离散数学第三部分之三

推理与证明技术

2022/9/22

一、推理理论

概念

描述问题的句子

判断

对概念的肯定与否定的判断

推理

从一个或多个前提推出结论的思维过程

推理的有效性和结论的真实性

有效的推理不一定产生真实的结论；而产生真实结论的推理过程未必是有效的。有效的推理中可能包含为“假”的前提，而无效的推理却可能得到为“真”的结论 。

所谓推理有效，指的是它的结论是它前提的合乎逻辑的结果。也即，如果它的前提都为真，那么所得的结论也必然为真，而并不是要求前提或结论一定为真或为假，如果推理是有效的话，那么不可能它的前提都为真时，而它的结论为假。

基本概念和推理形式

定义5.2.0 设G,H是公式，对任意解释I，如果I满足G，那么I满足H，则称H是G的逻辑结果(或称G蕴涵H)，记为$G \Rightarrow H$，此时称G为前提，H为结论。

判定定理

定理 设G, H是公式，H是G的逻辑结果当且仅当$G\rightarrow H$为永真公式。

证明："⇒"若$G\Rightarrow H$，但$G\rightarrow H$不是永真公式。于是，必存在一个解释I，使得$G\rightarrow H$为假，即在解释I下，G为真，而H为假，这与$G\Rightarrow H$矛盾，故$G\rightarrow H$是永真公式。

"⇐"若$G\rightarrow H$是永真式，但$G\Rightarrow H$不成立，故存在G,H的一个解释I，使得G为真，而H为假，从而在解释I下，$G\rightarrow H$为假，这与$G\rightarrow H$是永真公式矛盾，所以$G\Rightarrow H$。

推广

定义5.2.1 设$G_1,G_2,\ldots,G_n$,H是公式，称H是$G_1,G_2,\ldots,G_n$的逻辑结果($G_1,G_2,\ldots,G_n$共同蕴涵H)，当且仅当H是$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n$的逻辑结果(logic conclusion)。记为$G_1,G_2,\ldots,G_n \Rightarrow H$，此时称$G_1,G_2,\ldots,G_n \Rightarrow H$为有效的(efficacious)，否则称为无效的(inefficacious)。$G_1,G_2,\ldots,G_n$称为一组前提(Premise)，有时用集合Γ来表示，记$\Gamma=\{G_1,G_2,\ldots,G_n\}$。H称为结论(conclusion)。又称H是前提集合Γ的逻辑结果。记为$\Gamma \Rightarrow H$。

定理5.2.1　公式H是前提集合$\Gamma=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$的逻辑结果当且仅当$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \rightarrow H$为永真公式。

“⇒”与“→”的不同

1. “→”仅是一般的蕴涵联结词，G→H的结果仍是一个公式，而“⇒”却描述了两个公式G，H之间的一种逻辑蕴涵关系，G ⇒ H的“结果”，是非命题公式；

2. 用计算机来判断G ⇒ H是办不到的。然而计算机却可“计算”公式G→H是否为永真公式。

二、 判断有效结论的常用方法

要求

$\Gamma = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ $\Gamma \Rightarrow H$

也就是

$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n \rightarrow H$
为永真公式

因而

真值表技术、演绎法和间接证明方法

1、真值表技术

设$P_1,P_2,\ldots,P_n$是出现在前提$G_1,G_2,\ldots,G_n$和结论H中的一切命题变元，如果将$P_1,P_2,\ldots,P_n$中所有可能的解释及$G_1,G_2,\ldots,G_n$, H的对应真值结果都列在一个表中，根据"→"的定义，则有判断方法如下：

1. 对所有$G_1,G_2,\cdots,G_n$都具有真值T的行(表示前提为真的行),如果在每一个这样的行中，H也具有真值T，则H是$G_1,G_2,\cdots,G_n$的逻辑结果。
2. 对所有H具有真值为F的行(表示结论为假的行),如果在每一个这样的行中，$G_1,G_2,\cdots,G_n$中至少有一个公式的真值为F(前提也为假),则H是$G_1,G_2,\cdots,G_n$的逻辑结果。

