§3 边界条件

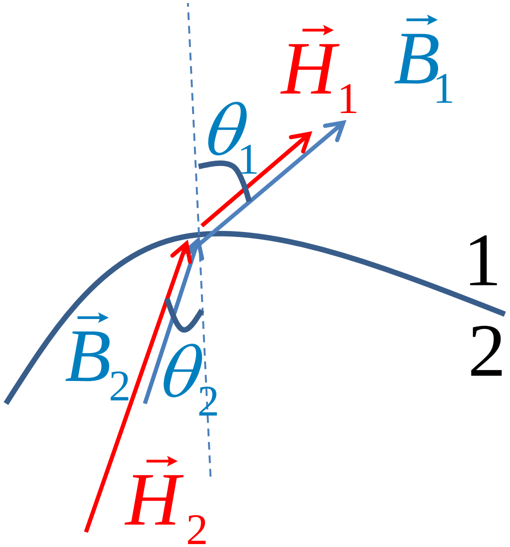
在两种磁介质、电介质或导体界面的分界面上，磁场、电场及电流各物理量穿过分界面时要发生变化，它们要满足一定的关系式，这些关系式称为边界条件。

一、磁场边界条件

（1）磁感矢量的法向分量连续。

即： $B_{1n} = B_{2n}$

或： $B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2$



（2）如边界上不存在传导电流，则磁场强度的切向分量连续。

即： $H_{1t} = H_{2t}$

或： $H_1 \sin\theta_1 = H_2 \sin\theta_2$

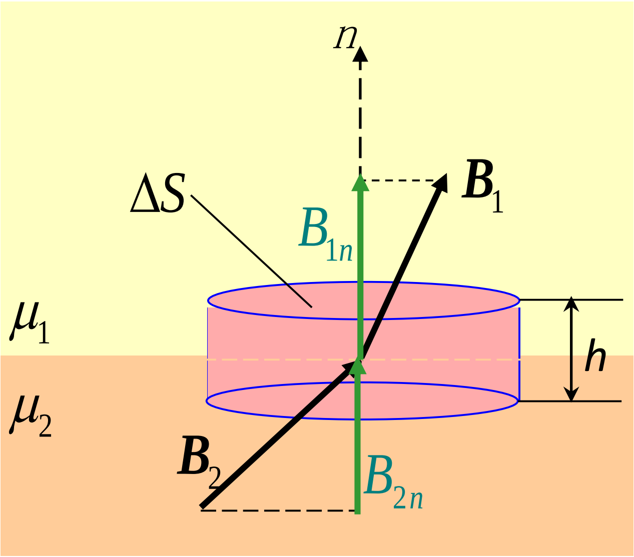
证明：

（1） $B_{1n} = B_{2n}$

- 设两种不同的磁介质μ_1、μ_2，其分界面的法线方向为n。在分界面上作一小圆柱形表面，两底面分别位于介质两侧，底面积为ΔS，h为无穷小量。

Gauss定理： $\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

因为高度无限小，只考虑上下两面的积分。



$$\oiint \vec{B}\cdot dS = \oiint \vec{B}_1\cdot dS + \oiint \vec{B}_2\cdot dS = 0$$

$$\therefore \vec{B}_1\cdot\hat{n}\Delta S + \vec{B}_2\cdot(-\hat{n})\Delta S = 0$$

