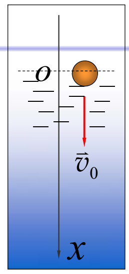
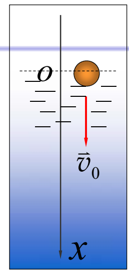
例3.2　一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为 v_0 ．设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力为 $F_r = -bv$ ，b 为一常量．求阻力对球作的功与时间的函数关系．



解　建立如右图所示的坐标系



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -bv\,dx$$

$$= -\int bv \frac{dx}{dt} dt = -b\int v^2 dt$$

$$\because \quad -bv = m\frac{dv}{dt}$$

对此式移相并积分，结合t=0, v=v_0

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\therefore W = -bv_0^2 \int_0^t e^{-\frac{2b}{m}t} dt \qquad W = \frac{1}{2}mv_0^2(e^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

3.3 弹簧对物体的作用力为F=-kxi-kyj,这里k为物体在xy平面内运动时的劲度系数，求当物体从起点（x_i, y_i）移动到终点（x_f, y_f）时弹力做功的表达式。

解：

$$A = \int_{(x_i,y_i)}^{(x_f,y_i)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(x_i,y_i)}^{(x_f,y_f)} F_x dx + F_y dy$$

$$= \int_{(x_i,y_i)}^{(x_f,y_f)} (-kxdx - kydy)$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} -kxdx + \int_{y_i}^{y_f} -kydy$$

$$= \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) + \frac{1}{2}k(y_i^2 + y_f^2)$$

质点受几个力的作用

F＝F_1＋F_2＋......+F_n所作的功为：

$$A = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_n) \bullet d\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_1 \bullet d\vec{r} + \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_2 \bullet d\vec{r} + \ldots\ldots + \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_n \bullet d\vec{r}$$

$$= A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n$$

注意

F是矢量，F_1＋F_2＋......+F_n是矢量和；
A是标量，A_1＋A_2＋......+A_n是标量和。
矢量求和要用平行四边形法则，标量求和就是代数和。

Δ3.2 动能定理（kinetic energy theorem）

■ 功的物理意义

➢ 可以通过与功有联系的物理规律揭示出来。

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad F_\tau = ma_\tau = m\frac{dv}{dt}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\tau\, dr = m\frac{dv}{dt}dr = mdv\frac{dr}{dt}$$

$$= mdv\; v = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

令　$E_k = \frac{1}{2}mv^2$　称为物体的动能

$$W = \int_{v_0}^{v} d(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_k - E_{k0}$$

➢ 即：合力对质点所作的功等于质点动能的增加，称为动能定理。

✓ 合力作的功是力在空间的积累效应，与过程有关，但作功大小却等于力作用始末的质点动能差，与物体动能变化的过程无关。

➢ 动能单位：与功相同，千克 米²/秒²，称为焦耳（J）

- 动能仅仅是能量存在的一种形式，在物体相互作用时，动能往往可以转化成其他形式的能，如势能、热能、电能等，物质的运动形式也随能量的转化而发生变化。
- 动能是表征物体机械运动转化为一定量的其他运动形式的能力的一种量度。
- 功是过程量，动能是状态量；
- 功和动能依赖于惯性系的选取，但对不同惯性系动能定理形式相同.

质点系的动能定理

- 第 i 个质点同时受到系统外力、内力的作用

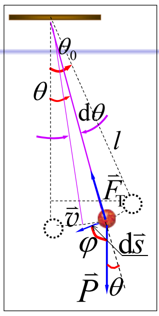
$$W_i = W_{i,\mathrm{ext}} + W_{i,\mathrm{int}} = E_{ki} - E_{ki0}$$

- 对所有质点，将上式两端求和 $W = \sum_i W_i$

$$W_{\mathrm{ext}} + W_{\mathrm{int}} = E_k - E_{k0}$$

- 即：系统的内力可以改变系统的总动能，
- 但：不能改变系统的总动量。
- 如：地雷爆炸

例 一质量为1.0 kg 的小球系在长为1.0 m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上．起初把绳子放在与竖直线成 30° 角处，然后放手使小球沿圆弧下落．试求绳与竖直线成 10° 角时小球的速率．



