离散数学练习题之基础部分（一）

1. 证明对任意给定的52个整数,存在其中的两个整数,要么两者的和能被100整除,要么两者的差能被100整除。

解：用100分别除52个整数，得到的余数必为0, 1, …, 99这100个数之一。将余数进行以下分组：

{0}、{1, 99}、{2, 98}、…、{49, 51}、{50}

上述方式进行分组一共可以分为51组，如果取52个整数，那么必然有两个出自同一类，而同一组中两个，如果余数相同，则差是100的倍数；若余数不同，则和是100的倍数，因此结论成立。

2. 某厂在五年期间的每一个月里至少试制一种新产品,每年最多试制19种新产品。试证明:一定存在连续的几个月,恰好试制24种新产品。

解：1 年 12 个月，总共 5 年，所以设 5 年期间该厂每个月试制的新产品个数分别为$a_1, a_2, \ldots, a_{59}, a_{60}$，构造数列$\{a_n\}$的前$n$项和的数列$s_1, s_2, \ldots, s_{59}, s_{60}$,则有$1 \le a_1 = s_1 < s_2 < \cdots < s_{59} < s_{60} \le 19 \times 5 = 95$,序列$s_1 + 24, s_2 + 24, \ldots, s_{59} + 24, s_{60} + 24$也是一个严格递增序列，因此$25 \le s_1 + 24 < s_2 + 24 < \cdots < s_{59} + 24 < s_{60} + 24 \le 19 \times 5 + 24 = 95 + 24 = 119$，因此$s_1, s_2, \ldots, s_{59}, s_{60}$（60 个自然数）以及$s_1 + 24, s_2 + 24, \ldots, s_{59} + 24, s_{60} + 24$（60 个自然数）这 120（60+60=120）个自然数的数值范围是$[1, 119]$，其中一共有 119 个自然数，根据鸽巢原理， 120 个数中必定存在两个数的数值相等。

因为上述两个数列分别是严格单调的(因为最小值为 1,所以严格单调，不可能有相等的两个值），因此$s_1, s_2, \ldots, s_{59}, s_{60}$序列以及$s_1 + 24, s_2 + 24, \ldots, s_{59} + 24, s_{60} + 24$两个序列中不可能有相等的值，只能两个序列间存在相等的值,因此必然存在一个i和j,使得$s_i = s_j + 24$。从而,该厂从第$j + 1$个月起到第i个月的这几个时间里，恰好试制了 24 种新产品。

3. 求解如下递推关系

$$\begin{cases} H(n) + H(n-1) - 3H(n-2) - 5H(n-3) - 2H(n-4) = 0 \\ H(0) = 1, H(1) = 0, H(2) = 1, H(3) = 2 \qquad n \ge 4 \end{cases}$$

解：特征方程$x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$，特征根是-1，-1，-1，2，通解为$\mathrm{H(n)}=(c_1+c_2n+c_3n^2)(-1)^n+c_4 2^n$

其中待定常数满足下述方程：

$$\begin{cases} c_1+c_4=1 \\ -c_1-c_2-c_3+2c_4=0 \\ c_1+2c_2+4c_3+4c_4=1 \\ -c_1-3c_2-9c_3+8c_4=2 \end{cases}$$

解得$c_1=\frac{7}{9}$，$c_2=-\frac{1}{3}$，$c_3=0$，$c_4=\frac{2}{9}$，因此，原方程的解为

$$\mathrm{H(n)}=\frac{7}{9}(-1)^n-\frac{1}{3}n(-1)^n+\frac{2}{9}2^n$$

4. 设 a_1,a_2 ，…，a_{100}是由 1和２组成的序列 ，已知从其任一数开始的顺序10个数的和不超过16．即

$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+9}\le 16 \quad 1\le i\le 91$

则至少存在 h 和 k ，k＞h，使得 $a_h+a_{h+1}+\cdots+a_k=39$

解：将$a_1,a_2,\ldots,a_{100}$组成数列$\{a_n\}$，并构造数列$\{a_n\}$的前n项和的数列$s_1,s_2,\ldots,s_{99},s_{100}$，由于每个$a_i$都是正数，因此：$s_1<s_2<\cdots<s_{99}<s_{100}$，其中 $s_{100}=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})+\cdots+(a_{91}+a_{92}+\cdots+a_{100})$，根据题中所给的条件可得$s_{100}\le 10\times 16=160$

