电势及其梯度

- 静电场力的功、电势
- 导出真空中静电场的环路定理
- 电势的计算
- 电场强度和电势间的关系

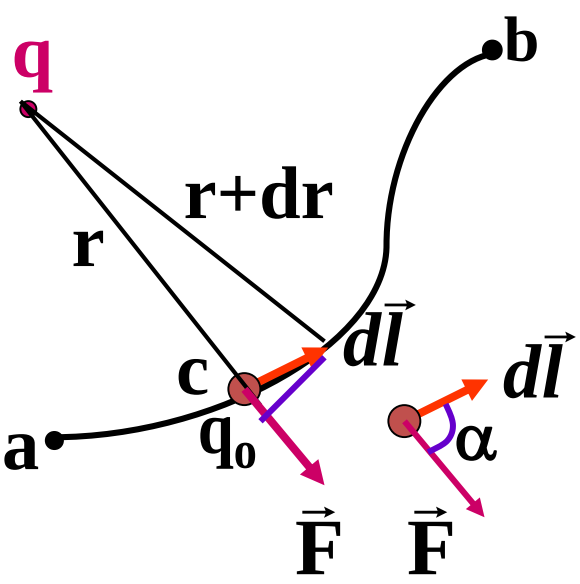
4、静电场力的功、电势

q的场强：$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

4.1 静电场力的功

(1) 单个点电荷产生的电场中

将试验电荷q_o从电场的a点移动到b点 A=?



在任意点c，位移$d\vec{l}$、受力$\vec{F}=q_o\vec{E}$

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{l}=Fdl\cos\alpha=Fdr$$

$$dl\cos\alpha=dr$$

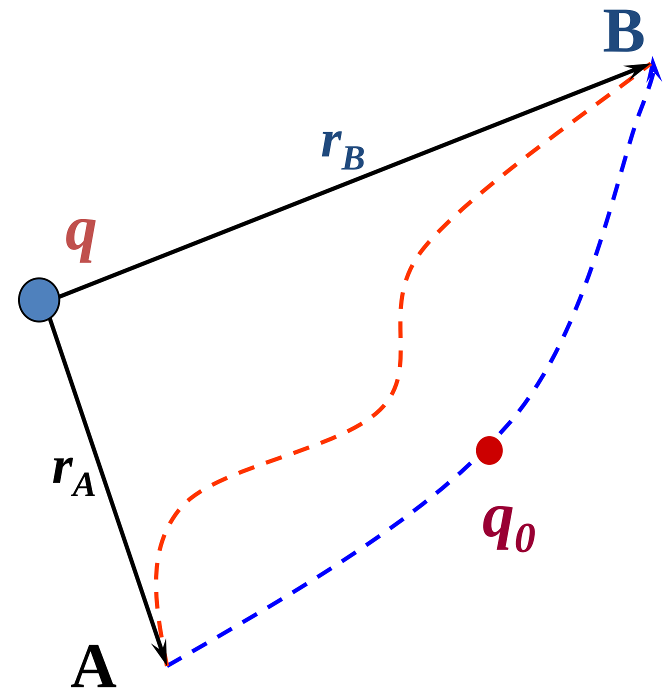
$$A=\int F\cdot dr=\int q_o E dr=\int_a^b \frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr$$

$$A=\frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

结论：

单个点电荷产生的电场中，电场力作功与路经无关。

$$A=\frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$



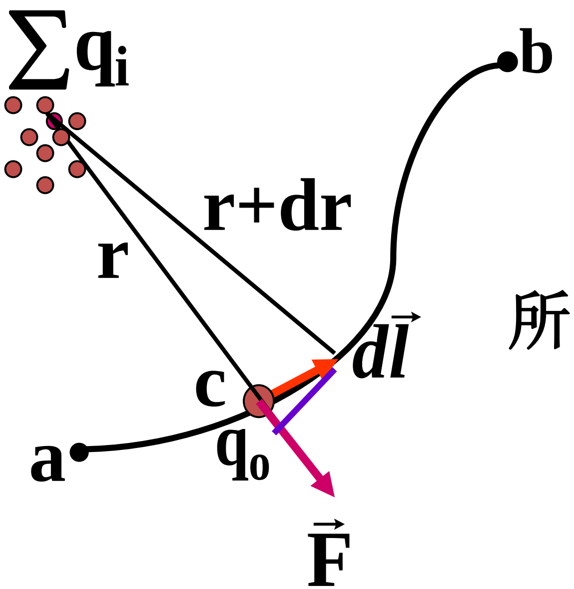
(2) 点电荷系产生的电场中

任意点c处的电场为：$\vec{E}=\sum\vec{E}_i=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$

$$A=\int\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int q_o\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=q_o\int(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n)\cdot d\vec{l}$$

$$=q_o\int\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+q_o\int\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\cdots+q_o\int\vec{E}_n\cdot d\vec{l}$$



每一项都与路经无关

所以

$$A=\int_{r_{1a}}^{r_{1b}}\frac{q_0q_1}{4\pi\varepsilon_0r_1^2}dr_1+\cdots+\int_{r_{na}}^{r_{nb}}\frac{q_0q_n}{4\pi\varepsilon_0r_n^2}dr_n$$

$$=q_0\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ia}}-\frac{1}{r_{ib}}\right)$$

