南開大學

稳恒磁场

有磁介质时的磁场

(Magnetic Field in Magnetic Medium)

目 录 （9.6）

Δ 9.6.1磁介质对磁场的影响

9.6.2 原子、分子的磁矩

9.6.3 磁介质的磁化

9.6.4 有磁介质时磁场的规律

9.6.5 铁磁质

上部分讨论了电流和运动电荷在真空中产生的磁场本部分将讨论电流和运动电荷在实物（称之为磁介质）中产生的磁场。

主要目的：

* 以实物物质的电结构为基础简单说明磁介质的三种类型：顺磁质、抗磁质、铁磁质。

* 类似讨论电介质的方法研究磁介质对磁场的影响。

介绍描述磁介质中磁场的物理量磁场强度 $\vec{H}$ 、磁化强度 $\vec{M}$ 以及它们所遵守的普遍规律。

$\oiint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_i I_i$

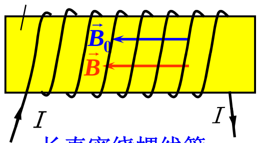
Δ 9.6.1 磁介质对磁场的影响

磁介质（magnetic medium）是能够影响磁场分布的物质。

传导电流 $I_0 \to \vec{B}_0$ 介质磁化 $\to \vec{B}'$，

总磁感强度 $\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$

均匀各向同性磁介质



长直密绕螺线管

均匀各向同性介质充满磁场所在空间时，有： $\boxed{\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0}$

μ_r —相对磁导率（relative permeability）

$$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$$

磁介质中的总磁感强度　真空中的磁感强度　介质磁化后的附加磁感强度

顺磁质 $\vec{B}>\vec{B}_0$（铝、氧、锰等）

抗磁质 $\vec{B}<\vec{B}_0$（铜、铋、氢等）

（以上为弱磁质）

铁磁质 $\vec{B}>>\vec{B}_0$（铁、钴、镍等）

磁介质的分类：

▲弱磁质，$\mu_r \approx 1$

- 顺磁质（paramagnetic substance）$\mu_r > 1$

  如：Mn，Al，O_2，N_2…

- 抗磁质（diamagnetic substance） $\mu_r < 1$

  如：Cu，Ag，Cl_2，H_2…

▲铁磁质（ferromagnetic substance）$\mu_r >> 1$

如：Fe，Co，Ni…

某些磁介质的相对磁导率见书 P 413 表9.4

9.6.2 原子、分子的磁矩

电子的磁性

电子自旋的概念是在1925年，由两位荷兰Leiden大学的研究生(Gerage Uhlenbeck和Samuel Goudsmit)所提出的。

电子以下列三种方式产生磁性：

❖1、运动电荷的磁性；

❖2、轨道运动产生磁性；

❖3、自旋产生磁性。

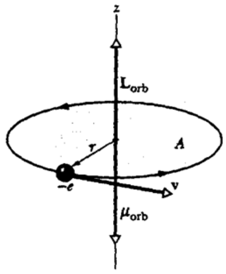
轨道磁性

•如图所示

•电子以速度v

•绕半径为r的圆形轨道运行。

•产生的轨道磁矩



自旋磁矩

•由于自旋角动量，电子内就具有一自旋磁矩(Spin magnetic moment) μ_s。

•根据量子理论及实验测量的结果，自旋角动量的大小为 $s=h/2\pi=5.2729\times10^{-35}$J•S

其中h为普朗克常数。

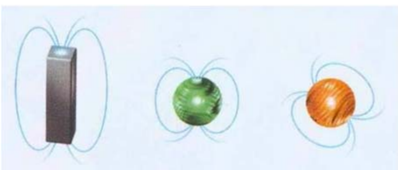
•电子象一个有自旋的负电荷，因而产生内禀自旋磁矩。

自旋的基本性质

•除了质量与电荷，电子尚有内禀的角动量，称为自旋。其行为恰似一旋转的小球。

自旋的基本性质(二)

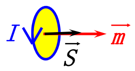
•自旋会产生磁场，就像一条与自旋轴平行的小磁铁所产生的磁场。



自旋的基本性质(三)

