Chpt.7 Statistical Inference: Parameter Estimation

第七章 参数估计

[1] 参数点估计

现象：

很多随机变量/总体的分布是有几个参数完全决定的。

正态分布$N(\mu, \sigma^2)$

Poisson分布$\pi(\lambda)$

假定分布形式已知，知道了参数就可以确定分布

问题：

设总体X的分布函数的形式已知，但他的一个或多个参数未知

借助总体X的样本来估计总体分布中的未知参数θ问题称为参数的点估计问题。

[1]参数点估计

概念：

设总体X的分布函数F(X,θ) 的形式为已知，θ是待估参数。

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是X的一个样本， $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应的一个样本观测值。

估计问题就是构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，用它的观测值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 作为未知参数θ的近似值。

我们称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为θ的估计量，$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为θ的估计值。

[2] 矩估计

设X为连续随机变量，其概率密度为 $f\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$，其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为待估参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X的样本，假设总体 $\boldsymbol{X}$ 的前 k 阶矩存在：

$$\mu_l=E\left(X^l\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^l f\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$$

$$=\mu_l\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$$

$$l=1,2,\cdots,k$$

μ_l 是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数。由此可以求解得到：

[2] 矩估计

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1,\cdots,\mu_k) \\ \vdots \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1,\cdots,\mu_k) \end{cases}$$

但是k 阶矩不能得到，用样本矩 $A_l = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ (l=1,2,…,k),

代替 μ_l，形成对θ_l的估计：

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1,\cdots,A_k) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_k = \theta_k(A_1,\cdots,A_k) \end{cases}$$

这样地估计称为矩估计量，得到的值是矩估计（或者说是用矩作估计）。

[例] 设总体X的均值μ方差σ^2都存在但未知，又设$X_1,\cdots,X_n$是来自总体的样本，求μ与σ^2的矩估计。

解：
$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \mu \\ \mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

得到
$$\begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{cases}$$

分别以一二阶样本矩代替μ_1，μ_2得到，

$$\begin{cases} \hat{\mu} = A_1 = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \end{cases}$$

这说明均值、方差的矩估计表达式不因分布的不同而不同。

[3] 衡量估计值优劣的标准

应该存在不同的估计量和估计值

比如 σ^2 的估量。

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$S_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

不同的估计量，哪个好，哪个差，这是估计量的评选问题。需要有一些标准

[3] 衡量估计值优劣的标准

无偏性

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体X的样本

$\theta \in \Theta$ 是包含在总体X中的未知参数

若估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在且等于未知参数

θ，即

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \mathrm{L}\ , X_n)$ 为 θ 的无偏估计量.

此时，用 $\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 代替 θ 不含系统误差.

样本均值是总体均值的无偏估计；样本方差是总体方差的无偏估计．

设总体X的数学期望为 $E(X)=\mu$，方差为 $D(X)=\sigma^2$

$$E(\overline{X})=\mu, D(\overline{X})=\frac{1}{n}\sigma^2$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\frac{n}{n-1}\overline{X}^2+\frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

样本均值是总体均值的无偏估计；样本方差是总体方差的无偏估计.

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{n}{n-1}E(\bar{X}^2)$$

$$=\frac{n}{n-1}\left[D(X_i)+(EX_i)^2\right]-\frac{n}{n-1}\left[D(\bar{X})+(E(\bar{X}))^2\right]$$

$$=\frac{n}{n-1}(\sigma^2+\mu^2)-\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2\right)$$

$$=\sigma^2$$

这也是为什么用 $S_n^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$ 而不用 $Y_n^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$ 的进一步原因。

所以，S^2是σ^2的无偏估计值.

有效性

无偏估计值未必是唯一的，当然应选对 θ 的平均偏差较小者为好，即估计值应有尽量小的方差。这就引出了有效性标准

设 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计

如果在样本容量相同的情况下，$\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 更密集在真值θ附近，即

$$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$**有效**；如果对给定的 n，$D(\hat{\theta})$ 的值达到最小，则称 $D(\hat{\theta})$ 为 θ 的**有效估计值**.

有效性

例如 $\overline{X}$ 与 X_i 均为总体均值 μ 无偏估计，

但是 $$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2 = D(X_i)$$

因此，$\overline{X}$ 较 X_i 有效.

一般时候，虽然都是样本均值，但是随着样本个数的增加，估计的方差会减小，即

$$D(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sigma^2 > \frac{1}{n+k}\sigma^2 = D(\overline{X}_{n+k})$$

相合性（一致性）

由于统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与n有关，不妨记为 $\hat{\theta}_n$，我们自然希望 n 越大时，对 θ 的估计越精确.于是有相合性（一致性）标准。

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是参数 θ 的估计量，如对任意的 $\theta \in \Theta$ ，当 $n \to \infty$ 时，$\hat{\theta}_n$ 按概率收敛于θ，即对任意$\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$ 则称 $\hat{\theta}_n$ 是θ 的相合估计值（一致估计值）。

样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 μ 的一致估计值

这是因为由切比雪夫定理的推论可知 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ |\overline{X} - \mu| < \varepsilon \right\} = 1$

从而，样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 μ 的一致估计值.

样本方差S^2是总体方差σ²的一致估计值

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2 \\
&= \frac{n}{n-1} \bullet \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2 \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right)
\end{aligned}
$$

当 $n \to \infty$ 时，$\overline{X^2}$ 与 $\overline{X}^2$ 分别按概率收敛于$E(X^2)$与$(EX)^2$

从而S^2按概率收敛于$E(X^2)-(EX)^2 = DX = \sigma^2$

所以，S^2是σ^2的一致估计值.

