Chpt.4 Digital Features of Random Variables

第四章 随机变量的数字特征

Why Digital Features?

Reviews

引入随机变量把概率研究抽象化

引入分布函数使之可以借鉴已有的数学工具

WHY Digital Features

[1]分布函数全面反映随机变量的性质，但是并不易掌握。随机变量是否有一些特征，比较突出地反映其性质？如取所有值的平均情况，X与均值的偏离情况。

例：研究生入学考试成绩

- 限定总分，由总分可以知道多科的平均分；
- 但是同时限定单科的最低分；
- 平均值高、偏离均值小的才是好的。

Why Digital Features?

[2] 当我们比较不同的随机变量时，分布函数或分布律并不可用，以分布律而言，它只说明变量取某值的可能性，是概率特性，从概率的角度我们不能说一个变量比另一个变量如何。

Example (pp.81, 例5) 设系统L由两个相互独立的子系统L_1, L_2链接而成，连接的方式分别为（1）串联（2）并联（3）备用

串联min(X,Y), $f_1(z) = (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}$

并联Max(X,Y), $f_2(z) = \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}$

备用X+Y, $f_3(z) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}]$

直观上看，应该是系统寿命：备用 ＞ 并联 ＞ 串联；

但是，由于是随机的，可能具体的一个备用模式的寿命比其他还短

Why Digital Features?

[3] 根据经验，某些随机现象的随机变量服从某类分布，它们的一些参数可由某些数字特征确定. 对这些随机现象，数字特征有更重要的意义.

E.g. 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，二项分布 $B(n, p)$，泊松分布 $\pi(\lambda)$

主要的数字特征

- 数学期望：描述一个随机变量的平均水平（即均值）
- 方　　差：描述一个随机变量的相对于均值的离散程度
- 相关系数：描述两个随机变量间线性关系的密切程度

分赌本问题

甲、乙二人各出同等数目的赌注，比方说1000元，然后进行博弈。每一局甲胜和乙胜都有同等概率，即0.5。二人约定：谁先胜满m局(如在7盘棋中，m=4），谁就取走全部赌注2000元。

到某时为止，甲胜了 a 局，而乙胜 b 局，a、b都比 m 小，而二人因故要中止博弈，问这2000元赌注该如何分才算公平。

分析：

[1] 如果a＝b，则二人态势一样，平分赌注不会有异议；

[2] 若a、b不等，例如 a＞b，则甲理应多分一些才公平。

但具体的比例该如何才算公平?

若干不同的解法

[1] 帕西奥利（1494年）

按a：b的比例分配

[2] 塔泰格利亚（1556年）

按m＋a－b：m－a＋b的比例分配。

同时，他又指出，此问题最好交由法官判决。

[3] 法雷斯泰尼（1603年）

按2m－1＋a－b：2m－1－a＋b的比例分配

[4] 卡丹诺（1539年）

记u＝m－a，v＝m－b，其中u、v是甲、乙最终取胜尚需的胜局数，若a＞b．则u＜v。

按v(v＋1)：u(u＋1)的比例分配赌注。

[5] 巴斯卡（1654年）

假这两个人继续赌下去，记$u=m-a$，$v=m-b$

则至多不超过$u+v-1$局，就会最后见分晓。

甲、乙最后获胜都有一定的概率，分别记为p和q $(p+q=1)$。

当 $a>b$ 时必然 $p>q$。算出p和q，巴斯卡主张赌注应接p：q的比例去分配。

一般情况下：

比赛$2n+1$盘，先胜$n+1=m$ 盘者获胜；进行了$a+b$局后终止比赛时，只要没有哪位选手胜了$n+1=m$ 盘，后面理论上还要进行$(2n+1)-(a+b)=u+v-1$盘比赛。

