

# 第六章 欧几里德空间

- ◆ 内积的定义与性质
- ◆ 向量的模、单位向量
- ◆ 向量的夹角
- ◆ 正交组、标准正交组
- ◆ 正交基、标准正交基(底)
- ◆ 施密特正交化方法
- ◆ 正交矩阵、正交变换

## § 6.1 欧几里德空间



# § 6.1.1 向量的标准内积

## 一、内积的定义及性质

定义1: 设 $V$ 是实线性空间(数域为 $R$ ), 若对于 $V$ 内任意一对向量 $\alpha, \beta$ 按照某一法则在 $R$ 中有一个唯一确定的实数 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 与之对应, 且满足条件:

$$(I) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle ;$$

$$(II) \quad \langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle ; \quad (\gamma \in V)$$

$$(III) \quad \langle k\alpha, \beta \rangle = k \langle \alpha, \beta \rangle ; \quad (k \in R)$$

$$(IV) \quad \langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0, \text{ 当且仅当 } \alpha = 0 \text{ 时 } \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 ;$$

则实数  $\langle \alpha, \beta \rangle$  称为向量  $\alpha, \beta$  的标准内积, 简称为内积. 定义了内积的实线性空间称为欧几里得空间, 简称欧氏空间.

注: 有的书上对内积用  $(\alpha, \beta)$  表示

## 注意：

定义1是个抽象定义，不同的实线性空间中的内积可以有完全不同的内容与形式.

同一个实线性空间中也可以定义不同的内积，而构成不同的欧氏空间.



**例1: 在 $R^n$ 中, 对于任意向量  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,**

**$\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  定义**

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (1)$$

**显然设  $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,  $k \in R$  则**

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \langle \alpha, \beta \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n \\ &= \langle \beta, \alpha \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \langle \alpha + \beta, \gamma \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \dots + (x_n + y_n)z_n \\ &= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n) \\ &= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle \end{aligned}$$

$$\text{(III)} \quad \langle k\alpha, \beta \rangle = kx_1 y_1 + kx_2 y_2 + \dots + kx_n y_n = k \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{(IV)} \quad \langle \alpha, \alpha \rangle &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0, \quad \text{当且仅当 } \alpha = 0 \\ &\text{时 } \langle \alpha, \alpha \rangle = 0; \end{aligned}$$

显然，它**适合**内积定义中的条件 (I)-(IV)，这样  $R^n$  中按(1)得到一个内积，于是  $R^n$  关于这个内积成为一个欧几里得空间。

例2：在  $R^n$  中，对于任意向量  $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ,

$$\beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$\text{定义 } \langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \cdots + nx_n y_n \quad (2)$$

容易验证它也适合内积定义中的条件(I)-(IV)，这样  $R^n$  中按(2)也得到一个内积，这时  $R^n$  关于这个内积也构成一个欧氏空间。

**注意：**由于内积的定义不同，这是两个不同的欧氏空间。以后凡说到欧氏空间  $R^n$  均指例1所述的欧氏空间。



例3：在连续函数空间  $C[a,b]$  中，对任意的

$f(x), g(x) \in C[a,b]$  定义

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

由定积分的性质可知：设

$$f(x), g(x), h(x) \in C[a,b], k \in R$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \langle g(x), f(x) \rangle &= \int_a^b g(x)f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)g(x)dx = \langle f(x), g(x) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \langle g(x) + f(x), h(x) \rangle &= \int_a^b (g(x) + f(x))h(x)dx \\ &= \int_a^b g(x)h(x)dx + \int_a^b f(x)h(x)dx = \langle g(x), h(x) \rangle + \langle f(x), h(x) \rangle \end{aligned}$$

$$(3) \quad \langle kf(x), g(x) \rangle = \int_a^b kf(x)g(x)dx = k \int_a^b f(x)g(x)dx = k \langle f(x), g(x) \rangle$$

(4) 当  $f(x)$  不是恒等于0时

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \int_a^b f(x) f(x) dx = \int_a^b (f(x))^2 dx > 0$$

因此，该定积分满足内积定义的4个条件，因而它也成为  $C[a, b]$  中的一个内积. 于是，关于这个内积  $C[a, b]$  也成为是一个欧氏空间.