7.2 极大似然法

[1] 思想方法

极大似然法的想法是，一随机试验，已知有若干个结果

$$A_1, \ A_2, \ \cdots \ , A_i, \ \cdots$$

如果在一次试验中A_i发生了，则可认为当时的条件最有利于A_i发生，故应如此选择分布的参数，使发生A_i的概率最大。

[例] 已知甲乙两射手命中靶心的概率分别为p_1=0.8和p_2=0.5，今有一张靶纸上表明10枪6中靶心，又知靶子肯定是甲乙之一射的，问究竟是谁所射的可能性最大？

[解] 设事件A＝{10枪6中靶心}

若是甲所射，则A发生的概率为，

$$P_1(A) = C_{10}^{6}(0.8)^6(0.2)^4 = 0.088$$

若是乙所射，则A发生的概率为，

$$P_2(A) = C_{10}^{6}(0.5)^6(0.5)^4 = 0.21$$

显然，$P_1(A) < P_2(A)$，故可认为乙所射的可能性较大.

[2] 似然函数

含参数θ的总体X的样本 $X_1,\cdots,X_n$，设 $x_1,\cdots,x_n$ 为样本的观测值.

- 当X是离散型时, 设其概率分布为 $P\{X=x\}=p(x,\theta)$, 令

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)$$

$L(\theta)$ 称为似然函数, 其实质就是样本观测值出现的概率.

- 当X是连续型时，设其概率密度为 $f(x,\theta)$，类似得到似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$$

[3] 参数的估计

参数的取值应使所抽到的样本以最大的概率出现. 换言之, 应使似然函数$L(\theta)$达到最大值.

最大相似然估计 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与样本观测值直接相关，它是使得似然函数 $L(\theta)$达到最大值的估计值：

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$$

相应的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为最大似然估计量。

Remark 1：在很多情况下 $p(x,\theta)$、$f(x,\theta)$关于θ 可微，这时最大似然估计值可在方程 $\frac{d}{d\theta}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=0$ 处求得。

Remark 2：为考虑方便，常用似然函数的对数--对数似然函数来代替它。因为lnL是L的单增函数，有相同的最大值

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=0$$

[4] 部分例子

[例1] 泊松分布参数的估计。设总体X服从泊松分布 $P\{X=x\}=\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$

其中参数λ未知，求它的极大似然估计值.

解　设 $x_1,\cdots,x_n$ 为其样本观察值，则似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}$$

$$\ln L=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)-n\lambda$$

解方程：

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0$$

得到极大似然估计值 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

[4] 部分例子

[例2] 捕鱼问题模拟试验

为了估计湖中鱼的数量 n，先从湖中捕捞出 r 条鱼，并做了记号后放回湖中.

经过适当时间后，可认为有记号的鱼的分布基本均匀.

然后再在湖中捕捞出 s 条鱼，结果发现有 x 条鱼是有记号的.

如何用极大似然估计法从已知数 r, s, x估计出未知数 n?

[例2] 捕鱼问题模拟试验

[解]：第二次捕捞出有记号的鱼数 Y 服从超几何分布

$$P\{Y=k\}=C_r^k C_{n-r}^{s-k} \big/ C_n^s$$

未知数 n 应使得 $P\{Y=x\}=C_r^x C_{n-r}^{s-x}/C_n^s$ 最大

未知数 n 应该为 $\hat{n}=\dfrac{rs}{x}$ （参见补充材料）

由于 n 为整数，故此取 $\hat{n}=\left[\dfrac{rs}{x}\right]$。

其实质就是，按第二次捕捞到的有记号的鱼占所捕捞到的全部

鱼的比例来估算 n 的值，即认为 $\dfrac{r}{n}=\dfrac{x}{s}$.

[例3] 均匀分布的参数的极大似然估计

设总体X服从$[a,b]$均分布， $x_1,\cdots,x_n$ 为样本观测值，求a,b的极大似然估计.

解 记 $\underline{x}=\min(x_1,\cdots,x_n)$, $\overline{x}=\max(x_1,\cdots,x_n)$,

总体X的密度函数为

$$f(x,a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & other\end{cases}$$

似然函数为

$$L(x,a,b)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,a,b)=\frac{1}{(b-a)^n}$$

[例3] 均匀分布的参数的极大似然估计

而我们知道

$$a = \underline{x} = \min(x_1, \cdots, x_n)$$

$$b = \overline{x} = \max(x_1, \cdots, x_n)$$

时似然函数达到最大.

故的a,b最大似然估计值为

$$\hat{a} = \min(x_1, \cdots, x_n)$$

$$\hat{b} = \max(x_1, \cdots, x_n)$$

a, b的最大似然估计量

$$\hat{a} = \min(X_1, \cdots, X_n) \qquad \hat{b} = \max(X_1, \cdots, X_n)$$

[例4] 正态分布的参数的极大似然估计

设总体X服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，其中参数 μ,σ^2 未知

求它们的极大似然估计值.