以矢量表示自旋。当小球自西向东旋转，矢量就指向上；当自旋方向相反时，就指向下。

一 . 电子的磁矩



电子的轨道运动电流 $I = e \cdot \dfrac{v}{2\pi r}$

轨道磁矩 $m = \dfrac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \dfrac{evr}{2}$

电子轨道运动的角动量 $L = m_e vr$

电子轨道磁矩与轨道角动量的关系：$\vec{m} = -\dfrac{e}{2m_e}\vec{L}$

电子自旋磁矩和自旋角动量 $\vec{S}$ 的关系：$\vec{m} = -\dfrac{e}{m_e}\vec{S}$

二 . 质子和中子的磁矩

质子轨道磁矩 $\vec{m} = \dfrac{e}{2m_p}\vec{L}$，中子无轨道磁矩。

质子和中子都有自旋磁矩：$\vec{m} = g\dfrac{e}{2m_p}\vec{S}$

g 称为 g 因子，质子 g = 5.5857，中子 $g = -3.8261$。

三 . 原子核的磁矩

整个原子核的自旋磁矩 $\vec{m} = g\dfrac{e}{2m_p}\vec{I}$

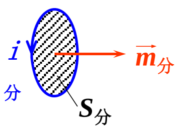
$\vec{I}$ 为核的自旋角动量，因子 g 由原子核决定。

由上可知，核磁矩远小于电子磁矩。

四 . 分子磁矩和分子电流

$$\left.\begin{array}{l}\text{电子轨道磁矩}\\ \text{电子自旋磁矩}\\ \text{原子核的磁矩}\end{array}\right\}\text{分子磁矩 } \vec{m}_{\text{分}} \xrightarrow{\text{等效}} \text{分子电流 } i_{\text{分}}$$

(molecular magnetic moment)　　(molecular current)



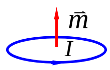
9.6.3 磁介质的磁化

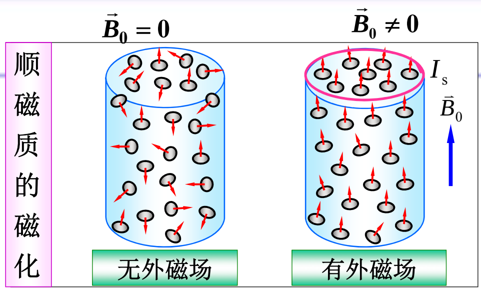
磁化 (magnetization)：在磁场作用下，介质出现磁性或磁性发生变化的现象。

一. 顺磁质的磁化

顺磁质分子有固有的分子磁矩（主要是电子轨道和自旋磁矩的贡献），$m_{\text{分}} \sim 10^{-23}\,\mathrm{A \cdot m^2}$。

分子圆电流和磁矩





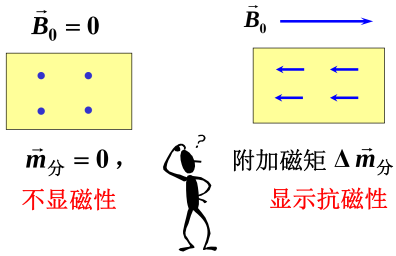
顺磁质内磁场 $B = B_0 + B'$

热运动使 $\vec{m}_{\text{分}}$ 完全混乱，不显磁性。

$\vec{B}_0$ 使 $\vec{m}_{\text{分}}$ 排列趋于 $\vec{B}_0$ 方向，显现磁性。

二 . 抗磁质的磁化

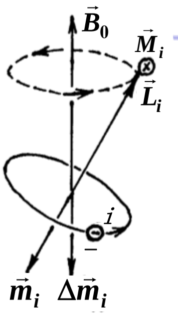
抗磁质的分子固有磁矩为 0。



$\vec{m}_{\text{分}} = 0$，不显磁性

附加磁矩 $\Delta\vec{m}_{\text{分}} \parallel \vec{B}_0$ 显示抗磁性

为什么 $\Delta\vec{m}_{\text{分}}$ 反平行于 $\vec{B}_0$ 呢？



以电子的轨道运动为例，

第 i 个电子受的磁力矩

$$\vec{M}_i = \vec{m}_i \times \vec{B}_0$$

电子轨道角动量增量

$$\mathrm{d}\vec{L}_i = \vec{M}_i\,\mathrm{d}t \perp \vec{L}_i$$

∴ 电子旋进，它引起的感应磁矩 $\Delta\vec{m}_i$ 反平行于 $\vec{B}_0$ 。

这种效应在顺磁质中也有，不过与分子固有磁矩的转向效应相比弱得多。

三 . 磁化强度与磁化电流

（magnetization and magnetization current）

1. 磁化强度： $\vec{M} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\sum \vec{m}_{分}}{\Delta V}$