## 欧几里得空间的一些基本性质：

$$(I) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$$

定义1的条件(I)表明内积是**对称**的，故有

$$\langle \alpha, k\beta \rangle = \langle k\beta, \alpha \rangle = k \langle \beta, \alpha \rangle = k \langle \alpha, \beta \rangle = \langle k\alpha, \beta \rangle$$

$$\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \beta + \gamma, \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle + \langle \gamma, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$$



$$\text{又 } \langle \mathbf{0}, \alpha \rangle = \langle \mathbf{0} + \mathbf{0}, \alpha \rangle = \langle \mathbf{0}, \alpha \rangle + \langle \mathbf{0}, \alpha \rangle = 2\langle \mathbf{0}, \alpha \rangle$$

$$\text{故 } \langle \mathbf{0}, \alpha \rangle = 0$$



性质1  $\forall \alpha \in V$ ，有  $\langle \mathbf{0}, \alpha \rangle = 0$ ，特别  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0$ 。

性质2  $\alpha$  是  $V$  中某一向量，若对于  $\forall \beta \in V$ ，有  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ，则  $\alpha = \mathbf{0}$ 。

性质3  $\forall \alpha_i, \beta_j \in V$  及  $\forall a_i, b_j \in R$  ( $i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, t$ ),  
恒有 
$$\left\langle \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^t b_j \beta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^t \langle \alpha_i, \beta_j \rangle a_i b_j$$

## 二、向量的长度及性质

定义2:  $\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  称为欧氏空间  $V$  中向量  $\alpha$  的模（或长度），记为  $|\alpha|$ ，即  $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ 。

注：模为1的向量称为单位向量，若  $\alpha \neq 0$ ，则  $\frac{1}{|\alpha|} \alpha$  就是一个单位向量，这样得到的向量一般称为把  $\alpha$  单位化（或标准化）。

向量的长度具有下述性质：

$$\forall \lambda \in R, \forall \alpha, \beta \in V$$

1. 非负性 当  $\alpha \neq 0$  时,  $|\alpha| > 0$ ; 当  $\alpha = 0$  时,  $|\alpha| = 0$ .



2. 齐次性  $|\lambda\alpha| = |\lambda||\alpha|$

3. 三角不等式  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$  【后面证明】

## 柯西——布涅柯夫斯基不等式

定理：对于欧氏空间中任意二向量 $\alpha, \beta$ ，恒有

$$\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leq \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle \quad \left( \text{或} |\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |\alpha| |\beta| \right)$$

其中等号成立的充要条件是 $\alpha$ 与 $\beta$ 线性相关.

证明：若 $\alpha, \beta$ 线性相关，则有 $\beta=0$ ，或者 $\alpha=k\beta$ , ( $k \in R$ )  
在上述情况下，容易证明题设的等号成立.

若  $\alpha, \beta$  线性无关, 则对于任意  $k \in R$ , 都有  $k\alpha + \beta \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{则 } \langle k\alpha + \beta, k\alpha + \beta \rangle &= \langle k\alpha, k\alpha \rangle + 2\langle k\alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle k^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle k + \langle \beta, \beta \rangle > 0 \end{aligned}$$

(这是一个关于  $k$  的一元二次多项式.)

因为  $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ , 因此上述不等式成立的条件是

$$\Delta = 4\langle \alpha, \beta \rangle^2 - 4\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle < 0$$

$$\text{即 } \langle \alpha, \beta \rangle^2 < \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$$

总之恒有  $\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leq \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$  或  $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$



下面证等号成立的充要条件是 $\alpha, \beta$ 线性相关。

**充分性：**若 $\alpha, \beta$ 线性相关，则上面已证等号成立。

**必要性：**若上式等号成立，（用反证法），假设 $\alpha, \beta$ 无关，则由上面分析立得：

$$\langle \alpha, \beta \rangle^2 < \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$$

矛盾，故必有 $\alpha, \beta$ 线性相关。

## 应用实例

如在前面例1所定义的线性空间 $R^n$ 中，由该定理的不等式得到：对于任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ，

$b_1, b_2, \dots, b_n$  ， 有不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

或者

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

又如

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$



## 前面三角不等式性质的证明:

证明在欧氏空间中, 对于任意向量 $\alpha, \beta$ 有

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

证: 
$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle \\ &\leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\langle \alpha, \beta \rangle| \end{aligned}$$

由前面定理知  $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |\alpha| |\beta|$ , 于是

$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| |\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2$$

开方得  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

# 两个非零向量的夹角

定义3: **非零向量**  $\alpha, \beta$  的夹角  $(\alpha, \beta)$  规定为

$$\theta = \arccos \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad \text{记为 } \widehat{(\alpha, \beta)}$$

若两个非零向量的夹角为  $\pi/2$ , 则称这两个向量**正交**或**相互垂直**, 记  $\alpha \perp \beta$ .