解 $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

$$= \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

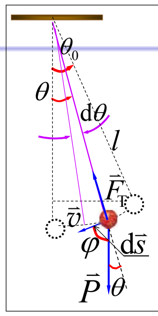
$$\because \mathrm{d}s = -l\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$= -mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$W = -mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$



$m = 1.0\ \mathrm{kg}$ $\quad l = 1.0\ \mathrm{m}$

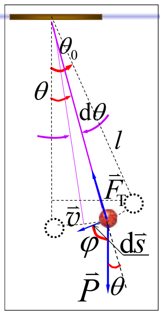
$\theta_0 = 30^\circ$ $\quad \theta = 10^\circ$

$$W = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

得 $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

$$= 1.53\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$



§ 3. 3 一对力的功

一. 一对力:分别作用在两个物体上的大小相等、方向相反的力。它们通常是作用力与反作用力，但也可不是。

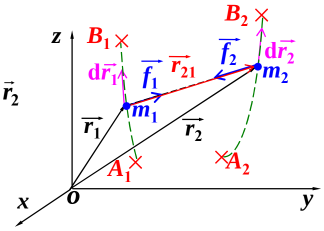
二. 一对力的功

$$\mathrm{d}W_{\text{对}} = \vec{f}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{f}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$= \vec{f}_2\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1)$$

$$= \vec{f}_2\cdot\mathrm{d}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$= \vec{f}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{21}$$



$\mathrm{d}\vec{r}_{21}$：m_2相对m_1的元位移。

$$W_{12对} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21} \left(= \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12}\right)$$

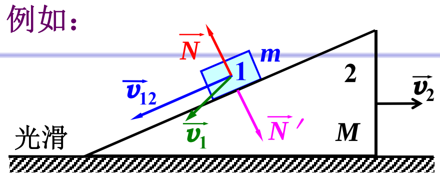
(1)表示初位形，即 m_1在A_1，m_2在A_2；

(2)表示末位形，即 m_1在B_1，m_2在B_2 。

说明：

1. $W_{对}$ 与参考系选取无关。
2. 一对滑动摩擦力的功恒小于零。
   （摩擦生热是一对滑动摩擦力作功的结果）
3. 在无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力的功必为零。

例如：



$\vec{N}$ 不垂直于 $\vec{v}_1$ $\Rightarrow$ $W_N \neq 0$

$\vec{N}'$ 不垂直于 $\vec{v}_2$ $\Rightarrow$ $W_{N'} \neq 0$

$\because$ $\vec{N} \perp \vec{v}_{12}$，即 $\vec{N} \perp \mathrm{d}\vec{r}_{12}$

$\therefore$ $W_{对} = W_N + W_{N'} = 0$

3.4 保守力的功（the work of conservative force）

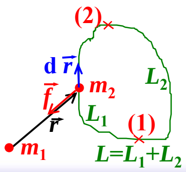
一、定义

如果一对力的功与相对移动的路径无关，而只决定于相互作用物体的始末相对位置，则这样的力称为保守力。

若 $\vec{f}$ 为保守力，则：

$$\int_{(1)\,L_1}^{(2)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(1)\,L_2}^{(2)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

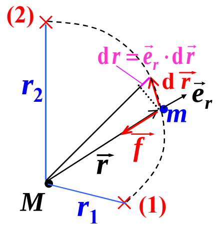
$$\int_{(1)\,L_1}^{(2)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{(2)\,L_2}^{(1)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



$\Rightarrow$ $\boxed{\oint_L \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0}$ （此式也可作为保守力的定义）