解 设为 $x_1,\cdots,x_n$ 其样本观察值，则似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$\ln L=-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-n\ln\sigma-\frac{n}{2}\ln 2\pi$$

[例4] 正态分布的参数的极大似然估

令

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{\sigma} = 0$$

解得

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

7.3 区间估计

[1] 为何要引进参数的区间估计

- 参数点估计方法不能回答估计值的可靠度与精度问题

  我们知道 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个估计，即使它是无偏的，$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

  但是"估计值 $\hat{\theta}$ 落在区间 $[\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon]$ 的概率有多大？"

- 许多应用场合不需要对参数给出一个精确估计，而只要大致范围

  例如，要估计一批电子产品的平均寿命，往往不需要一个很精确的数，而只需给出一个不大的范围即可，如8000~9000小时.当然，还要求对这个估计有较高的"可信程度"，比如95%.

引 例

设某厂生产的灯泡使用寿命X~ $N(\mu, 100^2)$，现随机抽取5只，测量其寿命如下：

1455，1502，1370，1610，1430，

则该厂灯泡的平均使用寿命的点估计值为

$$\bar{x}=\frac{1}{5}(1455+1502+1370+1610+1430)=1473.4$$

可以认为该种灯泡的使用寿命在1473. 4个单位时间左右，但范围有多大呢？又有多大的可能性在这“左右”呢？

引 例

如果要求有95%的把握判断 μ 在1473. 4左右，相当于要求对应统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 以95%概率落在0周围。

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{0.025}\right\} = 0.95$$

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

[2] 区间估计的概念

设 $\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$ 及 $\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$ 是由样本确定的两个统计量

$$\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$$

如果对于给定的α（0<α<1），有

$$P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$$

则随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 称做参数θ的置信水平为1-α的置信区间；其中 $\hat{\theta}_1$ 叫做置信下限，$\hat{\theta}_2$ 叫做置信上限.

注意：$\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ 的含义是概率意义下成立

置信区间的意义：

从总体X中抽取容量为 n 的样本，共进行N次随机抽样,每次得到

的样本值记为 $(x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{nk})$, $(k=1,2,\ldots, N)$;

由 $\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$及 $\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$ 得到N个区间

$$(\hat{\theta}_{1k}, \hat{\theta}_{2k}), (k=1,2,\cdots,N)$$

这N 个区间中,有的包含参数θ 的真值，有的不包含。

包含参数θ 的真值的区间大约占100(1-α)%, 不包含参数θ 的真值

的区间约占100α%.

[2] 区间估计的概念

对应于已给的置信水平，根据样本观测值来确定未知参数 θ 的置信区间，称为参数 θ 的区间估计.

满足置信水平1－α的 θ 的置信区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 有无穷多个。

置信区间越小，估计越精确，但置信水平会降低；相反，置信水平越大，估计越可靠，但精确度会降低，置信区间会较长。

对于固定的样本容量，不能同时做到精确度高（置信区间小）可靠程度也高（1- α大）。

如果不降低可靠性，而要缩小估计范围，则必须增大样本容量，增加抽样成本。

[例1] 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是他的一个样本，σ²已知，μ未知，求μ的置信水平为 1 －α的置信区间。

[解]：我们知道 $\overline{X}$ 是μ的无偏估计，且 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，按照标准正态分布α分位点的定义

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

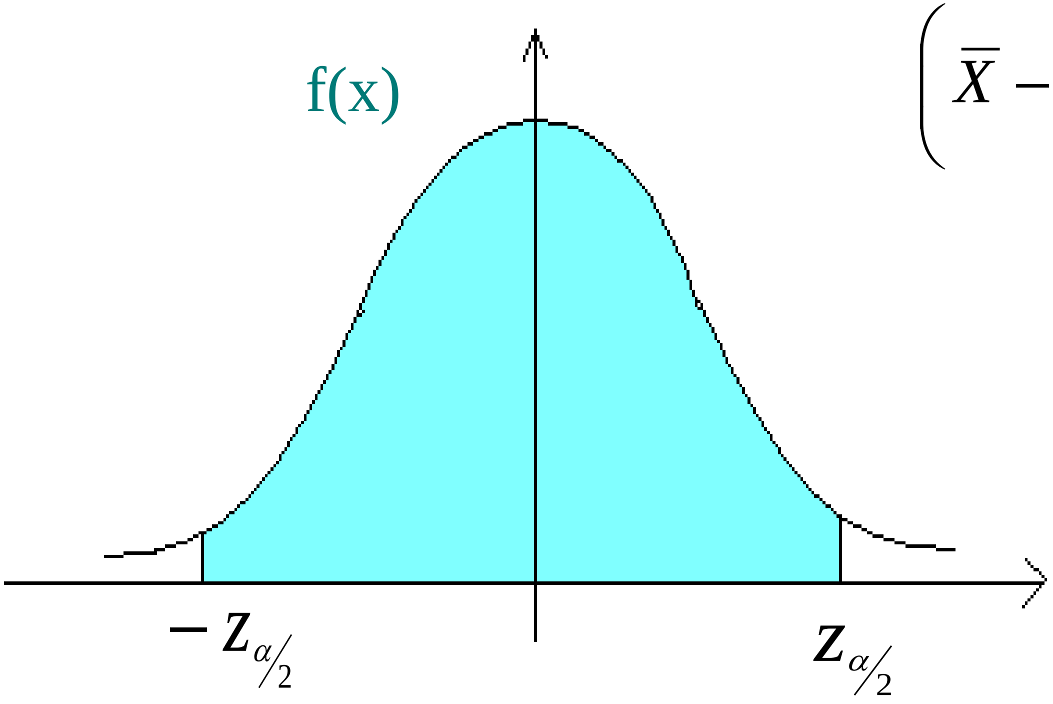
$$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} \le \mu \le \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