单位体积内分子磁矩的矢量和

它带来附加磁场 $\vec{B}'$ 的贡献。

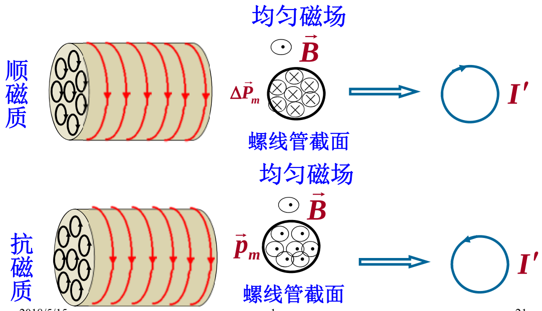
对顺磁质和抗磁质，实验表明： $\vec{M} \propto \vec{B}$

对铁磁质，实验表明： $\vec{M}$ 和 $\vec{B}$ 呈非线性关系，

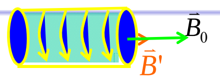
而且是非单值对应关系

2. 磁化电流：由于介质磁化而出现的一些等效的附加电流分布。

例如：长直螺线管内部充满均匀的各向同性介质，将被均匀磁化。

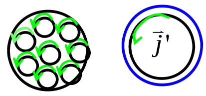


在均匀外磁场中，各向同性均匀的顺磁质被磁化，未被抵消的分子电流沿着柱面流动，称为磁化面电流。



- 磁化面电流

磁化面电流线密度 $\vec{j}'$ = 在垂直于电流流动方向上单位长度的分子面电流。

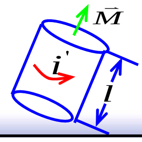


磁化面电流也称为束缚面电流或分子电流。

若在 l 长介质表面束缚分子面电流为 i' 则其线密度为

$$\vec{j}' = \vec{i}'/l$$

设介质的截面积 S，则有：



$$|\vec{M}| = \frac{i'S}{\Delta V} = \frac{j'lS}{\Delta V} = j'$$

磁化电流与传导电流的区别：

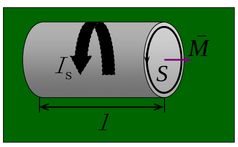
磁化电流是分子电流规则排列的宏观反映，并不伴随电荷的定向运动，不产生热效应。而传导电流是由大量电荷做定向运动而形成的。

磁化电流面密度：介质表面单位长度上的磁化电流

$$j_s = \frac{I_s}{l}$$

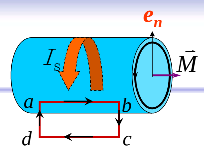
磁化强度矢量：

$$|\vec{M}| = \frac{\left|\sum \vec{m}\right|}{\Delta V} = \frac{j_s lS}{lS} = j_s$$



$$\left|\vec{M}\right| = j_s$$

$$\boxed{\vec{j}_S' = \vec{M} \times \vec{e}_n}$$



结论：磁化强度在数值上等于磁化电流面密度，它们之间的关系由右手螺旋法则确定。

$$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a$$

$$\int_b^c \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_d^a \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \int_c^d \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = M\,\overline{ab} = j_s\,\overline{ab}$$

$$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = \sum_L i'$$

磁化强度　束缚面电流

物理意义

磁化强度沿任一回路的环流，等于穿过此回路的束缚电流 i'的代数和。 i'与L环绕方向成右旋者为正，反之为负。

与电介质中对比的公式

$$\oint\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\sum_S q'$$

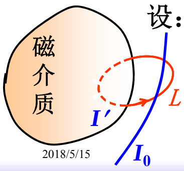
电极化强度　束缚电荷

9.6.4 有磁介质时磁场的规律

真空中的规律
$$\begin{cases}\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\sum I_{内} & (1)\\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 & (2)\end{cases}$$