作序列$s_1,s_2,\ldots,s_{99},s_{100},s_1+39,s_2+39,\ldots,s_{99}+39,s_{100}+39$一共200项，其中最后一项$s_{100}+39\le 160+39=199$，但200项序列取值范围为$[1,199]$，根据鸽巢原理，其中必有两项相等。

因为$s_1,s_2,\ldots,s_{99},s_{100}$以及$s_1+39,s_2+39,\ldots,s_{99}+39,s_{100}+39$两个都是严格递增序列，因而两个序列中不可能有相等的值，只能两个序列间存在相等的值，因此必然存在h和k，使得$s_k=s_h+39$，$1\le h,k\le 100$，则$s_k-s_h=39$，即$a_1+a_2+\cdots+a_k-(a_1+a_2+\cdots+a_h)=39$，从而$\mathrm{a_{h+1}+a_{h+2}+\cdots+a_k=39}$

5. 找出具有初始条件 $a_0=1,a_1=-2,a_2=-1$ 的下列递推关系的解 $a_n=-3a_{n-1}-3a_{n-2}-a_{n-3}$

解：特征方程$r^3+3r^2+3r+1=0$，特征方程只有一个三重根$r=-1$，通解为$a_n=(c_1+c_2n+c_3n^2)(-1)^n$

其中待定常熟满足下述方程：

$$\begin{cases} c_1 = a_0 \\ -c_1 - c_2 - c_3 = a_1 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = a_2 \end{cases}$$

解得$c_1 = 1$，$c_2 = 3$，$c_3 = -2$，因此，原方程的解为

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

6. 列出按照字典顺序的 362541 的下面一个最大排列

解：(1)首先找到整数a_j和a_{j+1}使得$a_j < a_{j+1}$，且$a_{j+1} > a_{j+2} > \cdots > a_n$

找到$j = 3, a_j = 2$

（2）将$a_{j+1}a_{j+2} \dots a_{j+1} > a_n$中大于$a_j$最小的整数放在第$j$个位置

即 364. . .

（3）按照递增顺序从位置$j + 1$到n列出$a_j, a_{j+1}, \dots a_n$中其余的整数。

即 364125

7. 设计一个如下的电路图：它有三个输入 p1、p2、p3，当其中任意二个的值为 0 时输出的结果为 1，其他情况下输出 0。请给出其真值表，同时针对此真值表给出主析取范式、主合取范式，并给出其最简单的表达式。

p1	p2	p3	表达式的值
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

解：

其主析取范式=$m_{000} \vee m_{001} \vee m_{010} \vee m_{100}$

=(¬p1∧¬p2∧¬p3)∨(¬p1∧¬p2∧p3)∨(¬p1∧p2∧¬p3)∨(p1∧¬p2∧¬p3)

=((¬p1∧¬p2)∧(¬p3∨∧p3))∨(((¬p1∧p2)∨ (p1∧¬p2))∧¬p3)

=(¬p1∧¬p2) ∨(((¬p1∧p2)∨ (p1∧¬p2))∧¬p3)

其主合取范式=$M_{011} \wedge M_{101} \wedge M_{110} \wedge M_{111}$

=(p1∨¬p2∨¬p3)∧(¬p∨p2∨¬p3)∧(¬p1∨¬p2∨p3)∧(¬pq∨¬p2∨¬p3)

=(((p1∨¬p2)∧(¬p1∨p2))∨¬p3)∧ (¬p1∨¬p2)

8. 在 20 个大学生中，有 10 人爱好音乐，有 8 人爱好美术，有 6 人既爱好音乐又爱好美术。那么，既不爱好音乐又不爱好美术的学生有多少个？

解：假设大学生集合为 U，爱好音乐的同学集合为 A，爱好美术的同学集合为 B。

显然，$|U| = 20, |A| = 10, |B| = 8, |A \cap B| = 6$ **根据容斥原理：**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 12$$

既不爱音乐又不爱好美术的学生集合人数为

$$|U| - |A \cup B| = 20 - 12 = 8.$$

9. 假设用 a 和 b 分别表示两个 n 位的二进制数，它们各自代表由 n 个元素组成的集合，试用二进制运算方式求他们表示的集合的交、并、差和对称差。

解：包含n**个元素的集合**C**：**$\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$**，**a**和**b**两个**n**位二进制数分别为**$(a_1, a_2, \dots, a_n)$**和**$(b_1, b_2, \dots, b_n)$**，他们分别是集合 A 和 B 的二进制表示，A 和 B 是由 C 中元素组成的集合，**a_i**和**b_i**分别表示的**c_i**这个元素是否在 A 和 B 两个集合中，**a_i**为 1 说明**c_i**在 A 集合中，**a_i**为 0 说明不在，**b_i**为 1 说明**c_i**在 B 集合中，**b_i**为 0 说明不在。**