显然, 两个正交向量的内积为零, 即若  $\alpha \perp \beta$  则  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ .

特别的, 规定零向量与任何向量都正交.





向量  $\alpha, \beta$  正交  $\Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0$ .

注:

- 1) 只有零向量才与自己正交.
- 2) 当向量正交时, 存在类似勾股定理结论

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

## 欧氏空间中向量的距离

在一个欧氏空间中, 两个向量  $\alpha, \beta$  的距离定义为  $|\alpha - \beta|$ , 有时用符号  $d(\alpha, \beta)$  表示.

例4 在欧氏空间 $R^n$ 中, 向量组  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  
 $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$  两两正交.

例5 在欧氏空间里, 若向量 $\alpha$ 与向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$   
中每个向量正交, 则 $\alpha$  与该向量组的任意线性  
组合也正交.

例6 求向量 $\alpha = (1, 2, 2, 3)$ 与 $\beta = (3, 1, 5, 1)$ 的夹角.

解:  $\because \cos \theta = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|} = \frac{18}{3\sqrt{2} \cdot 6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}.$



## § 6.1.2 标准正交基底

**定义** 欧氏空间 $V$ 中一组**两两正交的非零向量**，称为 $V$ 的一个**正交(向量)组**. 若这个正交组中的每个向量都是单位向量，则此正交组称为**标准正交组**.

**定理1** 欧氏空间中的正交组是**线性无关组**.

由定理1知， $n$ 维线性空间中，正交组所含向量个数不会超过 $n$ .

如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是 $n$ 维欧氏空间的一个正交组，那么它是 $V$ 的一个基底，称为**正交基(底)**. 如果正交基底是一个标准正交组，则称为**标准正交基(底)**，或者 **规范正交基**.

标准正交基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  满足关系式:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

例1 验证向量组  $\alpha_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\alpha_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  
 $\alpha_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  构成  $R^3$  的一个标准正交组.

容易验证:  $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = 1$ , 且

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = 0$$

这又是一个单位向量构成的向量组, 故又是一个标准正交组. 它们构成  $R^3$  的一个标准正交基底.



**定理2** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是欧氏空间  $V$  的一组线性无关向量，则存在  $V$  的一个正交组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ，其中  $\beta_k$  是向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) 的线性组合.

满足要求的正交组为

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \alpha_k, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle} \beta_j \quad (k = 2, \dots, m) \end{cases}$$

该求解方法称为**施密特(Schmidt)正交化方法**.

书上证明：**180-181页**.

**定理3** 任何 $n(n \geq 1)$ 维欧氏空间，**一定**有正交基底，  
从而**也一定**有标准正交基底.

**例2** 由 $R^3$ 的一个基底

$$\alpha_1 = (1, 1, 1), \quad \alpha_2 = (0, 1, 2), \quad \alpha_3 = (2, 0, 3)$$

求 $R^3$ 的一个标准正交基底.

**解：**先由施密特(*Schmidt*)正交化方法求出等价的正交组，得

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (0, 1, 2) - \frac{3}{3}(1, 1, 1) \\ &= (0, 1, 2) - (1, 1, 1) = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 \\ &= (2, 0, 3) - \frac{5}{3}(1, 1, 1) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1) = \frac{5}{6}(1, -2, 1)\end{aligned}$$

再单位化，得

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \eta_2 &= \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \eta_3 &= \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)\end{aligned}$$

则  $[\eta_1, \eta_2, \eta_3]$  就是  $R^3$  的一个标准正交基底.

**例3** 已知  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 求一组非零向量  $\alpha_2, \alpha_3$ , 使  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  两两正交.

解:  $\alpha_2, \alpha_3$  应满足方程  $\alpha_1^T x = 0$ , 即  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

它的基础解系为  $\xi_1 = (1, 0, -1)^T$ ,  $\xi_2 = (0, 1, -1)^T$ .