例

判断下列H是否是前提G_1,G_2的逻辑结果

(1) H: Q;　　G_1: P; G_2: P→Q;　　是

(2) H: ┐P;　　G_1: P→Q; G_2: ┐Q;　　是

(3) H: Q;　　G_1: ┐P; G_2: P→Q。　　否

解

(1)

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

(2)

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

(3)

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

推理定律

设G，H，I，J是任意的命题公式，则有：

1) I_1：$G \wedge H \Rightarrow G$ (简化规则)

I_2：$G \wedge H \Rightarrow H$

2) I_3：$G \Rightarrow G \vee H$ (添加规则)

I_4：$H \Rightarrow G \vee H$

3) I_5：$\neg G \Rightarrow G \to H$

I_6：$H \Rightarrow G \to H$

4) I_7：$\neg(G \to H) \Rightarrow G$

I_8：$\neg(G \to H) \Rightarrow \neg H$

5) I_9：$G, H \Rightarrow G \wedge H$

推理定律(续)

6) I_{10}：$\neg G, \; G \overline{\vee} H \Rightarrow H$ (选言三段论)

I_{11}：$\neg G, \; G \quad H \Rightarrow H$

7) I_{12}：$G, \; G \rightarrow H \Rightarrow H$ (分离规则)

8) I_{13}：$\neg H, \; G \rightarrow H \Rightarrow \neg G$ (否定后件式)

9) I_{14}：$G \rightarrow H, \; H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I$ (假言三段论)

10) I_{15}：$G \vee H, \; G \rightarrow I, \; H \rightarrow I \Rightarrow I$ (二难推论)

例子

1)、前提:

1. 如果明天天晴，我们准备外出旅游。 $P \to Q$

2．明天的确天晴。 P

结论：我们外出旅游。 Q

可描述为：$P \to Q$，$P \Rightarrow Q$ （分离规则）

2)、前提:

1. 如果一个人是单身汉，则他不幸福。 $P \to Q$

2. 如果一个人不幸福，则他死得早。 $Q \to R$

结论：单身汉死得早。 $P \to R$

可描述为：$P \to Q$，$Q \to R \Rightarrow P \to R$ （假言三段论）

3)、某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案之晚王某在工厂值夜班，没有外出，根据上述案情可得前提：

1.凶手为王某或陈某。 $P \vee Q$

2.如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出 $P \rightarrow R$

3.王某案发之晚并未外出。 $\neg R$

结论：陈某是凶手。 Q

则可描述为：$P \rightarrow R$，$\neg R \Rightarrow \neg P$ (否定后件式)

$P \vee Q$，$\neg P \Rightarrow Q$ (选言三段论)

4)、前提:

