概率论与数理统计

第十二章　随机过程及其统计描述

§2 随机过程的统计描述

- 随机过程的分布函数族
- 随机过程的数字特征
- 二维随机过程的分布函数和数字特征

一、随机过程的分布函数族

给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$.

对于每一个固定的 $t \in T$, 随机变量 $X(t)$ 的分布函数一般与 t 有关,记为

$$F_X(x,t) = P\{X(t) \le x\}, x \in \mathrm{R}.$$

称它为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$的一维分布函数 .

$\{F_X(x,t), t \in T\}$称为一维分布函数族 .

对任意$n\ (n=2,3,\cdots)$个不同的时刻$t_1,\cdots,t_n\in T$，引入n维随机变量$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$.

分布函数 $F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$

$$=P\{X(t_1)\le x_1,\ X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\},$$

$$x_i\in \mathrm{R},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

对固定的n,称 $\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_i\in T\}$ 为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的n维分布函数族 .

科尔莫戈罗夫定理　　有限维分布函数族完全确定了随机过程的统计特性.

二、随机过程的数字特征

给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$.

对固定的 $t \in T$,随机变量 $X(t)$的均值一般与 t 有关, 记作

$$\mu_X(t) = E[X(t)],$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$的均值函数 .

$\mu_X(t)$是随机过程的所有样本 函数在时刻 t 的函数值的平均值，称为集平均或统计平均 .

均值函数 $\mu_X(t)$表示了随机过程 $X(t)$在各个时刻的摆动中心 .

$X(t)$的二阶原点矩和二阶中心矩分别记为

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)],$$

$$\sigma_X^2(t) = D_X(t) = \mathrm{Var}[X(t)] = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\},$$

并分别称为随机过程的均方值函数和方差函数.

方差函数的算术平方根称为随机过程的标准差函数,

表示随机过程在某时刻对于均值的平均偏离程度.

对任意 $t_1, t_2 \in T$,

随机变量 $X(t_1), X(t_2)$ 的二阶原点混合矩记为

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)],$$

称为随机过程的自相关函数, 简称相关函数.

随机变量$X(t_1), X(t_2)$的二阶混合中心矩记为

$$C_{XX}(t_1,t_2)=\mathrm{Cov}[X(t_1),X(t_2)]$$
$$=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][X(t_2)-\mu_X(t_2)]\},$$

将它称为随机过程的自协方差函数,简称协方差函数.

自相关函数和自协方差函数是刻画随机过程自身在两个不同时刻的状态之间统计依赖关系的数字特征.

随机过程的数字特征

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$ 均值函数

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$$ 均方值函数

$$\sigma_X^2(t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}$$ 方差函数

$$\sigma_X(t) = \sqrt{E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}}$$ 标准差函数

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$ 相关函数

$$C_{XX}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}$$

协方差函数

随机过程数字特征之间的关系

$$\Psi_X^2(t) = R_X[t,t]$$

$$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

当$t_1 = t_2 = t$时,

$$\sigma_X^2(t) = C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t)$$

最主要的数字特征

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$ 均值函数

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$ 自相关函数

研究随机过程,主要研究所谓的二阶矩过程.

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$,如果对每一个 $t \in T$,

二阶矩 $E[X^2(t)]$都存在，那么称它为二阶矩过程.

二阶矩过程的相关函数一定存在.

因为 $E[X^2(t_1)], E[X^2(t_2)]$ 存在,

由柯西－施瓦茨不等式 （第四章课后习题）

$$\{E[X(t_1)X(t_2)]\}^2 \le E[X^2(t_1)]E[X^2(t_2)], t_1, t_2 \in T,$$

因此$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$存在.

如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$的每一个有限维分布都是正态分布，就叫做正态过程．

即对任意整数 $n \geq 1$ 和任意 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ 服从 n 维正态分布．

正态过程的全部统计特性完全由它的均值函数和自协方差函数(或自相关函数)确定.

例1 设 A,B 是两个随机变量.

试求随机过程 $X(t)=At+B, t\in T=(-\infty,+\infty)$ 的均值函数和自相关函数.