(3) 连续分布电荷看作特殊点电荷组有同样的结论

结论:

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int q_o \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

1^o 试探电荷在任何静电场中移动时,电场力所作功只与试探电荷电量的大小及其起点、终点的位置有关，与路经无关。

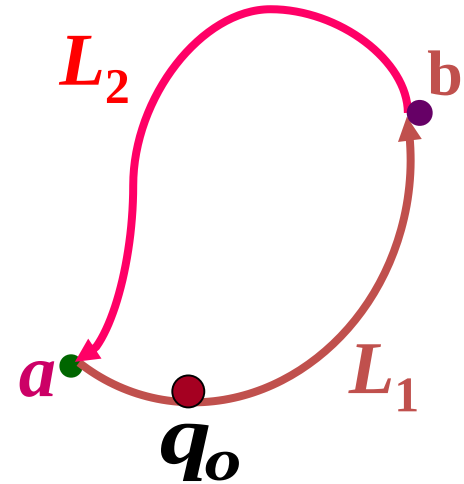
电场力是保守力，静电场是保守场。

2^o 作功A与q_o的大小成正比,移动单位正电荷作功:

$$\frac{A}{q_o} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

4.2 环路定理

在任意电场中，将q_o 从$a \xrightarrow{经L_1} b$，$b \xrightarrow{经L_2} a$



电场力作功：$A = \oint q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$= \int_{a\,(L_1)}^{b} q_o \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{b\,(L_2)}^{a} q_o \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{a\,(L_1)}^{b} q_o \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{a\,(L_2)}^{b} q_o \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\because \int_{a\,(L_1)}^{b} q_o \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{a\,(L_2)}^{b} q_o \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \therefore A = \oint q_o \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$q_0 \neq 0$ $\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$ 静电场的环路定理

4.2 环路定理

静电场的环路定理：

静电场中场强沿任意闭合环路的线积分（环流）恒等于零。

物理意义：静电场作功与路径无关，只与起点和终点的位置有关，或静电场沿任何闭合环路作功为零。

若一矢量场的任意环路积分始终为0，则称该矢量场为无旋场。

静电场两个**基本性质**：

高斯定理：$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{S内} q_i$ 有源场

环路定理：$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 无旋场，保守场

关于有源性是指：静电场不能脱离静止电荷而单独存在，静止电荷是静电场的源，高斯定律正是反映了静电场的这一特性。

关于保守性是指：在静电场中，电场矢量的线积分与积分路径无关，其本质就是环路定理。

4.3 电势、电势能

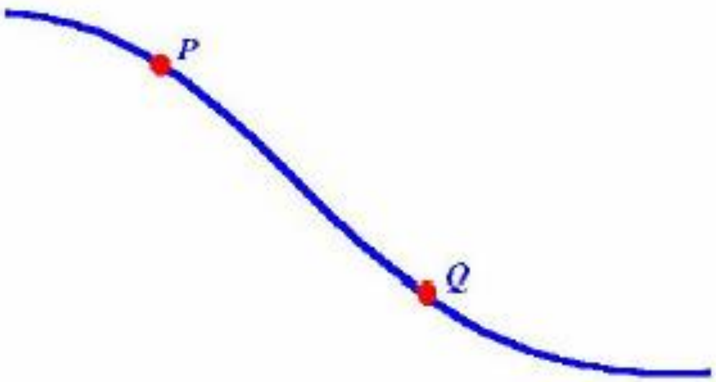
电势是静电场另一个重要的基本物理量，要求牢固掌握其概念。明确电势是标量，服从标量的迭加原理。

（1）电势能

- 能量：状态量
- 功：过程量（力对空间的积累）

系统有能量，说明它能做功

功=能量的改变量



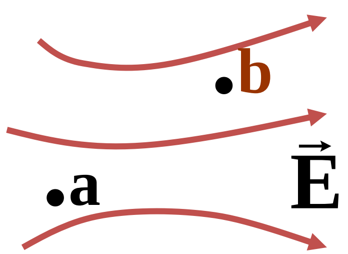
电场力做功，电势能减小

任一带电体在静电场中都具有一定的电势能，

并且：电场力作功(A) = 带电体电势能的减少(–ΔW)

设试验电荷q在电场**E**中**a**、**b**点时具有电势能W_a、W_b，当把**q**从**a**点移动到**b**点时，电场力作的功等于由**a**到**b**试验电荷电势能的减少：

$$A_{ab}=-\left(W_b-W_a\right)=W_a-W_b$$



或：

$$A_{ab}=\int_a^b q\vec{E}\cdot d\vec{l}=q\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

若取**b**点：$W_b=0$

q 在 **a** 点处的电势能：

$$A_{a''0''}=W_a-W_b=W_a=q\int_a^{''0''}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