1.如果某同学为省二级以上运动员，则他将被大学录取。

$P \rightarrow R$

2.如果某同学高考总分在560分以上，则将被大学录取。

$Q \rightarrow R$

3.某同学高考总分在560分以上或者是省二级运动员。

$P \vee Q$

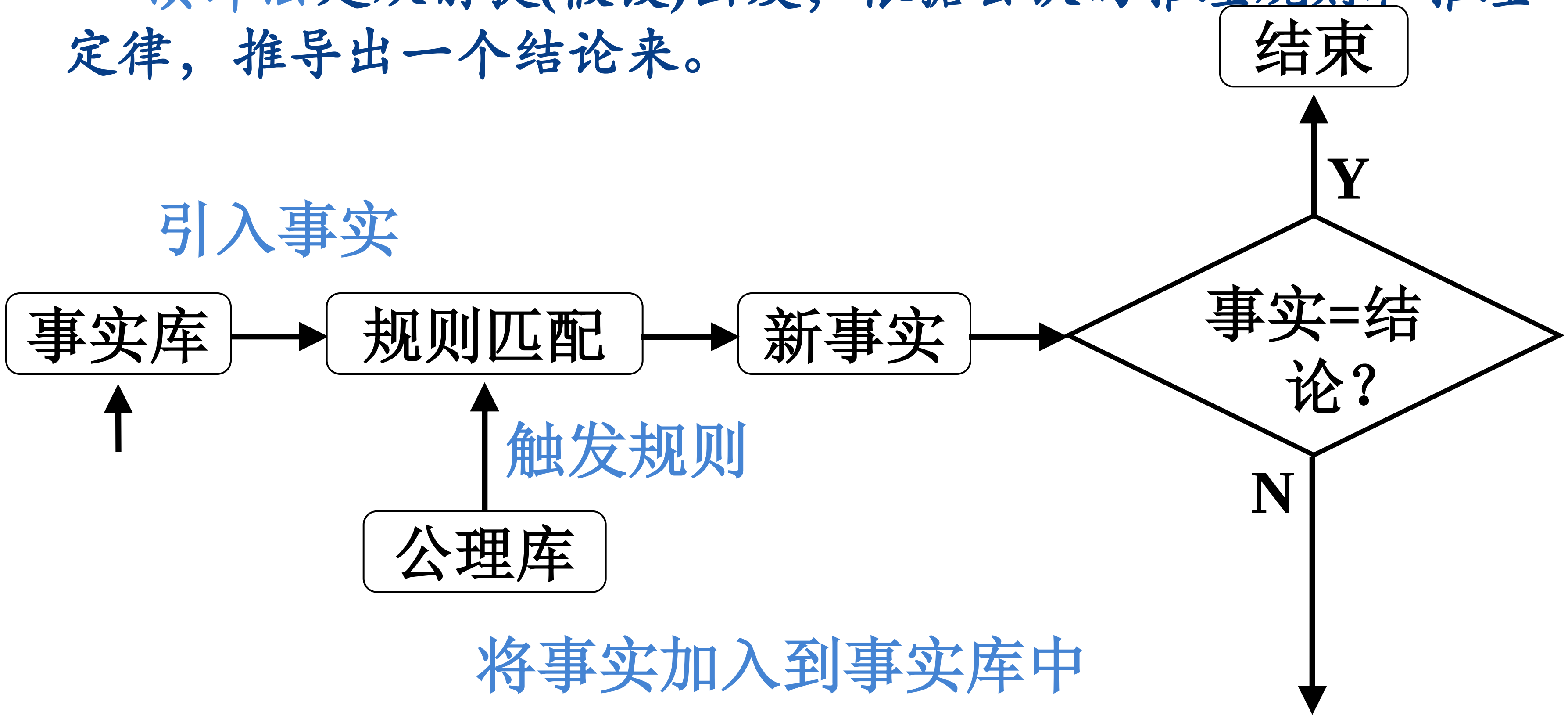
结论：该同学被大学录取。 R

则上述例子可描述为:

$P \vee Q$，$P \rightarrow R$，$Q \rightarrow R \Rightarrow R$ (二难推论)

3 演绎法

演绎法是从前提(假设)出发，依据公认的推理规则和推理定律，推导出一个结论来。



演绎的定义

定义5.2.2

从前提集合Γ推出结论H的一个演绎是构造命题公式的一个有限序列：

$$H_1，H_2，……，H_n$$

其中，H_i或者是Γ中的某个前提，或者是前面的某些H_j（j<i）的有效结论，并且H_n就是H，则称公式H为该演绎的有效结论，或者称从前提Γ能够演绎出结论H来。

推理规则

① 规则P（称为前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提;

② 规则T（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，可以随时引入公式S，该公式S是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。