把基础解系正交化, 即为所求.

$$\alpha_2 = \xi_1 = (1, 0, -1)^T,$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \xi_2 - \frac{\langle \xi_2, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} \alpha_2 \\ &= (0, 1, -1)^T - \frac{1}{2}(1, 0, -1)^T = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)^T. \end{aligned}$$



**定理4** 设  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的一个标准正交基底. 向量  $\alpha, \beta$  在该基底下的坐标分别为

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

则有  $\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

注：定理4 给出的公式显示出在欧氏空间中引入标准正交基的优越性. 任意的欧氏空间定义的任意内积，如果两个向量用同一标准正交基表示的话，这两个向量的内积等于它们的坐标构成的  $n$  维向量在  $R^n$  中的内积.

# 小 结

- ◆ 内积的定义与性质(重点)
- ◆ 一些概念：向量的模、单位向量，向量的夹角，正交组、标准正交组，正交基、标准正交基(底)等
- ◆ 施密特正交化方法（重点）



## 思考题

1. 求一单位向量，使它与

$$\alpha_1 = (1, 1, -1, 1), \quad \alpha_2 = (1, -1, -1, 1), \quad \alpha_3 = (2, 1, 1, 3)$$

正交.

2. (习题12) 设 $V$ 是 $n$ 维欧氏空间， $\alpha$ 是 $V$ 的一个固定向量， $M = \{ \beta \in V : \langle \beta, \alpha \rangle = 0 \}$ ，证明：

(1)  $M$ 是 $V$ 的一个子空间.

(2) 当  $\alpha \neq 0$  时， $\dim\{M\} = n - 1$ .

# 思考题解答

1. 解 设所求向量为  $x = (a, b, c, d)$ , 则由题意可得 :

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1, \\ a + b - c + d = 0, \\ a - b - c + d = 0, \\ 2a + b + c + 3d = 0. \end{cases}$$

解之可得 :  $x = (-\frac{4}{\sqrt{26}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}})$

或  $x = (\frac{4}{\sqrt{26}}, 0, \frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}).$



解2：设单位向量 $\beta$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交，  
以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为行向量的矩阵为 $A$ ，则有

$$A\beta^T=0$$

求解方程组 $AX=0$ ，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = 0$$

得基础解系  $X_1 = (-\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 1)^T$

单位化得

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{|X_1|} X_1^T = \frac{3}{\sqrt{26}} (-\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 1) \\ &= (\frac{4}{\sqrt{26}}, 0, \frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}). \end{aligned}$$

2. (习题12) 设 $V$ 是 $n$ 维欧氏空间,  $\alpha$ 是 $V$ 的一个固定向量,  $M = \{ \beta \in V : \langle \beta, \alpha \rangle = 0 \}$ , 证明:

(1)  $M$ 是 $V$ 的一个子空间.

(2) 当  $\alpha \neq 0$  时,  $\dim\{M\} = n - 1$ .

证明:(1)显然 $M$ 非空, 对于 $\forall \beta_1, \beta_2 \in M, \forall k \in R$ , 有

$$\langle \beta_1, \alpha \rangle = 0, \quad \langle \beta_2, \alpha \rangle = 0.$$

$$\text{则 } \langle \beta_1 + \beta_2, \alpha \rangle = \langle \beta_1, \alpha \rangle + \langle \beta_2, \alpha \rangle = 0 + 0 = 0.$$

$$\langle k\beta_1, \alpha \rangle = \langle k\beta_1, \alpha \rangle = k\langle \beta_1, \alpha \rangle = 0.$$

因此  $\beta_1 + \beta_2 \in M, k\beta_1 \in M$ .

所以 $M$ 是 $V$ 的一个子空间.



(2) 由 $V$ 是 $n$ 维欧氏空间,  $\alpha \neq 0$ 知, 在 $V$ 中必可找到 $n-1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 使 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 为线性无关向量组. 设对该向量组正交化得向量组为 $\beta = \alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ . 于是 $\langle \beta_i, \alpha \rangle = 0, i=1, 2, \dots, n-1$ , 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 都属于 $M$ , 且它们性无关, 从而 $\dim\{M\} \geq n-1$ . 若 $\dim\{M\} = n$ , 则 $M=V$ , 于是 $\alpha \in M$ , 而由 $\alpha \neq 0$ 知 $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ , 则 $\alpha \notin M$ , 这与 $M=V$ 矛盾. 因此只能  $\dim\{M\} = n-1$ .