

# 第六章 欧几里德空间

## § 6.2 正交变换

# 复习

**正交矩阵：** 若 $n$ 阶方阵满足 $A^T A = E$  (即 $A^{-1} = A^T$ )，则 $A$ 称为正交矩阵.

**定理：** 方阵 $A$ 为正交矩阵  $\Leftrightarrow A$ 的列(行)向量都是单位向量且两两正交.

**证明：** 练习

**例：** 验证 $P$ 矩阵为正交矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



# 正交变换的定义

定义：设 $T$ 是欧氏空间 $V$ 中的线性变换，如果对于任意的 $\alpha \in V$ ，都有 $|T\alpha| = |\alpha|$ ，即 $\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$ ，则 $T$ 称为正交变换。

【保持向量的模不变】

例 在几何空间中把每一向量旋转一个角 $\theta$ 的线性变换是正交变换。

定理1 欧氏空间 $V$ 中的一个线性变换 $T$ 是正交变换

$\Leftrightarrow$  对  $\forall \alpha, \beta \in V$ , 有  $\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$

【保持向量的内积不变】

证明：**充分性**，如果对 $\forall \alpha, \beta \in V$ , 有  $\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$

令 $\alpha = \beta$ , 有  $\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$ ,  $|T\alpha| = |\alpha|$

则 $T$ 是正交变换.

**必要性**，若 $T$ 是正交变换，则

$$|T\alpha| = |\alpha|, |T\beta| = |\beta|, |T(\alpha + \beta)| = |\alpha + \beta|$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &= |T(\alpha + \beta)|^2 - |\alpha + \beta|^2 = |T\alpha + T\beta|^2 - |\alpha + \beta|^2 \\ &= |T\alpha|^2 + |T\beta|^2 + 2\langle T\alpha, T\beta \rangle - |\alpha|^2 - |\beta|^2 - 2\langle \alpha, \beta \rangle \\ &= 2\langle T\alpha, T\beta \rangle - 2\langle \alpha, \beta \rangle \\ \therefore \langle T\alpha, T\beta \rangle &= \langle \alpha, \beta \rangle \end{aligned}$$



推论 设 $T$ 为欧氏空间的正交变换, 又 $\forall \alpha, \beta \in V$ , 则

$$\widehat{(\alpha, \beta)} = \widehat{(T\alpha, T\beta)}$$

【保持夹角不变】

证

$$\widehat{(\alpha, \beta)} = \arccos \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| |\beta|} = \arccos \frac{\langle T\alpha, T\beta \rangle}{|T\alpha| |T\beta|} = \widehat{(T\alpha, T\beta)}$$

总结: 正交变换保持向量的模、内积、夹角不变

# $n$ 维欧氏空间中正交变换的重要结论

定理2: 设  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的**标准正交基底**,  $V$  中的线性变换  $T$  为正交变换  $\Leftrightarrow [T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \dots, T\varepsilon_n]$  **也是  $V$  的标准正交基底**.

证明: **必要性**, 设  $T$  是正交变换, 由定理1得

$$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\therefore T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \dots, T\varepsilon_n$  是  $n$  维线性空间  $V$  中标准正交组.

$\therefore T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \dots, T\varepsilon_n$  是  $V$  的标准正交基.



**充分性**,  $T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \dots, T\varepsilon_n$  是  $V$  的标准正交基, 则  
对于任意  $\alpha \in V$ , 设它在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下的坐标为  
 $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 则

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$$

$$T\alpha = a_1T\varepsilon_1 + a_2T\varepsilon_2 + \dots + a_nT\varepsilon_n$$

$$|T\alpha|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = |\alpha|^2$$

$$|T\alpha| = |\alpha|$$

从而  $T$  是正交变换.

**定理3** 设  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的标准正交基底,  
 $V$  中的线性变换  $T$  为正交变换  $\Leftrightarrow T$  在标准正交  
基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$  下的矩阵  $H = (h_{ij})_{n \times n}$  是**正交**矩阵.