③ 规则CP（附加前提规则）：如果能从给定的前提集合Γ与公式P推导出S，则能从此前提集合Γ推导出P→S。

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$，

$P\Rightarrow(Q\rightarrow R)$等价于$(P\wedge Q)\Rightarrow R$

例

设前提Γ={P∨Q，P↔R，Q→S}，G=S∨R。证明Γ⇒G。

证明1:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P \rightarrow Q$	T,(1),E
(3)	$Q \rightarrow S$	P
(4)	$\neg P \rightarrow S$	T,(2),(3),I
(5)	$\neg S \rightarrow P$	T,(4),E
(6)	$P \leftrightarrow R$	P
(7)	$(P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P)$	T,(6),E
(8)	$P \rightarrow R$	T,(7),I
(9)	$\neg S \rightarrow R$	T,(5),(8),I
(10)	$S \vee R$	T,(7),E

证明2：

(1)	$\neg S$	P(附加)
(2)	$Q \rightarrow S$	P
(3)	$\neg Q$	T,(1),(2),I
(4)	$P \vee Q$	P
(5)	P	T,(3),(4),I
(6)	$P \leftrightarrow R$	P
(7)	$(P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P)$	T,(6),E
(8)	$P \rightarrow R$	T,(7),I
(9)	R	T,(5),(8),I
(10)	$\neg S \rightarrow R$	CP,(1),(9)
(11)	$S \vee R$	T,(10),E

4 间接证明法（反证法）

前面使用过的一些证明方法都是正向推理。但在数学领域中，经常会遇到一些问题，当采用正向推理时很难从前提为真推出结论为真。

$P \Rightarrow Q$等价于$\neg Q \Rightarrow \neg P$，因此，为了间接地证明$P \Rightarrow Q$，可以假设$Q$为假($\neg Q$)，然后证明$P$为假($\neg P$)。

例

设n是一个整数，证明：如果n^2是奇数，那么n是奇数。

证明　设**n**是偶数，则$\mathbf{n=2k}$，这里**k**是一个整数。于是有：

$$n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$$

所以n^2是偶数。

因而证明了若**n**是偶数，则n^2是偶数，它是已知命题的逆否式。因此，证明了所给的命题。

定义

假设$G_1,G_2,\cdots,G_n$是一组命题公式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$是出现在中的一切命题变元，若有解释I使$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$取值为“真”，则称公式$G_1,G_2,\cdots,G_n$是一致的，或者说是相容的。

如对任意的解释I，都有$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$取值为“假”，则称公式$G_1,G_2,\cdots,G_n$是不一致的。或者说$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$是一个矛盾式。

$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n$是矛盾式当且仅当

$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n \Rightarrow R \wedge \neg R$，

其中，R可为任意公式，$R \wedge \neg R$为一矛盾式。

间接证明方法

将结论的否定加入到前提集合中构成一组新的前提，然后证明这组新的前提集合是不相容的，即蕴涵一个矛盾式。

$$G_1,G_2,\ldots,G_n,\neg H \Rightarrow R\wedge\neg R$$

定理5.2.2 设命题公式集合$\{G_1,G_2,\ldots,G_n\}$是一致的，于是从前提集合$\{G_1,G_2,\ldots,G_n\}$出发可以逻辑地推出公式H的充要条件是从前提集合$\{G_1, G_2,\ldots,G_n,\neg H\}$出发，可以逻辑地推出一个矛盾（永假）式来。

例

证明不存在有理数P/q其平方为2，即证明 $\sqrt{2}$是无理数。

证明　对某两个整数P和q，假设$(P/q)^2=2$成立，并且P和q没有公因子。如果原来选择的P、q具有公因子，则可以用与它相等的无公因子的P、q来取代它。

于是$P^2=2q^2$，所以P^2是偶数，这就推出P是偶数，因为一个奇数的平方是奇数。

因此存在某个整数n使得$P＝2n$成立。

因此

$$2q^2 = P^2 = (2n)^2 = 4n^2,$$

即有$q^2=2n^2$，所以q^2是偶数，从而q是偶数，于是得到P和q都是偶数，故它们有一个公因子2，这与假设相矛盾。

因此结论成立。

例

用反证法证明二难推论

$$P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \Rightarrow R$$

证明 (1) $P \to R$ P

(2) $\neg R$ P(附加)

