概率论与数理统计

第一章　概率论的基本概念

§2 样本空间、随机事件

- 样本空间、样本点
- 随机事件的概念
- 随机事件间的关系及运算

一、样本空间 样本点

问题 随机试验的结果?

定义 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 S .

样本空间的元素 , 即试验E 的每一个结果, 称为样本点.

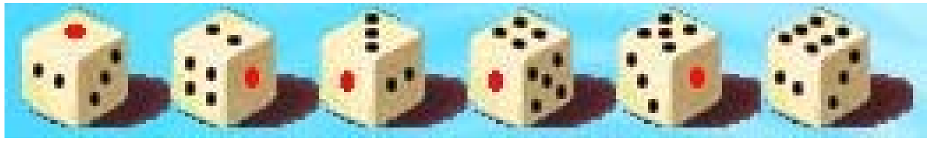
实例1 抛掷一枚硬币,观察字面,花面出现的情况.

$H \rightarrow$ 字面朝上

$$S_1 = \{H, T\}.$$

$T \rightarrow$ 花面朝上

实例2 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



$$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

实例3 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的情况.

记 $N \to$ 正品, $D \to$ 次品.

则 $S_3 = \{ NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DDN, DND, DDD \}.$

实例4 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

$$S_4 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

实例5 考察某地区 12月份的平均气温.

$$S_5 = \{t \mid T_1 < t < T_2\}.$$

其中 t 为平均温度.

实例6　从一批灯泡中任取一只, 测试其寿命.

$$S_6 = \{t \mid t \geq 0\}.$$

其中 t 为灯泡的寿命 .

实例7 记录某城市120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

$$S_7 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

练习

写出下列随机试验的样本空间.

1. 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子之和.
2. 生产产品直到得到10件正品,记录生产产品的总件数.

答案

1. $S=\{3,4,5,\cdots,18\}$.

2. $S=\{10,11,12,\cdots\}$.

说明 1. 试验不同, 对应的样本空间也不同.

2. 同一试验 , 若试验目的不同,则对应的样本空间也不同.

例如 对于同一试验: "将一枚硬币抛掷三次" .

若观察正面 H、反面 T 出现的情况 ,则样本空间为

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}.$$

若观察出现正面的次数 ， 则样本空间为

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

说明　3. 建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此，一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如　只包含两个样本点的样本空间

$$S=\{H,T\}$$

它既可以作为抛掷硬币出现正面或出现反面的模型，也可以作为产品检验中合格与不合格的模型，又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型等.

所以在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间.

二、随机事件的概念

1. 基本概念

随机事件　随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件, 简称事件.

实例　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

试验中,骰子"出现1点", "出现2点", ... ,"出现6点",

"点数不大于4", "点数为偶数" 等都为随机事件.

基本事件　由一个样本点组成的单点集.

实例　“出现1点”，“出现2点”，…，“出现6点”.

必然事件　随机试验中必然会出现的结果.

实例　上述试验中 “点数不大于6” 就是必然事件.

不可能事件　随机试验中不可能出现的结果.

实例　上述试验中 “点数大于6” 就是不可能事件.

必然事件的对立面是不可能事件,不可能事件的对立面是必然事件,它们互称为对立事件.

2. 几点说明

(1) 随机事件可简称为事件, 并以大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 来表示事件

例如　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

可设　A = “点数不大于4”,

B = “点数为奇数” 等等.

(2) 随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

随机事件
- 基本事件
- 复合事件
- 必然事件
- 不可能事件

必然事件、不可能事件：互为对立事件

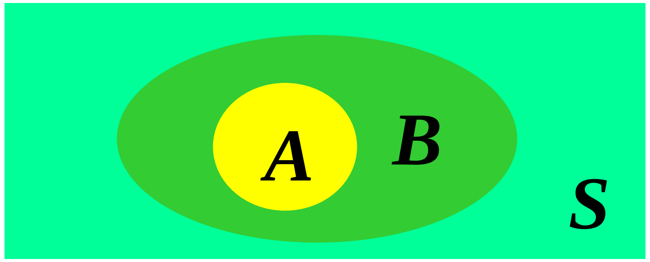
三、随机事件间的关系及运算

设试验 E 的样本空间为 S, 而 A, B, A_k $(k = 1,2,\cdots)$是 S 的子集.

