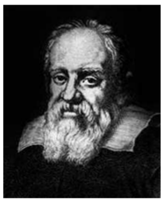
南开大学



伽利略

牛顿

力学

力学研究对象

- 力学一般指牛顿力学或经典力学。它是以牛顿运动定律为基础，研究物体机械运动的规律及其应用的一门学科（*讨论日常运动物体——不太重，不太小，不太快*）。
- 力学讨论的许多基本原理，是物质运动普遍遵从的规律。因而，力学是许多学科的基础。

机械运动

- 机械运动：物体间相对位置随时间的变化过程
- 宏观物体的低速运动
- 在所有的物质运动中，机械运动是最简单、但又是最基本的一种运动。几乎在物质的所有运动中都包含了这种运动形式。
- 常用位移，速度，加速度等物理量描述机械运动。

几个概念

- 运动学：描述物体的运动，不涉及运动产生及变化的原因
- 动力学：物体的运动与物体间相互作用的内在联系
- 静力学：物体在相互作用下的平衡问题

力学（Mechanics）学习要点

- 质点力学：复习、提高
  1. 使知识系统化，条理化；
  2. 注意定理、定律的条件（不要乱套公式）；
  3. 提高分析能力（量纲分析，判断结果的合理性等）
  4. 数学方法上要有提高（矢量运算，微积分）。
- 刚体（新内容）要认真体会其思想、观点，掌握其处理问题的方法。

第一章 质点运动学

- 运动学是用位移，速度，加速度等物理量描述物体的机械运动，研究物体位置随时间的变化或运动的轨迹问题，而不涉及物体发生机械运动原因的学科。

本章目录

1.1 参考系 、坐标系

- 一.参考系（frame of reference, reference system）
- 由运动的相对性，描述运动必须选取参考系。
- 参考系：用来描述物体运动而选作参考的物体或物体系（参照物+坐标系+时钟）。
- 运动学中参考系可任选，不同参考系中物体的运动形式（如轨迹、速度等）可以不同。
- 常用的参考系：
  - ▲ 太阳参考系（太阳— 恒星参考系）
  - ▲ 地心参考系（地球— 恒星参考系）
  - ▲ 地面参考系或实验室参考系
  - ▲ 质心参考系（书§4.4）

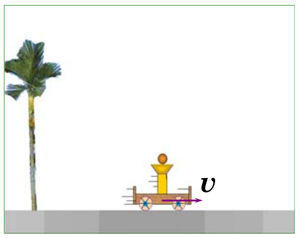
参考系

- 对地球参考系来说，火车在奔驰。
- 从太阳系来看，地球正以 30km/s 的平均速率绕太阳旋转。
- 从银河系中心来看，太阳则以 250km/s 的速率绕银河系中心运动着。
- 由此可见，选作参考系的物体相对另一个参考系来说，又都处于不停的运动之中。

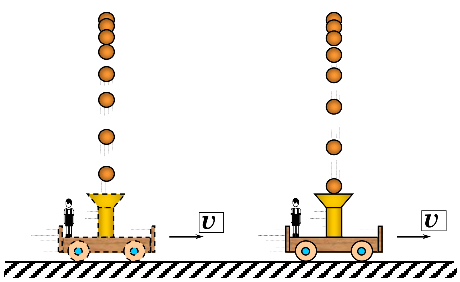
例

车作匀速运动

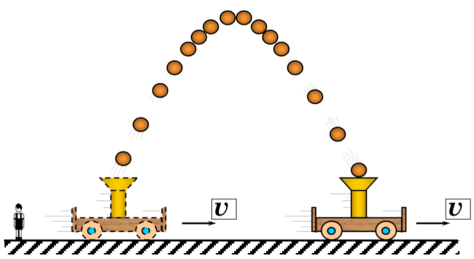
- 同一物体的同一运动，对于不同的参考系，有不同的运动表现形式。
- 物体运动的轨迹依赖于观察者所处的参考系