考虑到磁化电流，（1）式则需要修改。

一. $\vec{H}$ 的环路定理



设：I_0— 传导电流，I' — 磁化电流

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\sum(I_{0内}+I'_{内})$$
$$= \mu_0\sum I_{0内} + \mu_0\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right)\cdot d\vec{l} = \sum I_{0内}$$

令 $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}}$ —— 磁场强度（magnetic field intensity）

得：$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_{0内}}$ —— $\vec{H}$ 的环路定理

▲ H 的单位：A/m （ SI ）；

奥斯特（Oersted） Oe（CGSM）， $1\,\text{Oe} = \frac{10^3}{4\pi}\,\text{A/m}$ 。

▲ 真空： $\vec{M}=0$ ， $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

▲各向同性磁介质：

$\vec{M}\propto\vec{H}$ → $\boxed{\vec{M} = (\mu_r-1)\vec{H} = \chi_m\vec{H}}$

χ_m — 磁化率 （magnetic susceptibility）

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m\vec{H}$$

→ $\boxed{\vec{B} = \mu_0(\chi_m+1)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}}$

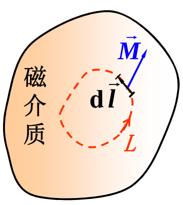
令 $\boxed{\mu = \mu_0\mu_r}$ — 磁导率（permeability）

则有 $\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$ 真空：$\mu = \mu_0$

二. 环路定理的应用举例

［例1］ 证明在各向同性均匀磁介质内，无传导电流处，也无磁化电流。

证：介质中闭合回路L所套联的分子电流为：



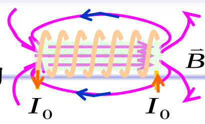
$$I' = \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = \oint_L \chi_m\vec{H}\cdot d\vec{l}$$
$$= \chi_m\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \chi_m\cdot\sum I_0$$

若 $\sum I_0 = 0$，则 $I' = 0$

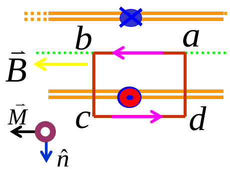
L可任取，且可无限缩小，

故 I_0 = 0 处，I' = 0 。

例2：长直螺旋管内充满均匀磁介质(μ_r)，设励磁电流I_0，单位长度上的匝数为 n 。求管内的磁感应强度和磁介质表面的面束缚电流密度。



解：因管外磁场为零，取如图所示安培回路



$$\because \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I$$

$$\therefore lH = nlI_0 \qquad \therefore H = nI_0$$

$$\therefore B = \mu_0\mu_r H = \mu_0\mu_r nI_0$$

$$\because \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad \therefore M = (\mu_r-1)nI_0$$

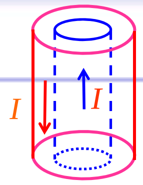
顺磁质 $\mu_r > 1, j' > 0$

$$\because \vec{j}' = \vec{M}\times\hat{n} \qquad \therefore j' = (\mu_r-1)nI_0$$

抗磁质 $\mu_r < 1, j' < 0$

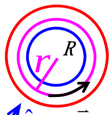
束缚电流与传导电流反向

例3：长直单芯电缆的芯是一根半径为R 的金属导体，它与外壁之间充满均匀磁介质，电流从芯流过再沿外壁流回。求介质中磁场分布及与导体相邻的介质表面的束缚电流。



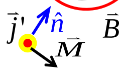
$\because \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I \qquad \therefore H = \dfrac{I}{2\pi r}$

$\therefore B = \mu_0\mu_r H = \mu_0\mu_r \dfrac{I}{2\pi r}$ 方向沿圆的切线方向



$\because \vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad \because \vec{j}' = \vec{M}\times\hat{n}$

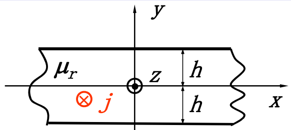
$\therefore j' = (\mu_r - 1)\dfrac{I}{2\pi R}$ 方向与轴平行