1. 包含关系 若事件 A 出现, 必然导致 B 出现, 则称事件 B 包含事件 A,记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

实例 "长度不合格" 必然导致 "产品不合格" 所以"产品不合格"包含"长度不合格".

图示 B 包含 A.



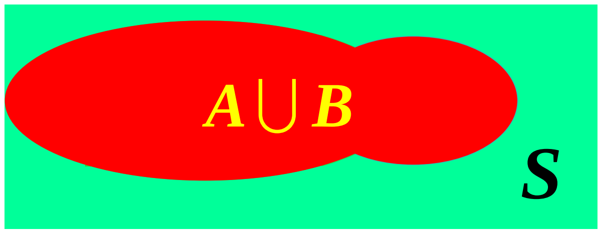
2. A等于B 若事件 A 包含事件 B， 而且事件B包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

3. 事件 A 与 B 的并(和事件)

事件 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$称为事件 A 与事件B的**和事件**.

实例　某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此 “产品不合格” 是 “长度不合格” 与 “直径不合格” 的并.

图示事件 A 与 B 的并.



推广　称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

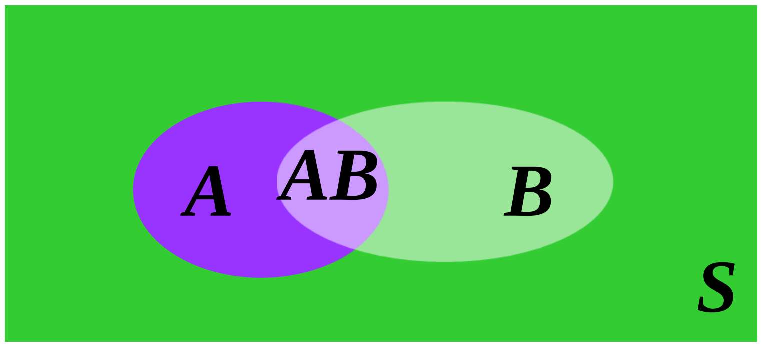
4. 事件 A 与 B 的交 (积事件)

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**积事件.**

积事件也可记作　$A \cdot B$ 或 AB.

实例　某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此“产品合格”是“长度合格”与“直径合格”的交或积事件.

图示事件A与B的积事件.



推广　称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$的积事件.

和事件与积事件的运算性质

$$A \cup A = A, \quad A \cup S = S, \quad A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap S = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

5. 事件 A 与 B 互不相容 (互斥)

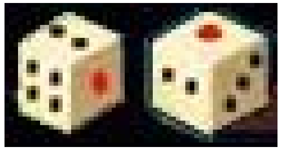
若事件 A 的出现必然导致事件 B 不出现, B 出现也必然导致 A不出现,则称事件 A与B互不相容, 即

$$A \cap B = AB = \varnothing.$$

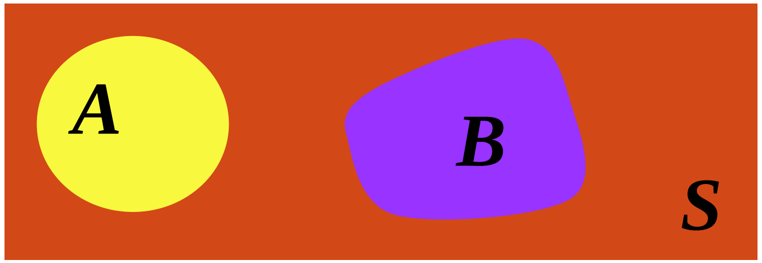
实例 抛掷一枚硬币, "出现花面" 与 "出现字面" 是互不相容的两个事件.

实例　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数 .

"骰子出现1点" $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ "骰子出现2点"



图示 A 与 B 互斥.