车上的人观察到石子作直线运动



地面上的人观察到石子作抛物线运动



运动的相对-绝对性

- 对同一物体运动状态的描述，因所选参考系的不同而不同，所以物质的运动是相对的。
- 但在自然界中，无论是从机械运动看，还是从其他更高级的运动形式看，一切物质都处于永恒不息的运动之中，运动和物质是不可分割的，运动是物质的存在形式，所以物质的运动又是绝对的，而物质的静止则是相对的。

二．坐标系（coordinate system）

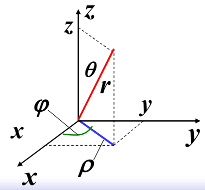
- 为定量描述运动，需在参考系上固结坐标系。
- 坐标系：固结在参考系上的一组有刻度的射线、曲线或角度。
- 参考系选定后，坐标系还可任选。
- 不同坐标系中，运动的数学表述可以不同。
- 常用的坐标系：

直角坐标系（x,y,z）

球极坐标系（r,θ,φ）*

柱坐标系（ρ,φ,z）*

自然“坐标系”（S）（书 § 1.4）



自然坐标

已知质点相对参考系的运动轨迹时，常用自然法。

在质点运动轨道上任取一点作为坐标原点O，质点在任意时刻的位置，都可用它到坐标原点O的轨迹的长度来表示

1.2 质点的位置矢量、 运动函数

- 当物体的形状，大小与所研究的问题无关，或者对运动的影响很小，可忽略不计时，可以把它看成一个点，并认为整个物体的质量和某些物理属性都集中在这个点上。这样抽象化了的模型就称为质点。

质点

- 一个物体是否能当作质点看待，是由所研究问题的具体性质来决定的。
- 举例：地球绕太阳运动时，地球半径

  Re≈6.37×10^6m

  比地球公转半径

  R≈1.50×10^{11}m

  小得多，所以可不考虑地球的大小和自转，而把它当作一个点。

- 质点运动是研究物体运动的基础。
- 当一物体的线度与它的运动范围相比不算很小而不能看成一个质点时，常把整个物体看作是无数个质点组成的质点系。分析这些质点的运动，就可能研究整个物体的运动。
- 质点是理想模型：有质量，没有体积. 忽略了物体的形状、大小所产生的效果,突出了质量、位置和力三者之间的主要矛盾
- 质点→ 质点组→ 刚体→ 弹性→振动→ 波

一、经典力学时空观

- 牛顿认为：时间、空间是客观存在的，但是是绝对的，即时间、空间与物质的运动无关并且彼此独立存在。

  空间是无限并且均匀延伸的，空间的直线永远是直的；

  时间是从古到今到未来单方向均匀连续变化的。
- 经典时空观又称为绝对时空观。

时刻和时间

- 在一定坐标系中考察质点运动时，
  - ✓ 质点的位置是与时刻相对应的
  - ✓ 质点运动所经过的路程与时间相对应的
  - ✓ 时间 Δt 就是两个时刻 t_1 与 t_2 的间隔，即：

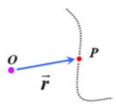
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

当 $t_1 = 0$ 时，$\Delta t = t_2$，所以习惯上把时刻也称为时间。

二、质点位置矢量（position vector of a particle）

- 质点 P 在坐标系中的位置可以用从坐标原点 O 指向质点的有向线段来表示。
  - ✓ 该有向线段称为质点的位置矢量，简称为位矢或矢径。

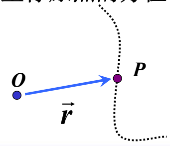
$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$



- 位矢的大小表明质点离开坐标原点的距离

$$r = |\vec{r}| = |\overrightarrow{OP}|$$

- 位矢的方向表明质点相对坐标原点的方位



- 位矢一般是时间的函数

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

上式称为质点的运动函数，即质点的运动学方程。它不仅给出了质点运动的轨迹也给出了质点在任意时刻所处的位置。

确定质点位置的方法——在直角坐标系中

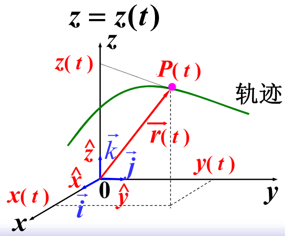
$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$

