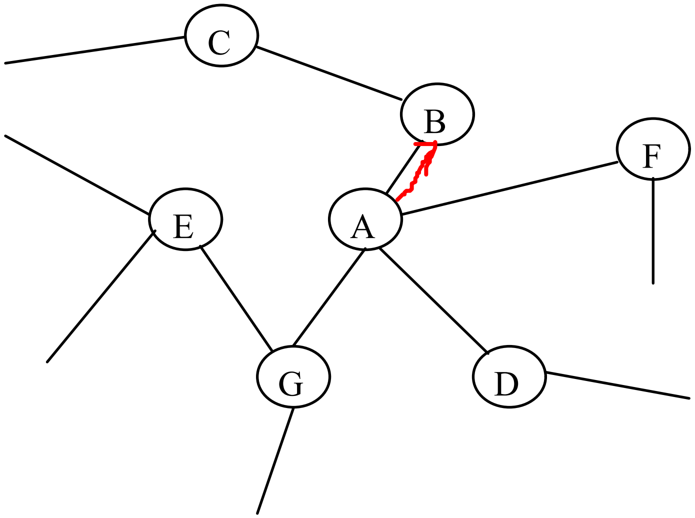
离散数学第三部分之一

图论基础

【实例】右上图是某地区的**交通图**，其中A，B，C等代表某城市，它们之间的连线表示通路，即该两个点之间可以相互到达，从图可以看出，图中点与点之间的通路是任意的，即它们任意两个点之间都可以建立联系。



图的定义:

图(Graph)G由集合V(Vertex)和E(Edge)组成,记为G=(V,E),其中V是顶点的有限集合,记为V(G),E是连接V中两个不同顶点(顶点对)的边的有限集合,记为E(G)。

在图G中,如果代表边的顶点对是无序的,则称G为无向图,无向图中代表边的无序顶点对通常用圆括号括起来,用以表示一条无向边。

如果表示边的顶点对是有序的,则称G为有向图,在有向图中代表边的顶点对通常用尖括号括起来< >。

无向图G中表示边的顶点对是无方向的。通常用(V_i, V_j)表示顶点V_i和V_j之间相连的边。在无向图中(V_i, V_j)和(V_i, V_j)表示同一条边。

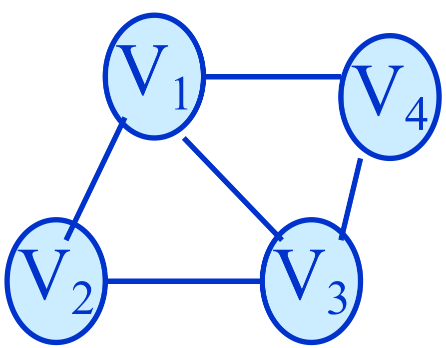
有向图中表示边的顶点对是有序的．有向边通常称为弧，用< Vi, Vj >表示从顶点x到顶点y的一条弧，并称x为弧尾，称y为弧头。在有向图中<Vi, Vj >和< Vi, Vj >表示两条不同的弧。

图的相关术语

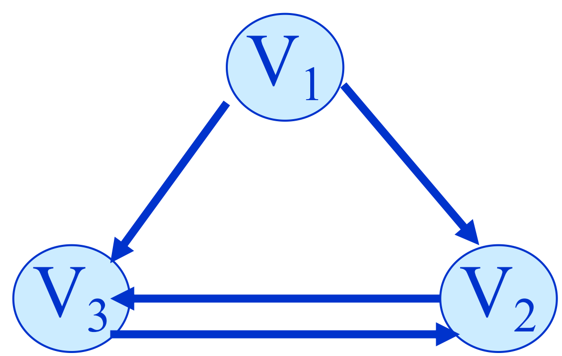
（1）邻接点、相关联边

对于无向图G=(V, E)，若边$(V_i, V_j)\in E$，则称V_i和V_j互为邻接点，即V_i和V_j相邻接，而边(V_i, V_j)则是顶点V_i和V_j相关联的边。

对于有向图来说：若弧$<V_i, V_j> \in E$，则称顶点V_i邻接到顶点V_j，顶点V_j邻接顶点V_i，而弧$<V_i, V_j>$和顶点V_i和V_j相关联。



无向图G1



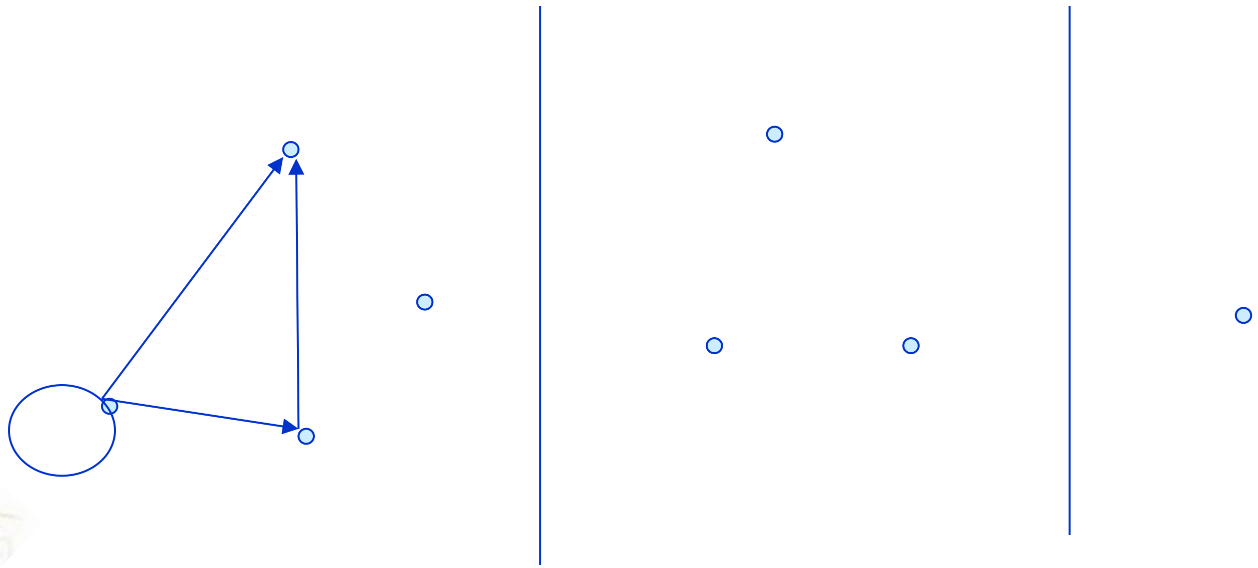
有向图G2

设G＝<V,E>为一无向图或有向图

(1)若V,E都是有穷集合,则称G是有限图.

(2)若｜V｜＝n,则称G为n阶图.

(3)若E＝∅,则称G为零图. 特别是,若此时又有｜V｜＝1,则称G为平凡图.



若 $E(G)$ 中包含两个以上的相同的二元无序对 $e_{ij}=\{v_i,\ v_j\}$，则称 e_{ij} 为多重边。

若 $E(G)$ 中包含相同元素的二元无序对 $e_{ii}=\{v_i,\ v_i\}$，则称 e_{ii} 为环。

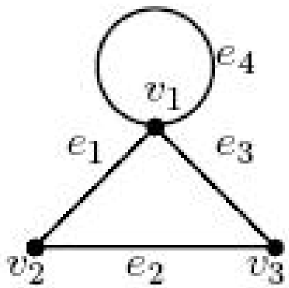
如果图 G 包含多重边但不包含环，则称图 G 为多重图。

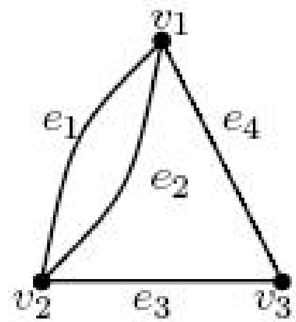
如果图 G 即不包含多重边，又不包含环，则称图 G 为简单图。

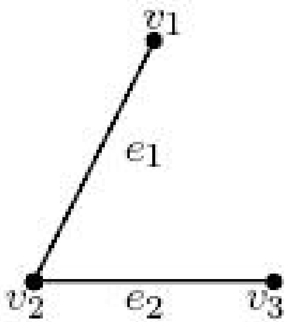
如果 $V,\ E$ 是有限集，则称图 $G=(V,\ E)$ 为有限图。

今后，我们没有特别说明的情况下，所指的图是顶点集和边集有限的简单图。

例如，在下列图中







第一个图伪图，第二个图是多重图，第三个图是简单图。

注意：1. 伪图包含环和多重边.

2. 多重图是包含多重边但没有环.

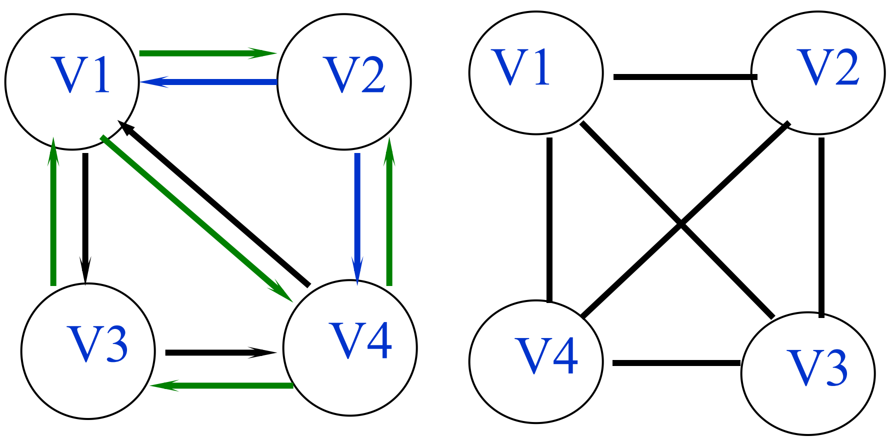
3. 简单图是不带多重边和环.

4. 无向图的边是无序的.

（2）完全图：

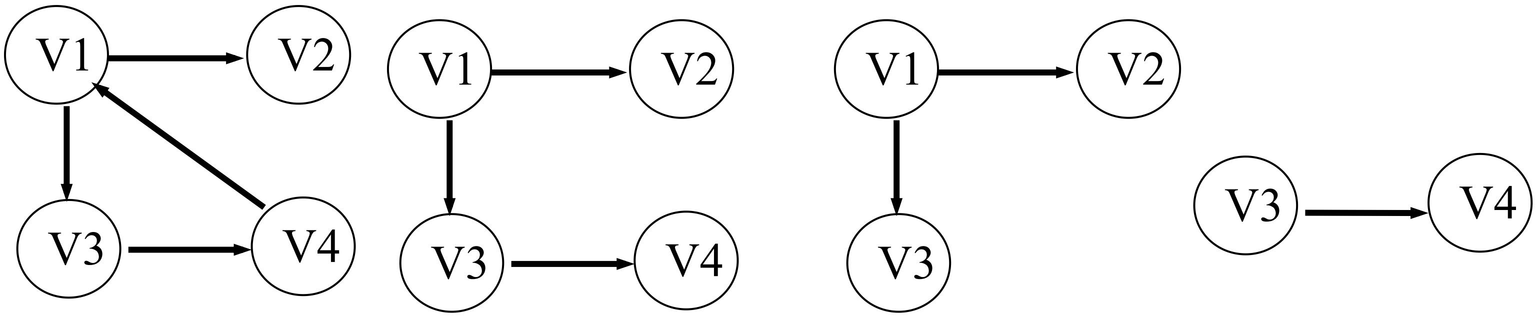
若有 n 个顶点的无向图有 **n(n-1)/2** 条边（即任意两点之间都有一条无向边）, 则此图为无向完全图（如下图G6）。

若有 n 个顶点的有向图有 n(n-1) 条边（即任意两点之间都有一对有向边）， 则此图为有向完全图（如下图G5）。

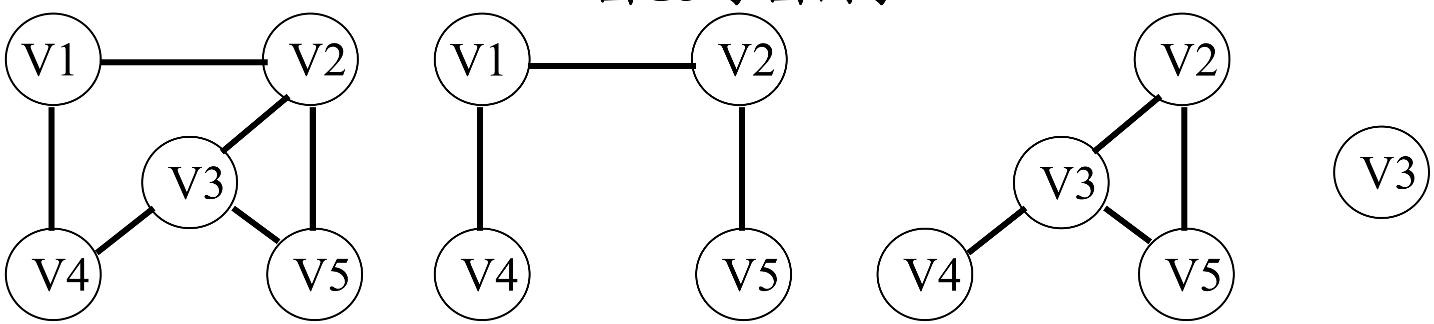


有向完全图G5　无向完全图G6

（3）**子图** 设有两个图 G＝(V, E) 和 G’＝(V’, E’)。若 V’包含于 V 且 E’ 包含于E, 则称 图G’ 是 图G 的子图



图G3 子图例子



图G4的子图例子

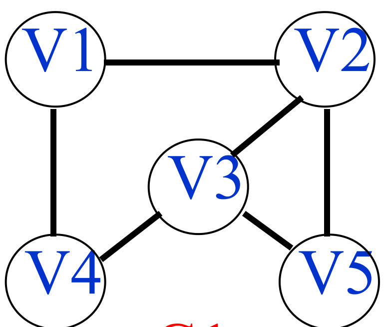
度

设G＝（V,E）为一无向图,v_j∈V,称v_j作为边的端点的次数之和为vj的度数,简称度,记作d(vj).

称度数为1的顶点为悬挂顶点,它所对应的边为悬挂边.

（4）**顶点的度** 一个顶点 v 的度是与它相关联的边的**条数**。记作deg(v)。在有向图中，顶点的度等于该顶点的入度与出度之和。

例如 在G1中有： TD(v1)=2 TD(v2)=3 TD(v3)=3 TD(v4)=2 TD(v5)=2



G1

(5) 顶点 v 的**入度和出度** 以 v 为终点的有向边的条数，记作 deg-(v)；顶点 v 的出度是以 v 为始点的有向边的条数，记作 deg+(v)。

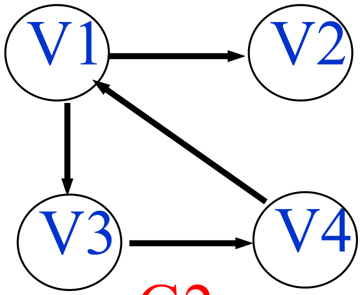
在G2中有：

deg-(v1)=1 deg+(v1)=2 D(v1)=3

deg-(v2)=1 deg+(v2)=0 D(v2)=1

deg-(v3)=1 deg+(v3)=1 D(v3)=2

deg-(v4)=1 deg+(v4)=1 D(v4)=2



G2

定理 (握手定理)在无向图$G=<V, E>$中，结点度数的总和等于边数的两倍，即

$\deg=2|E|$。

证明 因为图G中的每条边(包括环)都有两个端点，所以加上一条边就使各结点度数之和增加2，因此图G中结点度数的总和等于边数的两倍，即 $=2|E|$。

推论：图(有向或无向)G中度数为奇数的结点必为偶数个。

证明：对无向图 $G=(V,E)$，设 V_1 和 V_2 分别是偶点和奇点的集合.

$$\therefore\ 2e=\sum_{v\in V}\deg(v)=\sum_{v\in V_1}\deg(v)+\sum_{v\in V_2}\deg(v)$$

而 $\sum_{v\in V_1}\deg(v)$ 为偶数

$\therefore\ \sum_{v\in V_2}\deg(v)$ 必为偶数

而 $\deg(v)$ 为奇数，$\therefore\ |V_2|$ 必为偶数

$\therefore$ 有偶数个奇点.