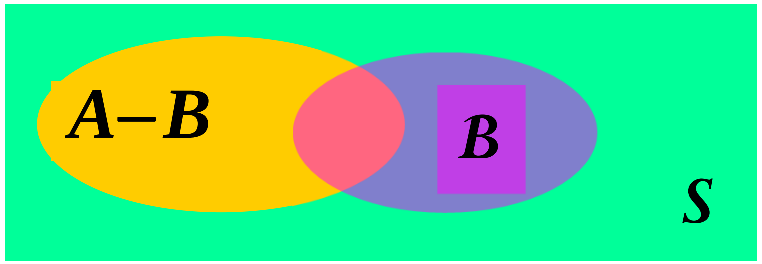
6. 事件 A 与 B 的差

由事件 A 出现而事件 B 不出现所组成的事件称为事件 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

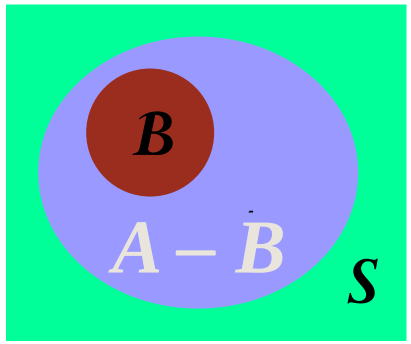
实例 “长度合格但直径不合格” 是 “长度合格” 与 “直径合格” 的差.

图示 A 与 B 的差.

$B \not\subset A$



$B \subset A$

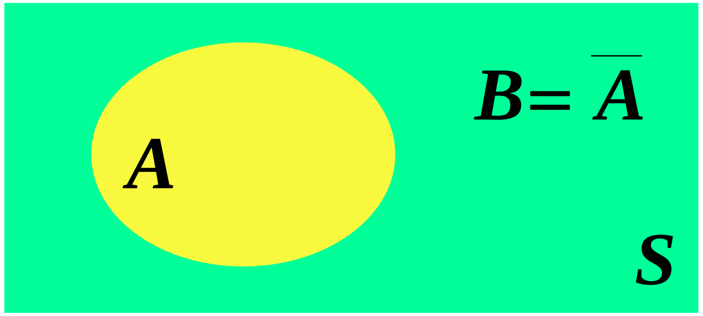


7. 事件 A 的对立事件

设 A 表示“事件 A 出现”，则“事件 A 不出现”称为事件 A 的对立事件或逆事件. 记作 $\overline{A}$.

实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

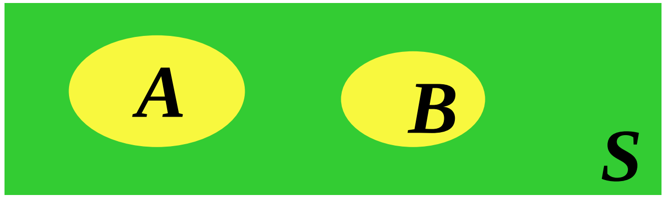
图示 A 与 B 的对立.



若 A 与 B 互逆,则有 $A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$.

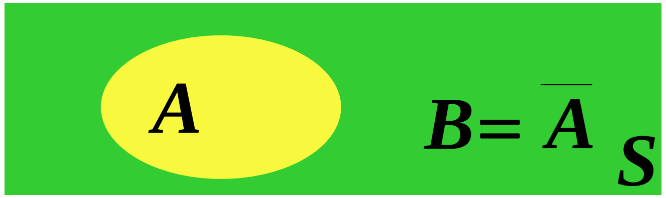
对立事件与互斥事件的区别

A、B 互斥



$$AB=\varnothing$$

A、B 对立



$$A\cup B=S \text{ 且 } AB=\varnothing$$

互　斥 $\underset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 对　立

事件间的运算规律 设 A, B, C 为事件, 则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, \ AB = BA.$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(AB)C = A(BC).$$

(3) 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC,$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$$

(4)德 · 摩根律： $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

例1 设A,B,C表示三个随机事件,试将下列事件用A,B,C表示出来.

(1) A出现，B,C不出现;

(2) A,B都出现, C不出现;

(3) 三个事件都出现;

(4) 三个事件至少有一个出现;

(5) 三个事件都不出现;

(6) 不多于一个事件出现;

(7) 不多于两个事件出现;

(8) 三个事件至少有两个出现;

(9) A, B 至少有一个出现, C 不出现;

(10) A, B, C 中恰好有两个出现.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$; (2) $AB\overline{C}$; (3) ABC;

(4) $A \cup B \cup C$; (5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C;$

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C}$

$\cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC,$

或 $\overline{\boldsymbol{ABC}}$;

(8) $ABC \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC;$

(9) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})\bar{\boldsymbol{C}};$

(10) $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC.$

例2 设一个工人生产了四个 零件, A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 $(i = 1,2,3,4)$, 试用 A_i 表示下列各事件：

(1)没有一个是次品; (2)至少有一个是次品;

(3)只有一个是次品; (4)至少有三个不是次品;

(5)恰好有三个是次品; (6)至多有一个是次品.