位置矢量：

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



三、 运动函数（function of motion）

- 机械运动是物体（质点）位置随时间的改变。
- 在坐标系中配上一套同步时钟，可以给出质点位置坐标和时间的函数关系—— 运动函数

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

或（直角坐标）
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

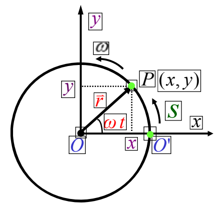
可通过消除t得到质点的轨迹方程

在自然坐标中：$S = f(t)$

例 一质点作匀速圆周运动，半径为 r，角速度为 ω。

求 用直角坐标、位矢、自然坐标表示的质点运动学方程。

解 以圆心O 为原点。建立直角坐标系Oxy，O'点为起始时刻，设t 时刻质点位于P（x , y），用直角坐标表示的质点运动学方程为



$$x = r\cos\omega t,\quad y = r\sin\omega t$$

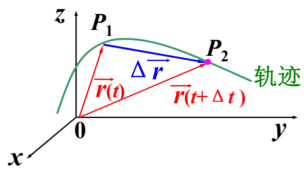
位矢表示为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\cos\omega t\vec{i} + r\sin\omega t\vec{j}$$

自然坐标表示为 $s = r\omega t$

1.3 位移，速度，加速度

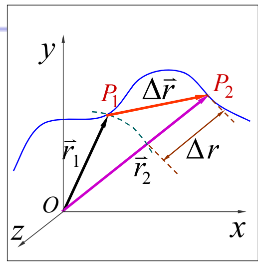
- 一. 位移（displacement）
- 位移 —— 质点在一段时间内位置的改变。



位移： $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\begin{cases} 大小：|\Delta\vec{r}| = \overline{P_1P_2} \\ 方向：P_1 \to P_2 \end{cases}$

注意

$\Delta\vec{r}$，$|\Delta\vec{r}|$，Δr 的意义不同.



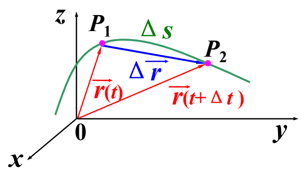
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\Delta r = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

二. 路程（path）

质点实际运动轨迹的长度 ΔS 叫路程。



注意： $\Delta s \neq |\Delta\vec{r}|$， 但 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$；

位移与路程（区别？）

位移与路程的区别

（1） 两点间位移是唯一的.

（2） 一般情况$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$.

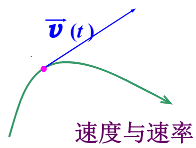
（3） 位移是矢量，路程是标量.

三. 速度（velocity）

- 质点位矢对时间的变化率叫速度。

1. 平均速度（average velocity）： $\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

2. （瞬时）速度（instantaneous velocity）： $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}$



速度与速率的区别

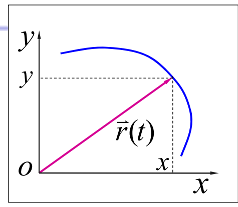
速度方向：沿轨迹切线方向。

速度大小（速率）（speed）：

$$v=|\vec{v}|=\frac{|d\vec{r}|}{dt}=\frac{ds}{dt}$$

讨论

一运动质点在某瞬时位于位矢 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为



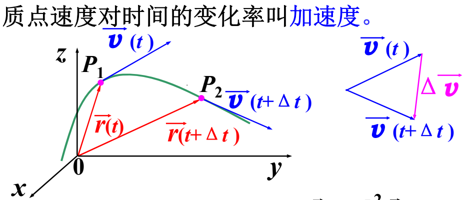
（A） $\frac{dr}{dt}$ （B） $\frac{d\vec{r}}{dt}$

（C） $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$ $\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$

注意 $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\neq\frac{dr}{dt}$

四. 加速度（acceleration）

- 质点速度对时间的变化率叫加速度。



加速度： $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}$

加速度的方向： $\vec{v}$ 变化的方向

加速度的大小： $a=|\vec{a}|=\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$

1.4 匀加速运动（uniformly acceleration motion）

- 直线运动：（rectilinear motion）
- 抛体运动：（projectile motion）
- 运动学的两类问题：

$$\vec{r}(t)\ \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}\ \vec{v},\vec{a}$$

1 由质点的运动方程可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

2 已知质点的加速度以及初始速度和初始位置, 可求质点速度及其运动方程.