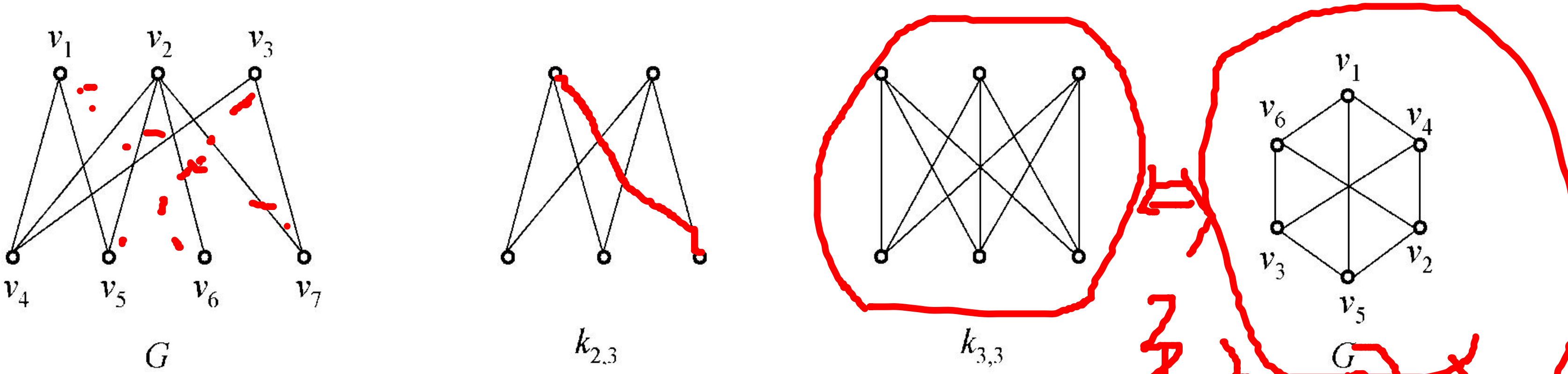
定理 在任何有向图中，所有结点的入度之和等于所有结点的出度之和。

证明 因为每一条有向边必对应一个入度和一个出度，若某个结点具有一个入度或出度，则必关联一条有向边，所以有向图中各结点入度之和等于边数，各结点出度之和等于边数，故结论成立。

定义无向图中度数为1的结点称为悬挂结点，它对应的边称为悬挂边。各结点度数均相同的图称为正则图。各结点度数均为k的图称为k度正则图。

定义 若图G的结点可以分为两个非空集合V1，V2，G中的边的端点分别属于V1，V2，则称G为二分图（偶图），可简记为G(V1，V2)。若V1中结点与V2中结点均邻接且V2中结点与V1中结点也均邻接，则称G为完全二分图（完全偶图），记为$K_{n,m}$，其中，$n = |V1|$，$m = |V2|$。

例 图a～图d均是偶图，其中图b是完全偶图$K2,3$，图c是完全偶图$K3,3$。在图a中，G的互补结点子集为$V1 = \{v1,v2,v3\}$，$V2 = \{v4,v5,v6,v7\}$；在图d中，G'的互补结点子集为$V'1 = \{v1,v2,v3\}$，$V'2 = \{v4,v5,v6\}$。事实上，图c和图d是同一个图，它们都是完全偶图$K3,3$。



a) b) c) d)

特殊图

1. 完全图：每对不同顶点之间都恰有一条边的简单图，记作 K_n

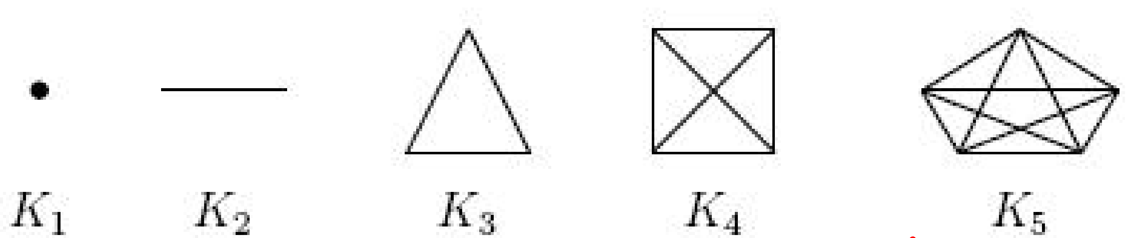


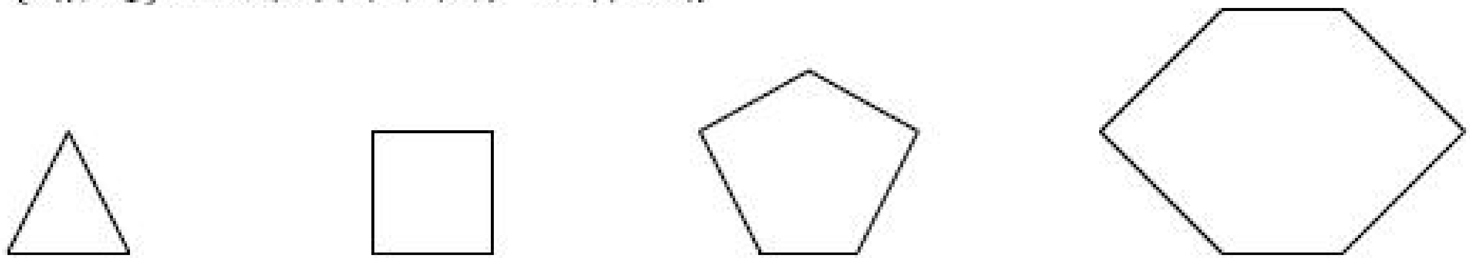
图 7.4

注意：K_n 的边的个数为 $\binom{n}{2}$

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

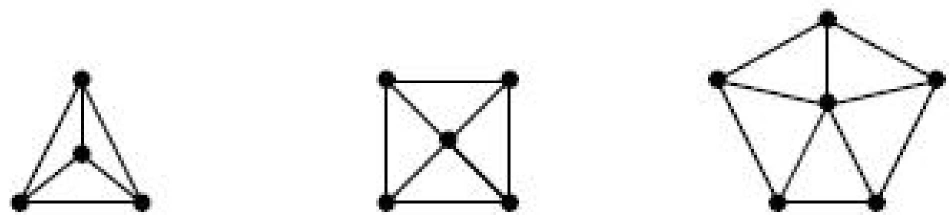
2. 圈图：由 n 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 以及边 $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \cdots, \{v_{n-1}, v_n\}$,

$\{v_n, v_1\}$ 组成的简单图，记作 C_n



C_3 C_4 C_5 C_6

3. 轮图：给圈图 C_n 添加另一个顶点，且此顶点与 C_n 里的 n 个顶点均连接的简单图，记作 W_n.



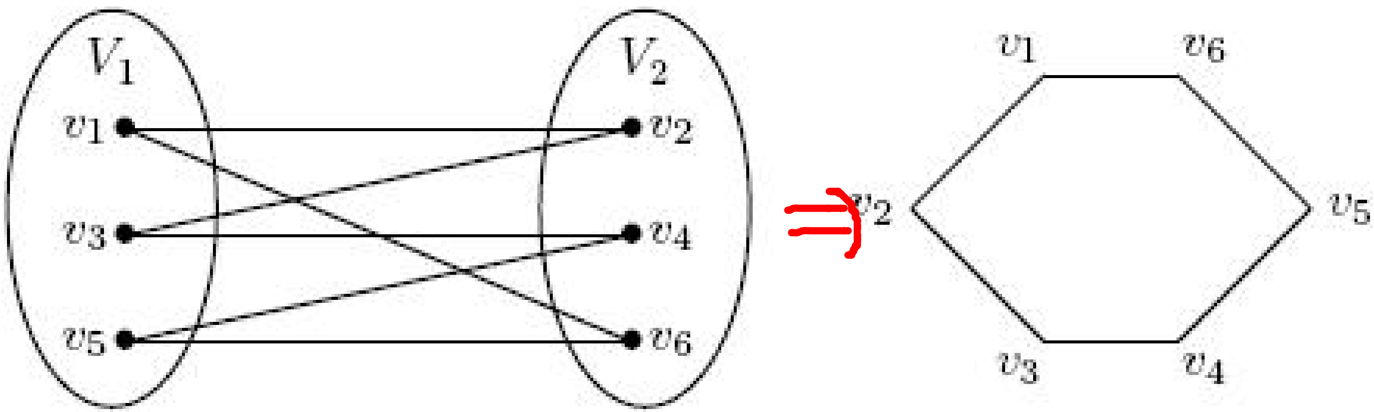
C_3 C_4 C_5

4. 二部图：对 $G=(V,E)$，令 $V=V_1\cup V_2$ 且 $V_1\cap V_2=\phi$

$\forall e=\{u,v\}\in E$　　$u\in V_1$，$v\in V_2$(或 $u\in V_2$ $v\in V_1$)

则称 G 为二部图（或偶图）。

例如，C_6 是二部图。



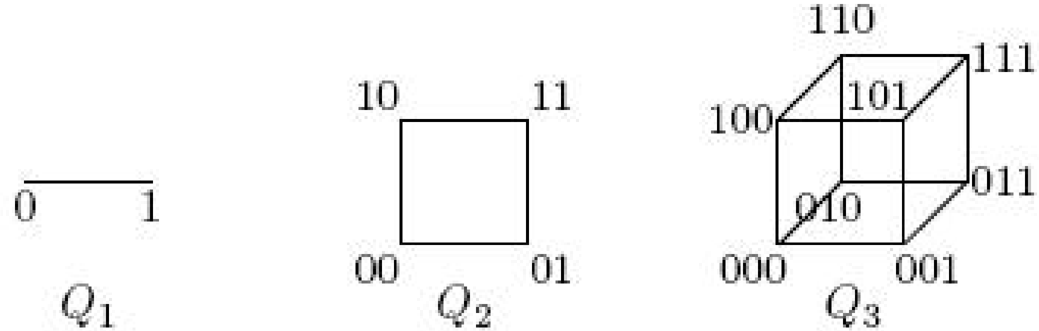
5. 完全二部图：对 $G=(V,E)$，令 $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\phi$, $|V_1|=m$, $|V_2|=n$，且 $\forall u\in V_1$， u 与 V_2 中所有点相连接（或 $\forall v\in V_2$，v 与 V_1 中所有点相连接）。记作： $K_{m,n}$ 。

$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

图 7.10

注意：$|E|=m\cdot n$

6. n 立方体图：用顶点表示 2^n 个长度为 n 的位串的图，其中，两个顶点相邻 $\Longleftrightarrow$ 其位串恰恰相差一位，记作 Q_n



7. 正则图：每个顶点的度都相等的简单图。

若正则图每个顶点的度都为 n，则称此图为 n 正则图。

例如： $K_{m,m}$ 是正则图.

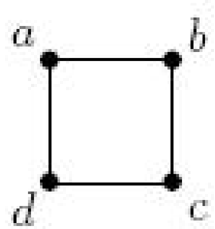
8. 补图：对简单图 $G=(V,E)$，称 $\overline{G}=(V,\overline{E})$ 为 G 的补图，其中，

$e\in\overline{E}\Longleftrightarrow e\notin E$

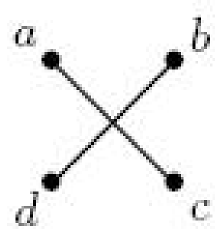
注意：若 $|V|=n$，则 $|E|+|\overline{E}|=\binom{n}{2}$

即 $G=(V,E\cup\overline{E})$ 为完全图。

例如：



G



$\overline{G}$

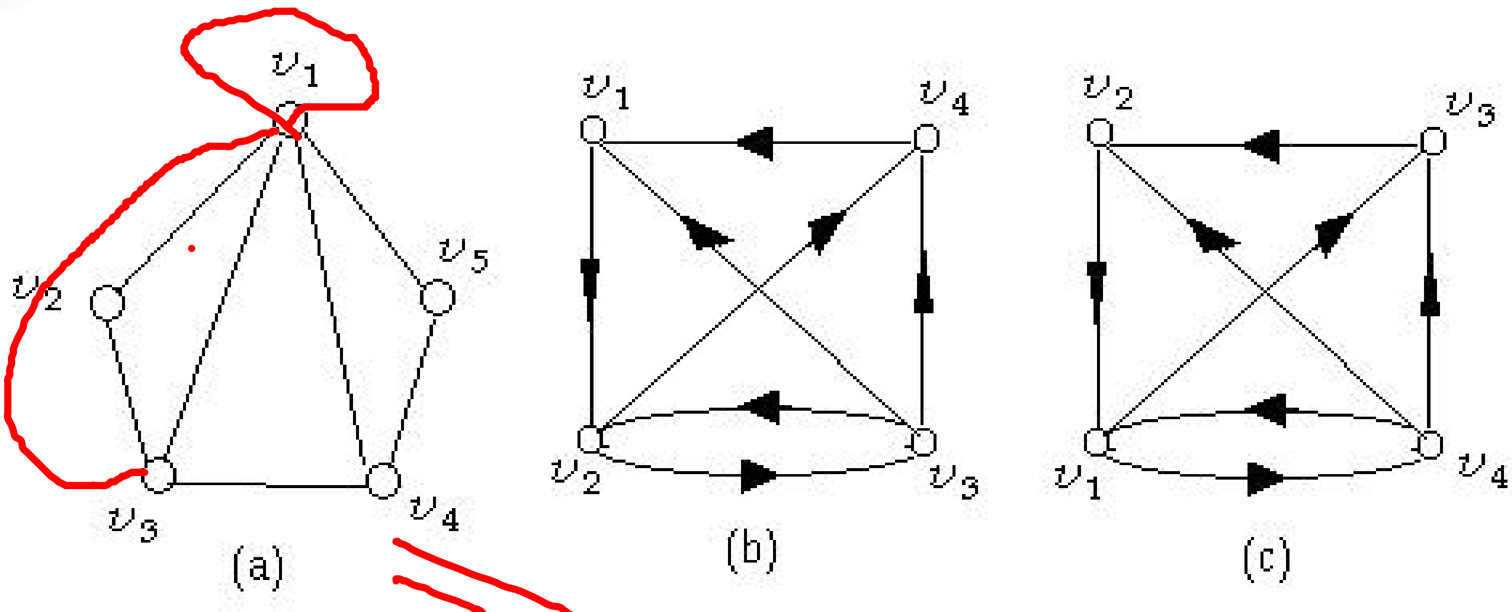
■ 图的矩阵表示理论

设G=〈V，E〉为简单图，它有n个结点V={$v_1,v_2,\ldots v_n$}，，则n阶方阵$A(G)=(a_{ij})$称为G的邻接矩阵。

其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \quad adj \quad v_j \\ 0 & v_i \quad nadj \quad v_j \quad or\, i = j \end{cases}$$

adj 表示邻接，$n$adj 表示不邻接。



A的连接矩阵 $A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

特别地，相邻矩阵也可以表示带环和多重边的无向图：

（i,i)有环则将环表示成相应位置为1,如果(i,j)有多重边，则将相应位置置为边的数目。

包括多重图和伪图在内的所有无向图都具有对称的相邻矩阵。

对于有向图G=<V,E>,如果从v_i到v_j有边，则其矩阵在（I,j)位置上是1, 即：若$[A_{ij}]$表示有向图的相邻矩阵，则

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, 若(v_i, v_j)是G的一条边 \\ 0, \ 否则 \end{cases}$$