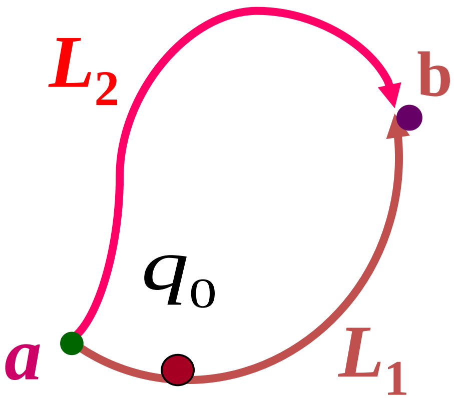
$$W_a=A_{a''0''}=q\int_a^{''0''}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

讨论：

1）电势能零点的选取是任意的，一般视问题方便而定，通常参考点不同,电势能不同。对于有限带电体，一般选无限远为势能零点，实际应用中或研究电路问题时常取大地、仪器外壳等为势能零点；对于无限大带电体，常取有限远为势能零点；

2）电势能是属于系统的 (电场 + 试探电荷)

（2）电势、电势差



$$W_a = q_0 \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

单位正电荷的电势能就是电势

定义：***a***、***b***两点的电势分别为**U*a***、**U*b***，
则两点间的电势差为 $U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

即：***a***、***b***两点的电势差 = 将单位正电荷从***a***→***b***电场力作的功

电场中任意点的电势： $U_p = \int_p^{U=0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\text{电势零点的选取：}\begin{cases}\text{电荷分布在有限空间，} \\ \qquad\text{取无穷远为 U= 0 点。} \\ \text{电荷分布在无限空间，} \\ \qquad\text{取有限远点为U= 0 点。} \\ \text{一般工程上，} \\ \qquad\text{选大地或设备外壳为U=0点。}\end{cases}$$

$$\boxed{U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

根据定义，若已知电势分布U(r)
求移动电荷q的电场力作功：

$$\boldsymbol{A = q\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(U_a - U_b)}$$

电势能的单位：J

电势、电势差的单位：V或J/C

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

例1. 在示波器、电视机、计算机显示器中，均有电子在电场中被加速而获得动能的情况。已知电子在1000v的电压中加速，求电子获得的速度。

（设电子从阴极出发时的初速度是0，电子质量m=9.11×10^{-31}kg）

解：电场力作功 $A = (-e)\cdot(U_- - U_+) = -1.6\times10^{-19}\times(-1000)$

由动能定理：$\Delta E_k = A = 1.6\times10^{-16} J$

$$v_o = 0 \qquad \frac{1}{2}mv^2 = 1.6\times10^{-16} J$$

$$v = 1.87\times10^7 \ m/s$$

若电子经过 ΔU=1v 的电场：

$$\Delta E_k = A = (-e)\cdot(U_- - U_+) = 1.6\times10^{-19} J = 1 \text{ eV}$$

$$v = 5.93\times10^5 \ m/s$$

（3）电势的计算

掌握电势的基本计算方法。

- 点电荷的电势
- 点电荷组的电势

  电势叠加原理

- 连续分布电荷的电势
  - 线电荷
  - 面电荷
  - 体电荷

求点电荷q产生电场的电势分布。

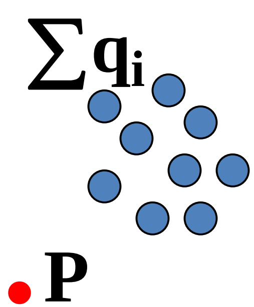
解：选无穷远点为电势0点，因积分与路径无关，选与$\vec{E}$方向相同的路径积分。按电势定义，空间距离点电荷q为r的任一点P的电势为：

$$U_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_P^{\infty}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

点电荷的电势：$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

点电荷的电势： $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$ $\left\{ \begin{array}{lll} q>0 & r\to\infty & U=0\downarrow \\ q<0 & r\to\infty & U=0\uparrow \end{array} \right.$

点电荷组的电势：在点电荷系 $q_1\ q_2\ \cdots q_k$的电场中



任意点P处的电势

$$U_p = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_k\right)\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_P^\infty \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_P^\infty \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \cdots + \int_P^\infty \vec{E}_k\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r_2} + \cdots + \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_o r_k}$$

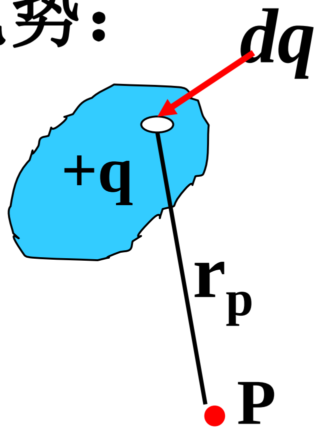
$$= U_1 + U_2 + \cdots + U_k$$

$$\boxed{U_P = \sum_i U_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_o r_i}} \longrightarrow \boxed{\text{电势叠加原理}}$$

2）连续分布带电体的电势：

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

取电荷元*dq*，其在任意点P处的电势：



$$dU_P = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

整个带电体在任意点P处的电势：

$$U_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

注：电势是标量，积分是标量迭加。

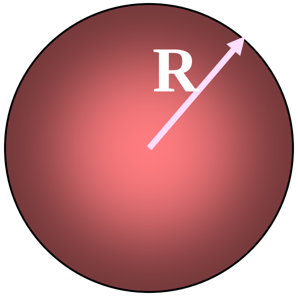
∴电势叠加比电场叠加要简便。

电势计算方法

- 定义法：$U=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$
- 叠加法：$U=\int\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$\boxed{U_p=\int_p^{U=0}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$ 用定义法求U

真空中一半径为R的球面，均匀带电Q，求带电球所在空间任意一点P的电势U=?