即：$\vec{B}_1\cdot\hat{n} = \vec{B}_2\cdot\hat{n}$， 或 $B_{1n} = B_{2n}$

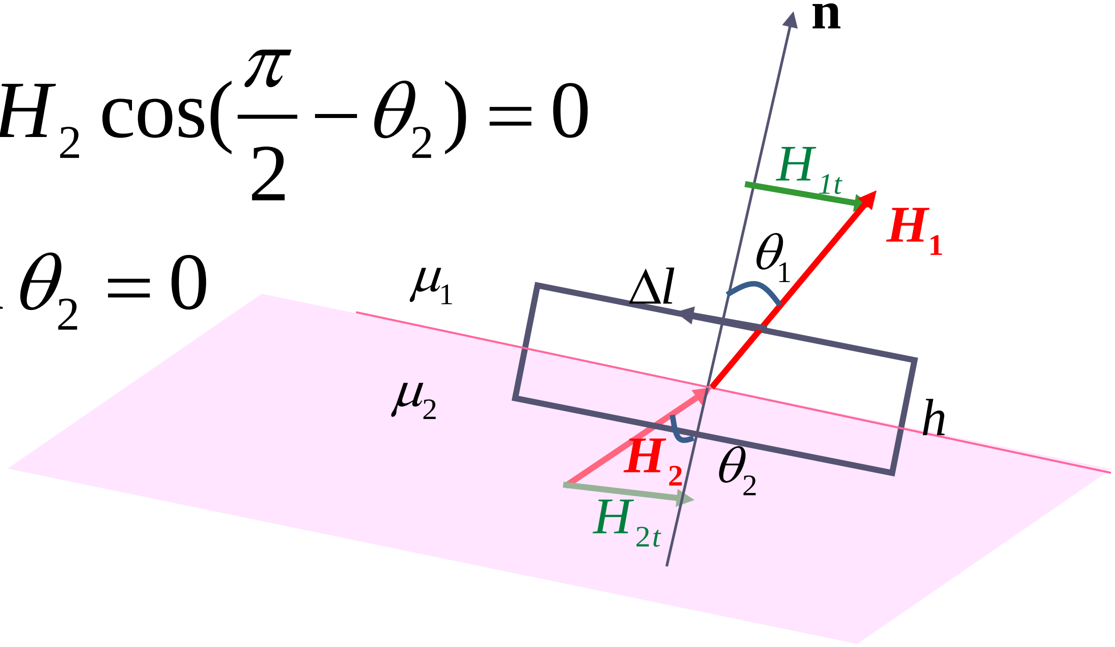
（2）$H_{1t}=H_{2t}$

- 在分界面上作一小的矩形回路，逆时针，其两边Δl分居于分界面两侧，而高$h\to 0$，根据安培环路定理：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=0$

$$H_1\cos(\frac{\pi}{2}+\theta_1)+H_2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_2)=0$$