显然，有向图的相邻矩阵不一定是对称的。多重有向图也可以用相邻矩阵表示。

定理 设A为简单图G的邻接矩阵，则A^m中第i行第j列上的元素a^m_{ij}等于G中联结v_i到v_j长度为m的路的数目。

证明 当$m=1$时，结论显然成立。假设$m=k$时结论成立，考察$m=k+1$的情形。因为$A^{k+1}=A^k \cdot A$，则

$$a^{k+1}_{ij}=\sum_{r=1}^{m} a^k_{ir}\, a_{rj} \qquad (1)$$

a^k_{ir}是联结v_i到v_r长为k的路的数目，a_{rj}是联结v_r到v_j长为1的路的数目，因此(1)右端每项表示由v_i经过v_r到v_j长度为$k+1$的路的数目。对r求和即得a^{k+1}_{ij}，它是所有从v_i到v_j长度为$k+1$的路的数目。

定理 设A为简单图G的邻接矩阵，A^T为A的转置，则

(1)令$AA^T=(b_{ij})$，则b_{ij}的意义是：有b_{ij}个结点v，使得v_i到v，v_j到v都有边；

(2)令$A^TA=(c_{ij})$，则c_{ij}的意义是：有c_{ij}个结点v，使得v到v_i，v到v_j都有边。

证明 仅证(1)。由$B=AA^T$得，因为v_i、v_j到v_k都有边当且仅当，所以对k求和得到的b_{ij}，就是使v_i到v，v_j到v都有边的v的数目。

例 $G=<V, E>$如图10-14所示，求A，A^2，A^3，A^4、AA^T、AA^T。

解 G的邻接矩阵A及其转置分别为：

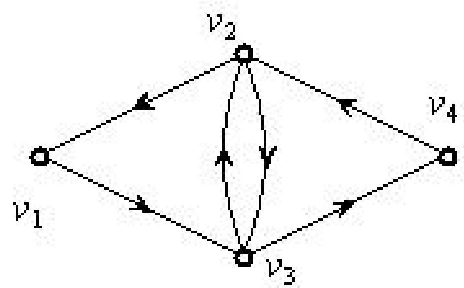


图10-14

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

根据矩阵的乘法运算可得

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^4=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\qquad A^TA=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\1&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

由上述定理及A^4可知，v_2到v_3长度为4的路有3条，v_4到v_2长度为4的路有2条。

由上述定理及AA^{T}、$A^{\mathrm{T}}A$可知 点v_3使得v_1、v_2到v_3都有边；没有到v_1、 点。

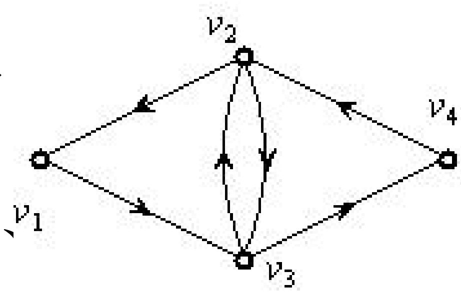


图10-14

南開大學 Nankai University

定义 (1)给定无向图$G=<V, E>$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，令$m_{ij}$为结点$v_i$与边$e_j$的关联次数，称$M=(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵。

$M(G)$每列和均为2，说明每条边关联两结点；第i行之和为v_i的度数。

(2)给定简单有向图$G=<V, E>$，称$M=(m_{ij})_{n\times m}$为G的关联矩阵，其中：

$$m_{ij}=\begin{cases} 1 & v_i\text{是}e_j\text{的始点} \\ 0 & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1 & v_i\text{是}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

例 给出图10-15所示的图的关联矩阵。

解 在图10-15中，图(a)和图(b)的关联矩阵M_1和M_2分别为：

$$M_1=\begin{pmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_2=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

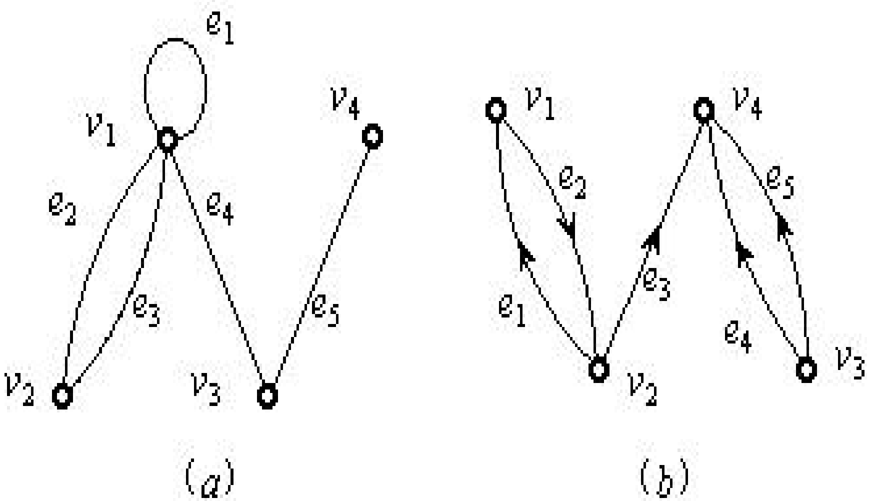


图10-15

图的同构

定义 设图G1=<V1,E1>, G2=<V2,E2>, 若存在双射 V1到V2的函数f, f具有如下性质: 对于V1里的所有a和b来说，二者在G1里相邻，当且仅当f(a)和f(b)在G2里相邻，则称G1与G2同构, f称为同构映射。如果讨论有向图的同构，则对应边的方向也必须一致。

从图的同构的定义可知，二图同构则必有结点数相同，边数相同，两图中度数相同的结点的个数相同。还可以知道，图的同构关系是一种等价关系。

例 在图10-5中，图(a)和(b)是同构的。因为可作映射g，使得$g(1)=v3$，$g(2)=v1$，$g(3)=v4$，$g(4)=v2$。在映射g下，边<1，3>，<1，2>，<2，4>和<3，4>分别映射到<$v3$，$v4$>，<$v3$，$v1$>，<$v1$，$v2$>和<$v4$，$v2$>。

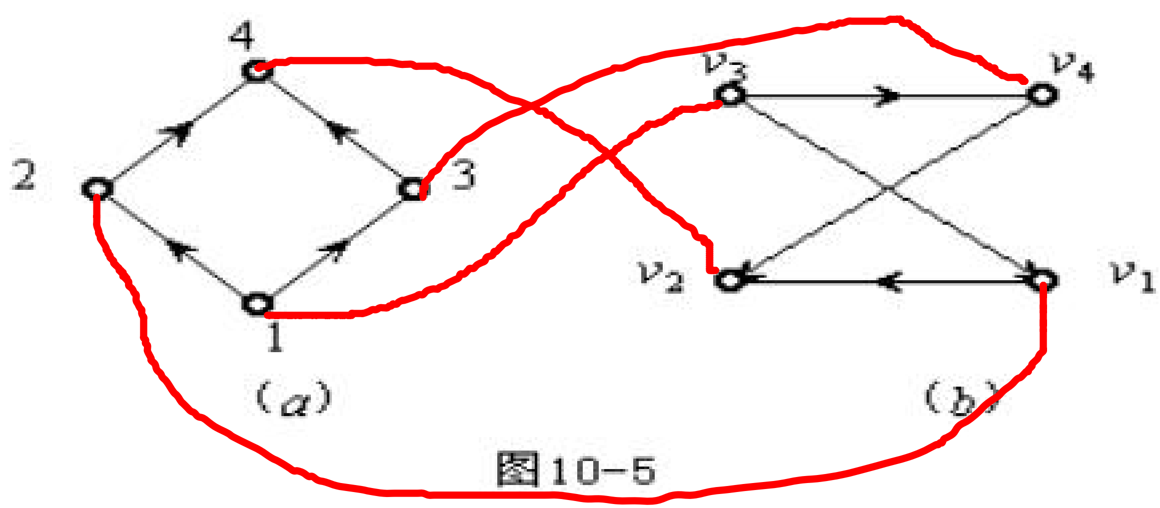


图10-5

若两个图同构，则它们的结点数相同，边数相同，度数相同的结点数相同等。但这并不是图同构的充分条件，如在图10–6中，图(a)和(b)虽然满足以上3条件但不同构。图(a)中的x应与图(b)中的y对应，因为度数都是3。但图(a)中的x与两个度数为1的结点u、v邻接，而图(b)中的y仅与一个度数为1的结点w邻接。

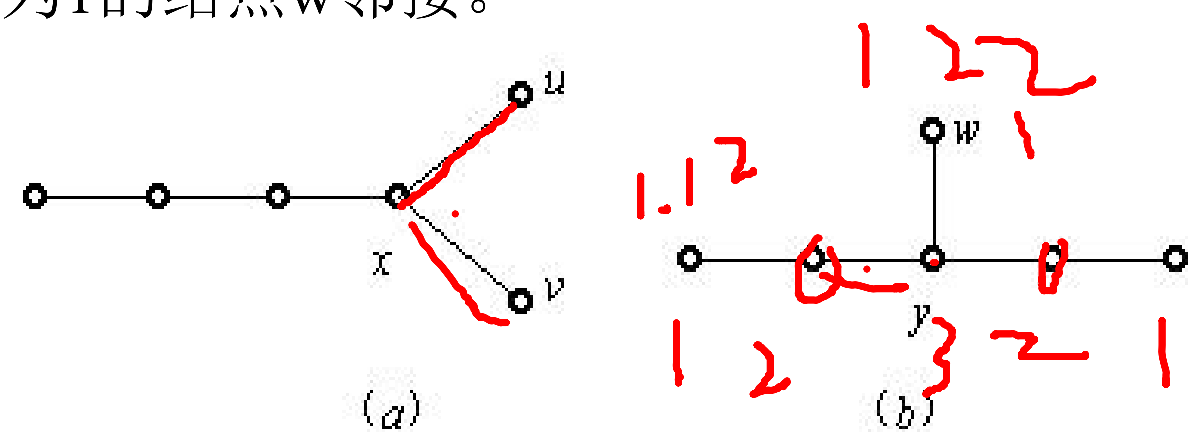


图10-6

例 画出4阶3条边的所有非同构无向简单图；

解 ~~由握手定理可知，所画的无向简单图~~各结点度数之和为 2×3＝6，最大度数小于或等于3。于是所求无向简单图的度数列应满足的条件是：将6分成4个非负整数，每个整数均大于或等于0且小于或等于3，并且奇数个数为偶数。将这样的整数列排列出来只有下列三种情况

3、1、1、1

2、2、1、1

2、2、2、0

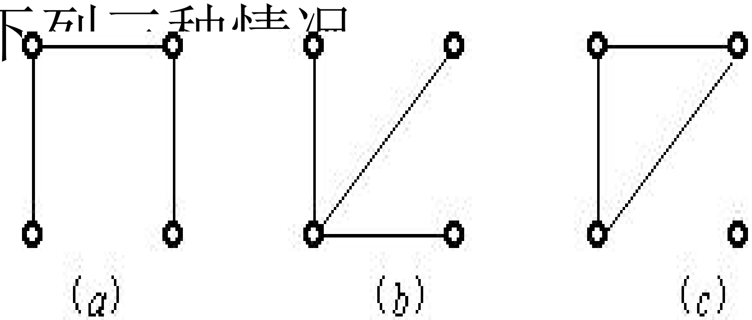


图10-7

所要求的全部非同构的图如图10-7所示。

画出3阶2条边的所有非同构有向简单图。

由握手定理可知，所画的有向简单图各结点度数之和为4，且最大出度和最大入度均小于或等于2。度数列与入度列、出度列为：

1、2、1：入度列为0、1、1或0、2、0或1、0、1；

出度列为1、1、0或1、0、1或0、2、0

2、2、0：入度列为1、1、0；

出度列为1、1、0

四个所求有向简单图如图10-8所示。

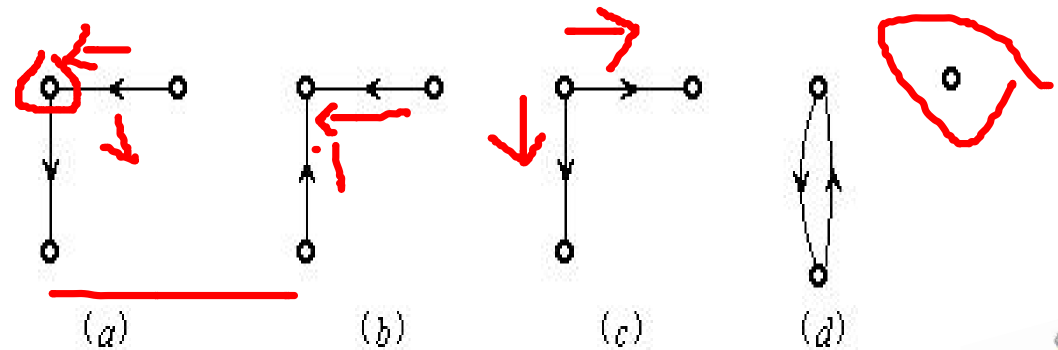


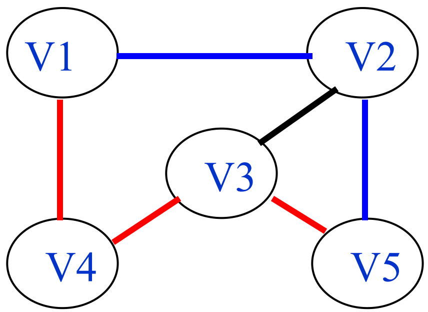
图10-8

连通性

定义 给定图$G=<V, E>$，设v_0，v_1，…，$v_m \in V$，边(或弧)e_1，e_2，…，$e_m \in E$，其中v_{i-1}、v_i是e_i的结点，交替序列$v_0e_1v_1e_2 \ldots e_mv_m$称为连接$v_0$到$v_m$的路或通路，通常简记为$v_0v_1 \ldots v_m$。路上边的数目称为该路的长度。当$v_0=v_m$时，称其为回路。

定义在一条路中，若出现的所有边(或弧)互不相同，称其为简单路或迹；若出现的结点互不相同，称其为基本路或初级通路。

路径　在图 G=(V, E) 中, 若从顶点v_i出发, 沿一些边经过一些顶点 $v_{p1}, v_{p2}, \ldots, v_{pm}$， 到达顶点$v_j$ 。则称顶点序列 $(v_i\ v_{p1}\ v_{p2}\ \ldots\ v_{pm}\ v_j)$ 为从顶点v_i 到顶点 v_j 的路径。它经过的边(v_i, v_{p1})、(v_{p1}, v_{p2})、…、(v_{pm}, v_j)应是属于E的边。



无向图G4

路径长度

路径长度是指此路径上边的条数。

无向图G4中，v1→v4→v3→v5与v1→v2→v5是从顶点v1 到顶点v5 的两条路径，路径长度分别为3和2。

定义 在一条回路中，若出现的每条边(或弧)恰好一次，称其为**简单回路**；若出现的每个结点恰好一次，称其为**基本回路**或初级回路或圈。长度为奇数的圈称为奇圈；长度为偶数的圈称为偶圈。