解：由高斯定理已求得电场分布：

$$\begin{cases} r<R & E=0 \\ r>R & \vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r} \end{cases}$$

设 r→∞，U=0

P点处在球外 r>R：

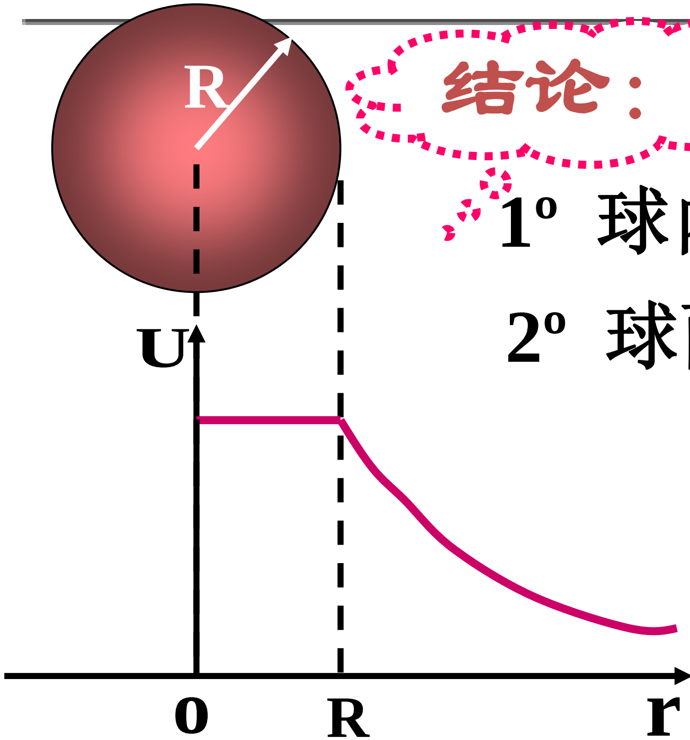
$$U_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_P^{r=\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l}=\int_P^{r=\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cdot dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_p}$$

P点处在球内 r<R

$$U_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}\ \cancel{\xrightarrow{E=0}}=0$$

$$U_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\cancelto{0}{\int_P^{r=R}\vec{E}\cdot d\vec{l}}+\int_{r=R}^{r=\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

带电球面的电势分布：
$$\begin{cases} r<R & U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ r>R & U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

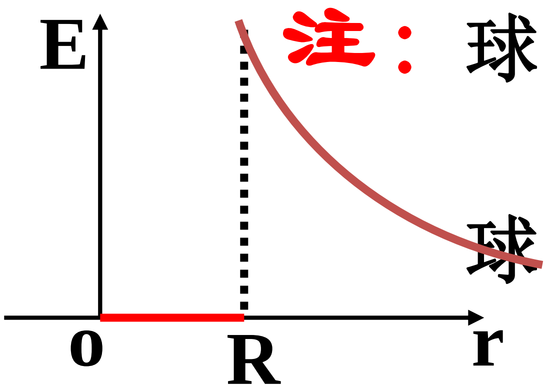


结论：

1° 球内电势处处相等，均为：$U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

2° 球面处U是连续。

与电场分布比较：
$$\begin{cases} r<R & E=0 \\ r>R & \vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r} \end{cases}$$



注：球内E=0，是球面上各点电荷在球内的场强迭加为0。

球内U≠0，是将单位正电荷从球内移到无穷远电场力作功 $A\neq 0$。

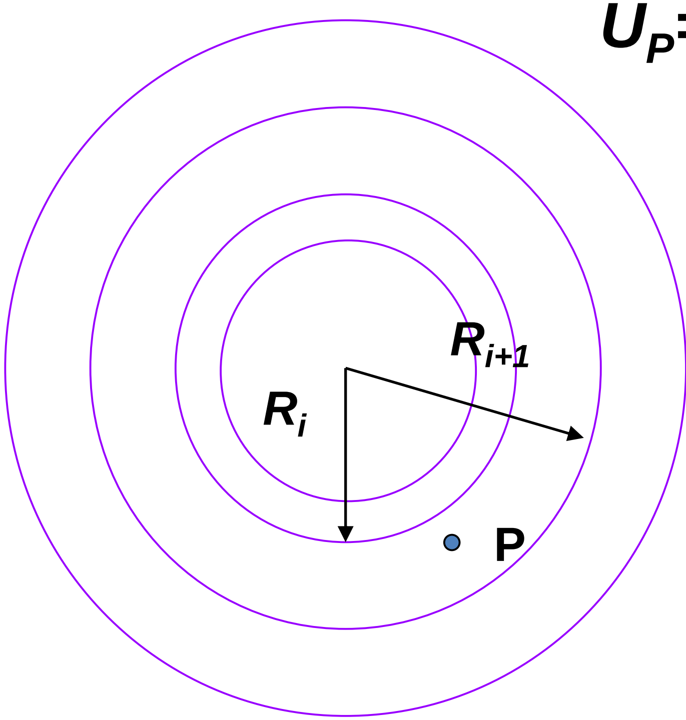
$q_1, q_2, \ldots q_n$

$R_1, R_2, \ldots R_n$

$$U_{R_i} < r < U_{R_{i+1}}$$

$U_P = ?$

$$\begin{cases} r < R & U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ r > R & U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$



