

第二章 矩阵代数

本章主要内容

- * 矩阵概念及运算：加法、数乘、乘法
- * 逆矩阵及求取
- * 矩阵的初等变换
- * 分块矩阵

一、（矩阵概念的）引入

[illegible]

系数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n),$

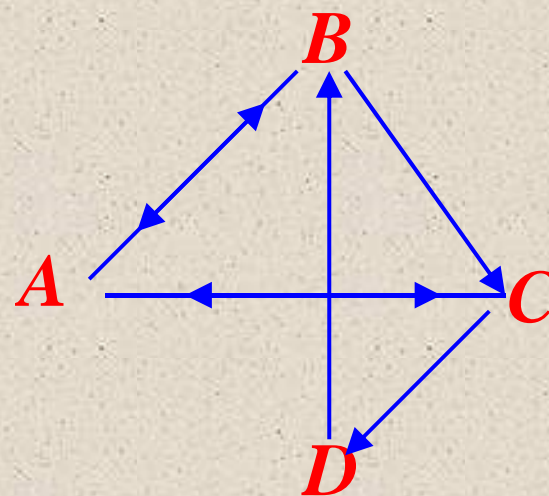
常数项 $b_i (i=1,2,\cdots,n)$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

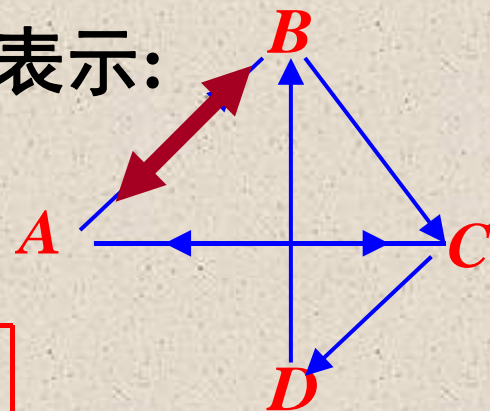
对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线，如图所示，它表示了四城市间的航班图：如果从A到B有航班，则用带箭头的线连接A与B.



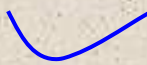


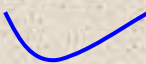



四城市间的航班图情况常用表格来表示:

		到站			
		A	B	C	D
发站	A		✓	✓	
	B	✓		✓	
	C	✓			✓
	D		✓		



其中 ✓ 表示有航班.

为便于计算, 把表中的 ✓ 改成1, 空白地方填上0, 就得到一个数表:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>				
<i>B</i>				
<i>C</i>				
<i>D</i>				

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

该数表反映了四城市间交通联接情况.

二、矩阵的定义

定义1 由 mn 个(实或复)数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行 n 列的**阵式(矩形表)**, 称为 $m \times n$ 矩阵, 简称**矩阵**, 记为:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

数 a_{ij} 称为矩阵的**元(元素)**.

表示: 大写字母 A, B, \dots ,
或 $A = (a_{ij}), (a_{ij})_{mn}, (a_{ij})_{m \times n}$ 等.

分类：元是实数的矩阵称为**实矩阵**.
元是复数的矩阵称为**复矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵, (4) 是一个 1×1 矩阵,

$(2 \ 3 \ 5 \ 9)$ 是一个 1×4 矩阵.

几种特殊矩阵

(1) 行数与列数都等于 n 的矩阵 A , 称为 n 阶方阵. 也记作 A_n .

例如 $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3阶方阵.

(2) $1 \times n$ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 称为行矩阵 (或 $[n$ 维]行向量).

$n \times 1$ 矩阵 $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 称为列矩阵 (或 $[n$ 维]列向量).

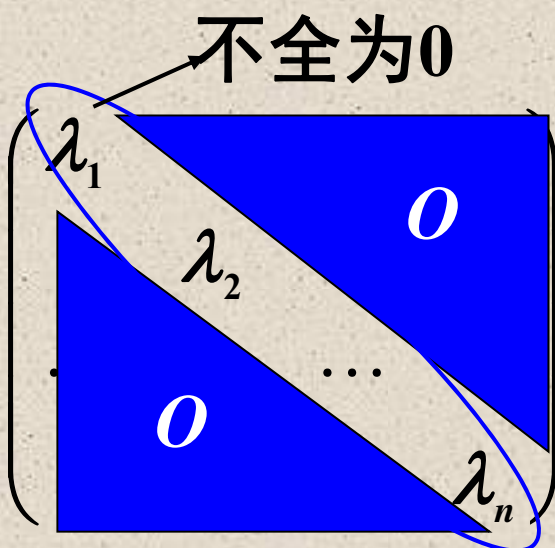
说明：

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

n 维行向量和 n 维列向量统称为 n 维向量，它们的元称为分量。

注：在具体场合下， n 维向量是指行向量还是列向量将由上下文来确定。如果二者皆可，为书写方便，本书常写成行向量的形式。

但是，在多数文献资料中的向量一般指列向量。

(3) 形如  的方阵, 称为**对角矩阵** (或**对角阵**) .

记作 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

(4) 元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, $m \times n$ 零矩阵记作 $O_{m \times n}$ 或 O .

注意 不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0 \ 0 \ 0 \ 0)$.

(5)方阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

称为单位矩阵（或单位阵）。

有的书上也记为 I , I_n 。

几个概念

(1) 两个矩阵的行数列数分别相等时, 称为**同型矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

(2) 两个矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 为**同型矩阵**, 并且**对应元相等**, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

则称**矩阵A与B相等**, 记作 **$A=B$** .

例 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ y & 1 & z \end{pmatrix},$$

已知 $A = B$, 求 x, y, z .

解: $\because A = B,$
 $\therefore x = 2, y = 3, z = 2.$

(3) 设阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则矩阵 $(-a_{ij})_{m \times n}$ 称为 A 的负矩阵, 记为 $-A$.

另外，对于前面的线性方程组

[illegible]

系数矩阵

常数列矩阵

增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \\ = (A, b)$$

注:有的书上用 \bar{A} 表示增广矩阵.

小结

(1) 矩阵的概念 m 行 n 列的一个数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵 {

- 方阵 ($m = n$);
- 行矩阵与列矩阵; $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 对角矩阵;
- 零矩阵.

(3) 一些概念: 同型矩阵、矩阵相等、负矩阵等.

思考题

矩阵与行列式的有何区别？

思考题解答

矩阵与行列式有**本质**的区别

- ① 行列式是一个**算式**，一个数字行列式经过计算可求得其值，而矩阵仅仅是一个**数表**.
- ② 矩阵的行数和列数可以不同，而行列式的行数和列数是相同的.
- ③ 矩阵相等有着**严格**的条件，而行列式相等只需行列式的计算结果相同即可，与行列式的阶数无关.