二．几种保守力

1. 万有引力 $W_{12对} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$



$$= \int_{(1)}^{(2)} -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$$

任何中心力 $f(r)\vec{e}_r$都是保守力。

2. 弹力　一维运动时 $\vec{f} = -kx\cdot\vec{i}$

x — 对自然长度的增加量，

k — 弹簧的劲度（stiffness）。

3. 重力 $\vec{P} = m\vec{g}$

重力并不是地球表面附近的万有引力。

三．非保守力

作功与路径有关的力称为非保守力。

例如：▲ 摩擦力（耗散力）：

一对滑动摩擦力作功恒为负；

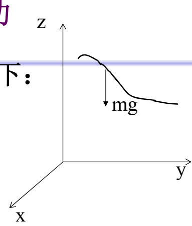
▲ 爆炸力：作功为正。

几种常见力的功

1．重力的功

重力是恒定力，在直角坐标系下：

$F_x = 0$；　$F_y = 0$；　$F_z = -mg$

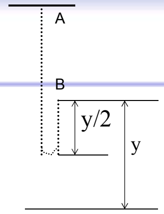


$$A = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} -mgdz$$

$$= mg(z_1 - z_2)$$

书中例3.1 (p.98)
一条长L，质量M的均匀柔绳，A端挂在天花板上，自然下垂，将B端沿铅直方向提高到与A端同高处。求：该过程中重力所作的功。



解:提升高度y时，提的链长y/2

提起部分受的质量 $\frac{M}{L}\frac{1}{2}y$

dy上的元功为：

$$dA = -\frac{1}{2}\frac{M}{L}gydy$$

$$A = \int_0^L dA = \int_0^L -\frac{1}{2}\frac{M}{L}gydy = \frac{1}{4}MgL$$

2．弹性力

弹性力表示为：$F_x = -kx$　　（胡克定律）

元功为：$dA = F_x\,dx = -kx\ dx$

从x_1到x_2做的功为：

$$A = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

这里要特别注意的是：x必须取弹簧的原长为0点。

例3.2 (p.99)

非胡克定律的弹簧：$F = -kx - ax^3$，其中k、a均为常数。

求：从x_1到原长过程中，弹性力做的功。

$$A = \int_{x_1}^{0}(-kx - ax^3)dx$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{4}ax_1^4$$

例3.3

准静态地提起一条长L，质量M的均匀柔绳，需要作多少功？

解：单位长度绳的质量：M/L，

x长度的绳子质量 $\frac{M}{L}x$

F变

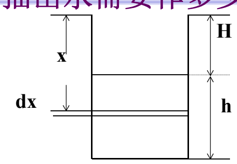
$$F = mg = \frac{M}{L}xg$$

$$\mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{F}dx = \int_0^{l}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\mathrm{g}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{MgL}$$

例3.4　（P135，3.5）

蓄水池面积S，水深h，水面距地面H。

求：抽出水需要作多少功？



S变

解：离地面x处，深dx的一层水的质量dm=ρSdx

将dm水提到路面所需作的功：

dA=dm g x =ρSgxdx

$$A = \int_H^{H+h}\rho Sgxdx = \frac{1}{2}\rho Sgx^2\Big|_H^{H+h}$$

例3.5　风力F作用于向北运动的船，风力方向变化的规律是：θ=BS，其中S为位移，B为常数，θ为F与S间的夹角。如果运动中，风的方向自南变到东，求：风力作的功。$\int_0^{\frac{\pi}{2B}} FdS\cos\theta$

解：元功：

dA=Fdscosθ；

其中 **θ=BS**

积分限：

风向由南变到东，

则θ由0变到π/2；

S由0变到π/2B

θ变

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2B}} F\cos(BS)d(BS)\frac{1}{B}$$

$$= \frac{F}{B}\sin(BS)\Big|_0^{\frac{\pi}{2B}}$$

$$= \frac{F}{B}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{F}{B}$$

Δ 3.5 势能（potential energy）

利用保守力的功与路径无关的特点，可引入“势能”的概念。

一. 系统的势能 E_p

定义：系统由位形(1)变到位形(2)的过程中，其势能的减少(增量的负值)等于保守内力的功。

$$\boxed{E_{p1}-E_{p2}=-\Delta E_p=W_{保12}}$$

若规定系统在位形（2）的势能为零， 则：

$$\boxed{E_{p1}=\int_{(1)}^{(2)}\vec{f}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