**证明:** (正交矩阵的列向量组是由正交的单位向量构成的向量组)

矩阵  $H$  是线性变换  $T$  在标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$   
下的矩阵. 即

$$[T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \dots, T\varepsilon_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]H$$

于是,  $\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j \rangle = h_{i1}h_{j1} + h_{i2}h_{j2} + \dots + h_{in}h_{jn} = \sum_{k=1}^n h_{ik}h_{jk}$



则,  $T$ 是正交变换

↔  $T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \dots, T\varepsilon_n$  是  $V$  的标准正交基.

$$\leftrightarrow \langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j \rangle = \sum_{k=1}^n h_{ik} h_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

↔  $H = (h_{ij})_{n \times n}$  是正交矩阵.

## 定理1—3总结为1个定理

定理: 设  $T$  是欧氏空间  $V$  的一个线性变换, 则下述条件等价

- 1)  $T$  是正交变换;
- 2)  $T$  保持向量的内积不变;
- 3)  $T$  把标准正交基变为标准正交基;
- 4)  $T$  在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

另外，假设 $n$ 维欧氏空间 $V$ 中从基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$  到基底  $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$  的过渡矩阵为 $M$ ，即

$$[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]M$$

(1)若  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$  和  $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$  都是 $V$ 的标准正交基底，则 $M$ 为正交矩阵.

(2)若  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$  是 $V$ 的标准正交基底， $M$ 为正交矩阵. 则  $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$  也为标准正交基底.



# 小结

- 正交变换的定义（重点）
- 正交变换的判定（重点）
- $n$ 维欧氏空间中正交变换的重要结论

1. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是欧氏空间的一组基, 证明:

(1) 如果  $\gamma \in V$  使  $(\gamma, \alpha_i) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 那么  $\gamma = 0$

(2) 如果  $\gamma_1, \gamma_2 \in V$  使对任一  $\alpha \in V$  有  $(\gamma_1, \alpha) = (\gamma_2, \alpha)$  那么  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

2. 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$  是5维欧氏空间  $V$  的一组标准正交基,

$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 其中  $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$   
求  $V_1$  的一组标准正交基.

3. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的一组向量, 而

$$\Delta = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$$

证明: 当且仅当  $|\Delta| \neq 0$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.



证：1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的一组基，所以  $\gamma$  可表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的线性组合，即  $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$ .

由  $(\gamma, \alpha_i) = 0$

知

$$(\gamma, \gamma) = (\gamma, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n) = k_1(\gamma, \alpha_1) + \dots + k_n(\gamma, \alpha_n) = 0$$

故  $\gamma = 0$ .

**2)由题设，特别对基  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$**

**有  $(\gamma_1, \alpha_i) = (\gamma_2, \alpha_i) (i = 1, 2, \cdots, n),$**

**即  $(\gamma_1 - \gamma_2, \alpha_i) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$**

**由1) 知  $\gamma_1 - \gamma_2 = 0,$**

**即  $\gamma_1 = \gamma_2.$**



**2. 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$  是5维欧氏空间  $V$  的一组标准正交基,**

**$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 其中  $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$**

**求  $V_1$  的一组标准正交基.**

**解: 首先不难证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是线性无关, 将它们正交化得**

$$\beta_1 = \alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \frac{1}{2} \varepsilon_5$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5$$

**单位化得**

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5), \eta_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_4 - \varepsilon_5)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5)$$

**则  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  就是  $V_1$  的一组标准正交基.**



3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的一组向量, 而

$$\Delta = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$$

证明: 当且仅当  $|\Delta| \neq 0$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

证： 设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ ,

两边与  $\alpha_i$  取内积得

$$k_1(\alpha_i, \alpha_1) + k_2(\alpha_i, \alpha_2) + \cdots + k_m(\alpha_i, \alpha_m) = 0$$

从而  $(k_1, k_2, \cdots, k_m)'$  是  $\Delta x = 0$  的解,

又当且仅当  $|\Delta| \neq 0$  时, 该方程组只有零解,

即  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关.



# 作业

- 第六章习题
- 1.
- 3.
- 7.
- 8.
- 10