(3) $\neg P$ T,(1),(2),I

(4) $Q \to R$ P

(5) $\neg Q$ T,(2),(4),I

(6) $P \vee Q$ P

(7) P T,(5),(6),I

(8) $P \wedge \neg P$ T,(3),(7),I

4 命题逻辑推理的应用

例5.2.7 符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

或者明天下午是天晴，或者是下雨；如果明天下午是天晴，则我将去看电影；如果我去看电影，我就不看书。如果我看书，则天在下雨。

设 **P**：明天下午天晴；

Q：明天下午下雨；

R：明天下午去看电影；

S：明天下午看书。

则上述命题可符号化为：

$$P \,\bar{\vee}\, Q,\quad P\to R,\quad R\to\neg S \;\Rightarrow\; S\to Q。$$

证明

(1)	S		P (附加)
(2)	$R \rightarrow \neg S$	P	
(3)	$\neg R$		T,(1),(2),I
(4)	$P \rightarrow R$	P	
(5)	$\neg P$		T,(3),(4),I
(6)	$P \vee Q$	P	
(7)	Q		T,(4),(7),I

例

如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。

分析：令P：马会飞；　　Q：羊吃草；

R：母鸡是飞鸟；

S：烤熟的鸭子还会跑。

符号化上述语句，并证明

证明

(1)	$\neg S$	P
(2)	$R \rightarrow S$	P
(3)	$\neg R$	T,(1),(2),I
(4)	$P \vee Q \rightarrow R$	P
(5)	$\neg (P \vee Q)$	T,(3),(4),I
(6)	$\neg P \wedge \neg Q$	T,(5),E
(7)	$\neg Q$	T,(6),I

例

一个公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下：

A或B盗窃了x；若A盗窃了x，则作案时间不能发生在午夜前；若B证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；若B证词不正确，则作案时间发生在午夜前；午夜时屋里灯光灭了。B盗窃了x。

设 P：A盗窃了x； **Q：B盗窃了x；**

R：作案时间发生在午夜前； **S：B证词正确；**

T：在午夜时屋里灯光未灭。

则上述命题可符号化为：

$$P \vee Q,$$

$$P \rightarrow \neg R,\ S \rightarrow T,\ \neg S \rightarrow R,\ \neg T \ \Rightarrow\ Q$$

例

证明1 采用直接证明方法（反证法请学生完成）

(1)	$\neg T$	P
(2)	$S \rightarrow T$	P
(3)	$\neg S$	T,(1),(2),I
(4)	$\neg S \rightarrow R$	P
(5)	R	T,(3),(4),I
(6)	$P \rightarrow \neg R$	P
(7)	$\neg P$	T,(5),(6),I
(8)	$P \vee Q$	P
(9)	Q	T,(7),(8),I

三、谓词逻辑的推理理论

* **谓词演算的演绎与推理**

定义5.3.1 设$G_1, G_2, \ldots, G_n$, H是公式，称H是$G_1, G_2, \ldots, G_n$的逻辑结果($G_1, G_2, \ldots, G_n$共同蕴涵H)，当且仅当H是$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n$的逻辑结果(logic conclusion)。记为$G_1, G_2, \ldots, G_n \Rightarrow H$，此时称$G_1, G_2, \ldots, G_n \Rightarrow H$为有效的(efficacious)，否则称为无效的（inefficacious）。$G_1, G_2, \ldots, G_n$称为一组前提(Premise),有时用集合Γ来表示，记$\Gamma = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$。H称为结论(conclusion)。又称H是前提集合的逻辑结果。记为$\Gamma \Rightarrow H$。

定理

公式H是前提集合$\Gamma=\{G_1,G_2,\ldots,G_n\}$的逻辑结果当且仅当$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n \rightarrow H$为有效公式。