例1在图10-9中，$v_1v_2v_3v_2v_4$是一条简单路但不是基本路，$v_1v_2v_3v_4$是一条基本路；$v_1v_2v_3v_2v_4v_1$是一简单回路但不是基本回路，$v_1v_2v_3v_4v_1$是一基本回路。

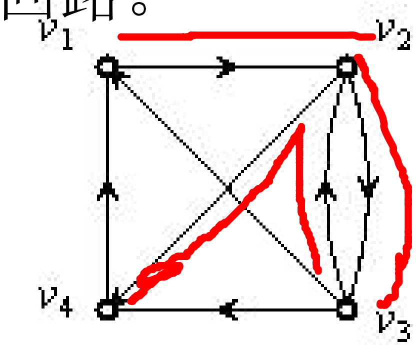
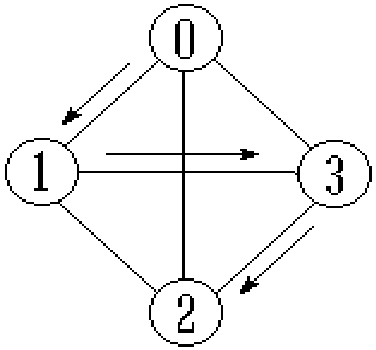
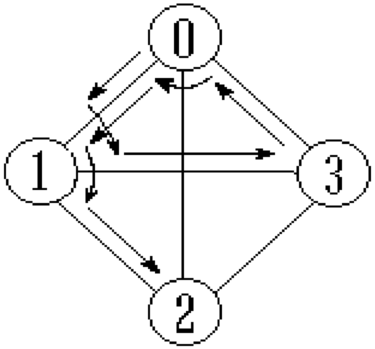


图10-9

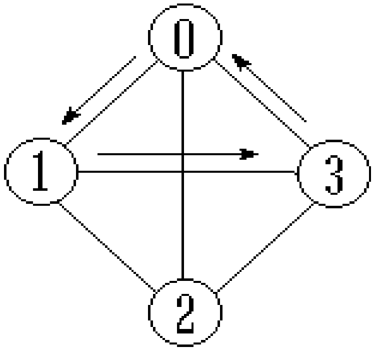
回路： 若路径上第一个顶点 v_1 与最后一个顶点v_m 重合, 则称这样的路径为回路或环 。



（a）简单路径



（b）非简单路径



（c） 回路

连通图与连通分量

在无向图中，若从顶点v_1到顶点v_2有路径，则称顶点 v_1与v_2是连通的。如果图中任意一对顶点都是连通的，则称此图是连通图。

非连通图的极大连通子图叫做连通分量。

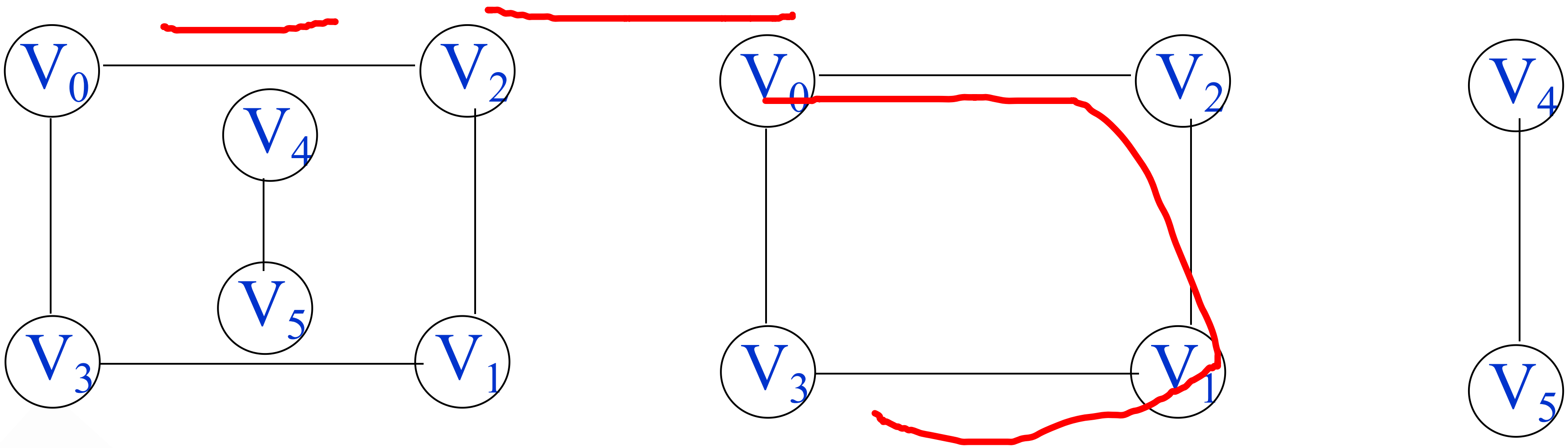


图7-5 无向图G3及连通分量

Nankai University

定理 在n阶图中，任何基本路的长度均不大于$n-1$，任何基本回路的长度均不大于n。

证明 在n阶图中，因为任何基本路和基本回路中都最多有n个结点，所以任何基本路的长度均不大于$n-1$，任何基本回路的长度均不大于n。

定义 在一个图中，若从u到v存在任何一条路，或$u=v$，则称从u到v是可达的。

定义 若无向图G中任意两个结点之间都是可达的，则称G为**连通图**，否则称G为非连通图。

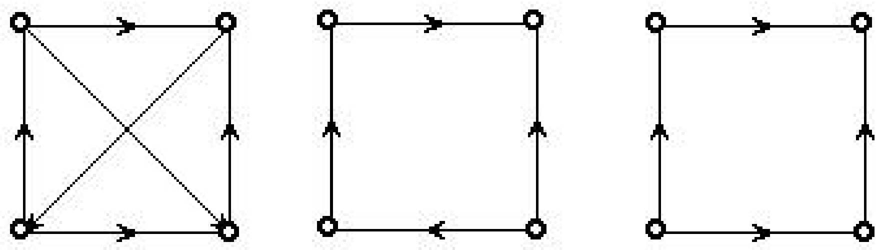
定义 在简单有向图G中，若任何两个结点之间是相互可达的，则称G是强连通的；若任何两个结点之间，至少从一个结点到另一个结点是可达的，则称G是单向连通或单侧连通的；如果G的有向边被看作无向边时是连通的，称有向图G是弱连通的。

容易判断，强连通图必定是单向连通图，单向连通图必定是弱连通图。

若将图中两个结点间的连通性看作图的结点间的一种关系，容易判定图中两个结点间的连通性是一个等价关系，因为结点u到u是连通的满足自反性；若u到v是连通的，则v到u也是连通的，满足对称性；若u到v连通，v到w连通，则u到w存在一条通路，从而存在一条u到w的路径，故u到w是连通的，满足传递性。但对于有向图，结点间的连通性不满足对称性，是偏序关系。

例 在图10-12中，图(a)是强连通的，图(b)是单向连通非强连通的，图(c)是弱连通非单向连通的。

由定义可知，强连通图一定是单向连通，单向连通图一定是弱连通的，但反之不然。



(a)　(b)　(c)

图10-12

定理 有向图G是强连通的$\Leftrightarrow G$中有一回路，它至少通过每个结点一次。

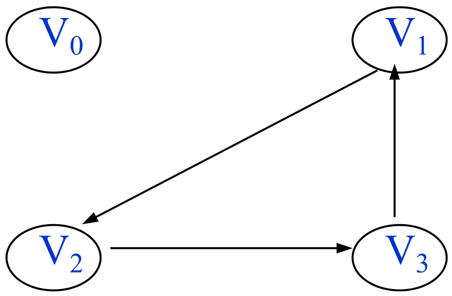
证明 充分性：如G中有一回路，它至少通过每个结点一次，则G中任意两个结点相互可达，故G是强连通的。

必要性：如有向图G是强连通的，则任意两个结点相互可达。设$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$，$\Gamma_i$为$v_i$到$v_{i+1}$的路，$\Gamma_n$为$v_n$到$v_1$的路，则$\Gamma_1$、$\Gamma_2$、…、$\Gamma_{n-1}$、$\Gamma_n$所围成的回路至少通过每个结点一次。

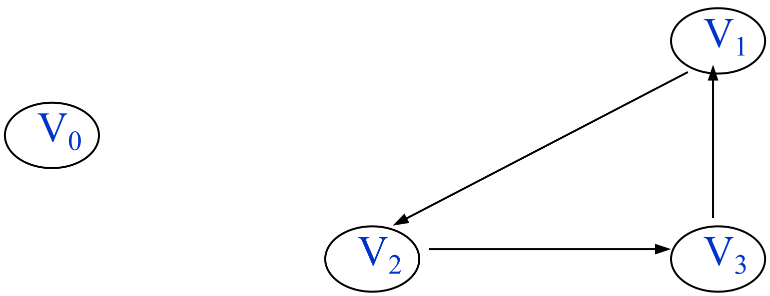
（11）强连通图与强连通分量

在有向图中，若对于每一对顶点v_i和v_j，都存在一条从v_i到v_j和从v_j到v_i的路径，则称此图是强连通图。

非强连通图的极大强连通子图叫做强连通分量。



(a)　有向图G4



(b)　G4的强连通分量

有向图G4及其强连通分量

■ 关于邻接矩阵的主要结论

定理 设 $G = <V,E>$为图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$为 G 的邻接矩阵，$A^k=(d_{i,j}^{(k)})_{n\times n}$。则 $d_{i,j}^{(k)}$ 为从结点 vi 到结点 vj 长度为 k 的通路数目；$d_{i,i}^{(k)}$ 为结点 vi 到自身的长度为 k 的回路数目；$\sum_{i=1,n}\sum_{j=1,n} d_{i,j}^{(k)}$ 为 G 中长度为 k 的通路（含回路）总数。

1) 包括多重图与伪图在内的所有无向图都具有对称的相邻矩阵.

2) 有向图的相邻矩阵不必是对称的.

因为当从 a_i 到 a_j 有边时，从 a_j 到 a_i 可以没有边.

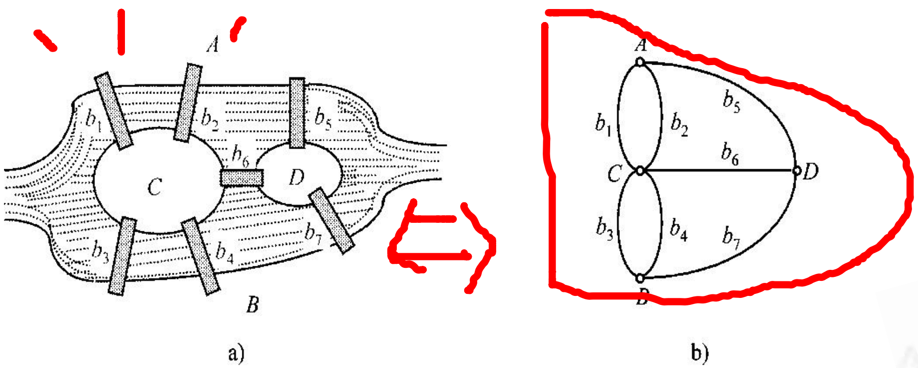
3) 相邻矩阵 A 中任意第 i(行) 列的元的和为 v_i 的次数.

例. 有n个顶点的有向强连通图最多需要多少条边？最少需要多少条边？

解: 有n个顶点的有向强连通图最多有n(n-1)条边(构成一个有向完全图的情况)；最少有n条边(n个顶点依次首尾相接构成一个环的情况)。

关于欧拉图

18世纪中叶，在当时的东普鲁士哥尼斯堡城，有一条贯穿全城的普雷格尔河，河中有两个岛，通过七座桥彼此相联，如图13-1a所示。 当时城中居民热衷于这样一个问题：游人从四块陆地中任一块出发，按什么样的线路方能做到每座桥通过一次且仅一次而最后返回原地。这就是著名的哥尼斯堡七桥问题。



定义：

设G是无孤立结点的图，通过G的每条边恰好一次的路称为欧拉路。通过图G的每条边恰好一次的回路称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图。

经过图中每条边一次且仅一次并且行遍图中每个顶点的通路，称为欧拉通路。

易知，欧拉通路是经过图中所有边的通路中长度最短的通路；欧拉回路是经过图中所有边的回路中长度最短的回路。即为通过图中所有边的简单通路和简单回路。

例 在图10-18中，图(a)有欧拉路但无欧拉回路，图(b)有欧拉路也有欧拉回路，图(c)既无欧拉路也无欧拉回路。

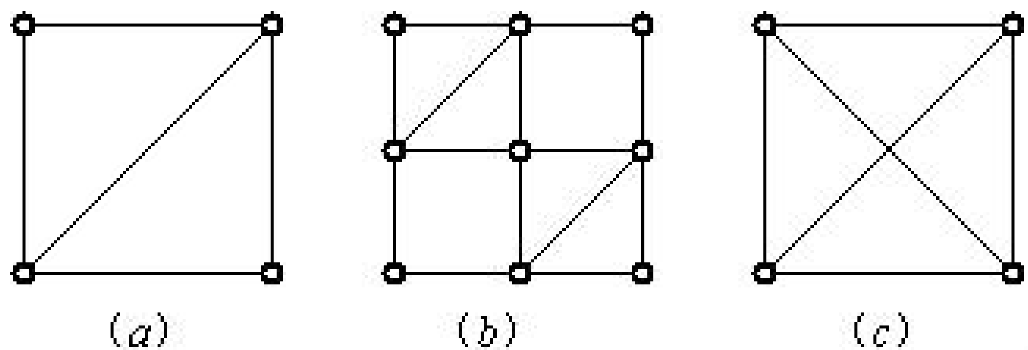
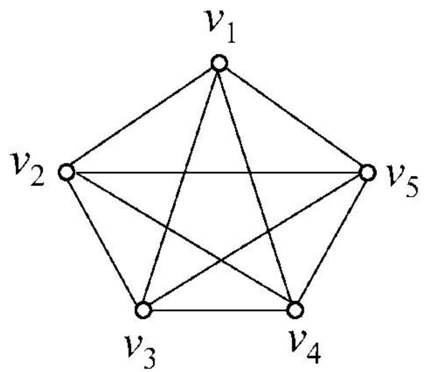
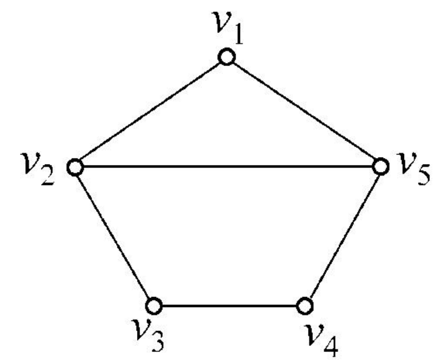


图10-18



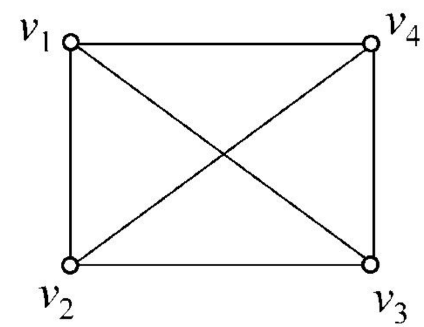
v_1
v_2
v_5
v_3
v_4

a)



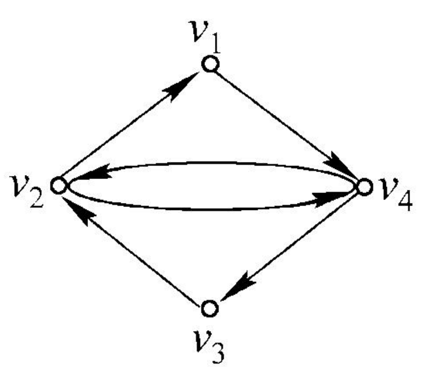
v_1
v_2
v_5
v_3
v_4

b)