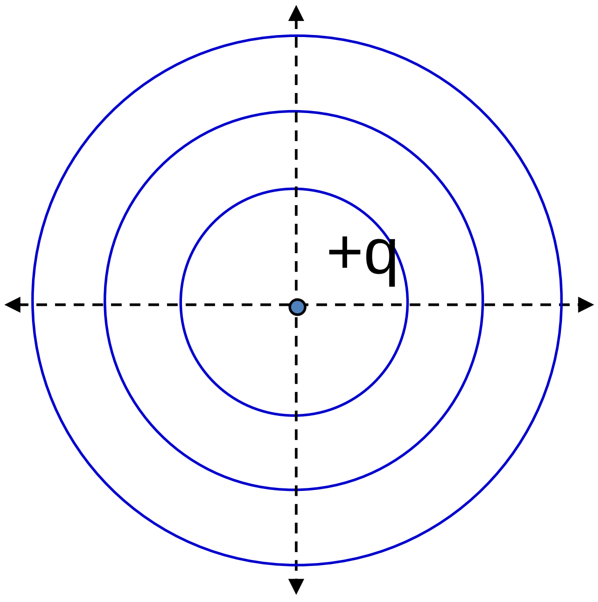
$$U_P = \frac{\sum_{j=1}^{i} q_j}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\sum_{j=i+1}^{n} q_j / R_j}{4\pi\varepsilon_0}$$

5、等势面、电势梯度

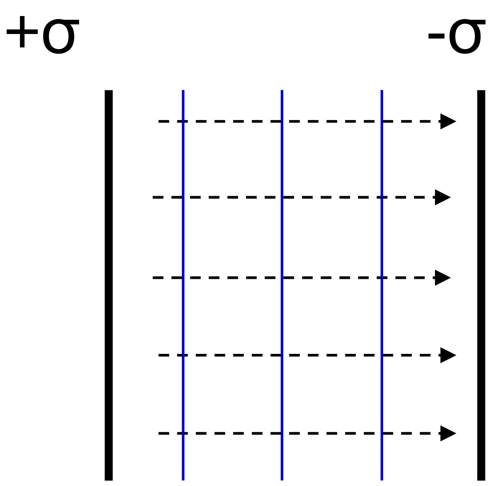
掌握电场强度和电势间的微分关系

5.1 等势面

电势相等的空间各点所组成的曲面。



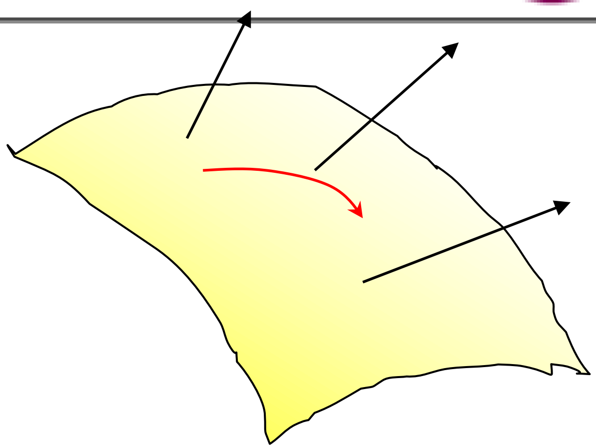
点电荷：同心球面



平行平板电容器：
等势面垂直于电场线

说明：

（1）沿等势面移动电荷，电场力不作功



$$A_{12}=q\left(U_1-U_2\right)=0$$

（2）等势面处处与电力线正交

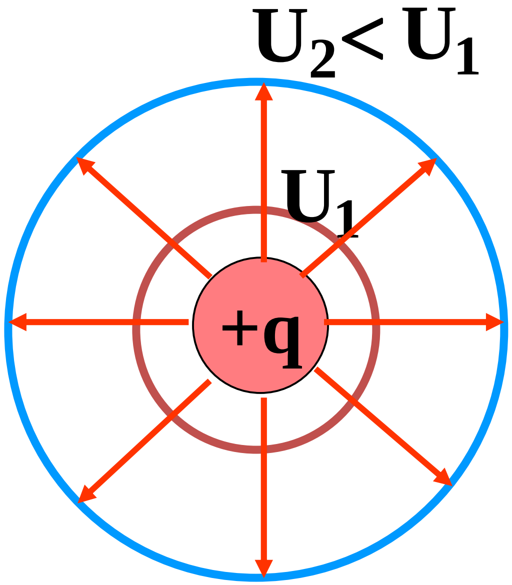
$$dA=q\vec{E}\cdot d\vec{l}=qEdl\cos\theta \quad , \quad q\neq 0 \quad E\neq 0 \quad d\,l\neq 0 \quad , \quad \vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{l}$$