这样我们就得到μ的置信水平为 1 －α 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

7.3 区间估计

我们所得到μ的置信水平为 1 －α的置信区间



$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

如果 $\alpha=0.05, \sigma=1, n=16$，查表得$z_{\alpha/2}=z_{0.05}=1.96$，于是得到一个置信水平为0.95的置信区间 $\left(\overline{X}-0.49, \overline{X}+0.49\right)$

如果我们得到样本的一组观测值，计算得到 $\overline{x}=5.20$ ，则得到更为具体的置信区间(4.71, 5.69)。

例2 某地一旅游者的消费额 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且标准差σ=12元，今要对该地旅游者的平均消费额 EX 加以估计，为了能以95%的置信度相信这种估计误差小于2元，问至少要调查多少人？

解 由题意知：消费额 $X\sim N(\mu, 12^2)$，设要调查 n 人，使得。

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<1.96\right\}=0.95$$

$$P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right|<1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$$

而 $\left|\bar{X}-\mu\right|<2 \Longrightarrow 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<2$

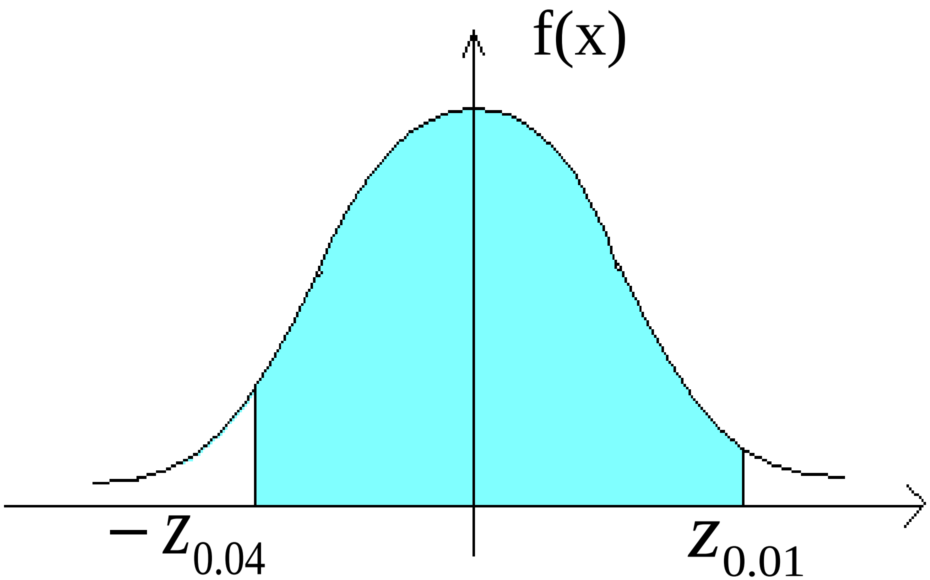
解得 $n>\left(\frac{1.96\times 12}{2}\right)^2=138.29$

至少要调查139人

7.3 区间估计

注意到 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，那么概率为1-α 的区间有无穷多个。

比如α=0.05时，必有 $P\left\{-z_{0.04} \le \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{0.01}\right\} = 0.95$，那么以下区间 $\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01}, \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}\right)$ 是 μ 的置信水平为0.95的置信区间



两个置信水平相等的区间，显然区间长度较短的估计精度更高

如果把估计区间说成(-∞,∞)，那等于什么也没说

上面两个置信水平都为0.95的置信区间的长度分别为

$$2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}=3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04}+z_{0.01})=4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

事实上由于 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，其概率密度是对称的单峰函数，可以断定对称置信区间 $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$ 长度最短。

[3] 单侧置信区间

前面讨论的估计量的置信区间都是双侧的，在有些实际问题中，例如某元件的使用寿命，平均寿命没有上限的限制问题，太短就不行，在这种情况下，可将置信上限取为$+\infty$，而只考虑置信下限。在相反的情况下，则只考虑置信上限。这两种估计方法称为单侧置信区间的估计法。

[3] 单侧置信区间

对于给定的(0<α<1),根据样本确定的统计量$\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，对于任意的 $\theta\in\Theta$ 有$P\{\underline{\theta}<\theta\}=1-\alpha$ ，则随机区间 $(\underline{\theta},+\infty)$ 称做参数θ的置信水平为1-α的单侧置信区间；其中 $\underline{\theta}$ 叫做置信水平为1-α的单侧置信下限。

又若，统计量$\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，对于任意的$\theta\in\Theta$ 有 $P\{\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$，则随机区间$(-\infty,\overline{\theta})$ 称做参数θ的置信水平为1-α的单侧置信区间；其中 $\overline{\theta}$ 叫做置信水平为1-α的单侧置信上限.