$$H_1\sin\theta_1-H_2\sin\theta_2=0$$

即： $H_{1t}=H_{2t}$



同样可以证明：

（1）**如果两种电介质的分界面上没有自由电荷，则电位移矢量的法向分量连续。**即：

$$D_{1n} = D_{2n}$$

（2）**如果两种电介质的分界面处没有变化的磁场，则电场强度矢量的切向分量连续。**即：

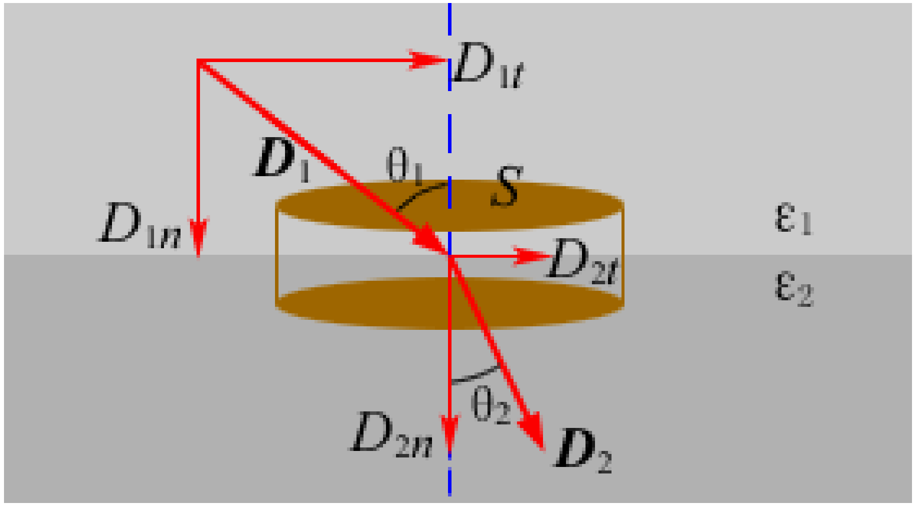
$$E_{1t} = E_{2t}$$

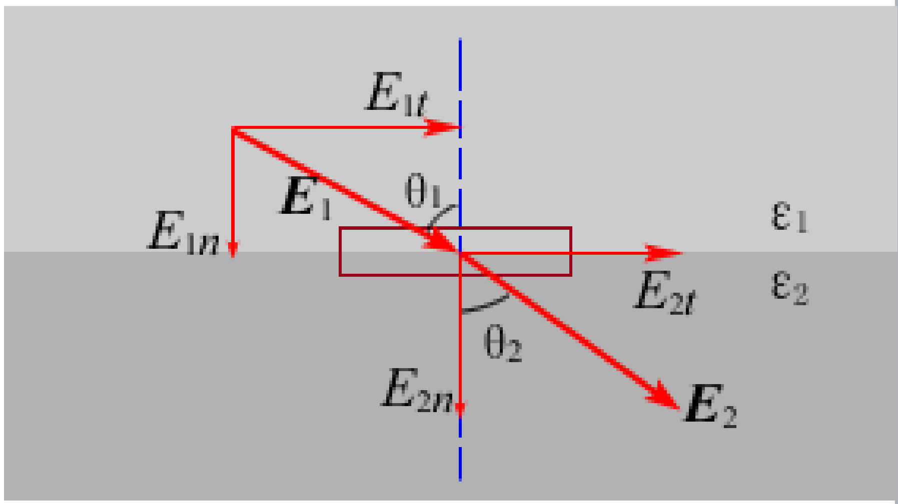
——电场的边界条件。

• 不同电介质界面

电位移矢量 D 的法向分量连续； $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n} = 0$

电场强度矢量 E 的切向分量连续。 $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\times\vec{n} = 0$





• 不同导体界面

电流密度矢量j的法向分量连续； $(\vec{j}_2-\vec{j}_1)\cdot\vec{n}=0$

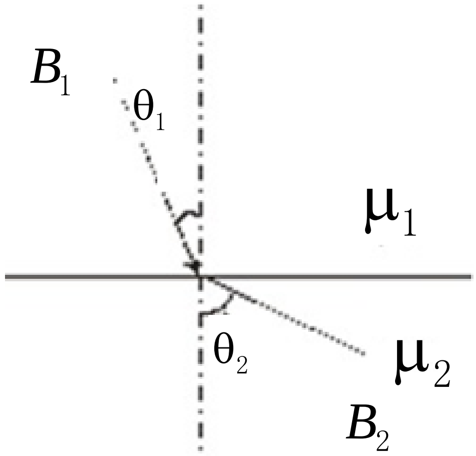
电场强度矢量E 的切向分量连续。$(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\times\vec{n}=0$

二、磁场折射定律

磁场的边界条件：

$$B_1\cos\theta_1 = B_2\cos\theta_2 \qquad H_1\sin\theta_1 = H_2\sin\theta_2$$

$$\frac{H_1}{B_1}tg\theta_1 = \frac{H_2}{B_2}tg\theta_2 \qquad \frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{H_2}{B_2}\frac{B_1}{H_1}$$



由 $B=\mu H$ 得：$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

折射定律： 在两种磁介质的分界面上，磁场与分界面法线夹角的正切之比，等于分界面两侧磁介质的磁导率之比。

- 若介质1为铁磁质（μ_1很大）。介质2为空气（ μ_2很小），则由$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$知，$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$，$\theta_2\to 0$。
- 铁磁质与空气的分界面处铁磁质一侧，磁感矢量几乎与分界面平行。
- 磁感矢量几乎集中在高磁导率的铁磁质内，很难穿过分界进入空气。
- 高磁导率的磁介质具有把磁力线集中在自己内部的能力。（导体对电场也有类似结论）
- 铁磁质做的变压器漏磁很小。