（3）等势面稠密处 —— 电场强度大

（当规定相邻两等势面的电势差为定值） → 等势面越密电势变化越快 → 电场强度大

等势面与电场分布的关系：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$$



等势面与电场线处处正交，且电场线的方向指向电势降低的方向。

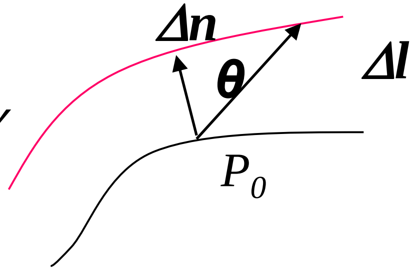
在同一等势面上移动电荷，电场力的功恒等于0。

梯度 （gradient）

标量场的梯度

设一个标量函数$f(x, y, z)$, 若函数 f 在点P_0可微, 则 f 在点P_0沿任意方向 l 的方向导数为:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\cos\gamma$$



其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是方向 l 的方向余弦。

沿方向导数最大的方向（Δn），数值上等于这个最大的方向导数（ $\frac{\partial f}{\partial n}$ ）---- 梯度

$$\nabla f = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

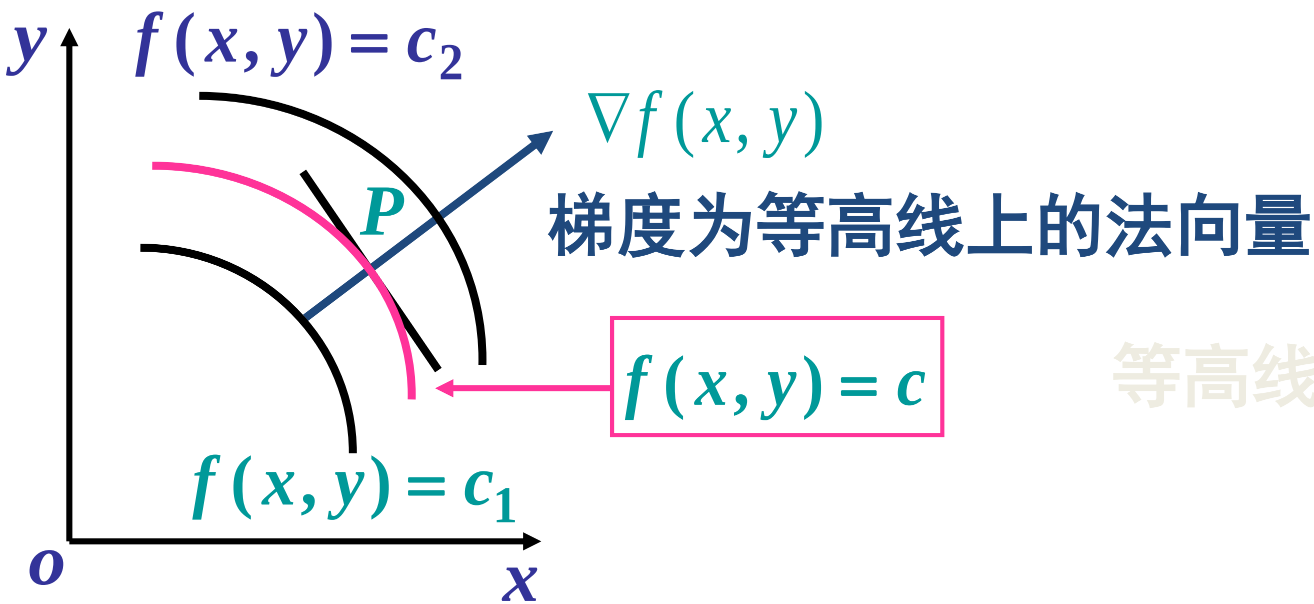
是f 在点(x,y,z)的梯度，记为$gradf$

式中 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}, \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}, \frac{\partial}{\partial z}\vec{k})$

劈形算符

梯度的物理意义

- 标量场的梯度是一个矢量, 是空间坐标点的函数;
- 梯度的大小为该点标量函数 f 的最大变化率，即该点最大方向导数;
- 梯度的方向为该点最大方向导数的方向, 即与等值线（面）相垂直的方向.



将会看到：

静电场中某点的电势（或称电位）函数***U*** 的梯度的负值，等于该点的电场强度***E*** **(**矢量函数**)**：

$$-\nabla U=\vec{E}$$

即电场强度***E***总与等势面（或称等位面）正交.