Review

统计任务：

[1] 参数估计

-- 点估计

-- 区间估计

[2] 假设检验

-- 关于参数的假设

-- 关于分布的假设

基本概念

- 对某一数量（或几个）指标进行随机实验、观察，将试验的全部可能的观察值称为总体。
- 每个可能的观察值称为个体

总体 ⟷ 随机变量

Review

抽样：对总体进行一次观察并记录其结果，称为一次抽样；
对X独立进行n次观察，并将结果按顺序记为

$$X_1, \cdots, X_n$$

样本：随机抽取部分个体，以用于推断总体的特性。
样本与总体是同分布的
样本之间是独立的

统计量：样本的函数，除了样本、样本的参数外，不含有其他未知量

抽样分布：统计量的分布称为抽样分布

几类抽样分布（对X~N(μ，σ²)而言的）

样本均值分布 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

T分布 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

χ²分布 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

F分布 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

两个总体的样本分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

[1] $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

[2] $$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$

[3] 当$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$时 $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

参数估计

点估计：总体X的形式已知，但有参数未知；

借助总体X的样本来估计总体分布中的未知参数θ

矩估计

最大似然估计

区间估计：确定两个估计量 $\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$ 并给出落在此区间的概率1-α。

称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为置信水平为1-α的置信区间。

7.4 单个正态总体均值与方差的区间估计

7.5 两个正态总体均值差与方差比的区间估计

7.6 非正态总体参数的区间估计

7.4 正态总体均值与方差的区间估计

正态总体均值 μ 的区间估计

(1) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知 $\sigma = \sigma_0$，求μ的区间估计

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，未知 σ，求μ的区间估计

正态总体方差 σ^2 的区间估计

(1) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知$\mu = \mu_0$，求σ^2的区间估计

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，未知μ，求σ^2的区间估计

正态总体均值μ的区间估计

(1) 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知 $\sigma = \sigma_0$ ，求 μ 区间估计

因为 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ，所以 $\overline{Y} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$，对于给定的概率 α，

我们取区间 $\left(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}\right)$, 构造概率为1- α 的事件

$$P\left\{\frac{\left|\overline{X} - \mu\right|}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$z_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的 $\alpha/2$ 分位点，即

$$P\left\{X \ge z_{\alpha/2}\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

正态总体均值μ的区间估计

(1) 设正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 $\sigma=\sigma_0$ ，求 μ 区间估计

把上述关于事件概率的描述转化为关于均值 μ 的概率描述：

$$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\le\mu\le\overline{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

由此，求得关于 μ 的置信水平为1−α 的 μ 的置信区间(用观测值)：

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\quad \bar{x}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

正态总体均值μ的区间估计

例1 从一批零件中, 抽取9个零件, 测得其直径(毫米)为

19.7　20.1　19.8　19.9　20.2　20.0　19.9　20.2　20.3

设零件直径服从 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 且已知 σ=0.21(毫米), 求这批零件直径的均值 μ 对应于置信水平0.95的置信区间.

解: n=9, 直接计算得 $\bar{x} = 20.01$(毫米). 若置信水平1−α , 则 α =0.05,

查表得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

由此得 $\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = \dfrac{0.21}{\sqrt{9}} \times 1.96 = 0.14$

得 μ 的置信区间为**(19.87，20.15)**

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，未知σ，求 μ 的区间估计

因σ 未知，在上面的估计中无法使用 σ^2，我们用 S^2 代替 σ^2，得随机变量

$$Y=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

对于给定的置信水平1-α，我们取区间 $\left(-t_{\alpha/2}, t_{\alpha/2}\right)$，构造概率事件

$$\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \le t_{\alpha/2}\right\}$$

其满足：

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \le t_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，未知σ，求 μ 的区间估计

由此转化为关于 μ 的关系式

$$P\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \le \mu \le \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

用观测值带入，求得置信水平为1-α 的 μ 的置信区间(用观测值)：

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2},\ \ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right)$$

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，未知σ，求 μ 的区间估计

例1续 未知 σ, 求这批零件直径的均值 μ 对应于置信水平0. 95的置信区间.

解: 直接计算得 $\bar{x} = 20.01$ (毫米). $s = 2.03$ (毫米).

若置信水平1−α =0. 95时， α =0. 05,

选自由度为n−1＝8，查 t分布表得 $t_{\alpha/2} = t_{0.025} = 2.31$，由此得，

$$\frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} = \frac{0.203}{\sqrt{9}} \times 2.316 = 0.16$$

得 μ 的置信区间为(19. 85，20. 17).

可以看出与上述置信区间与已知 σ时得到的估计相差不多。

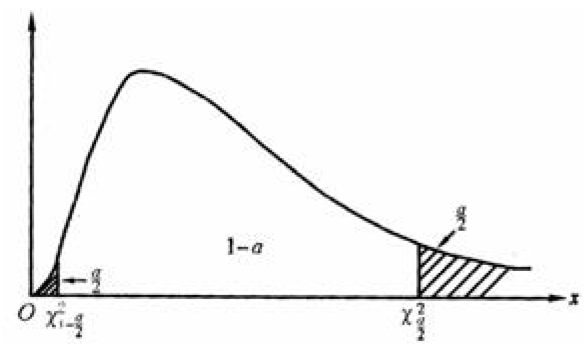
正态总体方差 σ^2的区间估计

(1) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知 $\mu = \mu_0$，求 σ^2的区间估计

利用随机变量 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ 进行估计

由于此分布曲线不对称，故对于给定的置信水平1−α，很难找到最短的置信区间. 通常模仿前面的做法，取区间 $\left(\chi^2_{1-\alpha/2},\ \chi^2_{\alpha/2}\right)$ 使得：

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2} \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \le \chi^2_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$



正态总体方差 σ^2的区间估计

(1) 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知 $\mu = \mu_0$，求 σ^2 的区间估计