一、推理规律

（1） I_{16}： $(\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$；

（2） I_{17}： $(\forall x)G(x) \lor (\forall x)H(x)$

$\Rightarrow (\forall x)(G(x) \lor H(x))$；

I_{18}： $(\exists x)(G(x) \land H(x))$

$\Rightarrow (\exists x)G(x) \land (\exists x)H(x)$；

（3） I_{19}： $(\forall x)(G(x) \to H(x))$

$\Rightarrow (\forall x)G(x) \to (\forall x)H(x)$；

I_{20}： $(\forall x)(G(x) \to H(x))$

$\Rightarrow (\exists x)G(x) \to (\exists x)H(x)$。

（4） I_{21}： $(\exists x)(\forall y)G(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x,y)$；

I_{22}： $(\forall x)(\forall y)G(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)G(x,y)$；

I_{23}： $(\forall y)(\forall x)G(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)G(x,y)$；

I_{24}： $(\exists y)(\forall x)G(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)G(x,y)$；

I_{25}： $(\forall x)(\exists y)G(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x,y)$；

I_{26}： $(\forall y)(\exists x)G(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)G(x,y)$；

二、推理规则

1、US（全称特指规则，Universal SPecify）：

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$$

其中G(x)对y是自由的

推广：
$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$$

其中c为任意个体常量

2、ES（存在特指规则，Existential SPecify）：

$$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$$

其中c为使G(c)为真的特定个体常量；若G(x)中还有除x以外的自由变量时，则必须用这些变量的函数符号来取代。

3、UG（全称推广规则， Universal Generalize ）：

$$G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x)$$

其中G(y)对x是自由的且G(y)中无自由变量x

4、EG（存在推广规则，Existential Generalize）：

$$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$$

其中G(c)对x是自由的且G(c)中无自由变量x

推广：

$$G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x)$$

其中G(y)对x是自由的且G(y)中无自由变量x

推理规则的正确使用(1)

例　设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$。　其中：$G(x, y)$：$y>x$。

推导1：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$　　P

（2）$(\exists y)G(y, y)$　　US,(1)

分析：推导1是错误的。正确的推导如下：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$　　P

（2）$(\exists y)G(z, y)$　　US,(1)

推理规则的正确使用（2）

推导2：

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$　　P

（2）$(\exists y)G(z, y)$　　US,(1)

（3）$G(z, c)$　　ES,(2)

注意：使用ES规则来消去量词时，　若还有其它自由变元时，则必须用关于自由变元的函数符号来取代常量符号.

推理规则的正确使用（3）

推导3：

（1）(∃y)G(z, y)　　　　P

（2）(∀y)(∃y)G(y, y)　　UG,(1)

分析：推导3是错误的。正确的推导如下：

（1）(∃y)G(z, y)　　　　P

注意：使用UG规则来添加量词时，若选用变元x取代y，则要求在原公式中y不能出现在量词(∀x)或(∃x)的辖域之内。

推理规则的正确使用（4）

推导4：

（1）G(x, c)　　　　　　P

（2）(∃x)G(x, x)　　　　EG,(2)

分析：推导4是错误的。正确的推导如下：

注意：使用EG规则来添加量词时，若选用变元x取代c，则要求在原公式中c不能出现在量词(∀x)或(∃x)的辖域之内且原公式中中无自由变量x。

判断

（1） $(\forall x)(\exists y)G(x, y)$ P

（2） $(\exists y)G(z, y)$ US,(1)

（3） $G(z, c)$ ES,(2)

（4） $(\forall x)G(x, c)$ UG,(3)

（5） $(\exists y)(\forall x)G(x, y)$ EG,(4)

谓词演算的综合推理方法

1. 推导过程中可以引用命题演算中的规则P 和规则T 。
2. 如果结论是以蕴涵形式(或析取形式)给出，我们还可以使用规则CP。
3. 若需消去量词，可以引用规则US和规则ES。
4. 当所要求的结论可能被定量时，此时可引用规则UG和规则EG将其量词加入。

谓词演算的综合推理方法（续1）

5. 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法。
6. 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，完全可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式。
7. 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

例

证明苏格拉底三段论："所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。"

解：设H(x)：x是人；M(x)：x是要死的；

s：苏格拉底。 则符号化为：

$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$，$H(s) \Rightarrow M(s)$

(4)错了！

证明：(1) $(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$ P

(2) $H(s)\rightarrow M(s)$ US,(1)

