概率论与数理统计

第二章　随机变量及其分布

练习:

已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2,0,2,\sqrt{5}$,相应的概率依次为 $\frac{1}{a},\frac{3}{2a},\frac{5}{4a},\frac{7}{8a}$,试求概率 $P\{|X|\le 2 | X\ge 0\}$.

[思路] 首先根据概率分布的性质求出常数 a 的值, 然后确定概率分布律的具体形式,最后再计算条件概率.

解 利用概率分布律的性质 $\sum_i p_i = 1$,

有 $$1=\sum_i p_i=\frac{1}{a}+\frac{3}{2a}+\frac{5}{4a}+\frac{7}{8a}=\frac{37}{8a},$$

故 $$a=\frac{37}{8},$$

因此 X 的分布律为

X	-2	0	2	$\sqrt{5}$
P	$\frac{8}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{10}{37}$	$\frac{7}{37}$

从而

$$P\{|X| \le 2 | X \ge 0\} = \frac{P\{|X| \le 2, X \ge 0\}}{P\{X \ge 0\}}$$

$$= \frac{P\{X = 0\} + P\{X = 2\}}{P\{X = 0\} + P\{X = 2\} + P\{X = \sqrt{5}\}}$$

$$= \frac{22}{29}.$$

§3 随机变量的分布函数

- 分布函数的概念
- 分布函数的性质
- 例题讲解

一、分布函数的概念

1.概念的引入

对于随机变量X,我们不仅要知道X取哪些值,还要知道X取这些值的概率;而且更重要的是想知道X在任意有限区间(a,b)内取值的概率.

例如　求随机变量X落在区间$(x_1,x_2]$内的概率.

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \boxed{P\{X \le x_2\}} - \boxed{P\{X \le x_1\}}$$

$$\downarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \downarrow$$

$$F(x_2) \qquad\qquad F(x_1)$$ 分布函数

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

2.分布函数的定义

设X是一个随机变量，x是任意实数，函数

$$F(x)=P\{X \le x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

称为X的分布函数．

说明

(1) 分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

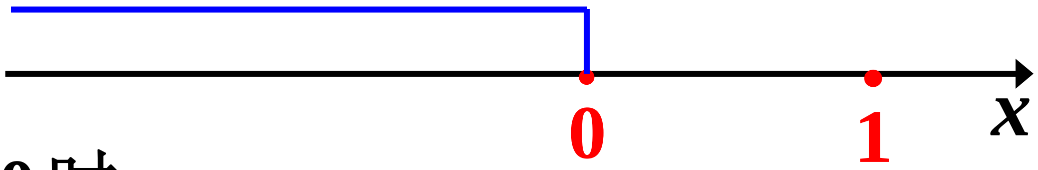
(2)分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数．

实例 抛掷均匀硬币，令

$$X=\begin{cases}1, & 出正面,\\ 0, & 出反面.\end{cases}$$

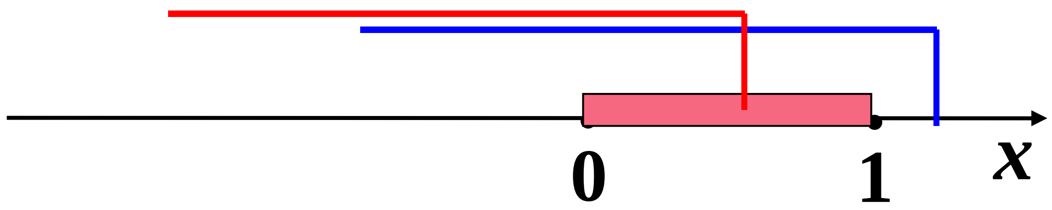
求随机变量 X 的分布函数.