转化为关于 σ^2的概率描述，

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right\} = 1-\alpha$$

得置信水平为1−α的σ^2的置信区间：

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$$

(2) 正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，未知 μ，求 σ^2 的区间估计

由于 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 中 μ 未知，用 $\overline{X}$ 代替，得到

$$\chi^2=\frac{n-1}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\xrightarrow{\mu\Rightarrow\overline{X}}\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$$

此只是与上面的差一个自由度，对给定的置信水平1－α，我们取区间 $\left(\chi^2_{1-\alpha/2},\ \chi^2_{\alpha/2}\right)$，使

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}\le\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\le\chi^2_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

得置信水平为1－α的 σ^2 的置信区间：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$$

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，未知 μ，求 σ^2 的区间估计

例3 从一批零件中, 抽取9个零件, 测得其直径(毫米)为

19.7, 20.1, 19.8, 19.9, 20.2, 20.0, 19.9, 20.2, 20.3

设零件直径 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， 且未知 μ

求这批零件直径的方差 σ^2对应于置信水平**0.95**的置信区间.

解: 已知**α= 0.05, n = 9, s^2 = 0.411**, 按自由度 **k = 8** 查表得,

$$\chi^2_{0.975} = 2.18, \quad \chi^2_{0.025} = 17.5$$

所求置信区间为: $\left(\dfrac{8\times 0.411}{17.5}, \dfrac{8\times 0.411}{2.18}\right)$

即（**0.188**，**1.508**）.

Summary on Estimation for Normal Parameters

STEP 1：确定一个合适的样本统计量

[1] 其分布是已知的；

[2] 统计量中含有待估计的参数

STEP2：对给定的置信水平$1-\alpha$构造满足其的一个随机事件

（一般用区间表示）

STEP3：把关于事件的概率描述转化为关于参数的概率描述

STEP4：用满足置信水平$1-\alpha$的参数区间作为置信区间

（用样本观测值）

Summary on Estimation for Normal Parameters

均值	方差已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
	方差未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
方差	均值已知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$
	均值未知	$\dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$

7.5 两个正态总体均值差与方差比的区间估计

不同工艺生产的两批同类产品，可以认为是来自两个相互独立的不同总体. 有时我们要对其某个质量指标作比较，分析它们是否有显著的差异. 这时可观察 $\mu_1-\mu_2$ 和 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间.

以下讨论两个正态总体均值差与方差比的区间估计问题.

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1})$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_{n_2})$ 分别是总体 X 与 Y 的样本观察值.

两个正态总体均值差的区间估计

(1) 设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 已知 σ_1, σ_2， 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计

选择包含 $\mu_1 - \mu_2$ 随机变量 $V = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

对于给定的置信水平1-α，取区间 $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$，使

$$P\left\{-z_{\alpha/2} \le V \le z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-z_{\alpha/2} \le \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

两个正态总体均值差的区间估计

(1) 设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 已知 σ_1, σ_2 ，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计

把关于随机事件的概率描述转化为关于 $\mu_1 - \mu_2$ 的概率描述

$$P\left\{ \overline{X} - \overline{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \overline{X} - \overline{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right\} = 1 - \alpha$$

得置信水平为1- α 的 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \ \bar{x} - \bar{y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

注：若 σ_1, σ_2 未知且n_1与n_2很大时，可用 s_1^2, s_2^2 分别代替 σ_1^2, σ_2^2，仍使用上式作 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计.

两个正态总体均值差的区间估计

(2) 设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 未知 σ_1, σ_2， 但是 $\sigma_1 = \sigma_2$ ， 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计。

使用随机变量
$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中 $S_w = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

对于给定的置信水平1- α， 我们取区间（$-t_{\alpha/2}$， $t_{\alpha/2}$)， 使

$$P\left\{ \frac{\left|(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)\right|}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \le t_{\alpha/2} \right\} = 1 - \alpha$$

两个正态总体均值差的区间估计

(2) 设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 未知 σ_1,σ_2， 但是 $\sigma_1=\sigma_2$ ， 求 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计。

把关于随机事件的概率描述转化为关于 $\mu_1-\mu_2$

$$P\left\{\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le\bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right\}=1-\alpha$$

得置信水平为1-α 的 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间（用样本观测值）

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

例1 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠的直径（毫米）如下：

甲机床： **15.0, 14.8, 15.2, 15.4, 14.9, 15.1, 15.2, 14.8**；

乙机床： **15.2, 15.0, 14.8, 15.1, 15.0, 14.6, 14.8, 15.1, 14.5**.

设两台机床生产的滚珠直径服从正态分布

求： 这两台机床生产的滚珠直径均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的对应于置信水平**0.90**的置信区间， 如果：

（1） 已知两台机床生产的滚珠直径的标准差分别是

σ_1=0. 18（毫米）及 σ_2=0. 24（毫米）；

（2） 未知 σ_1及 σ_2，但假设 $\sigma_1=\sigma_2$.

解（1） σ_1及σ_2已知，估计 $\mu_1-\mu_2$，采用统计量

$$V=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

置信水平为$1-\alpha$的 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\left(\overline{x}-\overline{y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \ \overline{x}-\overline{y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

查正态分布表得 $z_{0.05}=1.645$，代入上式得所求的置信区间

（**-0.018，0.318**）

解（2）σ_1，σ_2未知，但σ_1=σ_2，估计 $\mu_1-\mu_2$，采用统计量

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

置信水平为1－α 的 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

取自由度$k=8+9-2=15$, 查t 分布表得$t_{0.05}=1.753$，再计算$S_w=0.228$，

代入上式得所求的置信区间为（-0.044，0.344）.