(3) $H(s)$ P

(4) $M(s)$。 T,(2),(3),I

例

证明：

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)),\ (\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x)$$

有下面的推导：

(1)	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(2)	$P(x)\rightarrow Q(x)$	US, (1)
(3)	$(\exists x)P(x)$	P
(4)	$P(c)$	ES, (3)
(5)	$Q(c)$	T, (2), (4), I
(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG, (5)

例

推导可修改为:

(1)	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	P
(2)	$P(c) \to Q(c)$	US, (1)
(3)	$(\exists x)P(x)$	P
(4)	$P(c)$	ES, (3)
(5)	$Q(c)$	T, (2), (4), I
(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG, (5)

例

请看推导：

(1)	$(\exists x)P(x)$	P
(2)	$P(c)$	ES, (1)
(3)	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(4)	$P(c)\rightarrow Q(c)$	US, (3)
(5)	$Q(c)$	T, (2), (4), I
(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG, (5)

正确！

例

证明：

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

证明：	1) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$	P
	2) $P(c) \wedge Q(c)$	ES, 1)
	3) $P(c)$	T, 2), I
	4) $Q(c)$	T, 2), I
	5) $(\exists x)P(x)$	EG, 3)
	6) $(\exists x)Q(x)$	EG, 4)
	7) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$	T, 5), 6), I

请看上述推论的逆推导：

1)	$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$	P
2)	$(\exists x)P(x)$	T, 1), I
3)	$P(c)$	ES, 2)
4)	$(\exists x)Q(x)$	T, 1), I
5)	$Q(c)$	ES, 4)
6)	$P(c) \wedge Q(c)$	T, 3), 4), I
7)	$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$	EG, 6)

正确地推导：

1)	$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$	P
2)	$(\exists x)P(x)$	T, 1), I
3)	$P(c)$	ES, 2)
4)	$(\exists x)Q(x)$	T, 1), I
5)	$Q(b)$	ES, 4)
6)	$P(c) \wedge Q(b)$	T, 3), 4), I
7)	$(\exists y)(P(c) \wedge Q(y))$	EG, 6)
8)	$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$	EG, 7)

例

证明$(\forall x)(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

证明（采用反证法，CP规则的方法由学生完成）：

1) $\neg((\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))$ P（附加）

2) $\neg(\forall x)P(x)\wedge\neg(\exists x)Q(x)$ T, 1), E

3) $\neg(\forall x)P(x)$ T, 2), I

4) $\neg(\exists x)Q(x)$ T, 2), I

5) $(\exists x)\neg P(x)$ T, 3), E

6) $\neg P(c)$ ES, 5)

7)	$(\forall x)\neg Q(x)$	T, 4), E
8)	$\neg Q(c)$	US, 7)
9)	$\neg P(c)\wedge\neg Q(c)$	T, 6), 8), I
10)	$\neg(P(c)\vee Q(c))$	T, 9), E
11)	$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$	P
12)	$(P(c)\vee Q(c))$	US, 11)
13)	$\neg(P(c)\vee Q(c))\wedge(P(c)\vee Q(c))$	T, 10), 12)

谓词逻辑推理的难点

1. 在推导过程中，如既要使用规则US又要使用规则ES消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先先使用规则ES，再使用规则US。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则UG或规则EG引入量词，得到所要的结论。
2. 如一个变量是用规则ES消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG，而不能使用规则UG；如使用规则US消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG和规则UG。

谓词逻辑推理的难点（续）

3. 如有两个含有存在量词的公式，当用规则ES消去量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。
4. 在用规则US和规则ES消去量词、用规则UG和规则EG添加量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，并且它的辖域为其后的整个公式。