解 $p\{X=1\}=p\{X=0\}=\dfrac{1}{2}$,



当 $x<0$ 时,

$$F(x)=P\{X\le x<0\}=0\ ;$$



当$0 \le x < 1$时，

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当$x \ge 1$时，

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

得 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

二、分布函数的性质

1° $F(x)$是一个不减函数．

事实上, 由定义知对任意实数 $x_1, x_2 \, (x_1 < x_2)$, 有

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \le x_2\} \ge 0 .$$

2° $0 \le F(x) \le 1$, 且

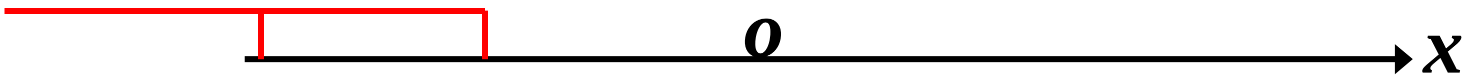
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 ,$$

$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 .$$

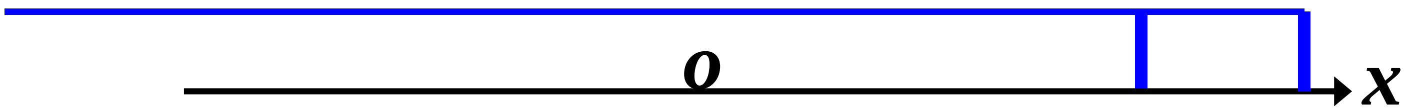
证明 $F(x)=P\{X\leq x\}$，当 x 越来越小时，

$P\{X\leq x\}$ 的值也越来越小，因而当 $x\to-\infty$ 时，有

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}P\{X\leq x\}=0;$$



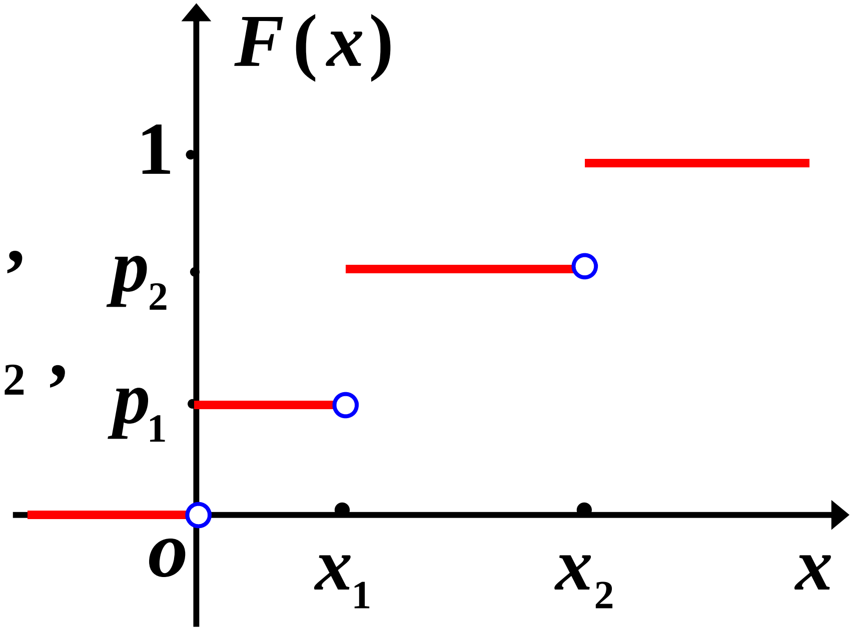
同样，当 x 增大时 $P\{X\leq x\}$ 的值也不会减小，而 $X\in(-\infty,x)$，当 $x\to\infty$ 时，X 必然落在 $(-\infty,\infty)$ 内.



所以 $$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}P\{X\leq x\}=1.$$

3° $F(x+0)=F(x)$，即$F(x)$是右连续的 .

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ p_1, & 0\le x<x_1,\\ p_2, & x_1\le x<x_2,\\ 1, & x\ge x_2.\end{cases}$$



注意

$$P\{X>a\}=1-F(a).$$

重要公式

$$(1)\ P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a),$$

$$(2)\ P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

证明　因为 $\{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}$,

$$\{X \le a\} \cap \{a < X \le b\} = \varnothing,$$

所以 $P\{X \le b\} = P\{X \le a\} + P\{a < X \le b\}$,

故　$P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$.

