参数估计方法在捕鱼问题中的应用

设湖中有鱼 N 条，做上记号后放回湖中（记号不消失），一段时间后让湖中的鱼（做上记号的和没做记号的)混合均匀，再从湖中捕出鱼数 s 条 $(s \ge r)$,其中有 t 条 $(0 \le t \le r)$ 标有记号。试根据这些信息，估计湖中鱼数的 N 值。

（1）根据概率的统计定义：湖中有记号的鱼的比例应是 $\frac{r}{N}$ （概率），而在捕出的 s 条中有记号的鱼为 t 条，有记号的鱼的比例是 $\frac{t}{s}$ （频率）。设想捕鱼是完全随机的，每条鱼被捕的机会都相等，于是根据用频率来近似概率的道理，便有

$$\frac{r}{N} = \frac{t}{s} \qquad 即 \qquad N = \frac{rs}{t}$$

故 $N \approx \frac{rs}{t}$ （取最接近的整数）。

（2）用矩估计法：设捕出的 s 条鱼中，标有记号的鱼为 ξ ，因为 ξ 是超几何分布，而超几何分布的数学期望是 $E(\xi) = \frac{rs}{N}$ 。捕 s 条鱼得到有标记的鱼的总体平均数，而现在只捕一次，出现 t 条有标记的鱼，故由矩估计法，令总体一阶原点矩等于样本一阶原点矩，即 $\frac{rs}{N} = t$ ，于是也得 $N \approx \frac{rs}{t}$ （取最接近的整数）。

（3）根据二项分布与极大似然估计：若再加上一点条件，及假定捕出的鱼数 s 与湖中的鱼数 N 的比很小，即 $s \ll N$, 这样的假定对实际来说一般是可以满足的，这样我们可以认为每捕一条鱼出现有标记的概率为 $p = \frac{r}{N}$ ，且认为在 s 次捕鱼（每次捕一条）中 p 不变。把捕 s 条鱼近似地看作 s 重伯努利实验，于是，根据二项分布，s 条鱼有 t 条有标记的，就相当于 s 次试验中有 t 次成功。故

$$p_s(t) = C_s^t p^t (1-p)^{s-t} = C_s^t (\frac{r}{N})^t (1 - \frac{r}{N})^{s-t} = \frac{1}{N^s} C_s^t r^t (N-r)^{s-t}$$

同样地，我们取使 N 概率 $p_s(t)$ 达到最大，为此我们将 N 作为非负实数看待，求 $p_s(t)$ 关于的 N 最大值。为方便，求 $\ln p_s(t)$ 关于 N 的最大值。于是

$$\ln p_s(t) = -s \ln N + \ln C_s^t + t \ln r + (s-t) \ln (N-r) \frac{d \ln p_s(t)}{dN} = -\frac{s}{N} + \frac{(s-t)}{N-r} = 0$$

令 $\quad \frac{d \ln p_s(t)}{dN} = -\frac{s}{N} + \frac{(s-t)}{N-r} = 0$

同样可得 $N \approx \frac{rs}{t}$ （取最接近的整数）。

（4）根据超几何分布鱼最大似然估计法：设捕出的 s 条鱼中，标有记号放入鱼为 ξ ，则 ξ 是一个随机变量，显然 ξ 只能取 $0,1,2,\ldots l (l = \min\{s, r\})$ 。

令先考虑 s 条中有 i 条有标记的鱼的概率，即 $p(\xi=i)$。因湖中鱼数设为 N 条，捕出 s 条，故

$$p(\xi=i)=\frac{C_r^iC_{N-r}^{s-i}}{C_N^s},i=0,1,2\ldots,l(l=\min\{s,r\})$$

因为捕出 s 条出现 t 条有标记的鱼的概率为

$$p(\xi=t)=\frac{C_r^tC_{N-r}^{s-t}}{C_N^s}\equiv L(N)$$

根据最大似然估计法，今捕 s 条出现有标记的鱼 t 条，那么参数 N 应该使得 $p(\xi=t)=L(N)$ 达到最大，即参数 N 的估计值 N 使得

$$L(N)=\max_N L(N)$$

由比值

$$R(N)=\frac{L(N)}{L(N-1)}=\frac{C_r^tC_{N-r}^{s-t}}{C_N^s}\bullet\frac{C_{N-1}^s}{C_r^tC_{N-1-r}^{s-t}}=\frac{C_{N-1}^{s-1}C_{N-1}^s}{C_N^sC_{N-1-r}^{s-t}}=\frac{\frac{(N-r)!}{(s-t)!(N-r-s+t)!}\bullet\frac{(N-1)!}{s!(N-1-s)!}}{\frac{N!}{s!(N-s)!}\bullet\frac{(N-1-r)!}{(s-t)!(N-1-r-s+t)!}}$$

$$=\frac{(N-r)(N-s)}{N(N-r-s+t)}=\frac{N^2-Nr-Ns+rs}{N^2-Nr-Ns+Nt}$$

看出，当 $rs<Nt$ 时，$R(N)<1$，这表明如果 $t>0,\ \ N>\frac{rs}{t}$ 时，$L(N)$ 是 N 的下降函数；当 $rs>Nt$ 时，$R(N)>1$，这表明 $t>0,N<\frac{rs}{t}$ 时，$L(N)$ 是 N 的上升函数。于是 $N=\frac{rs}{t}$ 时，$L(N)$ 达到最大值，但由于 N 是整数，故取 $N\approx\frac{rs}{t}$（取最接近的整数）

如果 $t=0$，就加大 s；若仍有 $t=0$，可认为 $N=+\infty$。

评注：

1. 理论依据：

 二项分布、超几何分布的概率计算，矩法计与极大似然估计。应用参数估计的思想和方法分析、处理问题。

2. 应用与推广：

 此例说明，对同一个问题可以采用不同的方法解决。例如，估计一个城市的人口总素，也可以采用同样的方法去考虑。

参考文献：

[1] 孙荣恒·趣味随机问题·北京：科学出版社，2004