如果A,B相互独立，且 $A\sim N(0,1)$，$B\sim U(0,2)$，问 $X(t)$的均值函数和自相关函数又是什么？

解 $X(t)$的均值函数和自相关函数分别为

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E(At+B)=tE(A)+E(B).$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[(At_1+B)(At_2+B)]$$

$$=t_1t_2E(A^2)+(t_1+t_2)E(AB)+E(B^2),\ t_1,t_2\in T.$$

当$A \sim N(0,1), B \sim U(0,2)$且 A,B相互独立时，

$$E(A)=0,\quad E(A^2)=1,\quad E(B)=1,\quad E(B^2)=\frac{4}{3},$$

$$E(AB)=E(A)E(B)=0,$$

所以可得 $\mu_X(t)=1,$

$$R_X(t_1,t_2)=t_1t_2+\frac{4}{3},\quad t_1,t_2\in T.$$

例2　求随机相位正弦波

$$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta),\quad t\in(-\infty,+\infty),$$

的均值函数、方差函数 和自相关函数 ，其中a和ω是正常数， Θ是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机 变量.

解　Θ的概率密度为 $f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<\theta<2\pi, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]$$

$$=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0.$$

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) &= E[X(t_1)E(t_2)] \\
&= E[a^2\cos(\omega t_1+\Theta)\cos(\omega t_2+\Theta)] \\
&= a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1).
\end{aligned}
$$

令 $t_1=t_2=t$,即得方差函数为

$$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)=R_X(t,t)=\frac{a^2}{2}.$$

例3 设$X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$,$t\in T=(-\infty,+\infty)$,其中A,B是相互独立且都服从正 态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量,ω是实常数 .证明$X(t)$是正态过程 ,并求它的均值函数和自相关函　数.

解　因为A,B是相互独立的正态分布 变量 ,所以(A,B)是二维正态变量 .

对任意一组实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,

$$X(t_i)=A\cos\omega t_i+B\sin\omega t_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

都是 A,B 的线性组合.

根据 n 维正态变量的性质，

$(X(t_1), X(t_2),\cdots, X(t_n))$ 是 n 维正态变量.

因为 n, t_i 是任意的，

所以由定义可知 $X(t)$ 是正态过程.

由题意，$E(A)=E(B)=E(AB)=0,$

$$E(A^2)=E(B^2)=\sigma^2.$$

所以 $\mu_X(t)=E(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=0,$

$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)$

$$=E[(A\cos\omega t_1+B\sin\omega t_1)(A\cos\omega t_2+B\sin\omega t_2)]$$

$$=\sigma^2(\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\sin\omega t_1\sin\omega t_2)=\sigma^2\cos\omega(t_2-t_1).$$

例4 设随机过程 $X(t)=Y_1+Y_2t, Y_1, Y_2$ 相互独立并且服从 $N(0,1)$ 分布.

(1) 求 $X(t)$ 的一维分布;

(2) 求 $X(t)$ 的均值函数,方差函数,自协方差函数.

解 (1) 因为 Y_1, Y_2 相互独立且同服从标准正态分布,所以对 $\forall t\in T, Y_1+Y_2t \sim N(0,1+t^2)$, 故 $X(t)$ 的一维分布函数为

$$F(x,t)=P\{Y_1+Y_2t\le x\}=P\left\{\frac{Y_1+Y_2t}{\sqrt{1+t^2}}\le\frac{x}{\sqrt{1+t^2}}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

$$(2)\ \mu_X(t)=E[X(t)]=E[Y_1+Y_2t]=0;$$

$$\sigma_X^2(t)=E\{[X(t)]^2\}-\{E[X(t)]\}^2$$

$$=E[(Y_1+Y_2t)^2]=E(Y_1^2+2Y_1Y_2t+Y_2^2t^2)$$

$$=E(Y_1^2)+2tE(Y_1)E(Y_2)+t^2E(Y_2^2)$$

$$=1+t^2;$$

$$C_{XX}(t_1,t_2)=E[(Y_1+Y_2t_1)(Y_1+Y_2t_2)]$$

$$-E[(Y_1+Y_2t_1)]E[(Y_1+Y_2t_2)]$$

$$=E[Y_1^2+(t_1+t_2)Y_1Y_2+t_1t_2Y_2^2]$$

$$=1+t_1t_2.$$

三、二维随机过程的分布函数和数字特征

设$X(t),Y(t)$是依赖于同一参数$t\in T$的随机过程, 对于不同的$t\in T$,$(X(t),Y(t))$是不同的二维随机变量 ,称$\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$为二维随机过程 .