两个正态总体方差比的区间估计

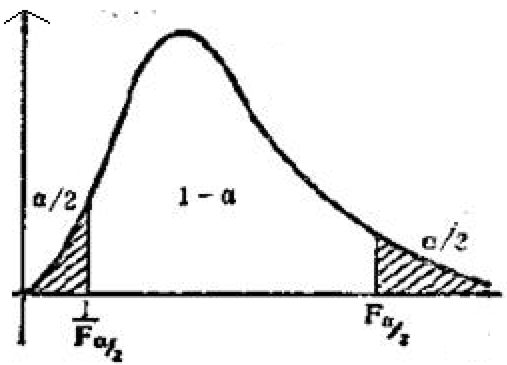
(1) 设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 已知 μ_1, μ_2，求 σ_1^2 / σ_2^2 的区间估计

利用随机变量

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2 \Big/ n_1\sigma_1^2}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2 \Big/ n_2\sigma_2^2} \sim F(n_1, n_2)$$

对于给定的置信水平1−α，构造置信区间 $(F_{1-\alpha/2}, F_{\alpha/2})$

$$P\left\{ F_{1-\alpha/2} \le \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2 \Big/ n_1\sigma_1^2}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2 \Big/ n_2\sigma_2^2} \le F_{\alpha/2} \right\} = 1 - \alpha$$



两个正态总体方差比的区间估计

(1) 设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 已知 μ_1, μ_2，求 σ_1^2 / σ_2^2 的区间估计

把上述对于事件的描述转化为关于对方差比的描述

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2 \Big/ n_1}{F_{\alpha/2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2 \Big/ n_2} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2 \Big/ n_1}{F_{1-\alpha/2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2 \Big/ n_2} \right) = 1-\alpha$$

得置信水平为1-α 的 σ_1^2 / σ_2^2 的置信区间：

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2 \Big/ n_1}{F_{\alpha/2}\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\mu_2)^2 \Big/ n_2}, \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2 \Big/ n_1}{F_{1-\alpha/2}\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\mu_2)^2 \Big/ n_2} \right)$$

两个正态总体方差比的区间估计

(2) 设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 未知 μ_1,μ_2 ，求 σ_1^2/σ_2^2 的区间估计

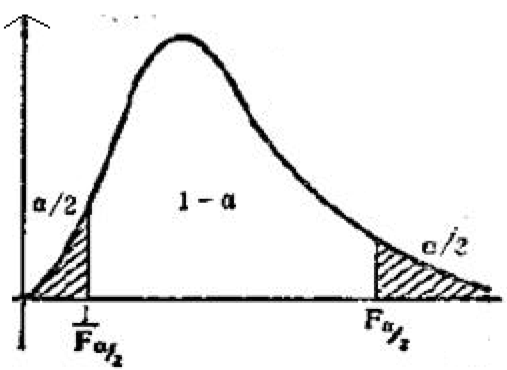
由于二者的总体均值未知，替代为样本均值，采用随机变量：

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$

对于给定的置信水平1-α，构造置信区间 $(F_{1-\alpha/2},F_{\alpha/2})$

得置信水平为1-α 的 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

$$\left(\frac{s_1^2}{F_{\alpha/2}s_2^2},\ \frac{s_1^2}{F_{1-\alpha/2}s_2^2}\right)$$



两个正态总体方差比的区间估计

例2 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠的直径(毫米)如下：

甲机床： **15.0, 14.8, 15.2, 15.4, 14.9, 15.1, 15.2, 14.8**；

乙机床： **15.2, 15.0, 14.8, 15.1, 15.0, 14.6, 14.8, 15.1, 14.5**.

设两台机床生产的滚珠直径服从正态分布

求：这两台机床生产的滚珠直径方差比 σ_1^2/σ_2^2 的对应于置信水平 **1-α= 0.90**的置信区间，如果：

(1) 已知两台机床生产的滚珠直径的均值分别是 μ_1=15.0(毫米)及 μ_2=14.9(毫米)；

(2) 未知 μ_1及 μ_2.

解 已知 $n_1=8, n_2=9, \alpha=0.10$,

（1） 取自由度 $n_1=8, n_2=9$，查F 分布表得 $F_{\alpha/2}=F_{0.05}(8,9)=3.23$

利用F 分布的性质计算 $F_{1-\alpha/2}=F_{0.95}(8,9)=\dfrac{1}{F_{0.05}(9,8)}=\dfrac{1}{3.39}=0.295$

再计算

$$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\mu_1)^2=0.34,\ \sum_{j=1}^{9}(y_j-\mu_2)^2=0.46$$

代入求得置信区间（**0.257**，**2.819**）.

解 已知 $n_1=8, n_2=9, \alpha=0.10$,

（2）取自由度 $n_1=8-1, n_2=9-1$，查F分布表得 $F_{\alpha/2}=F_{0.05}(7,8)=3.50$

利用F分布的性质计算

$$F_{1-\alpha/2}=F_{0.95}(7,8)=\frac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\frac{1}{3.73}=0.268$$

再计算

$$s_1^2=0.0457,\quad s_2^2=0.0575$$

代入求得置信区间（**0.227**，**2.966**）.