那么，集合的交为：$a \,\&\, \mathbf{b}$**，集合的并为**$a \mid \mathbf{b}$**，集合的差为**$a - \mathbf{b} = a \,\&\, (\sim\mathbf{b})$**、**$\mathbf{b} - a = \mathbf{b} \,\&\, (\sim a)$**，集合的对称差为**$a \wedge \mathbf{b}$

其中：“&”为位与运算，“|”为位或运算，“~”为位取反运算，“^”为异或运算。

10. 分别用等算演算与真值表法，判断下列公式是否存在主析取范式或主合取范式，若有，请写出来。

(1)$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

(2) $(\neg p \to q) \to (q \wedge r)$

(3) $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$

(4) $\neg(q \to \neg p) \wedge \neg p$

(5) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$

(6)$(p \to (p \vee q)) \vee r$

(7) $(p \wedge q) \vee r$

(8) $(p \to q) \wedge (q \to r)$

(9) $(p \wedge q) \to q$

(10) $\neg(r \leftrightarrow p) \wedge p \wedge q$

解：(1)

p	q	¬p	(¬p→q)	¬q	(¬q∨p)	(¬p→q)→(¬q∨p)
0	**0**	1	0	1	1	1
0	**1**	1	1	0	0	0
1	**0**	0	1	1	1	1
1	**1**	0	1	0	1	1

存在主析取范式=成真赋值对应的小项的析取

$=m_{00}\vee m_{10}\vee m_{11}=(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

主析取范式=成假赋值对应的大项的合取

$=M_{01}=p\vee\neg q$

等值演算：

$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg\neg p\vee q)\vee(p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow\neg(p\vee q)\vee(p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee(p\vee\neg q))\wedge(\neg q\vee(p\vee\neg q))$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee p\vee\neg q)\wedge(\neg q\vee p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(1\vee\neg q)\wedge(p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg q)$

这是大项，故为大项的合取，称为主合取范式

$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(p)\vee(\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\wedge 1)\vee(1\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\wedge(q\vee\neg q))\vee((p\vee\neg p)\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

因为一个公式的值不是真，就是假，因此当我们得到一个公的取值为真的情况时，剩下的组合是取值为假， 因此当得到小项的析取组成的主析取范式后，可以针对剩下的组合写出主合取范式。

如当我们得到$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$的大项之合取$(p\vee\neg q)$后，使$(p\vee\neg q)$为假时(p,q)的值为(0,1)，故其标记为$M_{01}$，剩余的取值为(0,0),(1,0),(1,1)，故小项之析取为$m_{00}\vee m_{10}\vee m_{11}$。

反之，若先得到其小项的析取，也可得到其大项的合取。反正这两者将其所有组合瓜分完毕。

(2)$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(q\wedge r)$

p	q	r	¬p	¬p→q	(q∧r)	结果
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

主析取范式$=m_{000}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{111}=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

主合取范式$=M_{010}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{110}=(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

(3)$(p\vee(q\wedge r))\to(p\vee q\vee r)$

p	q	r	$(q\wedge r)$	$(p\vee(q\wedge r))$	$(p\vee q\vee r)$	$(p\vee(q\wedge r))\to(p\vee q\vee r)$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

永真式，所有小项的析取得到其主析取范式

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

由于没为假的指派，所以没有为假赋值，所对应的大项合取构成的合取，即没有主合取范式。

$\neg(p\vee(q\wedge r))\vee(p\vee q\vee r)=(\neg p\wedge\neg(q\wedge r))\vee(p\vee q\vee r)=((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r))\vee(p\vee q\vee r)=$
$(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee p\vee q\vee r=\neg(p\vee q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee p\vee q\vee r=1$ 永真

(4) $\neg(q\to\neg p)\wedge\neg p$

p	**q**	$\neg p$	$(q\to\neg p)$	$\neg(q\to\neg p)$	结果
0	**0**	1	1	0	0
0	**1**	1	1	0	0
1	**0**	0	1	0	0
1	**1**	0	0	1	0

没有成真的赋值，从而没有对应的小项，因此没有小项构成的主析取范式

永假式即矛盾式，为假指派对应的大项合取$=(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$

原式$=\neg(\neg q\vee\neg p)\wedge\neg p=(q\wedge p)\wedge\neg p=0$

(5) $(p\wedge q)\vee(\neg p\vee r)$

p	q	r	$(p\wedge q)$	$\neg p$	$(\neg p\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(\neg p\vee r)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1