电流线、电场线和磁感应线在界面上的折射

导体界面两侧电流线与法线夹角的正切之比等于两侧电导率之比；

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

电介质界面两侧电场线与法线夹角的正切之比等于两侧介电常量之比；

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

磁介质界面两侧磁感应线与法线夹角的正切之比等于两侧磁导率之比；

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

三、磁屏蔽

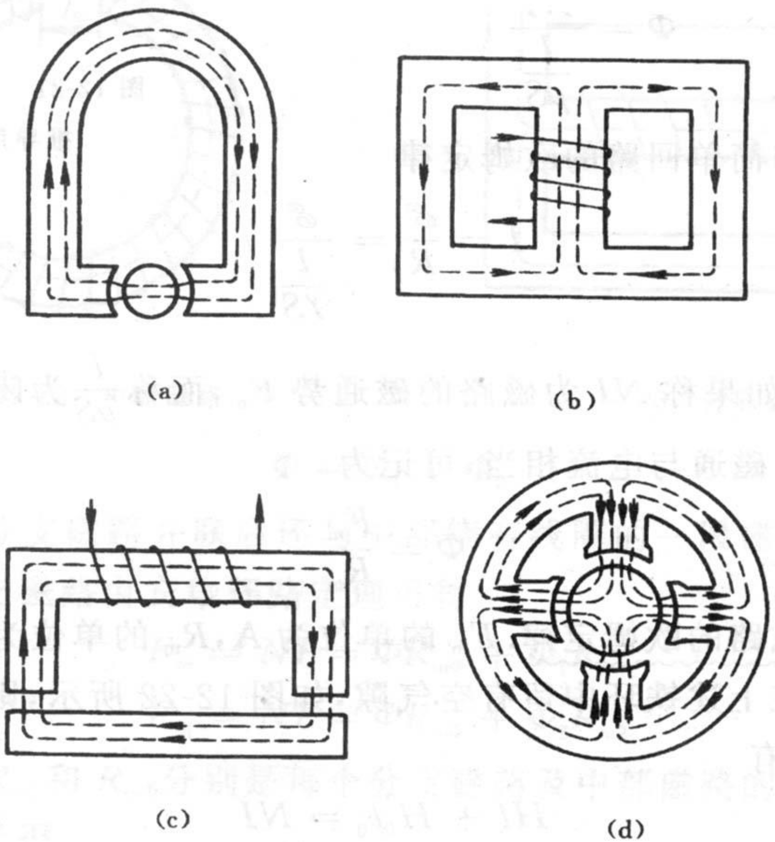
- 若用铁磁质（例如熟铁）围成一个封闭的空腔，由于铁磁质的磁导率很高，具有汇聚磁力线的作用，因此空腔外面的磁力线难于穿过腔壁进入腔内，使腔内免受腔外磁场的影响；反过来，若空腔内存在磁场，那么磁力线也不易穿出腔壁，因而腔外空间免受腔内磁场的影响，这就是磁屏蔽。
- 静电屏蔽可以达到理想的效果，但磁屏蔽效果较差。为了提高屏蔽效果，经常采用多层屏蔽的方式。