谓词逻辑推理的难点（续）

5. 在添加量词(∀x)、(∃x)时，所选用的x不能在公式G(y)或G(c)中自由出现且G(y)或G(c)对x是自由的。
6. 在使用规则EG引入存在量词(∃x)时，此x不得仅为G(c)或G(y)中的函数变元。在使用规则UG引入全称量词(∀x)时，此x不得为G(y)中的函数变元(因该函数变元不得作为自由变元)。
7. 在使用规则UG引入全称量词(∀x)时，G(y)中不得出现在使用规则US引入y之后由规则ES引入的常量或函数。

四、 谓词逻辑推理的应用

例 每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车；有的人不喜欢骑自行车。因而有的人不喜欢步行。

设：H(x)：x是人；　　P(x)：x喜欢坐汽车；

Q(x)：x喜欢骑自行车；　R(x)：x喜欢步行。

则上述语句可符号化为：

$(\forall x)(H(x) \land R(x) \to \neg P(x))$，

$(\forall x)(H(x) \to P(x) \lor Q(x))$，

$(\exists x)(H(x) \land \neg Q(x))$

$$\Rightarrow \quad (\exists x)(H(x) \land \neg R(x))$$

(1)	$(\exists x)(H(x) \wedge \neg Q(x))$	P
(2)	$H(c) \wedge \neg Q(c)$	ES,(1)
(3)	$H(c)$	T,(2),I
(4)	$\neg Q(c)$	T,(2),I
(5)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))$	P
(6)	$H(c) \rightarrow P(c) \vee Q(c)$	US,(5)
(7)	$P(c) \vee Q(c)$	T,(3),(6),I
(8)	$P(c)$	T,(4),(7),I

(9)	$(\forall x)(H(x) \wedge R(x) \rightarrow \neg P(x))$	P
(10)	$H(c) \wedge R(c) \rightarrow \neg P(c)$	US,(9)
(11)	$\neg(H(c) \wedge R(c))$	T,(8),(10),I
(12)	$\neg H(c) \vee \neg R(c)$	T,(11),E
(13)	$\neg R(c)$	T,(3),(12),I
(14)	$H(c) \wedge \neg R(c)$	T,(3),(13),I
(15)	$(\exists x)(H(x) \wedge \neg R(x))$	EG,(14)

例

每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车；有的人不喜欢骑自行车。因而有的人不喜欢步行。

设：个体域D＝{人}；　　P(x)：人x喜欢坐汽车；

Q(x)：人x喜欢骑自行车；

R(x)：人x喜欢步行。

则上述语句可符号化为：

$$(\forall x)(R(x)\rightarrow\neg P(x)),\quad (\forall x)(P(x)\vee Q(x)),$$

$$(\exists x)(\neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(\neg R(x))$$

证明

(1)	$(\exists x)(\neg Q(x))$	P
(2)	$\neg Q(c)$	ES,(1)
(3)	$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$	P
(4)	$P(c)\vee Q(c)$	US,(3)
(5)	$P(c)$	T,(2),(4),I
(6)	$(\forall x)(R(x)\rightarrow\neg P(x))$	P
(7)	$R(c)\rightarrow\neg P(c)$	US,(6)
(8)	$\neg R(c)$	T,(5),(7),I
(9)	$(\exists x)\neg R(x)$	EG,(8)

四、 数学归纳法

* 数学归纳法原理

假设要证明的命题能写成形式:

$\forall n \geq n_0$，有P(n)

其中n_0是某个固定的整数，

即：希望证明对所有的整数$n \geq n_0$都有P(n)为真。

数学归纳法原理

假设

1） 验证$n=n_0$，有$P(n_0)$为真；　　　　（归纳基础）

2） 假设对于$n=k(k\geq n_0)$，有$P(k)$为真；（归纳假设）

3） 证明$n=k+1$，有$P(k+1)$为真。　　　（归纳结论）

结论 对所有的整数$n\geq n_0$，都有$P(n)$为真。

谓词表示：

$$(\exists n_0)(P(n_0) \wedge (\forall n)((n=k) \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))=1$$

本章要点

- 推理的基本原理
- 难点：谓词逻辑的证明
- 实际问题的推理能力