给定二维随机过程 $\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$.

$t_1,t_2,\cdots,t_n;t_1',t_2',\cdots,t_m'$ 是 T 中任意两组实数 .

$$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n);Y(t_1'),Y(t_2'),\cdots,Y(t_m'))$$

的分布函数

$$F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n;y_1,\cdots,y_m;t_1',\cdots,t_m'),$$

$$x_i,y_j\in R,i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$$

叫做二维随机过程的 $n+m$ 维分布函数或随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合分布函数．

如果对任意的正整数 n,m，任意的数组 $t_1,\cdots,t_n\in T$，$t_1',\cdots,t_m'\in T$，n 维随机变量 $(X(t_1),\cdots,X(t_n))$ 与 m 维随机变量 $(Y(t_1'),\cdots,Y(t_m'))$ 相互独立，则称随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 是相互独立的.

随机过程 $X(t)$和$Y(t)$的互相关函数：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)],\quad t_1,t_2\in T.$$

随机过程 $X(t)$和$Y(t)$的互协方差函数：

$$\begin{aligned}C_{XY}(t_1,t_2)&=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\}\\&=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2),\quad t_1,t_2\in T.\end{aligned}$$

如果二维随机过程 $(X(t),Y(t))$ 对任意的 $t_1,t_2\in T$, 恒有

$$C_{XY}(t_1,t_2)=0,$$

则称随机过程$X(t)$和$Y(t)$是不相关的.

三个随机过程 $X(t),Y(t),Z(t)$ 之和的情形

令 $W(t)=X(t)+Y(t)+Z(t)$,

那么均值函数

$$\mu_W(t)=\mu_X(t)+\mu_Y(t)+\mu_Z(t),$$

自相关函数 $R_{WW}(t_1,t_2)=E[W(t_1)W(t_2)]$

$$=R_{XX}(t_1,t_2)+R_{XY}(t_1,t_2)+R_{XZ}(t_1,t_2)$$

$$+R_{YX}(t_1,t_2)+R_{YY}(t_1,t_2)+R_{YZ}(t_1,t_2)$$

$$+R_{ZX}(t_1,t_2)+R_{ZY}(t_1,t_2)+R_{ZZ}(t_1,t_2).$$

若三个随机过程两两不相关，且各自的均值函数均为零,则诸互相关函数均等于零，那么

$$R_{WW}(t_1,t_2)=R_{XX}(t_1,t_2)+R_{YY}(t_1,t_2)+R_{ZZ}(t_1,t_2),$$

令$t_1=t_2=t$，可得$W(t)$的方差函数

$$\sigma_W^2(t)=\Psi_W^2(t)=\Psi_X^2(t)+\Psi_Y^2(t)+\Psi_Z^2(t).$$

小结

1. 随机过程的分布函数族

一维分布函数族 $\{F_X(x,t), t \in T\}$

n 维分布函数族

$$\{F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n), t_i \in T\}$$

2. 随机过程的数字特征

均值函数 $\mu_X(t) = E[X(t)]$

均方值函数 $\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$

方差函数 $\sigma_X^2(t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}$

标准差函数 $\sigma_X(t) = \sqrt{E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}}$

协方差函数

$$C_{XX}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][X(t_2)-\mu_X(t_2)]\}$$

相关函数 $R_{XX}(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

3. 二维随机过程的分布函数和数字特征

$X(t)$ 与 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合分布函数

$$F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n;y_1,\cdots,y_m;t_1',\cdots,t_m')$$

$$x_i,y_j\in R, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m.$$

互相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)],\quad t_1,t_2\in T.$$

互协方差函数

$$C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2),\quad t_1,t_2\in T.$$

作业：课后习题 3、4、5