主析取范式

$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg \mathbf{q}\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

主合取范式

$M_{100}=\neg p\vee q\vee r$

原式$=((p\wedge q)\vee\neg p)\vee r=((p\vee\neg p)\wedge(\neg p\vee q))\vee r=(1\wedge(\neg p\vee q))\vee r=\neg p\vee q\vee r$ 这就是大项也

剩下的赋值对应的就是小项

(6)$(p\to(p\vee q))\vee r$

p	q	r	$(p\vee q)$	$(p\to(p\vee q))$	$(p\to(p\vee q))\vee r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

永真式，只有小项组成的主析取范式。

没有为假的赋值，所以没有成假赋值对应的大项的合取，即没有主合取范式。

原式$=(\neg p\vee (p\vee q))\vee r=(1\vee q)\vee r=1$

(7)$(p\wedge q)\vee r$

p	q	r	$(p\wedge q)$	$(p\wedge q)\vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

主析取范式$=m_{001}\vee m_{011}\vee m_{101}\vee m_{110}\vee m_{111}=$

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

主合取范式$=M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{100}=(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$(p\wedge q)\vee r$

$=(p\wedge q\wedge 1)\vee(1\wedge 1\wedge r)$

$=(p\wedge q\wedge(\neg r\vee r))\vee((\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r)$

$=(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$

$(p\wedge q)\vee r$

$=(p\vee r)\wedge(q\vee r)$

$=(p\vee 0\vee r)\wedge(0\vee q\vee r)$

$=(p\vee(\neg q\wedge q)\vee r)\wedge((\neg p\wedge p)\vee q\vee r)$

$=(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)$

$=(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

(8) $(p\to q)\wedge(q\to r)$

p	q	r	$(p\to q)$	$(q\to r)$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

主析取范式$=m_{000}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{111}$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

主合取范式$=M_{010}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{110}=$

$=(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

$(p\to q)\wedge(q\to r)=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)$

$=(\neg p\vee q\vee 0)\wedge(0\vee\neg q\vee r)$

$=(\neg p\vee q\vee(\neg r\wedge r))\wedge((\neg p\wedge p)\vee\neg q\vee r)$

$=(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$(p\to q)\wedge(q\to r)=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)$

$=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge 1)\vee(\neg p\wedge 1\wedge r)\vee(1\wedge q\wedge r)$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge(\neg r\vee r))\vee(\neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r)\vee((\neg p\vee p)\wedge q\wedge r)$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

(9) $(p\wedge q)\to q$

p	q	$(p\wedge q)$	$(p\wedge q)\to q$
0	**0**	0	1
0	**1**	0	1
1	**0**	0	1
1	**1**	1	1

永真式，只有小项的析取构成的主析取范式$=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$
没有为假的指派，所以没有由大项的合取构成的主合取范式

$(p\wedge q)\to q$

$=\neg(p\wedge q)\vee q$

$=(\neg p\vee\neg q)\vee q$

$=\neg p\vee\neg q\vee q$

$=1$

(10) $\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$

p	q	r	$r\leftrightarrow p$	$\neg(r\leftrightarrow p)$	$\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

主析取范式$=m_{110}=p\wedge q\wedge\neg r$

主合取范式$=M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{011}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{111}$

$= (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

$\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$

$=\neg((\neg p\vee r)\wedge(p\vee\neg r))\wedge p\wedge q$

$=((p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r))\wedge p\wedge q$

$=(p\wedge\neg r\wedge p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r\wedge p\wedge q)$

$=(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$

$=\neg((p\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg r))\wedge p\wedge q$

$= ((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\vee r))\wedge p\wedge q$

$= (\neg p\vee\neg r)\wedge(p\vee r)\wedge p\wedge q$

$= (\neg p\vee\neg r)\wedge((p\vee r)\wedge p)\wedge q$

$= (\neg p\vee\neg r)\wedge p\wedge q$

$= (\neg p\vee(\neg q\wedge q)\vee\neg r)\wedge(p\vee(\neg q\wedge q)\vee(\neg r\wedge r))\wedge((\neg p\wedge p)\vee q\vee(\neg r\wedge r))$

$=(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge$

$(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge$

$\wedge\cancel{(\neg p\vee q\vee\neg r)}\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge\cancel{(p\vee q\vee\neg r)}\wedge\cancel{(p\vee q\vee r)}$

$= (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

$=M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{011}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{111}$