四、 磁路定理

（1） 磁路的概念

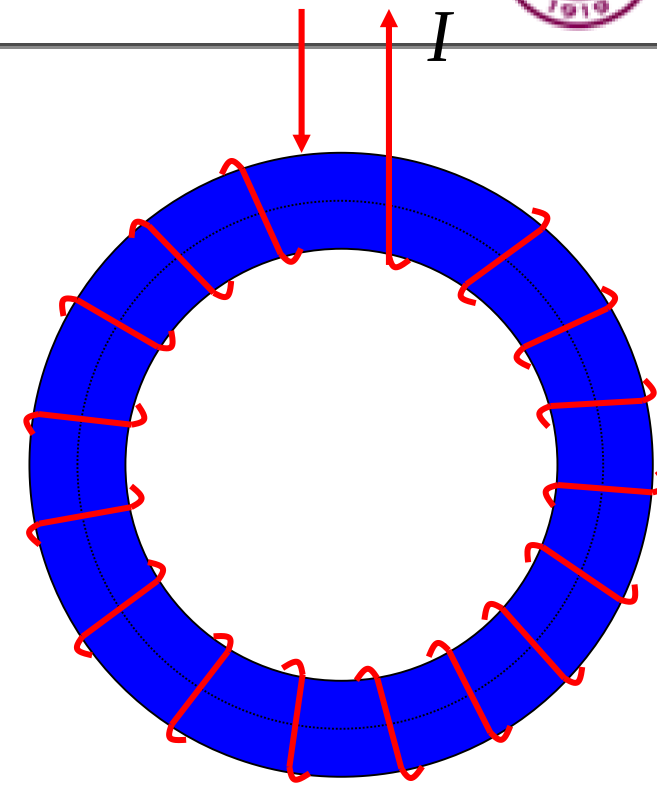
磁感应线通过的区域称为**磁路**。

常用电工设备中的磁路图



（2） 磁路的欧姆定律

设截面积为S、长为l, 磁导率为μ的铁环上，绕以紧密的线圈N匝，线圈中通过的电流为I。



$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I$$

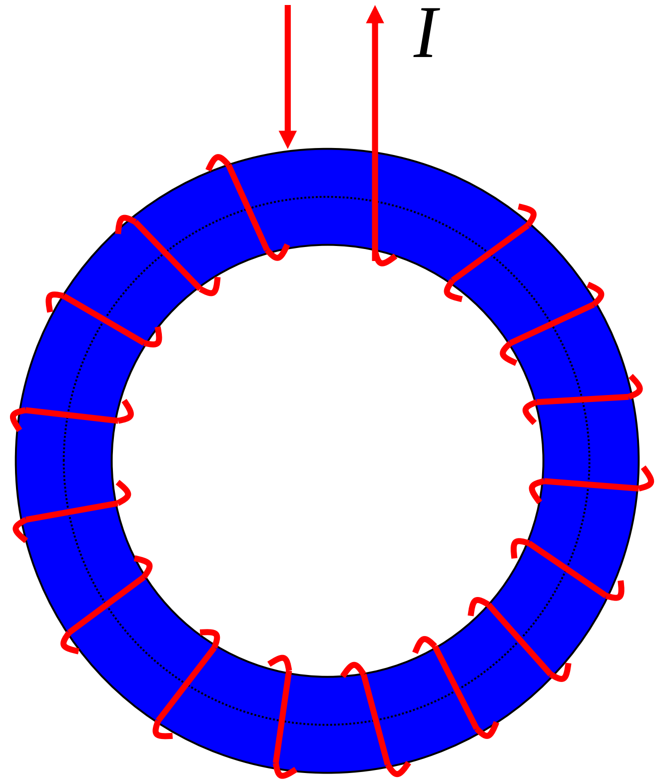
$$Hl = NI$$

$$\because \Phi_m = BS = \mu HS \qquad \therefore \Phi_m = \frac{NI}{\dfrac{l}{\mu S}}$$

$$\Phi_m = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S}} \qquad I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{l}$$

磁路的欧姆定律

$$\Phi_m = \frac{\varepsilon_m}{R_m}$$



其中 $\varepsilon_m = NI$ 为磁路的**磁通势**，单位为 A 。

$R_m = \dfrac{l}{\mu S}$ 为闭合磁路的**磁阻**，单位为 A/Wb 。

串联磁路的磁阻等于串联各部分磁阻之和。

并联磁路的磁阻的倒数等于分支路磁阻倒数之和。

§4 电磁能

1. 电场能

2. 磁场能

1. 电场能

（1）点电荷组相互作用能

把分散在无限远处的几个点电荷逐一搬到有限空间的相应位置上电场力的总功称为相互作用能（电势能）。

当电荷间相对位置发生变化或系统电荷量发生变化时，静电能转化为其它形式的能量。

1.1 两个点电荷

假设q_1、q_2从相距无穷远移至相距为r。

考虑q_1位于A点，q_2与A点相距无限远。

把q_2从无限远移至B点，外力要克服q_1的电场力做功，其大小等于系统电势能的增量。

$$A = q_2(U_2 - U_\infty)$$

U_2是q_1在B点产生的电势，U_∞是q_1在无限远处的电势。

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} \qquad U_\infty = 0$$

所以 $$A = q_2 U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

同理，如果考虑q_2位于B点，把q_1从无限远移到**A**点，外力做功为

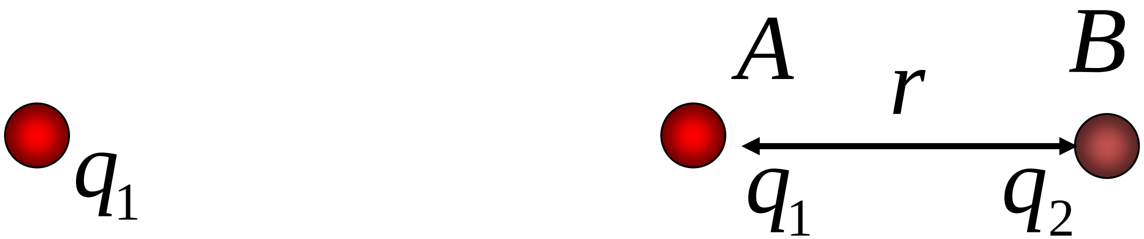
$$A = q_1 U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