例1 设质点的运动方程为

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j},$$

其中 $\begin{cases}x(t)=1.0t+2.0,\\ y(t)=0.25t^2+2.0,\end{cases}$

式中 x，y 的单位为m（米），t 的单位为s（秒），

（1）求 t=3 s时的速度.

（2）作出质点的运动轨迹图.

已知：$x(t)=1.0t+2.0$，$y(t)=0.25t^2+2.0$，

解 （1） 由题意可得

$$v_x=\frac{dx}{dt}=1.0,\qquad v_y=\frac{dy}{dt}=0.5t$$

$t=3\,\text{s}$ 时速度为 $\vec{v}=1.0\vec{i}+1.5\vec{j}$

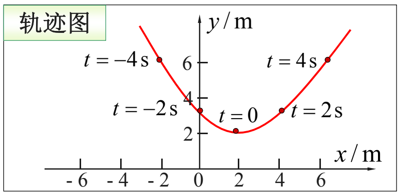
速度 $\vec{v}$ 的值 $v=1.8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，它与 x 轴之间的夹角

$$\theta=\arctan\frac{1.5}{1.0}=56.3^\circ$$

（2）运动方程 $\begin{cases} x(t) = 1.0t + 2.0, \\ y(t) = 0.25t^2 + 2.0, \end{cases}$

消去参数 t 可得轨迹方程为

$$y = 0.25x^2 - x + 3.0$$



例2 已知：a＝100－4t²，且t＝0时，v＝0，x＝0

求：速度v和运动学方程

解：

$v = \int a\,dt = \int (100 - 4t^2)dt = 100t - 4/3t^3 + C$

t＝0时，v＝0，得：C＝0

$\therefore v = 100t - 4/3t^3$

$x = \int v\,dt = \int (100t - 4/3t^3)dt = 50t^2 - 1/3t^4 + C'$

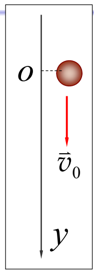
t＝0时，x＝0，得：C'＝0

$\therefore x = 50t^2 - 1/3\,t^4$

例3 有一个球体在某液体中竖直下落，其初速度 $\vec{v}_0 = 10\vec{j}$，它在液体中的加速度为 $\vec{a} = -1.0v\vec{j}$，问：

(1) 经过多少时间后可以认为小球已停止运动；

(2) 此球体在停止运动前经历的路程有多长？



解 $\because a = \dfrac{dv}{dt} = -1.0v$

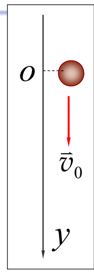
$\therefore \int_{v_0}^{v} \dfrac{dv}{v} = -\int_0^t dt$

解得：$v = v_0 e^{-t}$

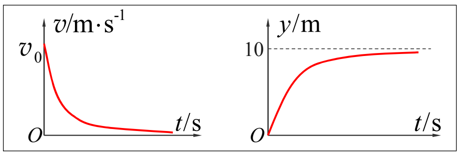
$\because v = \dfrac{dy}{dt} = v_0 e^{-t}$

$\therefore \int_0^y dy = v_0 \int_0^t e^{-t} dt$

解得：$y = 10(1 - e^{-t})$



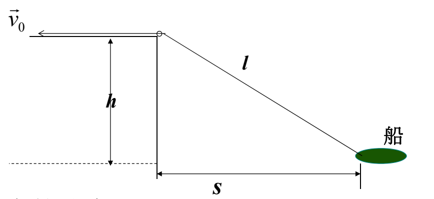
$v = v_0 e^{-1.0t}$，　　$y = 10(1 - e^{-1.0t})$



v	$v_0/10$	$v_0/100$	$v_0/1\,000$	$v_0/10\,000$
t / s	2.3	4.6	6.9	9.2
y / m	8.997 4	9.899 5	9.989 9	9.999 0