三、例题讲解

例1 将一枚硬币连掷三次，X 表示“三次中正面出现的次数”，求 X 的分布律及分布函数，并求下列概率值 $P\{1<X<3\}$，$P\{X\geq 5.5\}$，$P\{1<X\leq 3\}$.

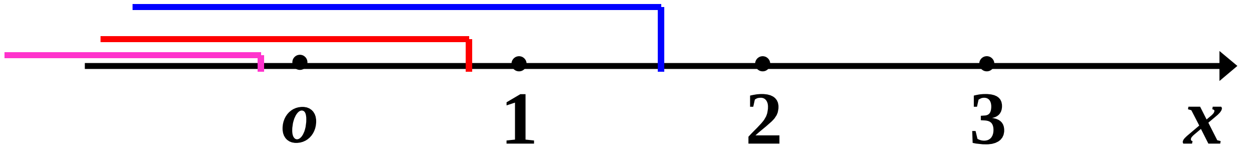
解 设 H – 正面，T – 反面， 则

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\},$$

因此分布律为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

求分布函数



当$x<0$时，

$$F(x)=P\{X\le x\}=0;$$

当$0\le x<1$时，

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}=\sum_{x_i\le 0}p_i=\frac{1}{8};$$

当$1\le x<2$时，

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}$$

$$=\sum_{x_i\le 1}p_i=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2};$$

当$2 \le x < 3$时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \sum_{x_i \le 2} p_i$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$$

当$x \ge 3$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$+ P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$

$$= \sum_{x_i \le 3} p_i = 1.$$

$$
\text{所以}\, F(x)=\begin{cases} 0\,, & x<0\,, \\ 1/8\,, & 0\le x<1\,, \\ 4/8, & 1\le x<2\,, \\ 7/8\,, & 2\le x<3\,, \\ 1\,, & x\ge 3\,. \end{cases}
$$

$$
P\{1<X<3\} = P\{X\le 3\}-P\{X\le 1\}-P\{X=3\}
$$

$$
=F(3)-F(1)-P\{X=3\}
$$

$$
=1-\frac{4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\,.
$$

$$P\{X \geq 5.5\} = 1 - P\{X < 5.5\}$$

$$= 1 - P\{X \leq 5.5\} + P\{X = 5.5\}$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0\,.$$

$$P\{1 < X \leq 3\} = P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\}$$

$$= F(3) - F(1)$$

$$= 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,.$$

例2　设随机变量 X的分布律为

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求X的分布函数，并求$P\{X \le \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\}$,

$P\{2 \le X \le 3\}$.

解　X仅在$-1, 2, 3$三点处的概率不为0，而$F(x)$的值是$X \le x$的累积概率值，由概率的有限可加性,

知它即为小于或等于x的那些x_k处的概率p_k之和，有

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ P\{X=-1\}, & -1\le x<2, \\ P\{X=-1\}+P\{x=2\}, & 2\le x<3, \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$

即

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \dfrac{1}{4}, & -1\le x<2, \\ \dfrac{3}{4}, & 2\le x<3, \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$

$F(x)$的图形是一条阶梯型曲 线.

曲线在 $x=-1,2,3$处有跳跃点，跳跃值分别为

$\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}.$

$$P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\} = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

$$P\left\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\right\} = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$P\{2 \le X \le 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

一般，设离散型随机变量 X的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k\ ,\quad k=1,2,\cdots.$$

由概率的可列可加性得 X的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_k\},$$

即

$$F(x)=\sum_{x_k\le x}p_k\ ,$$

这里和式是对所有满足 $x_k\le x$的k求和的 .分布函数$F(x)$在$x=x_k\ (k=1,2,\cdots)$处有跳跃 ,其跳跃值为 $p_k=P\{X=x_k\}$.

