武汉水运工程学院学报

第16卷 第2期　Journal of Wuhan University of　Vol. 16 No. 2

1992年6月　Water Transportation Engineering　June 1992

两图同构的一个必要条件和一个充要条件

刘富贵

（基础课部）

摘要：本文给出了两个图同构的一个必要条件，从而提出了判定两图不同构的一个方法；文中还利用重构图中一个已有的结论，给出了两个图同构的一个充分必要条件，从而为判定两图同构提供了一个新的方法。

关键词：同构；重构；主子图；子图；相容组

中图法分类号：O157.9

定理 1　当 $P \geqslant 3$ 时，P 阶图 $G \cong H$ 的必要条件是它们的 $P-1$ 阶相容组是相同的。

证明：∵ $G \cong H$，∴存在由 $V(G)$ 到 $V(H)$ 上的一个一一对应 α，对任何 $u,v \in V(G)$，$uv \in X(G)$ 当且仅当 $\alpha(u)\alpha(v) \in X(H)$，（这里 $\cong$ 表示同构，$V(G)$ 表示 G 的顶点集，$X(G)$ 表示 G 的边集[1]）

分别记 G，H 的 $P-1$ 阶主子图组为

$$(G_1, G_2, \cdots, G_P) \qquad (\text{这里 } G_i = G - v_i, i = 1,2,\cdots,P)$$

$$(H_1, H_2, \cdots, H_P) \qquad (\text{这里 } H_i = H - \alpha(v_i), i = 1,2,\cdots,P)$$

假设 G 与 H 的 $P-1$ 阶相容组不同，那么 G，H 的 $P-1$ 阶主子图 G_i 与 $H_i(i=1,2,\cdots,P)$ 不能全同构，不失一般性，设 $G_1 \ncong H_1$，则对于由 $V(G_1)$ 到 $V(H_1)$ 上的任意一个一一对应，特别对于上述的一一对应 α，存在 $u', v' \in V(G_1) = V(G-v_1)$，$u'v' \in X(G_1) = X(G-v_1)$，但 $\alpha(u')\alpha(v') \notin X(H_1) = X(H-\alpha(v_1))$，从而有 $u', v' \in V(G)$，$u'v' \in X(G)$，但 $\alpha(u')\alpha(v') \notin X(H)$，这与 $G \cong H$ 相矛盾，故命题成立。[证毕]

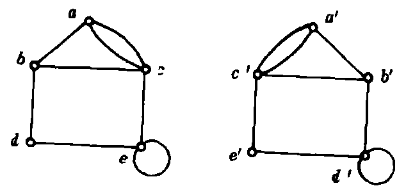
这个必要条件可给出一个推论。为此先引进一个定义，记 P 阶图 G 的 $P-1$ 阶主子图为 $G_1, G_2, \cdots, G_P$，那么 $G_i(i=1,2,\cdots,P)$ 的 $P-2$ 阶主子图可记为 $G_{i1}, G_{i2}, \cdots, G_{i(P-1)}$，$(i=1,2,\cdots,P)$，把图组 $(G_{11}, G_{12}, \cdots, G_{1(P-1)}; G_{21}, G_{22}, \cdots, G_{2(P-1)}; \cdots; G_{P1}, G_{P2}, \cdots, G_{P(P-1)})$ 称为是 P 阶图 G的 $P-2$ 阶子图组，递推下去，把下列 $P(P-1)(P-2)\cdots54$ 个 3 阶的图组 $(G_{\underbrace{11\cdots1}_{P-3\text{个}}}, G_{11\cdots12}, G_{11\cdots13}, G_{11\cdots14}; G_{11\cdots121}, G_{11\cdots122}\ G_{11\cdots123}, G_{11\cdots124}; \cdots; G_{P(P-1)\cdots51}, G_{P(P-1)\cdots52}, G_{P(P-1)\cdots53}, G_{P(P-1)\cdots54})$ 称为是 P 阶图 G 的 3 阶子图组，不计各 3 阶子图中顶点的标号，我们把这样的 3 阶非标定图组 $(\tilde{G}_{11\cdots1}, \tilde{G}_{11\cdots12}, \tilde{G}_{11\cdots13}, \tilde{G}_{11\cdots14}; \tilde{G}_{11\cdots121}, \tilde{G}_{11\cdots122}, \tilde{G}_{11\cdots123}, \tilde{G}_{11\cdots124}; \cdots; \tilde{G}_{P(P-1)\cdots51}, \tilde{G}_{P(P-1)\cdots52}, \tilde{G}_{P(P-1)\cdots53}, \tilde{G}_{P(P-1)\cdots54})$ 称为是 P 阶图 G 的 3 阶相容组。