$t = 9.2\,\text{s},\ v \approx 0,\ y \approx 10\,\text{m}$

例4 小船距岸边距离为S，一人在高为***h***岸边用绳子以速度 $\vec{v}_0$ 拉小船，绳长***l***。求船靠岸的速率

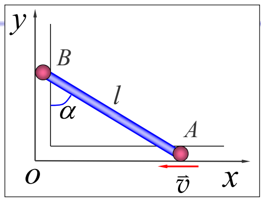


求：船靠岸的速率

解：$S^2 = l^2 - h^2$　　$2S\dfrac{dS}{dt} = 2l\dfrac{dl}{dt}$　　$\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{l}{S}\dfrac{dl}{dt}$

$v_{水平} = \left|\dfrac{dS}{dt}\right| = \dfrac{l}{S}\left|\dfrac{dl}{dt}\right| = \dfrac{l}{S}v_0$

例5　如图A、B两物体由一长为l的刚性细杆相连，A、B两物体可在光滑轨道上滑行．如物体A以恒定的速率v向左滑行，当$\alpha=60^\circ$时，物体B的速率为多少？



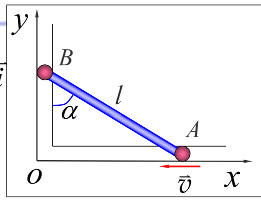
解　选如图的坐标轴

$$\vec{v}_A = v_x\vec{i} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = -v\vec{i}$$

$$\vec{v}_B = v_y\vec{j} = \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

因 $x^2+y^2=l^2$

两边求导得 $2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$



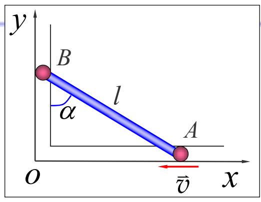
即 $\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

$$\vec{v}_B = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}\vec{j}$$

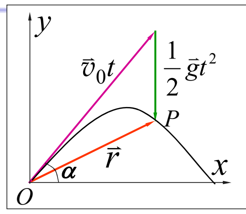
$\because\ \frac{dx}{dt}=-v$

$\therefore\ \vec{v}_B = v\tan\alpha\,\vec{j}$

当$\alpha=60^\circ$时，$v_B=1.73v$，$\vec{v}_B$沿y轴正向



例6　如图一抛体在地球表面附近，从原点O以初速$\vec{v}_0$沿与水平面上Ox轴的正向成α角抛出．如略去抛体在运动过程中空气的阻力作用，求抛体运动的轨迹方程和最大射程．



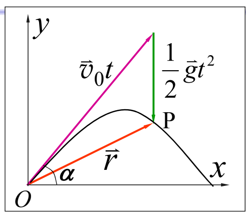
解　$\vec{a}=\vec{a}_y=\vec{g}=-g\vec{j}$

$\vec{a}_x=0$

$$\vec{r}=\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

按已知条件，t=0时，有

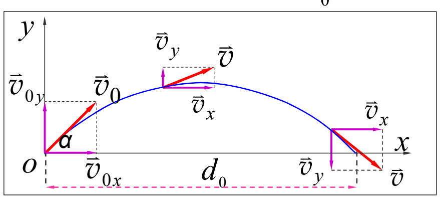
$$\begin{cases} v_{0x}=v_0\cos\alpha \\ v_{0y}=v_0\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x=0 \\ a_y=-g \end{cases}$$



解得：

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t,\quad y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

轨迹方程为：$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$

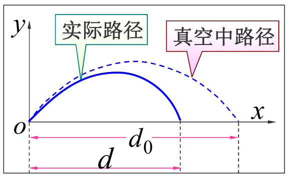


求最大射程

$$d_0 = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}d_0}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha = 0$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$,

$$d_{0\mathrm{m}} = v_0^2/g$$



由于空气阻力，实际射程小于最大射程.