磁介质内表面的总束缚电流 $\therefore I' = 2\pi R j' = (\mu_r - 1)I$

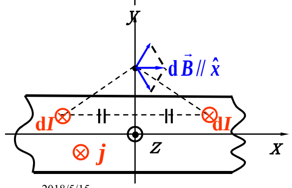
[例4] 如图示，已知均匀载流无限大厚平板电流密度为 j（沿z），导体相对磁导率为μ_r，

求：$\vec{B}$ 和 $\vec{j}'_S$

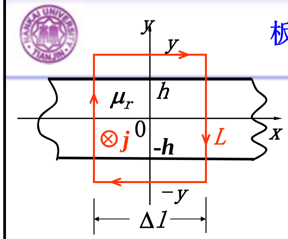


解：分析 $\vec{B}$ 的对称性，

有 $\vec{B} = \vec{B}(y)$



且 $\begin{cases} y>0: & \vec{B} = B(y)\hat{x} \\ y<0: & \vec{B} = -B(y)\hat{x} \end{cases}$



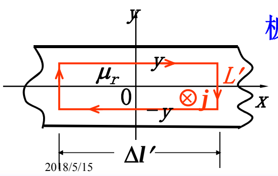
板外：对图示矩形回路 L，

有 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = j\cdot(\Delta l\cdot 2h)$

$2H_{外}\cdot\Delta l = 2jh\cdot\Delta l$

$H_{外} = jh \rightarrow \vec{H}_{外} = jh\dfrac{y}{|y|}\hat{x}$

$\vec{B}_{外} = \mu_0\vec{H}_{外} = \mu_0 jh\dfrac{y}{|y|}\hat{x}$

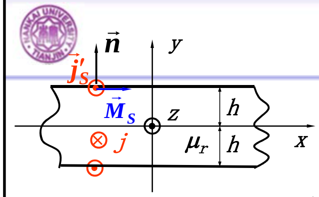


板内：对图示矩形回路 L'，

有 $\oint_{L'} \vec{H}_{内}\cdot d\vec{l} = j\cdot(\Delta l'\cdot 2y)$

$2H_{内}\cdot\Delta l' = 2jy\cdot\Delta l'$

$\vec{B}_{内} = \mu_0\mu_r\vec{H}_{内} = \mu_0\mu_r jy\hat{x}$



求磁化面电流密度

$\vec{j}'_S = \vec{M}_S \times \vec{e}_n$

$\vec{M}_S = \chi_m \vec{H}_{内S}$

$= (\mu_r - 1)\vec{H}_{内S}$

上表面： $\vec{e}_n = \hat{y}$，$\vec{M}_S = (\mu_r - 1)(jh\hat{x})$

$\vec{j}'_S = (\mu_r - 1)jh\hat{z} = -(\mu_r - 1)h\cdot\vec{j}$

下表面： $\vec{e}_n = -\hat{y}$，$\vec{M}_S = (\mu_r - 1)(-jh\hat{x})$

$\vec{j}'_S = -(\mu_r - 1)h\cdot\vec{j}$（同上表面）

磁介质中的安培环路定理	电介质中的高斯定理
$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\sum_L I + \mu_0\sum_L i'$	$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_S (q_0 + q')$
$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\sum_L I + \mu_0\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}$	$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q_0 - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$
$\oint_L (\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M})\cdot d\vec{l} = \sum_L I$	$\oiint_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$
$\vec{H} \overset{def}{\equiv} \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$	$\vec{D} \overset{def}{\equiv} \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I$	$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_e dV$

• $\vec{B},\vec{H},\vec{M}$ 之间的关系		• $\vec{P}$、$\vec{D}$、$\vec{E}$ 之间的关系：
$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$	实验规律 量纲	$\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$
$\vec{H} \overset{def}{\equiv} \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$		$\vec{D} \overset{def}{\equiv} \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$		$\vec{D} = (1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}$
$\mu_r = (1+\chi_m)$		$\varepsilon_r = (1+\chi_e)$
$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$	电磁场的 本构方程	$\vec{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$
μ_r 称为相对磁导率 $\mu = \mu_0\mu_r$ 磁导率		ε_r 称为相对电容率或相对介电常量。

描述真空中电磁场和介质中电磁场的关系式