收稿日期：1991-09-11

推论：当 $P\geqslant3$ 时，P 阶图 $G\cong H$ 的必要条件是它们的 3 阶相容组是相同的。

它的证明只要反复应用定理 1 即可证明。

因为 P 阶图 G 的 3 阶相容组中，不同的 3 阶图至多只有 $C_P^3=\frac{P(P-1)(P-2)}{2}$ 个，因此只要能判断两个 P 阶图 G，H 的 C_P^3 个 3 阶子图不能一一对应同构，就可断言 $G\ncong H$，而判断 3 阶图是否同构是很容易的。

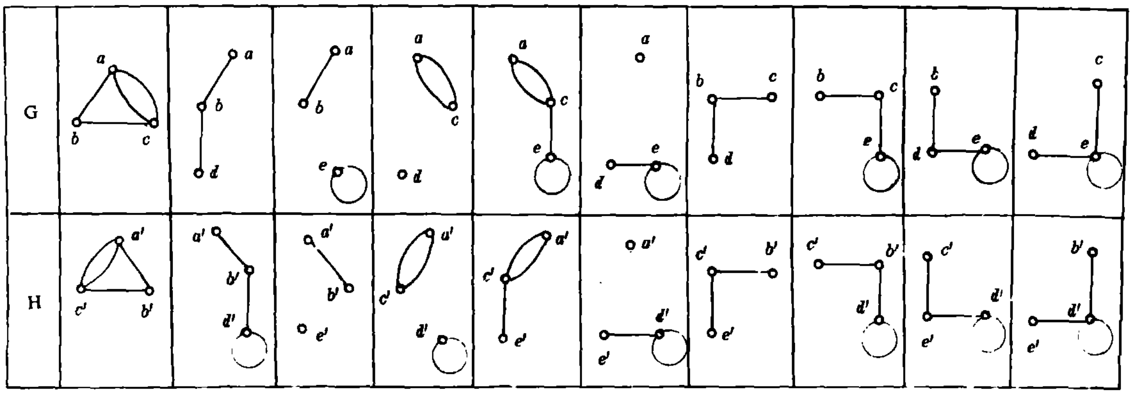


a) G　　b) H

图 1　不同构图

例：试证图 1 两图是不同构的。

表 1　图 G 与 H 的 3 阶子图



5 阶图 G 和 H[2] 中各自至多有 $C_5^3=10$ 个不同构的 3 阶子图(见表 1)，由表 1 可知第 2 至第 5 栏中的 3 阶子图都不能对应同构，从而 G 与 H 的 3 阶相容组不同，由推论即证明了 G 与 H 不同构。

利用下面重构图中一个已有的结论可以给出两个图同构的一个充分必要条件。

定理 2　设 P 阶图 G 的主子图组为 $(G_1,G_2,\cdots,G_P)$ 若 $G_i=G-v_i,i=2,\cdots,P$，而在 G_1 中各 $v_i,i=1,2,3,\cdots,P$ 均已标出，则 G 可由它的主子图组唯一地重构。[1]主子图顶点的标号可以是任意一个 $G_i,i=1,2,\cdots,P$.