例3　一个靶子是半径为2m的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘面积成正比，并设射击都能中靶，以X表示弹着点与圆心的距离．试求随机变量 X的分布函数．

解　若 $x < 0$，则$\{X \le x\}$是不可能事件，

于是 $$F(x)=P\{X\le x\}=0;$$

若 $0\le x\le 2$，由题意，$P\{0\le X\le x\}=kx^2$，k是常数. 为了确定 k的值，取 $x=2$，有

$$P\{0\le X\le 2\}=2^2k,$$

但已知$P\{0\le X\le 2\}=1$，故得$k=1/4$，即

$$P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}$$

于是

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}.$$

若 $x \geq 2$，由题意 $\{X \leq x\}$ 是必然事件，于是

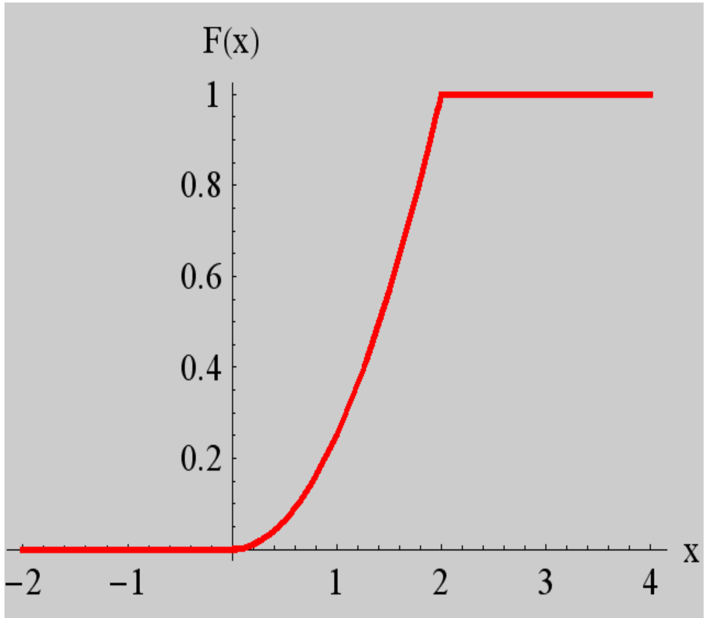
$$F(x)=P\{X \leq x\}=1.$$

综上所述，即得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

它的图形是一条连续曲线，如下图所示.

若记 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2}, & 0<t<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$



则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$F(x)$ 恰是非负函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, x]$ 上的积分，

此时称 X 为连续型随机变量.

注意 两类随机变量的分布函数图形的特点不一样.

请同学们思考

不同的随机变量,它们的分布函数一定也不相同吗?

答　不一定.　例如抛均匀硬币,令

$$X_1=\begin{cases}1, & 出正面;\\ -1, & 出反面.\end{cases}\quad X_2=\begin{cases}-1, & 出正面;\\ 1, & 出反面.\end{cases}$$

X_1 与 X_2 在样本空间上的对应法则不同,是两个不同的随机变量,但它们却有相同的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 1/2, & -1\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

离散型随机变量分布律与分布函数的关系

分布律 $p_k = P\{X = x_k\}$

$\Updownarrow$

分布函数 $F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_k$

小结

1.离散型随机变量的分布函数

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}p_k\ .$$

2.分布律与分布函数的关系

作业：课后习题 12 、15、17、18

练习:

设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a, & -1\le x<1,\\ \frac{2}{3}-a, & 1\le x<2,\\ a+b, & x\ge 2.\end{cases}$$

且 $P\{X=2\}=\frac{1}{2}$, 试确定常数 a, b,并求 X 的分布律 .

[思路] 首先利用分布函数的性质求出常数 a, b, 再用已确定的分布函数来求分布律.

解 利用分布函数 $F(x)$ 的性质:

$$P\{X = x_i\} = F(x_i) - F(x_i - 0),$$

$$F(+\infty) = 1,$$

知 $\dfrac{1}{2} = P\{X = 2\}$

$$= (a+b) - (\frac{2}{3} - a)$$ 注意：F(2)与P{X=2}的区别

$$= 2a + b - \frac{2}{3},$$

且 $a + b = 1.$

由此解得 $a = \dfrac{1}{6},\ b = \dfrac{5}{6}.$

因此有 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1, \\ \dfrac{1}{6}, & -1\le x<1, \\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2, \\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

从而 X 的分布律为

X	-1	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$