5.2 电势梯度

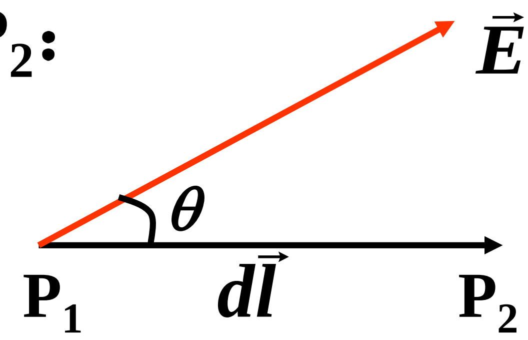
$$U_p = \int_p^{U=0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

梯度：物理量随空间的变化率。

E与U → 描述电场各点性质的物理量

E与U 的关系？

在电场中取相距 dl 的两点P_1、P_2：



$$U_{P_1} - U_{P_2} = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

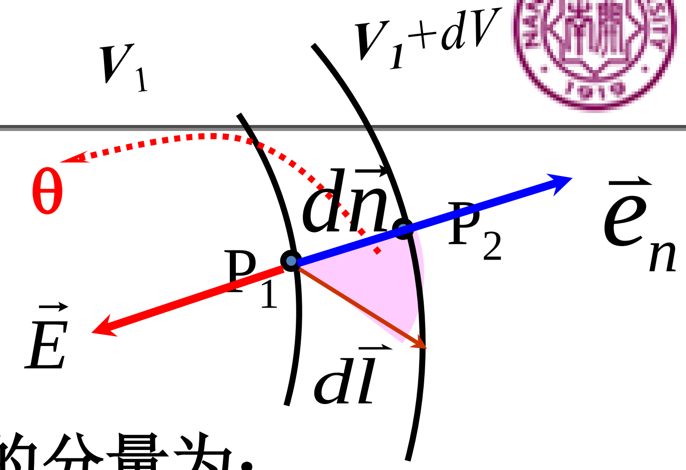
$$U_{P_1} - U_{P_2} = -dU$$

$$-dU = \vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl\cos\theta$$

即：$$E\cos\theta = -\frac{dU}{dl}$$

电势U沿$d\vec{l}$方向的空间变化率

$$\boxed{E\cos\theta = -\frac{dU}{dl}}$$



结论：

1º 静电场中任意给定点的E沿某方向的分量为：

$$E_l = -\frac{dU}{dl}$$ → 电势在此方向空间变化率的负值

2º 场中任一点沿不同方向，U的空间变化率一般不等。

当 θ= 0时, 即 $d\vec{n} \parallel \vec{E}$, $\frac{dU}{dn}$有最大值: $-\frac{dU}{dn} = E$

$\frac{dU}{dn}$ ——电势梯度

则: $$\boxed{\vec{E} = -\frac{dU}{dn}\vec{n} = -gradU}$$

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dn}\vec{n} = -\mathrm{grad}\,U$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\boxed{U_p = \int_p^{U=0} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

电场表示电势是积分关系

电势表示电场是微分关系

讨论：

1º $\vec{E} = -\mathrm{grad}U$ 即：E 取决于U 在该点的空间变化率而与该点U 值的大小无关。

2º E的又一单位：V/m = N/C

3º 求E的三种方法

点电荷电场叠加：$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$

用高斯定理求对称场：$\Phi_E = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{S内} q_i$

电势梯度法：$\vec{E} = -gradU$

例1 求：电荷线密度为λ 的无限长带电直线的电势分布。

解:

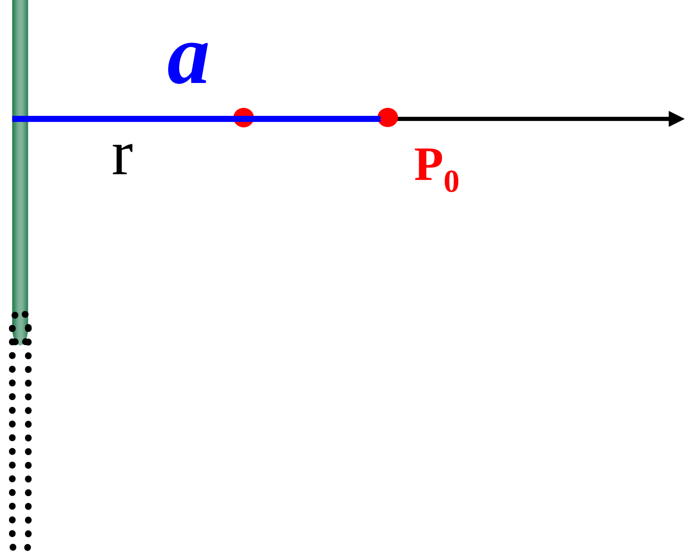
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\cancel{V=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

$$V=\int_r^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

分析: 选择某一定点为电势零点,

现在选距离线 a 米的P_0点为电势0点。



$$V=\int_r^{P_0}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$V=\int_r^{a}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot \mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$$

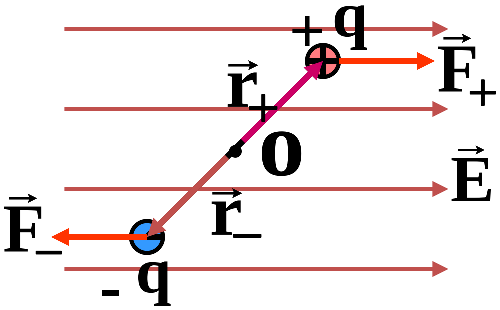
例2：求一均匀电场中电偶极子的受力。

已知：电场为E，偶极子的电荷为q。

解：受力 $\vec{F}_{+}=q\vec{E}$

$\vec{F}_{-}=-q\vec{E}$

$\left.\begin{matrix}\vec{F}_{+}=q\vec{E}\\ \vec{F}_{-}=-q\vec{E}\end{matrix}\right\}\ \vec{F}_{合}=\vec{F}_{+}+\vec{F}_{-}=0$