U_1是q_2在A点产生的电势。

两种不同的迁移过程，外力做功相等。

根据功能原理，外力做功等于系统的相互作用能$W_{互}$。

$$W_{互} = A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$



可改写为

$$W_{互}=\frac{1}{2}q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}+\frac{1}{2}q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}=\frac{1}{2}q_1U_1+\frac{1}{2}q_2U_2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}q_iU_i$$

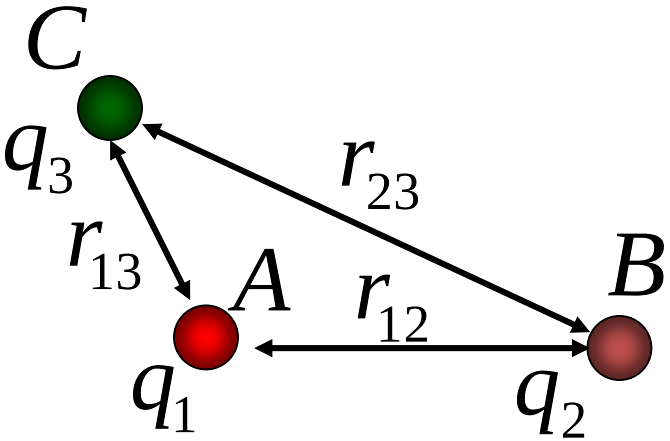
两个点电荷组成的系统的相互作用能（电势能）等于每个电荷在另外的电荷所产生的电场中的电势能的代数和的一半。

1.2 三个点电荷

q_1 位于A点 $$A_1 = 0$$

把q_2移至B点，外力做功 $$A_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

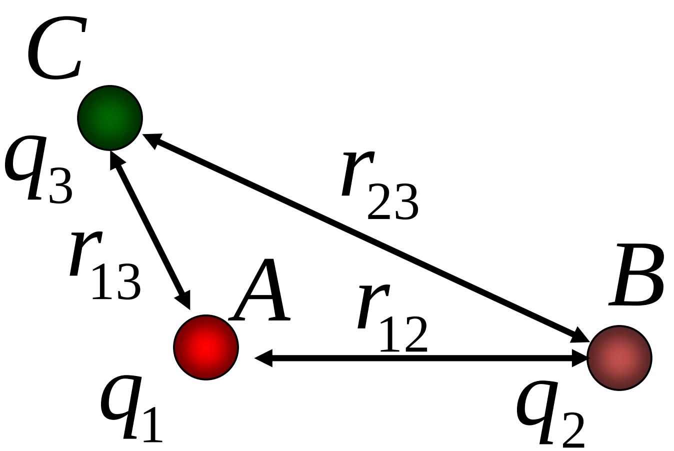
最后把q_3移至C点，外力做功 $$A_3 = q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right)$$



三个点电荷组成的系统的相互作用能量（电势能）

$$W_{互} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right)$$



可改写为

$$W_{互}=\frac{1}{2}[q_1(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}})+q_2(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}})$$

$$+q_3(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}})]$$

$$=\frac{1}{2}(q_1U_1+q_2U_2+q_3U_3)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}q_iU_i$$

$\boldsymbol{U_1}$是$\boldsymbol{q_2}$和$\boldsymbol{q_3}$在$\boldsymbol{q_1}$所在处产生的电势，余类推。