定理 3　当 $P\geqslant3$ 时，两个 P 阶图 $G\cong H$ 的充分必要条件是它们的主子图 $G_1,G_2,\cdots,G_P$ 与 $H_1,H_2,\cdots,H_P$ 之间一一对应同构，且 G_1 中各 $v_i,i=1,2,3,\cdots,P$ 以及 H_1 中各 $u_i,i=1,2,3,\cdots,P$ 均已标出。

证明：必要性，假设 G 与 H 的主子图之间不能一一对应同构，那么它们的 $P-1$ 阶相容组不能相同，这与定理 1 相矛盾，故 G 与 H 的主子图之间必可一一对应同构，且 G_1 中各顶点按其在原图 G 中的标号 $v_i,i=2,3,\cdots,P$ 予以标出，H_1 中各顶点按其在原图 H 中的标号 $u_i,i=2,3,\cdots,P$ 予以标出。

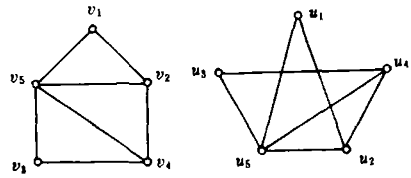
充分性，由定理 2 知，G 可由 $(G_1,G_2,\cdots,G_P)$ 唯一地重构，H 可由 $(H_1,H_2,\cdots,H_P)$ 唯一地重构。又因为 $G_1,G_2,\cdots,G_P$ 与 $H_1,H_2,\cdots,H_P$ 一一对应同构，所以 $G\cong H$. [证毕]

举一例说明定理 3 的应用。

例：试证图 2 的两个 5 阶图 G 与 H 是同构的。

图 2a)G[3]与图 2b)H 的 5 个 4 阶主子图分别列入表 2。

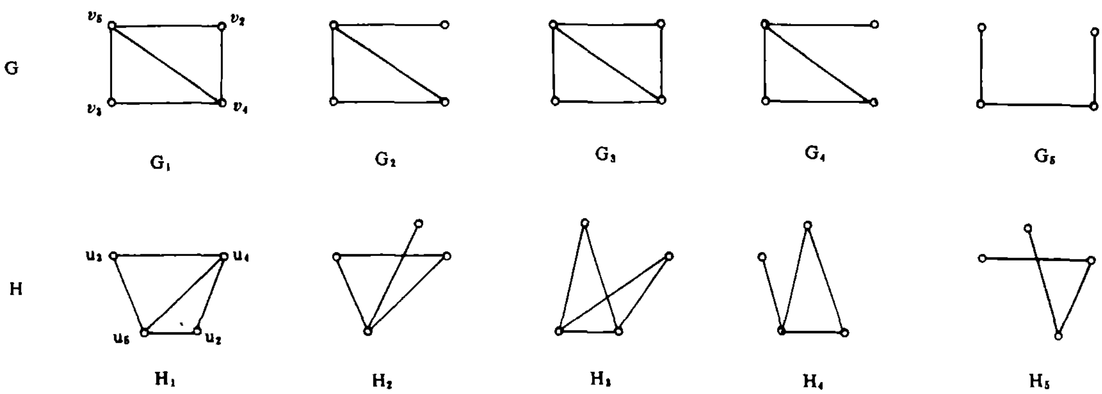
显然 G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 与 H_1,H_2,H_3,H_4,H_5，一一对应同构，且 G_1 与 H_1 中的顶点均已标号，故由定理 3 知 $G\cong H$.



a) G　　b) H

图 2　同构图

表 2　主子图表



事实上我们还可进一步把每个主子图 G_i 及 $H_i(i=1,2,3,4,5)$ 拆成 4 个 3 阶的子图，只要能判定每个主子图 G_i 的 4 个 3 阶子图与 H_i 的 4 个 3 阶子图一一对应同构，且 4 个 3 阶子图中有一个子图的顶点已标号，则多次应用定理 3 可证明图 $G\cong H$. 此方法也适用于判定两个高阶图是否同构。

参考文献

1　李慰萱. 图论. 湖南科技出版社，1980

2　左孝凌等. 离散数学. 上海科学技术文献出版社，1982

3　李修睦. 图论导引. 武汉：华中工学院出版社，1982

A Necessary Condition and a Necessary and Sufficient Condition for Isomorphism of Two Graphs

Liu Fugui

(*Department of Basic Courses*)

Abstract

This paper gives a necessary condition for isomorphism of two graphs, and puts forward a new method about judging non-isomorphism of them. Besides, it presents a necessary and sufficient condition for isomorphism of two graphs by using a conclusion known in the graph, and a new method for judging isomorphism of two graphs.

Key words: isomorphism; reconstruction; chief subgraph; subgraph; group of compatibility