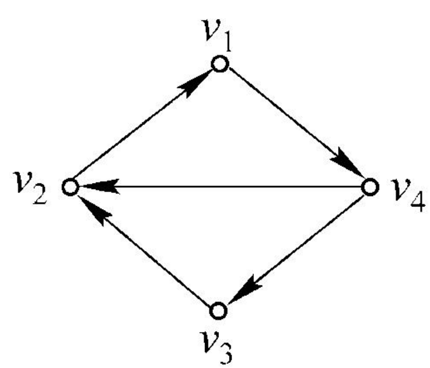
v_1
v_4
v_2
v_3

c)



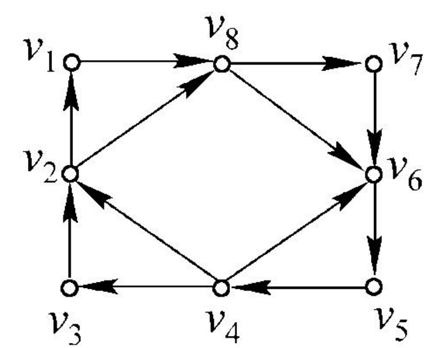
v_1
v_2
v_4
v_3

d)



v_1
v_2
v_4
v_3

e)



v_1
v_8
v_7
v_2
v_6
v_3
v_4
v_5

f)

在上页的6个图中，容易看出，图a和图d是欧拉图；图b和图e不是欧拉图，但存在欧拉通路；图c和图f不存在欧拉通路。

一个无向图是否存在欧拉通路（回路）的问题，在我国常称为“一笔画问题”，即笔不离纸，每条边只画一次而不许重复，画完该图。若画完该图后，笔又回到出发点，则该图为欧拉图；笔回不到出发点，则该图只存在欧拉通路。显然，在上页图中，图a、b能一笔画出，图c不能一笔画出。并且在图a中笔能回到出发点，而图b中笔不能回到出发点。

定理 无向图$G=<V,E>$具有一条欧拉通路，当且仅当G是连通的，且仅有零个或两个奇度数结点。若有两个奇度数结点，则它们是G中每条欧拉通路的端点。

必要性：设G具有一条欧拉通路$L=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\quad v_{i_{m-1}}e_{j_m}v_{i_m}$

则L经过G中的每条边，由于G中无孤立结点，因而L经过G的所有结点，所以G是连通的。

对任意一个不是端点的结点v_i，在欧拉路中每当v_i出现一次，必关联两条边，故v_i虽可重复出现，但$deg(v_i)$必是偶数。

对于端点，若$v_0=v_k$，则$d(v_0)$为偶数，即G中无奇数度结点，若端点v_0与v_k不同，则$d(v_0)$为奇数，$d(v_k)$为奇数，G中就有两个奇数度结点。

充分性：若图G连通，有零个或两个奇数度结点，我们构造一条欧拉路如下：

（1）若有两个奇数度结点，则从其中的一个结点开始构造一条路

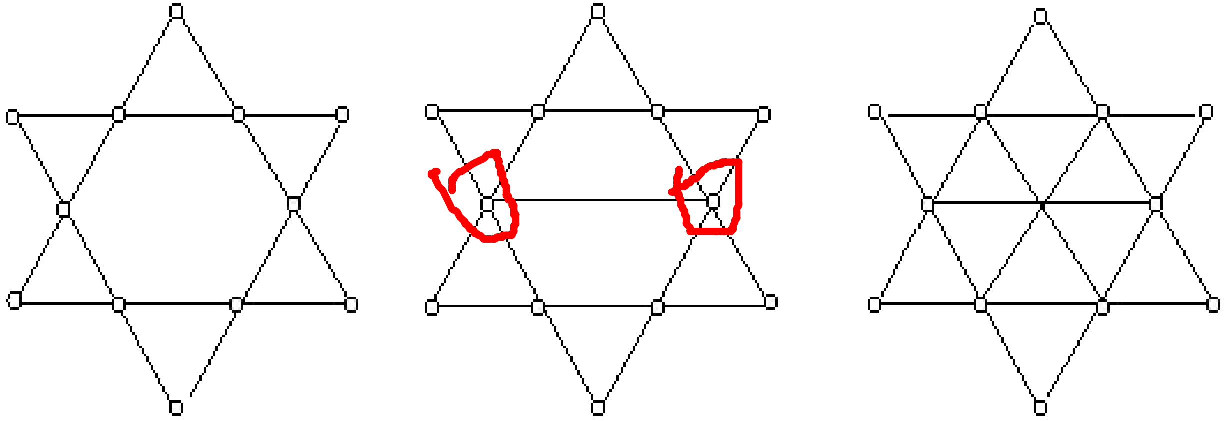
即从v_0出发经关联边e_1“进入”v_1，若$\deg(v_i)$为偶数，则必可由v_1再经关联边e_2进入v_2，如此进行下去，每边仅取一次。

由于G是连通的，故必可到达另一奇数度结点停下，得到一条迹L：

$$v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_iv_ie_{i+1}\ldots e_kv_k。$$

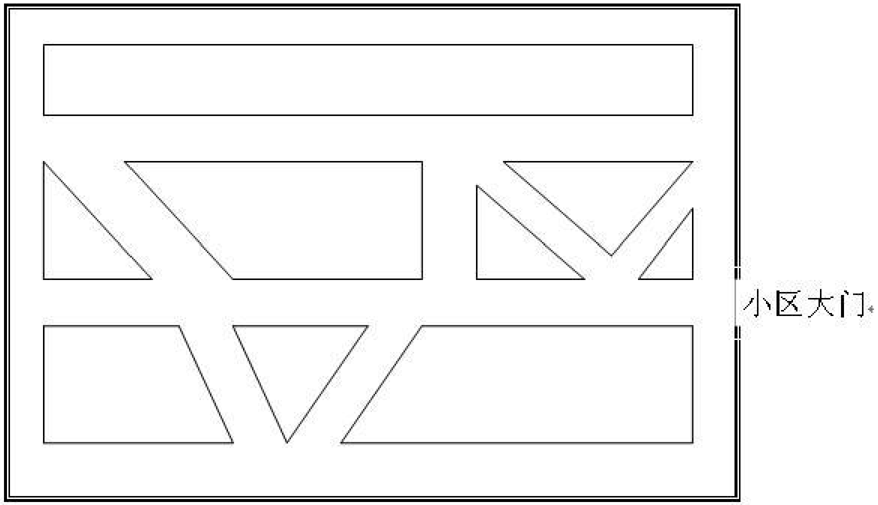
定理： 无向图$G = <V,E>$具有一条欧拉回路，当且仅当G是连通的，并且所有结点的度数均为偶数。

例 一笔画问题（笔不离开纸,不重复地画遍纸上图形的所有的边） 请问图10.27中的各图能否一笔画出，如果不能，则需要几笔？

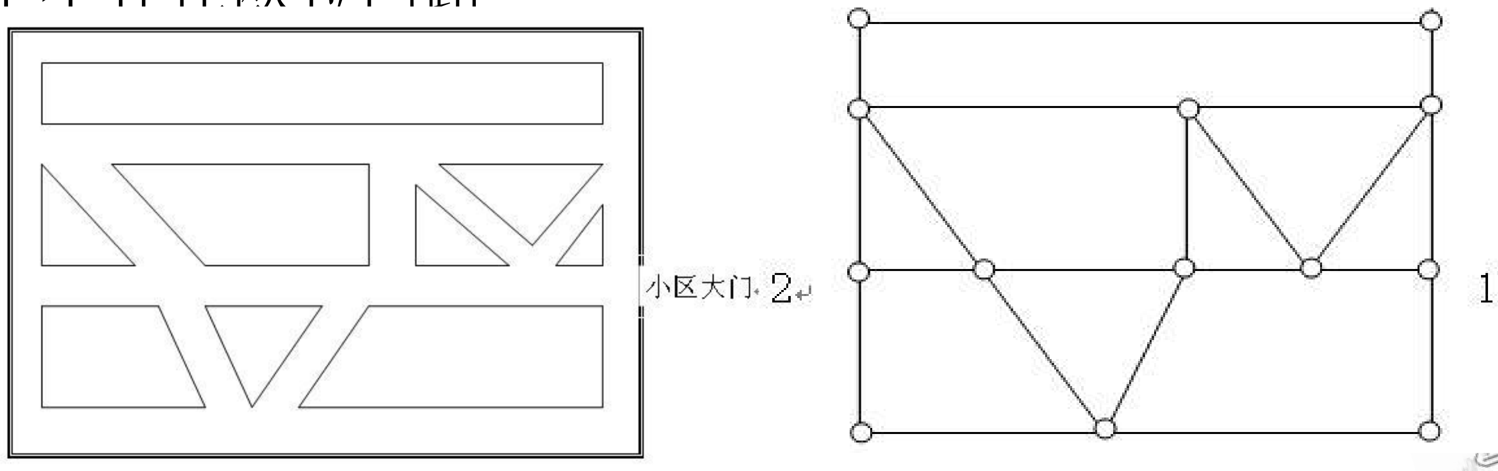


图(a)存在欧拉回路，故可以一笔画出，并回到起始点；图(b)含有两个度数为奇数的结点，存在欧拉迹，也可以一笔画出，但需要从其中一个度数为奇数的结点出发，结束点在另一个度数为奇数的结点；图(c)含有六个奇数度的结点，不能一笔画出。但可以三笔画出，因为可以将六个度数为奇数的结点分为三对，每对之间添加一条边，如图10.28中所示，虚线为添加的边。这样构造出的新图就存在欧拉回路，可以一笔画出。但其欧拉回路上存在三条添加的但不邻接的边，去除这三条边，则该欧拉回路被截断为三段，故需要三笔画出。

例 设某封闭式小区的路网结构如图10.29所示，请证明能否设计出一条路线使得清洁车从小区大门出发清扫每条道路恰好一次，且在清扫完最后一条道路后正好返回小区大门处。



解 将该小区路网结构图用图论中的图来表示，如图10.30所示，其中，每个结点代表小区道路的交叉点，每条边代表道路。小区大门位于结点1处。由于所得到的图有两个结点度数为奇数（结点1与2），其它结点度数为偶数，因此，图中不存在欧拉回路



例 “两只蚂蚁比赛问题”。两只蚂蚁甲、乙分别处在图 中的顶点　处，并设图中各边长度相等。甲提出同乙比赛：从它们所在顶点出发，走过图中所有边最后到达顶点 处。如果它们速度相同，问谁最先到达目的地？

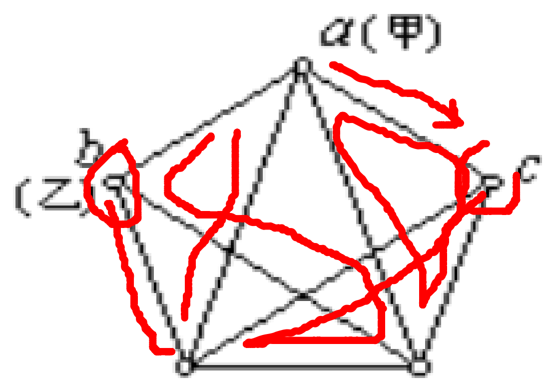


图 G

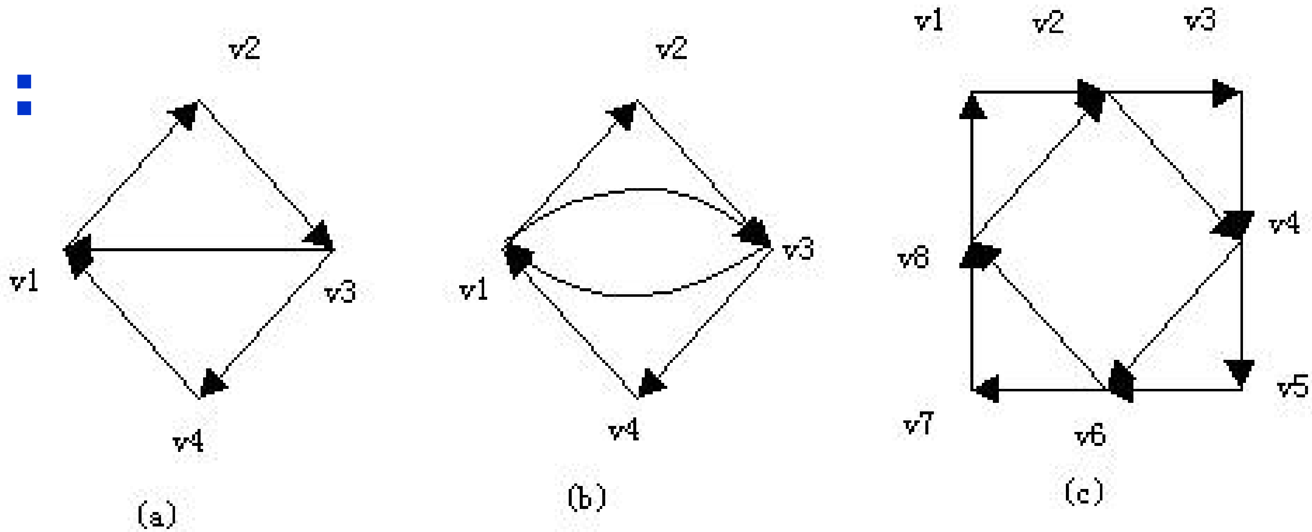
图 中，有两个奇度顶点b和c ，因此存在从b 到c 的欧拉通路，蚂蚁乙走到 c只要走一条欧拉通路，边数为 9，而蚂蚁甲要想走完图中所有边到达c，至少要先走一条边到达b，再走一条欧拉通路，故它至少要走10 条边到达c，所以乙必胜。

有向图的欧拉图

定理 一个有向图D具有欧拉通路,当且仅当D是连通的,且除了两个顶点外,其余顶点的入度均等于出度.这两个特殊的顶点中,一个顶点的入度比出度大 1.另一个顶点的入度比出度小1.

推论 一个有向图D是欧拉图(具有欧拉回路),当且仅当D是连通的,且所有顶点的入度等于出度.