说明：1. 势能属于相互作用的系统；

2. 势能不依赖于参考系的选择，不要将势能零点的选择与参考系的选择相混淆。

二. 几种势能

1. 万有引力势能 $\boxed{E_p(r)=-\dfrac{GMm}{r}+C}$

令 $E_p(\infty)=0$，则 $C=0$，

有 $\boxed{E_p(r)=-\dfrac{GMm}{r}}$

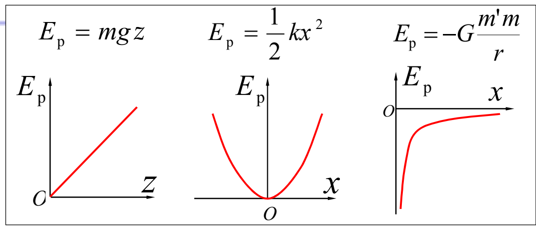
2. 重力势能 $\boxed{E_p(h)=mgh+C}$

令 $E_p(0)=0$， 有 $\boxed{E_p(h)=mgh}$

3. 弹性势能 $\boxed{E_p(x)=\dfrac{1}{2}kx^2+C}$

令 $E_p(0)=0$，有 $\boxed{E_p(x)=\dfrac{1}{2}kx^2}$

三、势能曲线



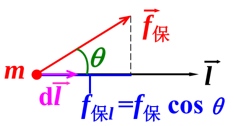
重力势能曲线 $z=0,\ E_p=0$

弹性势能曲线 $x=0,\ E_p=0$

引力势能曲线 $r\to\infty,\ E_p=0$

3.6 由势能求保守力

一. 由势能函数求保守力



$$\vec{f}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\mathrm{d}E_p$$

$$f_{保l}\,\mathrm{d}l=-\mathrm{d}E_p$$

所以有 $\boxed{f_{保l}=-\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}l}}$

例如弹性势能 $E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$，

则可得弹性力 $f_x=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dfrac{1}{2}kx^2)=-kx$

通常 E_p 可以是几个坐标的函数，此时有：

$$\boxed{f_{保l}=-\frac{\partial E_p}{\partial l}}$$

若 $E_p=E_p(x,y,z)$， 则有：

$$f_{保x}=-\frac{\partial E_p}{\partial x},\quad f_{保y}=-\frac{\partial E_p}{\partial y},\quad f_{保z}=-\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\therefore\ \vec{f}_{保}=-(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k})$$

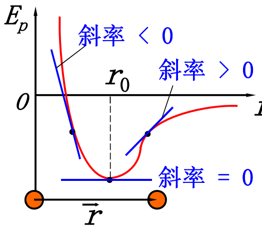
$$=-\mathrm{grad}\,E_p$$

$\mathrm{grad}\,E_p$ — E_p 的梯度（gradient）

引入算符 $\nabla \equiv \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$

则有 $\boxed{\vec{f}_{保}=-\nabla E_p}$

二． 由势能曲线求保守力



例：双原子分子势能曲线

$r = r_0$ 斜率 = 0 f_r =0。

$r > r_0$ 斜率 > 0 f_r <0，是引力。

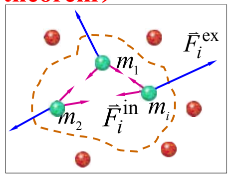
$r < r_0$ 斜率 < 0 f_r >0，是斥力。

§3.7 功能原理，机械能守恒定律

一． 功能原理（work-energy theorem）

对质点系有：

动能定理 $\boxed{W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1}}$



$$W_{内}=W_{内保}+W_{内非}=-(E_{p2}-E_{p1})+W_{内非}$$

$$W_{外}+W_{内非}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$$

引入系统的机械能 $\boxed{E=E_k+E_p}$

功能原理
$\boxed{W_{外}+W_{内非}=E_2-E_1}$ （积分形式）
$\boxed{\mathrm{d}W_{外}+\mathrm{d}W_{内非}=\mathrm{d}E}$ （微分形式）

质点系的机械能的增量等于外力与非保守内力作功之和．——质点系的功能原理

注意 内力可以改变质点系的动能

二． 机械能守恒定律

（law of conservation of mechanical energy）

在只有保守内力作功时，系统的机械能不变。

即 $\boxed{若\ \mathrm{d}W_{外}=0\ 且\ \mathrm{d}W_{内非}=0，\ 则\ E=常量}$

—— 机械能守恒定律

显然，孤立的保守系统机械能守恒。

当 $\Delta E=0$ 时，$\Delta E_k=-\Delta E_p=W_{内保}$

即 $E_p \underset{W_{保内}<0}{\overset{W_{保内}>0}{\rightleftarrows}} E_k$

保守内力作功是系统势能与动能相互转化的手段和度量。

三． 普遍的能量守恒定律

如果考虑各种物理现象，计及各种能量，

则 一个孤立系统不管经历何种变化，系统所有能量的总和保持不变。

—— 普遍的能量守恒定律

机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现。