1.3 多个点电荷

推广至由n个点电荷组成的系统，其相互作用能（电势能）为

$$W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$$

U_i是除q_i外的其它所有电荷在q_i 所在处产生的电势。

（2）电荷连续分布时的电能（自能，固有能）

定义：把每个带电体上的各部分电荷从无限分散的状态聚集起来时所作的功，等于这个带电体的自能。

以体电荷分布为例，设想不断把体电荷元$\rho_e \mathrm{d}V$从无穷远处迁移到物体上，系统的静电能为

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V U\rho_e \mathrm{d}V$$

U是体电荷元处的电势。

同理，面分布电荷系统的静电能为： $W = \frac{1}{2}\iint_S U\sigma_e \mathrm{d}S$

线分布电荷系统的静电能为： $W = \frac{1}{2}\iint_S U\eta_e \mathrm{d}l$

（3） 静电场的能量

平板电容器的能量

$$W = \frac{1}{2} C U_{AB}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 S d = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V$$

电能贮藏在电场中，静电场能量的体密度（电场能密度）为

$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} D E \qquad w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

任一带电体系的总能量

$$W_e = \iiint_V w_e \, dV = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV$$

$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

$$D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$$

$$\Rightarrow \omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

真空： $\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

四、应用举例

例1、半径为R的导体球带电量为Q，处于静电平衡状态，已知球外是真空，求

（1）电场能量W。

（2）导体球的外部，多大半径范围内，所储存的能量为总能量的一半。

解：（1）导体静电平衡，内部电场为零。导体外

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E^2 dV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{\infty}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}\frac{Q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}\frac{Q^2}{2R}$$

也可按照孤立导体球电容及电容器储能计算。

(2) 令R_x处，$W_x = \frac{1}{2}W$。

$$W_x = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{R_x}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}\frac{Q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_x}\right)$$

则:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}\frac{Q^2}{2R}\right)$$

所以$R_x = 2R$

例2 求半径为R 带电量为Q 的均匀带电球的静电能。

解一：计算定域在电场中的能量

球内 r 处电场
$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, \qquad (r < R)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{r^3}, \qquad (r \geq R)$$

$$W = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r +$$

$$+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

解二：计算带电体系的静电能

球体是一层层电荷逐渐聚集而成，某一层内已聚集电荷

$$q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

再聚集 $r \to r + \mathrm{d}r$ 这层电荷**dq**，需做功：

$$dW_{外} = U_{外} dq = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot (\rho 4\pi r^2 dr)$$

而 $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ $\quad q = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{Qr^3}{R^3}$

所以 $W_{外} = \int_0^R dW_{外} = \int_0^R \dfrac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6} r^4 dr = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{3Q^2}{5R}\right)$

例3、平行板空气电容器的板面积为S，经充电后，两板分别带电$+Q$和$-Q$，求断开电源，外力匀速将二板距离由d拉到2d的过程中，外力所做的功。

解：拉动前$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$,拉动后$C'=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}$

拉动前后Q不变，$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

外力做的功为$A=\triangle W=W'-W_0$

$$=\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C'}-\frac{1}{C}\right)=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 s}$$

另一种方法：

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\frac{\sigma}{\varepsilon_0})^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$$

$$E\text{不变}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad \Rightarrow w_e\text{不变}$$

$$W = w_e V = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}, \qquad W' = \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 S}$$

$$A = \Delta W = W' - W = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

2. 磁场能

（1）自感能 $W_{自}=\frac{1}{2}LI^2$

（2）互感能 $W_{互}=MI_1I_2$

（3）磁场能

$$W_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2$$

$$W_m=\iiint_V \omega_m dV=\iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

以细螺绕环为例：内部介质的磁导率为$\boldsymbol{\mu}$，环半径为$\boldsymbol{R}$，电流为$\boldsymbol{I}$，截面积为$\boldsymbol{S}$，匝数为$\boldsymbol{N}$，可以求得，管内磁场强度为：$\boldsymbol{H = nI}$

全磁通为：$\psi = NBS = 2\pi RnBS = nBV$

$\boldsymbol{V}$为螺绕环的体积，也就是磁场的体积。

自感：$\psi = LI \quad \therefore \quad LI = BnV$

由于细螺绕环的磁场全部集中在管内，而且管内磁场强度、磁感应强度的大小是均匀的，所以单位体积磁场的能量为：

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}BnVI = \frac{1}{2}BHV$$

$$w_m = \frac{1}{2}BH$$ ——磁场能量密度

普遍表达式：$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

磁场能量：

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

电磁能密度：

$$w = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} + \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