均值 $\mu_1-\mu_2$	方差已知	$V=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$
	方差未知	$T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$
方差 σ_1^2/σ_2^2	均值已知	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2\Big/n_1\sigma_1^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\mu_2)^2\Big/n_2\sigma_2^2}\sim F(n_1,n_2)$
	均值未知	$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

7.6 非正态总体参数的区间估计

若总体不服从正态分布时，一般是很难确定总体中的未知参数的;

但当样本容量 n 很大时，中心极限定理告诉我们 $\dfrac{\overline{X}-\mu(\theta)}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}}$ 近似

服从标准正态分布 **N(0,1).** 可利用此作出近似的区间估计.

设总体X服从某一分布, 其概率函数或密度中含有未知参数θ, 则总

体均值与方差都依赖于参数θ. 对于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 它们相互

独立且与总体同分布, 而且

$$E(X_i)=\mu(\theta),\quad D(X_i)=\sigma^2(\theta),\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

7.6　非正态总体参数的区间估计

当样本容量n充分大($\geq$50)时，由列维定理知，样本函数 $\dfrac{\overline{X}-\mu(\theta)}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}}$ 近似服从标准正态分布N(0,1).

因此，对给定的置信水平1－α， 有

$$P\left\{\frac{\left|\overline{X}-\mu(\theta)\right|}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}}\leq z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha$$

若能从不等式 $\dfrac{\left|\overline{x}-\mu(\theta)\right|}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}}\leq z_{\alpha/2}$ 解出参数θ，把关于随机事件的概率描述转换为关于参数θ的描述，则得参数θ的近似置信水平为1－α的μ的置信区间。

服从“0-1”分布的总体参数*p*的区间估计

设总体*X*服从“ 0-1 ”分布：x=0 或者 x=1，其中参数 p 未知. 则 $E(X)=p$

$D(X)=p(1-p)$ 对给定的置信水平1−α，得

$$P\left\{\frac{\left|\overline{X}-p\right|}{\sqrt{p(1-p)}\Big/\sqrt{n}}\le z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha$$

把不等式 $\dfrac{\left|\overline{x}-p\right|}{\sqrt{p(1-p)}\Big/\sqrt{n}}\le z_{\alpha/2}$ 两边平方并整理得

$$P\left(n(\overline{x}-p)^2\le p(1-p)z_{\alpha/2}^2\right)\approx 1-\alpha$$

再化作关于*p*的二次不等式

$$(n+z_{\alpha/2}^2)p^2-(2n\overline{x}+z_{\alpha/2}^2)p+n\overline{x}^2\le 0$$

服从“0-1”分布的总体参数p的区间估计

令： $a = n + z_{\alpha/2}^2$， $b = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2)$， $c = n\bar{x}^2$

得：

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

因为各x_i取值0或1，故 $0 \le \bar{x} \le 1$，从而判别式

$$b^2 - 4ac = 4n\bar{x}(1 - \bar{x})z_{\alpha/2}^2 + z_{\alpha/2}^4 > 0$$

即 p_1, p_2 是两个实根. 则参数 p 的近似置信区间为 (p_1, p_2).

服从“0-1”分布的总体参数p的区间估计

例1 从一批产品中，抽取100个样品，发现其中有75个优质品

求 这批产品的优质品率 p 对应于置信水平 0.95 的置信区间.

解 已知 n=100, α=0.05， 设总体 $X=\begin{cases}0 & \text{取到非优质品}\\ 1 & \text{取到优质品}\end{cases}$

则 X 服从 “0-1”分布：$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}$

$x=0$ 或者 $x=1$； 其中 p 为这批产品的优质品率.

按题意，样本容量$n=100$，在样本观测中恰有25个0与75个1，所以 $\bar{x}=0.75$

查表得 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，于是代入公式计算得

$$a=100+1.96^2=103.8406$$

$$b=-(2\times100\times0.75+1.96^2)=-153.8416$$

$$c=100\times0.75^2=56.25$$

由此得 $p_1=0.657$， $p_2=0.825$.

服从指数分布的总体参数 θ 的区间估计

总体 X 服从指数分布 $e(\theta)$，其中参数 θ 未知，则 $E(X) = \theta$, $D(X) = \theta^2$.

对给定的置信水平1－α，有 $P\left\{\dfrac{\left|\overline{X}-\theta\right|}{\theta/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$

$$P\left\{\frac{\overline{X}}{1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \le \theta \le \frac{\overline{X}}{1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}\right\} \approx 1-\alpha$$

故参数 θ 的近似置信区间为 $\left(\dfrac{\bar{x}}{1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}},\ \dfrac{\bar{x}}{1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}\right)$

例2 从一批电子元件中, 随机抽取 **50** 个样品, 测得它们的平均寿命为 **1200** 小时, 设电子元件的使用寿命服从指数分布 $e(\theta)$, 求参数θ相应于置信水平 **0.99** 的置信区间.

解 已知 $n=50$, $\bar{x}=1200$, $\alpha=0.01$, 查正态分布表得 $Z_{0.005}=2.576$.

$$\theta_1=\frac{\bar{x}}{1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}=\frac{1200}{1+\frac{2.576}{\sqrt{50}}}=879.571$$

$$\theta_2=\frac{\bar{x}}{1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}=\frac{1200}{1-\frac{2.576}{\sqrt{50}}}=1887.687$$

故所求参数θ的置信区间为 **(879.571, 1887.687).**