例：



图a)存在一条欧拉通路：v3v1v2v3v4v1；

图(b)中存在欧拉回路v1v2v3v4v1v3v1，因而(b)是欧拉图；

图(c)中有欧拉回路v1v2v3v4v5v6v7v8v2v4v6v8v1因而(c)是欧拉图。

练习

1. 想一想，一只昆虫是否可能从立方体的一个顶点出发，沿着棱爬行、它爬行过每条棱一次且仅一次，并且最终回到原地？为什么？

2. 请设想一张图，它的64个顶点表示国际象棋棋盘的64个方格，顶点间的边表示:在这两个顶点表示的方格之间可以进行“马步”的行走。试指出其顶点有哪几类（依其度分类），每类各有多少个顶点。

解 不可能。可将立方体的一个顶点看作图的一个顶点，把立方体的棱看作图的边，那么该图的四个顶点都是三度的，因此不可能从一个顶点出发，遍历所有的边一次且仅一次，并且最终回到原顶点。

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

3. 证明：序列（7，6，5，4，3，3, 2），（6，5，5，4，3，2，2）以及（6，6，5，4，3，3，1）都不是简单图的度序列。

4. 有7人a，b，c，d，e，f，g分别精通下列语言，问他们7人是否可以自由交谈（必要时借助他人作翻译）。

   a 精通英语。
   b 精通汉语和英语。
   c 精通英语、俄语和意大利语。
   d 精通日语和英语。
   e 精通德语和意大利语。
   f 精通法语、日语和俄语。
   g 精通法语和德语。

由于7个顶点的简单图中不可能有7度的顶点，因此序列（7，6，5，4，3，3, 2）不是简单图的度序列。序列（6，5，5，4，3，2，2）中有三个奇数，因此它不是简单图的度序列。序列（6，6，5，4，3，3，1）中有两个6，若它是简单图的度序列，那么应有两个顶点是6度顶点，于是它们都要与其它所有顶点邻接，该图就不会有一度的顶点，与序列中末尾的1冲突。故（6，6，5，4，3，3，1）也不是简单图的度序列。

5、（1）证明：n个顶点的简单图中不会有多n(n-1)/2于条边。

（2）n个顶点的有向完全图中恰有条边。

6、n个城市间有*m*条相互连接的直达公路。证明：当m>(n-1)(n-2)/2时，人们便能通过这些公路在任何两个城市间旅行。

关于哈密尔顿图

与欧拉回路类似的是哈密尔顿回路问题。它是1859年哈密尔顿首先提出的一个关于12面体的数字游戏：能否在12面体中找出一条回路，使它通过图中所有结点一次且仅一次？

将12面体画作与其同构的平面图，如图所示

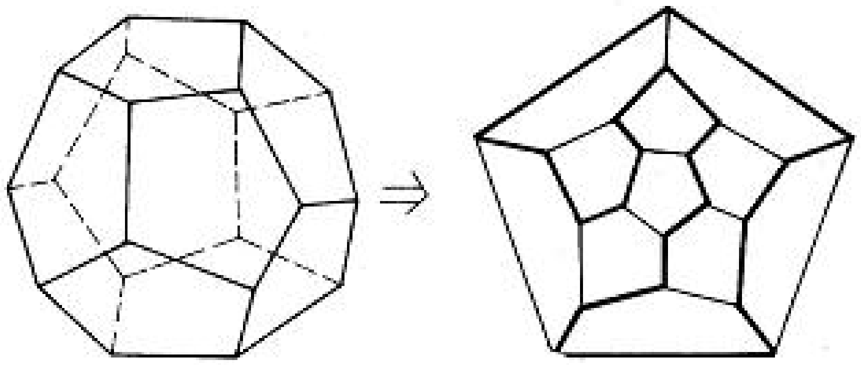


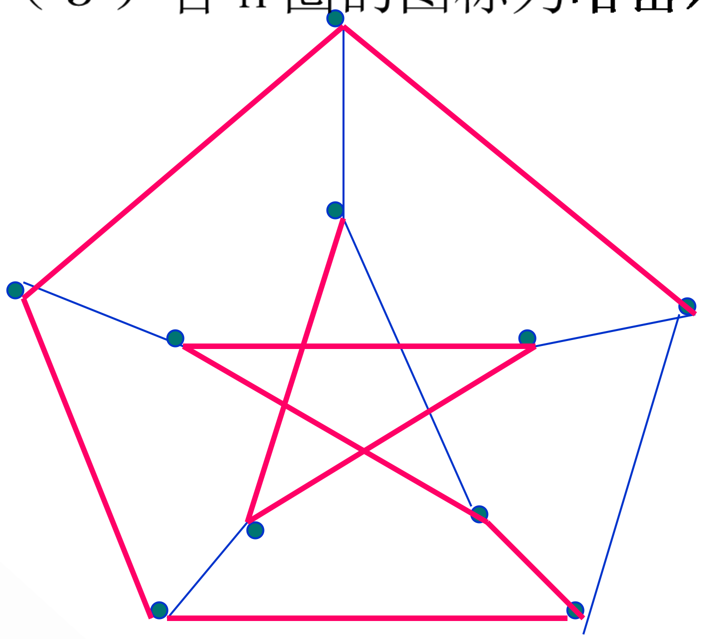
图10-20

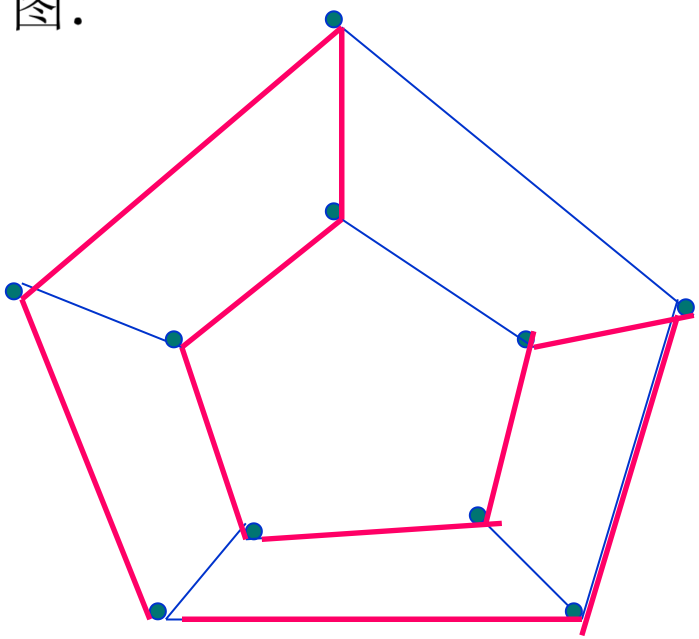
定义 设 G=(V,E)是连通无向图

（1）经过 G 的每个顶点正好一次的路径，称为 G 的一条**哈密尔顿路径**.

（2）经过 G 的每个顶点正好一次的圈，称为 G 的**哈密尔顿圈**或 H 圈.

（3）含 H 圈的图称为**哈密尔顿图**或 H 图.





例. 在图10-21中，图(*a*)有哈密尔顿路但无哈密尔顿回路，图(*b*)既有哈密尔顿路又有哈密尔顿回路，图(*c*)既无哈密尔顿路也无哈密尔顿回路。

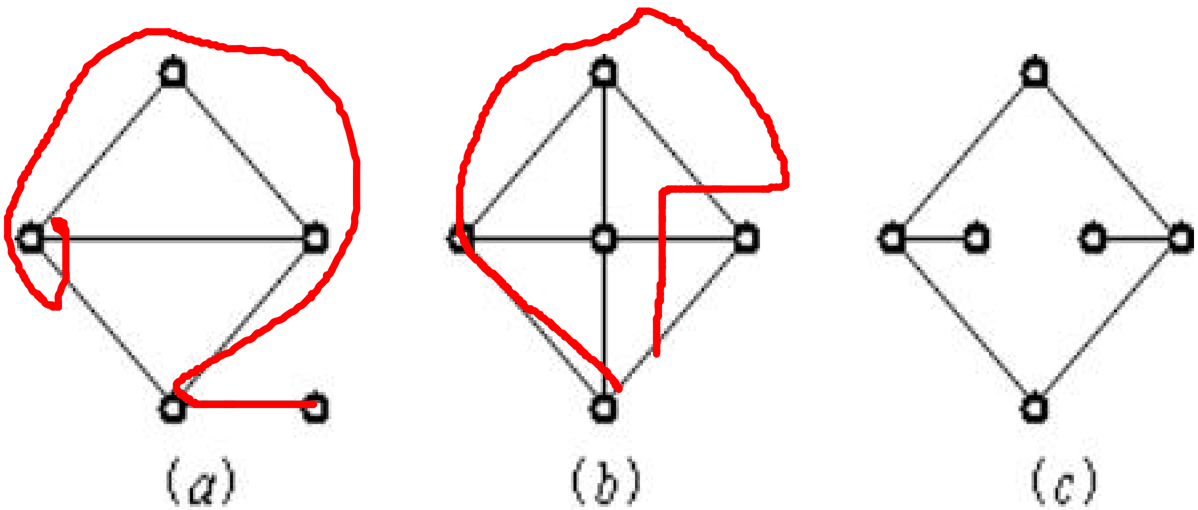


图10-21

定义 在无向图$G=\langle V, E\rangle$中，令$\Delta(G)=max\{d(v)|v\in V\}$，$\delta(G)=min\{d(v)|v\in V\}$，称$\Delta(G)$、$\delta(G)$分别为$G$的最大度和最小度。

定理 设G为任意n阶无向简单图，则

$$\Delta(G)\le n-1。$$

证明 因G无平行边也无环，所以G中任意结点v至多与其余$n-1$个结点相邻，于是$d(v)\le n-1$。由v的任意性可得，$\Delta(G)\le n-1$。

定理 $G=\langle V, E\rangle$是n阶简单图，$n\geq 3$，则：

(1)如任两不相邻结点u、$v\in V$，均有$d(u)+d(v)\geq n-1$，则在G中存在一条哈密尔顿路。

(2)如任两不相邻结点u、$v\in V$，均有$d(u)+d(v)\geq n$，则G是哈密尔顿图。

证明 (1)先证G是连通的。若G不连通，设G_1、G_2为其两个连通分支，u、v分别是G_1、G_2的结点，则u、v在G中不相邻且有$d(u)+d(v)\leq|V(G_1)|-1+|V(G_2)|-1\leq n-2$，与已知矛盾，所以$G$是连通的。 n_1-1+ $n_2-1=n$

-2

$n-2$

再证G中存在一条哈密尔顿路。设Γ：$v_1v_2\ldots v_s$是G的最长的基本路，则$s\leq n$。若$s<n$，先证G中必有经过v_1、v_2、…、v_s的回路。

若v_1与vs邻接，则Γ与边$[v_1, v_s]$构成一个回路。若v_1与v_s不邻接，因为Γ：$v_1v_2\ldots v_s$是G的最长的基本路，所以v_1与v_s的邻接结点都在Γ上。设v_1的邻接结点依Γ上的顺序为v_{i_1}、v_{i_2}、…、v_{i_k}，$(2\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq s-1)$，若$v_s$与 v_{i_1}、v_{i_2}、…、v_{i_k} 点都不邻接，则$d(v_s)\leq s-k-1$，于是$d(v_1)+d(v_s)\leq k+s-k-1<n-1$，矛盾。所以，存在$j\in\{1, 2, \ldots, k\}$，使$v_s$与邻接，这时 $v_1\cdots v_{i_j-1}v_sv_{s-1}\cdots v_{i_j}v_1$ 一个回路。

由G是连通的，而$s<n$，所以存在G的不在Γ上的结点v，v至少与Γ上的某个结点邻接。不妨设v与v_r邻接，若$r<i_j-1$，则 $vv_rv_{r-1}\cdots v_1v_{i_j}\cdots v_sv_{i_j-1}\cdots v_{r+1}$ 构成长度为s的基本路；若 $r\geq i_j-1$ ，则 $vv_r\cdots v_sv_{i_j-1}\cdots v_1v_{i_j}\cdots v_{r-1}$ 构成长度为s的基本路，与Γ的选取矛盾。所以$s=n$。Γ：$v_1v_2\ldots v_s$就是G的一条哈密尔顿路

(2)设Γ：$v_1v_2\ldots v_n$是G中的哈密尔顿路，若v_1与v_n邻接，则$\Gamma\cup\{[v_1, v_n]\}$是一条哈密尔顿回路；若v_1与v_n不邻接，类似(1)可证有一条通过Γ的所有结点的一条回路，该回路即为哈密尔顿回路。

推论 G是n阶简单图，若$n\geq3$和$\delta\geq n/2$，则G是哈密尔顿图。

定理只是一个充分条件，但反过来未必成立。例如，六边形的图是哈密尔顿图，但不满足定理的条件。

例 某地有5个风景点，若每个风景点均有两条道路与其他地点相通，问是否可经过每个风景点恰好一次而游玩这5处？

解 将风景点作为结点，连接风景点的路作为边，则得到一个无向图G。由题意可知，对G中每个结点均有$d(v)=2$。于是对任意u、$v\in G$，有$d(u)+d(v)=2+2=4=5-1$，所以该图有一哈密尔顿路，故本题有解。

南開大學
Nankai University

例：考虑七天内安排七门课程的考试，使得同一位老师所教的课程不能在连续的天考试，如果每名老师教的课程不超过4门，那么能否做出这样的安排。

证明　设 G 为具有七个结点的图，每个结点对应于一门课程考试，如果这两个结点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任课程数不超过 4，故每个结点的度数至少是 3，任两个结点的度数之和至少是 6，故 G 总是包含一条汉密尔顿路，它对应于一个七门考试课目的一个适当的安排。

■ 关于平面图

平面图的基本概念

定义 如把无向图G画在平面上，任意两条边除端点外均不相交，称G为平面图。

例 K_1、K_2、K_3、K_4都是平面图，完全二部图$K_{1,n}(n\geq 1)$、$K_{2,n}(n\geq 2)$也是平面图。

在研究平面图理论中有两个十分重要的图，就是被称为库拉图斯基图的完全二部图$K_{3,3}$和完全图K_5，它们都不是平面图。其中，$K_{3,3}$是边数最少的非平面图，K_5是结点数最少的非平面图。

定义 设G是一个平面图，由图中的边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域，称为G的一个面（Surface），包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边（Bound），面r的边界的长度称为该面的次数（Degree），记为$D(r)$。区域面积有限的面称为有限面（Finite Surface），区域面积无限的面称为无限面（Infinite Surface）。

显然，平面图有且仅有一个无限面。

面的概念也可以用下面形象的说法加以描述：假设我们把一个平面图画在平面上，然后用一把小刀，沿着图的边切开，那么平面就被切成许多块，每一块就是图的一个面。更确切地说，平面图的一个面就是平面的一块，它用边作边界线，且不能再分成子块。

例 在图13-36中有9个结点，11条边，把平面分成4个面$r0$、$r1$、$r2$、$r3$。其中

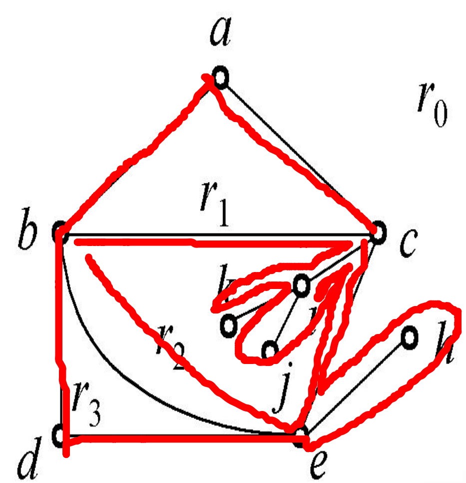
$r0$的边界为abdeheca，$D(r0) = 7$；

$r1$的边界为abca，$D(r1) = 3$；

$r2$的边界为becijikicb，$D(r2) = 9$；

$r3$的边界为bdeb，$D(r3) = 3$。

$r1$、$r2$和$r3$是有限面，$r0$是无限面。



例 在图10-27中，共有3个面$f1$、$f2$、$f3$。其中，面$f1$由回路$v1v2v3v4v5v6v5v4v1$所围，面$f2$由回路$v1v4v7v1$所围，面$f3$由回路$v1v2v3v4v7v1$所围，所以$d(f1)=8$，$d(f2)=3$，$d(f3)=5$。