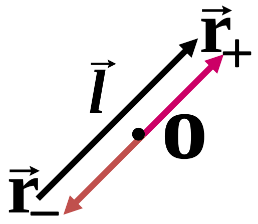


相对o点的力矩：

$$\vec{\tau}=\vec{r}_{+}\times\vec{F}_{+}+\vec{r}_{-}\times\vec{F}_{-}$$

$$=q\vec{r}_{+}\times\vec{E}-q\vec{r}_{-}\times\vec{E}$$

$$=q(\vec{r}_{+}-\vec{r}_{-})\times\vec{E}$$

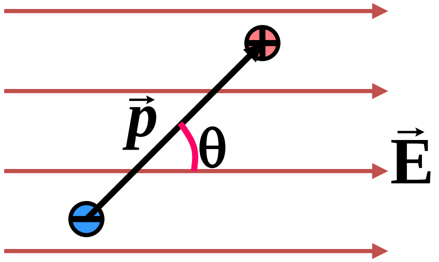


$$=q\vec{l}\times\vec{E}$$

即： $\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}$ $\left\{\begin{matrix}|\vec{\tau}|=pE\sin\theta\\ \text{方向是使电偶极子转向电场方向}\end{matrix}\right.$

例3. 求一电偶极子 $\vec{p}=q\vec{l}$ 在均匀电场$\vec{E}$中的电势能。

解：两电荷的电势能分别是：



$$W_+=qU_+ \qquad W_-=-qU_-$$

$$W=W_++W_- \;=q(U_+-U_-)$$

$$=q\int_+^-\vec{E}\cdot d\vec{l} \;=-q\int_-^+\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

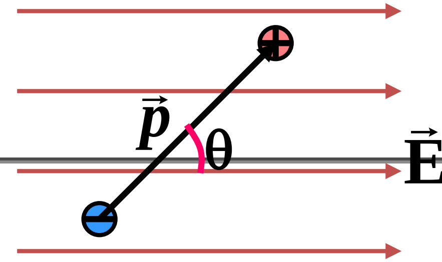
$$=-q\int_-^+E\cos\theta\, dl$$

$$=-qlE\cos\theta=-pE\cos\theta$$

即： $W=-\vec{p}\cdot\vec{E}$

$$\boxed{U_a-U_b=\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

即： $W = -\vec{p}\cdot\vec{E}$



$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$

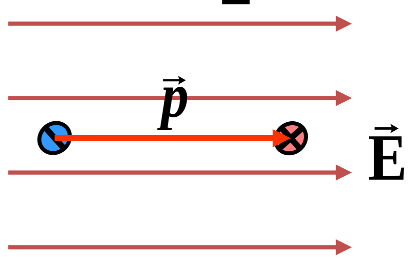
讨论

(1) $\theta=0 \quad \cos\theta=1 \quad W=-pE$ 能量最低 稳定平衡态

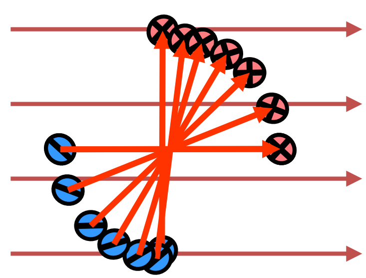
(2) $\theta=\dfrac{\pi}{2} \quad \cos\theta=0 \quad W=0$ $\vec{F}=0 \quad \vec{\tau}\neq 0$ 非平衡态

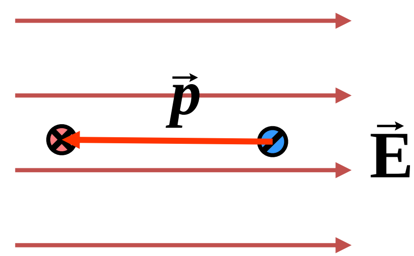
(3) $\theta=\pi \quad \cos\theta=-1 \quad W=pE$ 能量最高 非稳定平衡态

(4) $\theta=\dfrac{3}{2}\pi \quad \cos\theta=0 \quad W=0$ $\vec{F}=0 \quad \vec{\tau}\neq 0$ 非平衡态

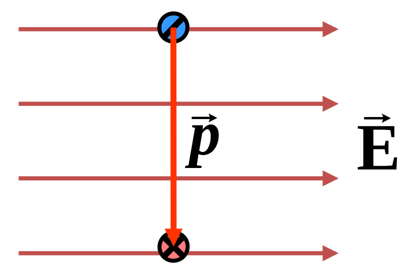


$\vec{F}=0 \quad \vec{\tau}=0$





$\vec{F}=0 \quad \vec{\tau}=0$



作业：

P353:　T8.30　T8.34　T8.37　T8.38