- 从磁场储能的角度理解两个载流线圈储存的磁场能量：

设线圈1产生的磁场为$\vec{B}_1$、$\vec{H}_1$，线圈2产生的磁场为$\vec{B}_2$、$\vec{H}_2$，则：

$$W_m=\iiint_V \omega_m dV=\iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

$$=\iiint_V \frac{1}{2}(\vec{B}_1+\vec{B}_1)\cdot(\vec{H}_1+\vec{H}_2)\ dV$$

$$=\iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}_1\cdot\vec{H}_1 dV+\iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}_2\cdot\vec{H}_2 dV\rightarrow\text{自感储能}$$

$$+\iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}_1\cdot\vec{H}_2 dV+\iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}_2\cdot\vec{H}_1 dV\rightarrow\text{互感储能}$$

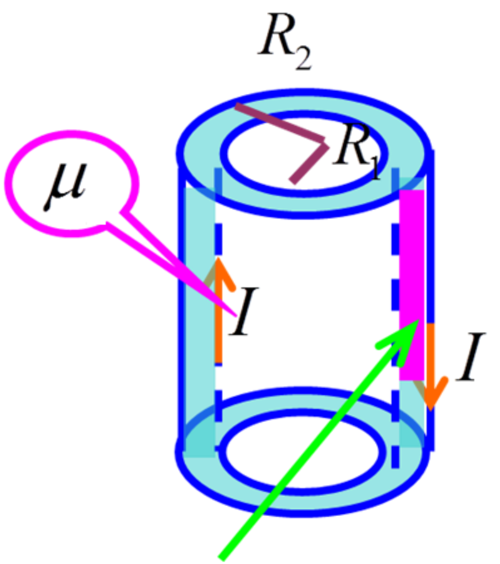
- **自感储能总是正的；互感储能可正可负。**

应用举例：

例：无限长同轴线，内导体半径为R_1，外导体内半径为R_2，已知$R_1 < R_2$，导体之间有磁导率为μ的磁介质,请在下列条件下，分别求单位长度同轴线的自感系数。

（1）内外导体都为薄圆柱面；

（2）内导体为实心圆柱，
外导体为薄圆柱面。
导体的磁导率为μ'



解：作为同轴电缆，其电流流向是内、外导体一出一入。

方法一：可由自感系数定义求解：$\boldsymbol{\psi = LI}$

方法二：由磁场分布，求$\boldsymbol{W_m}$，由$\boldsymbol{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$ 求$\boldsymbol{L}$。

采用方法二:

（1）磁场只分布在导体间

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad 2\pi r H = I, \quad H = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

$$\because B = \mu H \quad \therefore \quad \omega_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$$

$$W_m=\int\omega_m dV \quad dV=2\pi r dr l$$ （选长度为l的一段）

$$\therefore W_m=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2\cdot 2\pi r l dr=\frac{\mu}{4\pi}I^2 l\ln\frac{R_2}{R_1}$$

另一方面：$W_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{2}LI^2$

则 $L=\dfrac{\mu l}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

单位长度自感： $L_0=\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

与上一章结论相同。

（2）除导体间存在相同的磁场，具有相同能量外，内导体内部也有磁场分布。故磁场能量应加上这一部分。

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{I}{\pi R_1^2}\cdot \pi r^2 = \frac{r^2}{R_1^2} I$$

$$\because \quad \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi r H \quad \therefore \quad H = \frac{r}{2\pi R_1^2} I$$

$$\Delta W_m = \int_0^{R_1} \frac{1}{2} B H dV = \int_0^{R_1} \frac{1}{2}\mu' H^2 dV$$

$$= \int_0^{R_1} \frac{1}{2}\mu' \left(\frac{r}{2\pi R_1^2}\right)^2 \cdot 2\pi r dr l = \frac{\mu'}{16\pi} I^2 l$$

$$W_m = \frac{\mu}{4\pi} I^2 l \ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu'}{16\pi} I^2 l = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2\pi} l \ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu'}{8\pi} l\right) I^2$$

又 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

则 $L = \frac{\mu}{2\pi} l \ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu'}{8\pi} l$

单位长度自感： $L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu'}{8\pi}$

- 作业：

  P355 T8.49 T8.52

The end!