 - r_1 / 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - \frac{3}{2}r_1 \\ c_3 - \frac{3}{2}c_1}]{\substack{r_3 - \frac{3}{2}r_1 \\ c_3 - \frac{3}{2}c_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 + 5r_2 \\ c_3 + 5c_2}]{\substack{r_3 + 5r_2 \\ c_3 + 5c_2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二次型的标准型为 $f = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 8y_3^2$

坐标变换矩阵为 $C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

必须说明： 不同初等变换过程，可获得不同二次型.

小结

- 一些概念：实二次型，标准形，规范形、秩、线性替换，正惯性指数，负惯性指数，符号差
- 二次型与对称矩阵之间是1-1对应关系
- 矩阵合同关系
- 惯性定理
- 拉格朗日配方法和合同变换法化二次型为标准形过程(重点)

练习

把下列二次型化为标准型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

参考结果：

$$-4y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$$