$7-8+3=2$

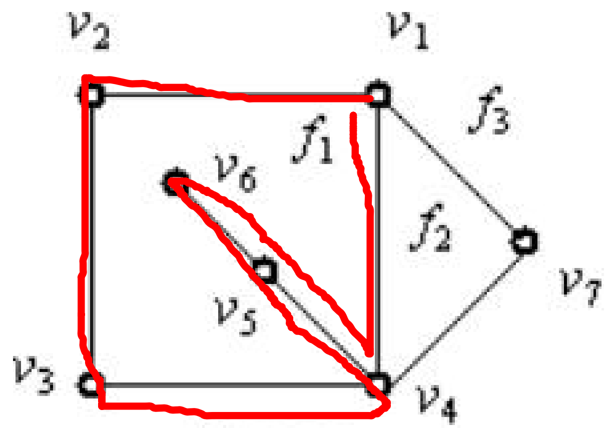


图10-27

定理 (欧拉公式)若G为连通平面图，则$n-m+r=2$，其中，n、m、r分别为G的结点数、边数和面数。

定理 若G是连通的平面图，且G的每个面的次数至少为$l(l\geq3)$，则G的**边数**m与**结点数n**有如下关系：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

$$m \leq 2(n-2)$$

证明　设G有r个面，则$2m=\sum_{i=1}^{r} d(f_i) \geq lr$。由欧拉公式得，$n-m+r=2$。于是，

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

定理 设G是$n(n\geq3)$阶m条边的简单连通平面图，则$m\leq3n-6$。

证明 因为G是简单连通平面图，所以G任意面的次数$d(f)\geq3$。由上述定理可得$m\leq3n-6$。

上述定理是判别平面图的必要条件，而不是充分条件。也就是说，即使一个图满足上述不等式，也未必是平面图，但使用上述定理的逆否命题可以判别一个图不是平面图。

例 证明K_5不是平面图。

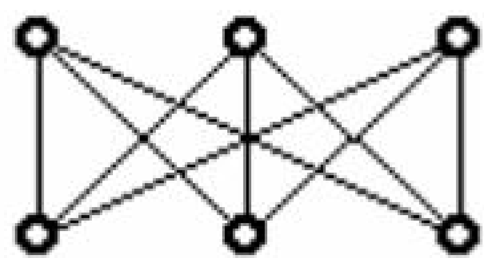
证明 若K_5是平面图，由于K_5有5个结点10条边，则$3\times5-6=9<10$，与上述定理矛盾。所以，K_5不是平面图。

例 证明$K_{3,3}$不是平面图。

证明 若$K_{3,3}$是平面图，因为在$K_{3,3}$中任取三个结点，其中必有两个结点不相邻，故每个面的次数大于等于4，于是(6－2)＝8＜9，与定理矛盾。所以，$K_{3,3}$不是平面图。

$m \le 2(n-2)$

9　　　8

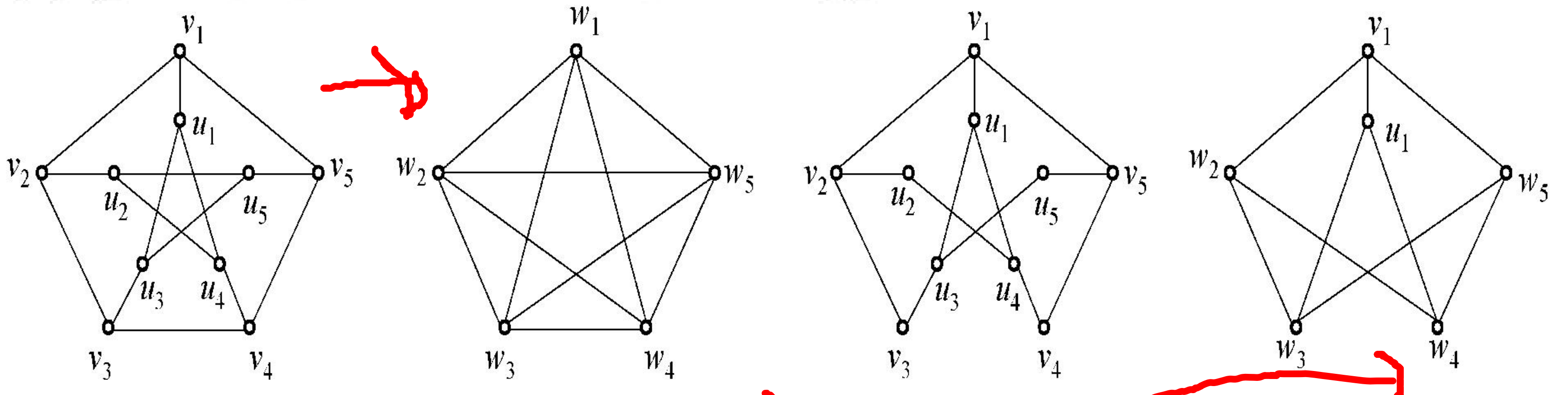


定理（库拉托夫斯基定理） 一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不可能收缩为K_5或$K_{3,3}$。

例　图 13-37a 所示的彼得森图是一个非平面图。事实上，

1）收缩边(v_i,u_i)，用w_i代替，$i=1,2,3,4,5$，得到图 13-37b，即为图K_5。

2）图 13-37c是图 13-37a的子图，收缩边(v_i,u_i)，用w_i代替，$i=2,3,4,5$，得到图 13-37d，即为图$K_{3,3}$。



a)　b)　c)　d)

定理 在一个平面图中，所有面的次数之和等于图中边数的二倍。

证明 因任何一条边，或者是两个面边界的公共边，或者是在一个面中作为边界被重复计算两次，故平面图所有面的次数之和等于其边数的二倍。

关于图着色问题

定义： 对无向图G的每个结点涂上一种颜色，使相邻的结点涂不同的颜色，若能用k种颜色给G的结点着色，就称G是可—k着色的。若G是可—k着色的，但不是可—$k-1$着色的，就称G是k色图，并称这样的k为G的着色数，记作$\chi(G)=k$。

到目前为止还没有一个简单的方法，可以确定任一图G是否是n色的，但我们可以用韦尔奇·鲍威尔法对图着色，其方法是：

- 将图G的结点按度数递减排列；
- 对第一个结点及其不邻接的结点着第一种颜色；
- 对尚未着色的第一个结点及其不邻接的结点着第二种颜色；续行此法，直到全部结点着完色为止。

例. 用韦尔奇·鲍威尔方法给图着色

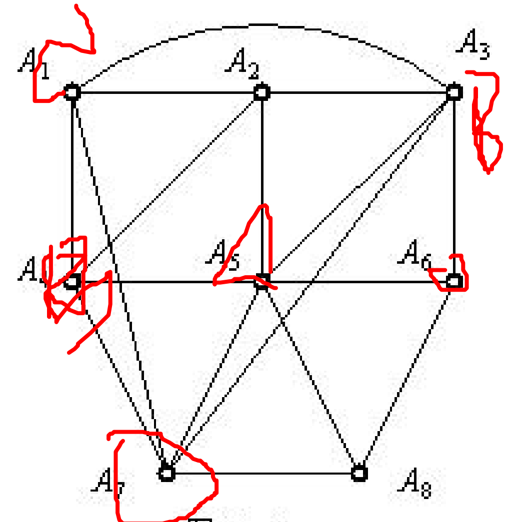


图 10-41

解 (1)根据结点度数递减排列各结点为：

A_5、A_3、A_7、A_1、A_2、A_4、A_6、A_8；

(2)对A_5及后边未着色的不邻接结点A_1着C_1色；

(3)对A_3及后边未着色的不邻接结点A_4、A_8着C_2色；

(4)对A_7及后边未着色的不邻接结点A_2、A_6着C_3色；

因此G是可－3着色的。又因为A_1、A_2、A_3互相邻接，故必须着三种颜色。所以$\chi(G)=3$。

定理 对于n个结点的完全图K_n，有$\chi(K_n)=n$。

证明 因为完全图的任意两个结点都相邻，所以n个结点的着色数大于等于n，而n个结点的着色数至多是n，所以$\chi(K_n)=n$。

定理 对于任意的无向图G(不含环)，均有$\chi(G)\leq\Delta(G)+1$。

证明 对G的阶数n作归纳法。$n=1$时，结论显然成立。假设$n=k$时结论成立，下证$n=k+1$时结论也成立。设v为G中任一个结点，令$G_1=G-\{v\}$，则G_1的阶数为k，由归纳假设可知$\chi(G_1)\leq\Delta(G_1)+1\leq\Delta(G)+1$。当将$G_1$还原成$G$时，由于$v$至多与$G_1$中$\Delta(G)$个结点相邻，而在$G_1$的点着色中，$\Delta(G)$个结点至多用了$\Delta(G)$种颜色，于是在$\Delta(G)+1$种颜色中至少存在一种颜色给$v$涂色，使$v$与相邻结点涂不同颜色。

图着色的应用

交友问题

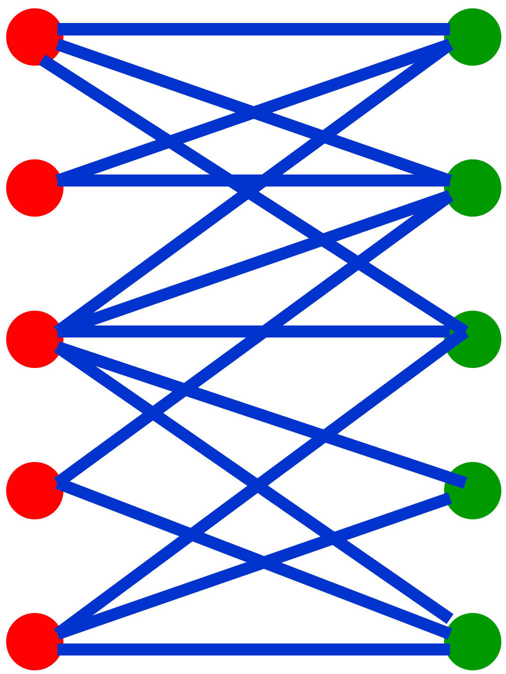
有一婚友聯誼社共有五男五女十位客戶，基於「先友後婚」原則，欲在週一至週五晚間安排條件相符者會面，問會面時程該如何安排?

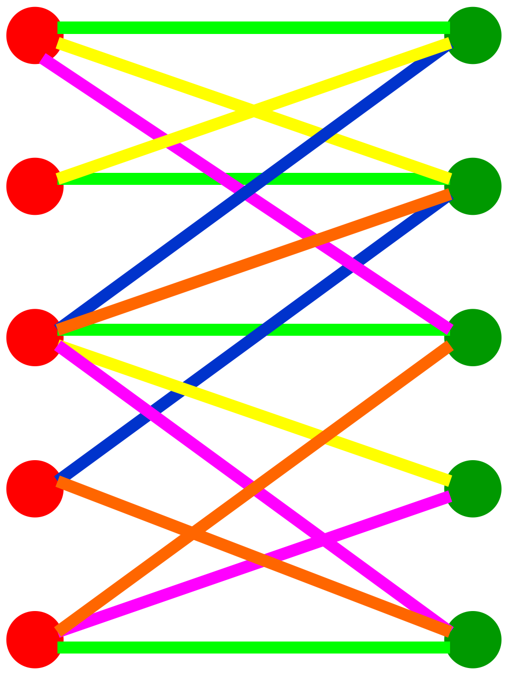
(1) 每個客戶當成一個點。

(2) 男女條件相符者，則連一條邊。

(3) 每位男士不能在同一時間與兩位女士 見面。每位女士不能在同一時間與兩位男士見面。

(4) 在圖的邊上標示日期，使得共點的邊標示不同的日期。





❖ 锦标赛问题

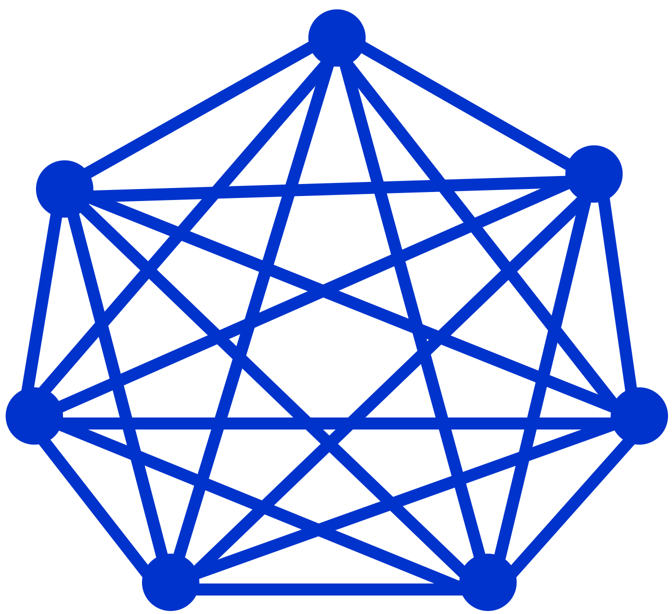
有一項錦標賽共有七支隊伍參加，採循環賽制。如果每天有一支隊伍休息，其餘六隊均須出賽一場，問主辦單位應如何安排賽程？