解 (1) $A_1A_2A_3A_4$;

(2) $\overline{A_1}A_2A_3A_4 \cup A_1\overline{A_2}A_3A_4 \cup A_1A_2\overline{A_3}A_4 \cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$

$\cup\, \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4 \cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 \cup A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} \cup \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}$

$\cup\, \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4 \cup A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}$

$\cup\, \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} \cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$,

或 $\overline{\boldsymbol{A_1 A_2 A_3 A_4}}$;

(3) $\overline{A_1}A_2A_3A_4 \cup A_1\overline{A_2}A_3A_4 \cup A_1A_2\overline{A_3}A_4 \cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$;

(4) $\overline{A_1}A_2A_3A_4 \cup A_1\overline{A_2}A_3A_4 \cup A_1A_2\overline{A_3}A_4 \cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$

$\cup A_1A_2A_3A_4$;

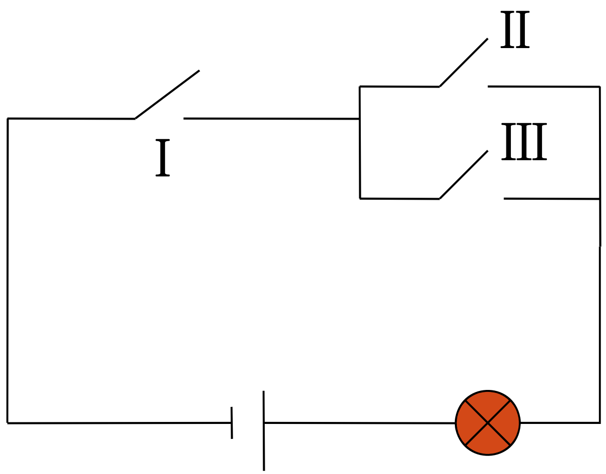
(5) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}$

$\cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$;

(6) $\overline{A_1}A_2A_3A_4 \cup A_1\overline{A_2}A_3A_4 \cup A_1A_2\overline{A_3}A_4 \cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$

$\cup A_1A_2A_3A_4$.

例3: 如图所示的电路中，以A表示事件“信号灯亮”，B，C，D分别表示事件：继电器接点Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ闭合，以B，C，D表示A及Ā。



解：在如图的电路中，信号灯亮当且仅当接点Ⅰ闭合且Ⅱ与Ⅲ中至少有一个闭合，因此由事件的运算，易得

A=B∩(C∪D)

信号灯不亮当且仅当Ⅰ断开或Ⅱ，Ⅲ都断开，故 $\overline{A}=\overline{B}\cup\left(\overline{C}\,\overline{D}\right)$

小结

1. 随机试验、样本空间与随机事件的关系

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

$$\text{随机事件}\begin{cases}\text{基本事件}\\ \text{复合事件}\\ \text{必然事件}\\ \text{不可能事件}\end{cases}$$

2. 概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	空间
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\overline{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A出现必然导致B出现	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	集合A与集合B相等

$A \cup B$	事件A与事件B的和	集合A与集合B的并集
AB	事件A与事件B的积事件	集合A与集合B的交集
$A-B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$AB=\varnothing$	事件A与B互不相容	A与B 两集合中没有相同的元素

作业：课后习题 2

练习：

1、 一个工人生产了3个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品 $(i=1,2,3)$，试用 A_i $(i=1,2,3)$ 表示下列事件：

(1) 只有第一个零件是合格 品 (B_1);

(2) 三个零件中只有一个零 件是合格品 (B_2);

(3) 第一个是合格品，但后两个零件中至少有 一个次品 (B_3);

(4) 三个零件中最多只有两 个合格品 (B_4);

(5) 三个零件都是次品 (B_5).

解 (1) $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(2) $B_2 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$;

(3) $B_3 = A_1(\overline{A_2} \cup \overline{A_3})$;

(4) $B_4 = \overline{A_1A_2A_3}$, 或 $B_4 = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$;

(5) $B_5 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, 或 $B_5 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.

说明 一个事件往往有多个等价的表达方式.