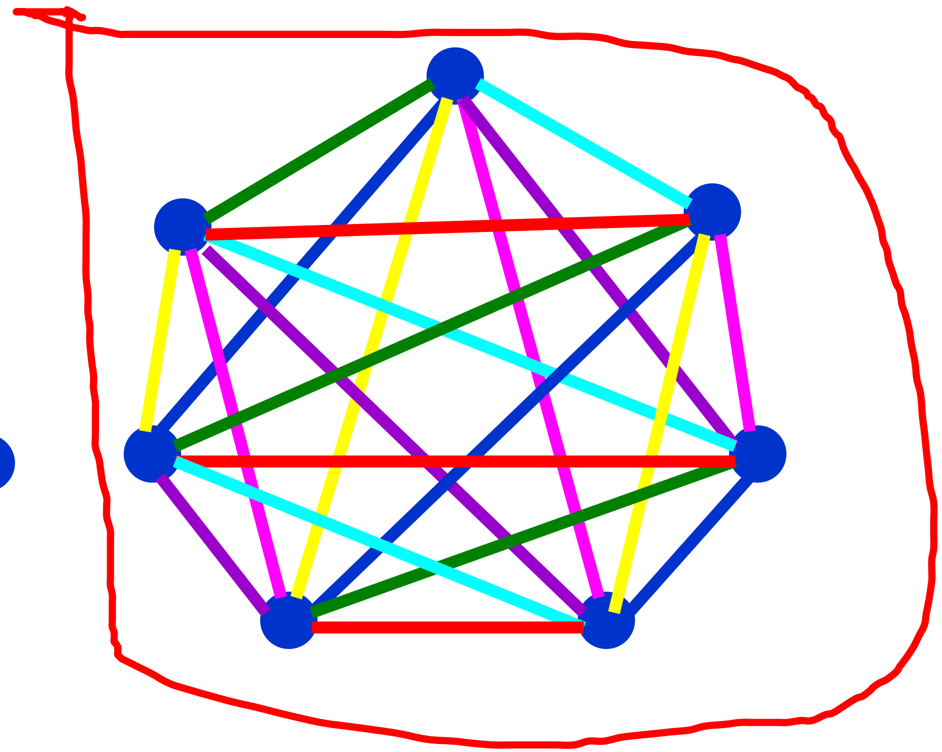
(1) 每支隊伍當成一個點。

(2) 任兩點連一條邊。

(3) 每支隊伍不能在同一天與其他兩支隊伍比賽。

(4) 在圖的邊上標示日期，使得共點的邊標示不同的日期，且同一日期的邊共有三條。





时间安排问题

假設某一學校設有八個委員會，而有些委員會會擁有共同委員。今各委員會想利用週一至週五的晨間活動時間開會，問會議時程應如何安排？

(1) 每個委員會當成一個點。

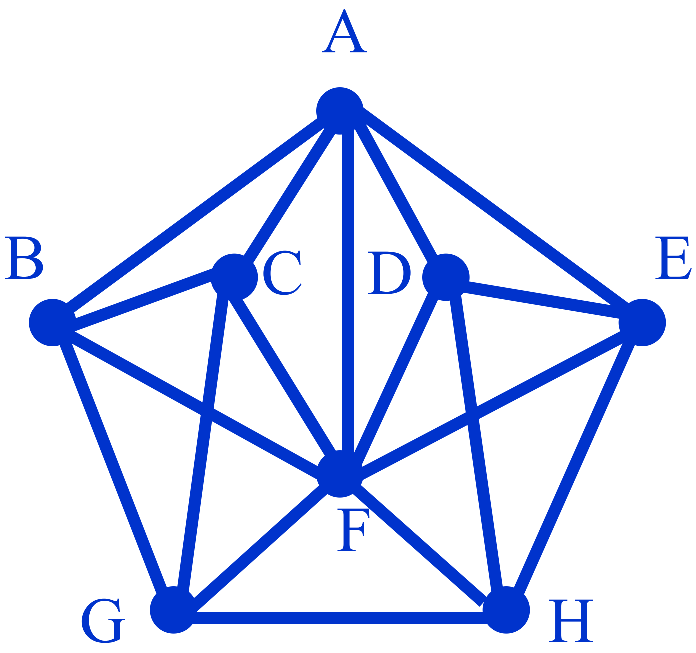
(2) 兩個委員會若擁有共同委員，則連一條邊。

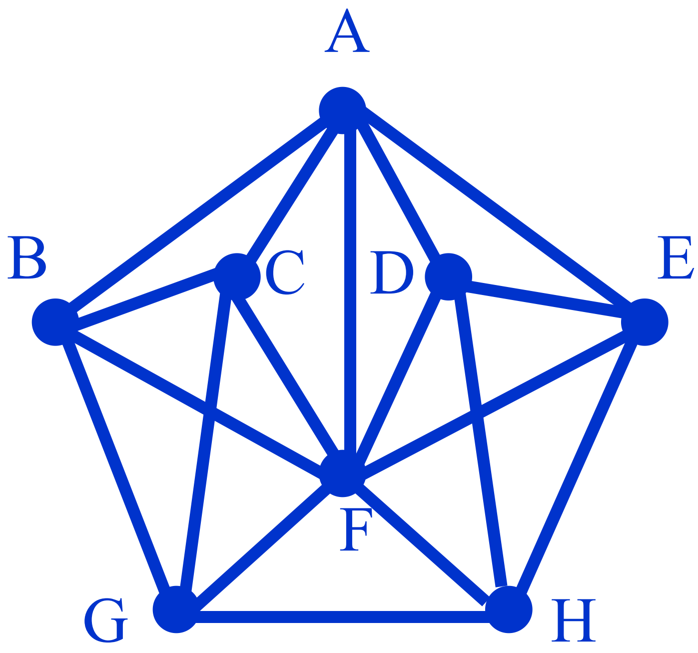
(3) 兩個委員會若擁有共同委員，不能在同一時間開會。

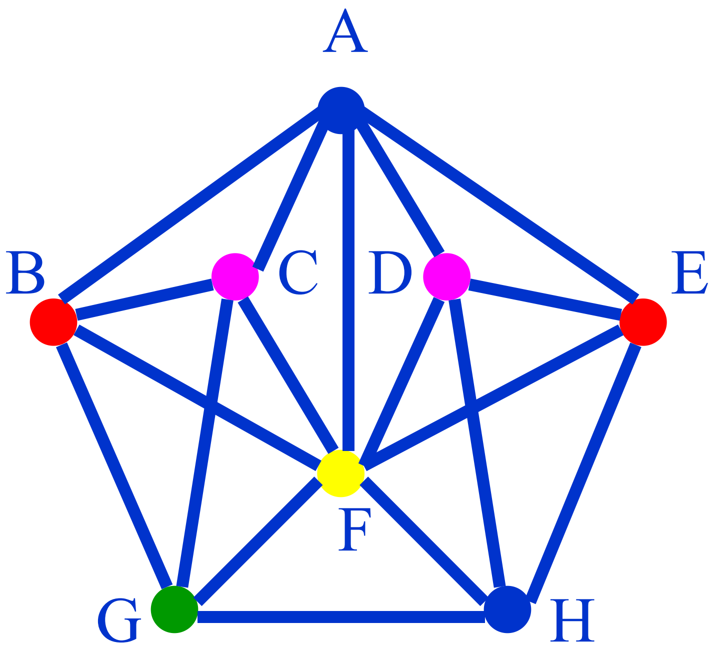
(4) 用一到五在圖的點上標示，使得有邊相連的點標示不同的日期。

各委員會共同委員關係表

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		1	1	1	1	1		
B	1		1			1	1	
C	1	1				1	1	
D	1				1	1		1
E	1			1		1		1
F	1	1	1	1	1		1	1
G		1	1			1		1
H				1	1	1	1	




A
B
C
D
E
F
G
H


A
B
C
D
E
F
G
H

■ 关于最短路径和关键路径

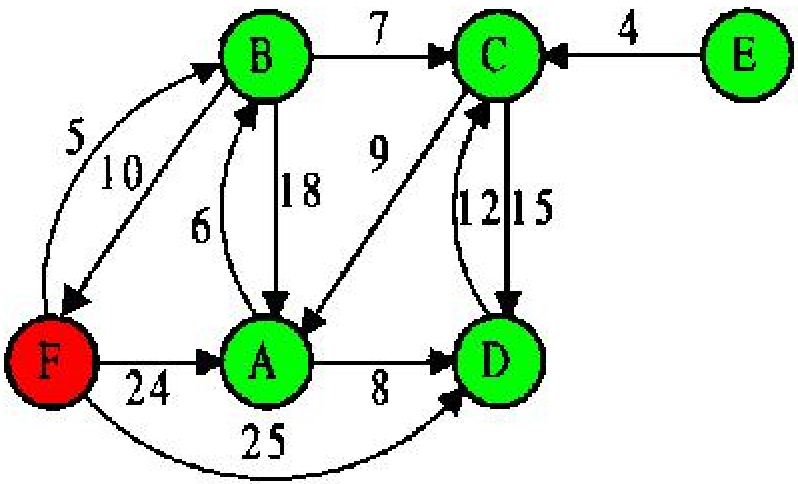
最短路径问题

定义 给定简单加权图$G=<V, E, W>$，u、$v\in V$，u到v的路上各边的权值之和称为该路的长度。所有连接u到v的路中长度最小的路称为u到v的最短路径。

定义 给定简单加权图$G=<V, E, W>$，$V=\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$，称$A=(a_{ij})$为加权图$G$的邻接矩阵，

$$a_{ij}=\begin{cases}\omega_{ij} & \text{若 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 之间有边相连} \\ \infty & \text{若 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 之间没有边相连} \\ 0 & i=j\end{cases}$$

设一个有向图G=(V,E)，已知各边的权值，以某指定点V_0为源点，求V_0到图的其余各点的最短路径。



$V_F \to V_B$:	5
$V_F \to V_B \to V_C$:	12
$V_F \to V_B \to V_C \to V_A$:	21
$V_F \to V_D$:	25
$V_F \to V_E$:	无路径

由V_F到V_A的路径有三条：

$V_F \to V_A$: 24；　$V_F \to V_B \to V_A$: 5+18=23；　$V_F \to V_B \to V_C \to V_A$: 5+7+9=**21**

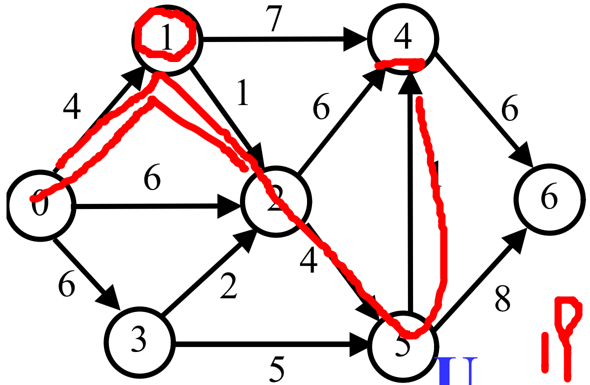
狄克斯特拉算法的具体步骤如下：

(1)初始时,S只包含源点,即S={v},v的距离为0。U包含除v外的其他顶点,U中顶点u距离为边上的权(若v与u有边<v,u>)或∞(若u不是v的出边邻接点)。

(2)从U中选取一个距离v最小的顶点k,把k加入S中(该选定的距离就是v到k的最短路径长度)。

(3)以k为新考虑的中间点,修改U中各顶点的距离：若从源点v到顶点u(u∈U)的距离(经过顶点k)比原来距离(不经过顶点k)短,则修改顶点u的距离值,修改后的距离值的顶点k的距离加上边<k,u>上的权。

(4)重复步骤(2)和(3)直到所有顶点都包含在S中。



S	U	v0到0～6各顶点的距离
{0}	{1,2,3,4,5,6}	{0,4,6,6,∞,∞,∞}
{0,1}	{2,3,4,5,6}	{0,4,5,6,~~11~~,∞,∞}
{0,1,2}	{3,4,5,6}	{0,4,5,6,11,9,∞}
{0,1,2,3}	{4,5,6}	{0,4,5,6,11,9,15}
{0,1,2,3,5}	{4,6}	{0,4,5,6,10,9,17}
{0,1,2,3,5,4}	{6}	{0,4,5,6,10,9,16}
{0,1,2,3,5,4,6}	{}	{0,4,5,6,10,9,16}

则v_0到v_1～v_6各顶点的最短距离分别为4、5、6、10、9和16。

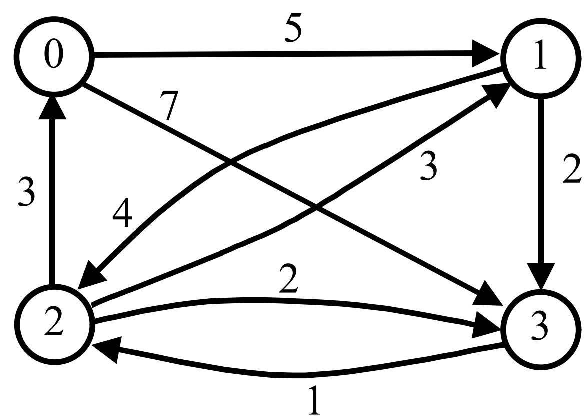
每一对顶点之间的最短路径

采用1962年弗洛伊德(Floyd)提出的算法。

弗洛伊德算法思想：逐步试着在原直接路径中考虑其它顶点作为中间点，如增加中间点后得到的路径较原路径长度减小，则以此新路径长度代替原值而修改矩阵元素；若增加中间点后的路径比原路径更长，就维持原相应的矩阵元素值不变。

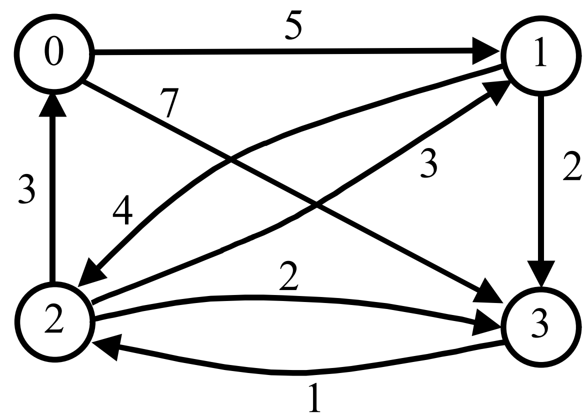
例如，假设v_i和v_j之间存在一条路径，尝试在v_i和v_j之间增加一个中间点v_k。

考虑顶点v_0,$A_0[i][j]$表示由v_i到v_j,经由顶点v_0的最短路径。只有从v_2到v_1经过v_0的路径和从v_2到v_3经过v_0的路径,不影响v_2到v_1和v_2到v_3的路径长度,因此,有:



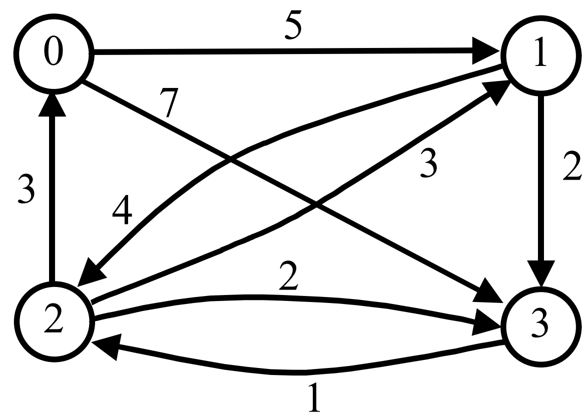
$$\mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & 7 \\ \infty & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Path_0} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

考虑顶点v_1,$A_1[i][j]$表示由v_i到v_j,经由顶点v_1的最短路径。存在路径v_0-v_1-v_2,路径长度为9,将A[0][2]改为9,path[0][2]改为1,因此,有：



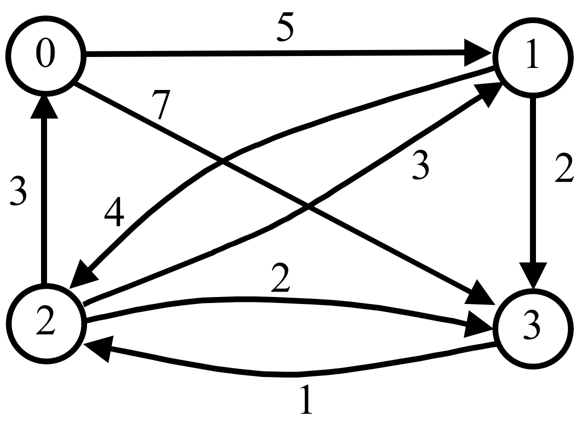
$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 & 7 \\ \infty & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Path_1=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

考虑顶点v_2,$A_2[i][j]$表示由v_i到v_j,经由顶点v_2的最短路径。存在路径v_3-v_2-v_0,长度为4,将A[3][0]改为4；存在路径v_3-v_2-v_1,长度为4,将A[3][1]改为4。存在路径v_1-v_2-v_0,长度为7,将A[1][0]改为7。将path[3][0]、path[3][1]和path[1][0]均改为2。因此,有：



$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 & 7 \\ 7 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Path_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

考虑顶点v_3,$A_3[i][j]$表示由v_i到v_j,经由顶点v_3的最短路径。存在路径v_0-v_3-v_2,长度为8比原长度短,将A[0][2]改为8；存在路径v_1-v_3-v_2-v_0,长度为6(A[1][3]+A[3][0]=2+4=6)比原长度短,将A[1][0]改为6；存在路径v_1-v_3-v_2,长度为3,比原长度短,将A[1][2]改为3；将path[0][2]、path[1][0]后path[1][2]均改为3。因此,有：



$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad Path_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

因此,最后求得的各顶点最短路径长度A和Path矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

从0到0路径为:0,0　　路径长度为:0
从0到1路径为:0,1　　路径长度为:5
从0到2路径为:0,3,2　　路径长度为:8
从0到3路径为:0,3　　路径长度为:7
从1到0路径为:1,3,2,0　　路径长度为:6
从1到1路径为:1,1　　路径长度为:0
从1到2路径为:1,3,2　　路径长度为:3
从1到3路径为:1,3　　路径长度为:2

从2到0路径为：2,0	路径长度为：3
从2到1路径为：2,1	路径长度为：3
从2到2路径为：2,2	路径长度为：0
从2到3路径为：2,3	路径长度为：2
从3到0路径为：3,2,0	路径长度为：4
从3到1路径为：3,2,1	路径长度为：4
从3到2路径为：3,2	路径长度为：1
从3到3路径为：3,3	路径长度为：0

本章主要内容

- 图的基本概念
- 特殊图
- 图的矩阵表示和计算
- 欧拉图
- 汉密尔顿图
- 平面图
- 图的最短距离计算