[5] 巴斯卡（1654年）

假设a＝2，b＝1，

例如：设m＝4（2n＋1＝7），则理论上后4局还需要赌。

这4局的结果有16种可能，而甲获胜的可能为：$C_4^2+C_4^3+C_4^4=11$

故甲、乙最终获胜的概率分别为11 / 1 6和5 / 16。

赌本应按11：5的比例分给甲和乙。

例如：设m＝5（2n+1＝9），则理论上后6局还需要赌。

6局的结果有64种可能，而甲获胜的可能为：

$$C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=42$$

故甲、乙最终获胜的概率分别为42 / 64和22 / 64。

赌本应按21：11的比例分给甲和乙。

分赌本问题若干不同的解法

[5] 巴斯卡（1654年）

为什么按最终获胜的概率之比去分配是公平的？

二人按各自的期望所得去分配应是合理的。各人的“期望所得”：

在最后4局未赌之前，甲有可能获得2000元，但机会只有11 / 1 6，因而他的“期望所得”只有2000 X (11/16)元＝1375元。

同样，乙的“期望所得”为2000 X (5/1 6)元＝625元。

期望所得之比，与获胜概率之比是一回事，所以按最终获胜的概率之比去分配是公平的。

由此，引出了期望(Expectation)概念

Example 为评价甲的射击技术，随机观察甲的10次射击，统计各次击中环数x_k和频数v_k如下表，求他每次射击击中的平均环数. (其中$N=\Sigma v_k=10$).

击中环数x_k	8	9	10
频数v_k	2	5	3
频 率$f_k=v_k/N$	0.2	0.5	0.3

解 这是一般求平均数 $\overline{x}$ 问题，此时

$$\overline{x}=\left(8\times 2+9\times 5+10\times 3\right)/10$$
$$=8\times\frac{2}{10}+9\times\frac{5}{10}+10\times\frac{3}{10}$$
$$=9.1$$

写成一般形式就是

$$\bar{x}=\left(\sum_k x_k v_k\right)\Big/N=\sum_k x_k v_k/N=\sum_k x_k f_k$$

若要全面考察甲的射击技术，仅凭这10次观察是不够的，因为频率 $v_k/N=f_k$ 是与该次射击(试验)的结果有关的.

观察次数N不断增多，由于频率稳定于概率 p_k ，和式 $\sum_k x_k f_k$ 就趋于稳定

$$\sum_k x_k f_k \longrightarrow \sum_k x_k p_k$$

它是一个确定值，不依赖于具体试验，应该更能表示甲的射击水平.

4.1.1 数学期望定义

离散随机变量的均值

[Definition] 设离散型随机变量 X 的分布列为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

如果级数 $\sum x_k p_k$ 绝对收敛，即 $\sum_k |x_k| p_k < \infty$，就称此级数的和为X的数学期望 (mathematical expectation) 或均值 (mean)，记作 E(X)。

Example 退化分布P{X=a}=1的数学期望 EX=a, 也即常数的数学期望就是它本身.

Example 二项分布X~B(n,p)的数学期望

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} p^{r} (1-p)^{(n-1)-r}$$

$$=np(p+[1-p])^{n-1}$$

$$=np$$

Remark 1： 均值的含义由上述例子可见。n 次试验中出现的平均数是np。

Remark 2：当n＝1时，两点分布 (0—1分布)的数学期望为p.

Remark3：条件$\sum_k |x_k| p_k < \infty$ 表示$E(X)=\sum x_k p_k$不受求和次序的影响，从而E(X)是一个确定的值（这是需要的，因实际情况中出现可能无次序的）. 当条件不满足时，就称X的数学期望不存在.

例 设随机变量X取值为 $(-1)^k 2^k/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, 取得各值的概率为 $P\{X=(-1)^k 2^k/k\}=\dfrac{1}{2^k}$

由$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| p_k=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}=\infty$(调和级数), $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{k}<\infty$ (莱布尼兹级数)，仍说E(X) 不存在

Example 泊松分布 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k=0,1,2,\cdots)$ 的数学期望

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}$$

$$=\lambda$$

故泊松分布中参数λ就是它的数学期望.

Example 几何分布 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}(k=1,2,\cdots)$ 的数学期望。

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}$$

记 $q=1-p$

$$E(x)=p\frac{d}{dq}\left[\sum_{k=1}^{\infty}q^{k}\right]$$

$$=p\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right]$$

$$=p\frac{(1-q)+q}{(1-q)^{2}}$$

$$=\frac{1}{p}$$

Example （pp.93例5） 在一个人数很多的单位中普查某疾病, N个人验血，可用两种方法:

(1) 每个人化验一次，共需化验N次；

(2) k个人的血混合化验，如果结果是不含该病菌，说明这k个人都无该病，这样k个人化验一次即可；如果结果是含该病菌，则该组每个人再分别化验一次， k个人共化验 (k+1) 次.

试说明当 p 较小时，选取适当的k，按第二种方法可以减少化验次数，并说明k取什么值时最适宜。

解 记用第二种方法化验时，分N人为(N/k) 组。一组k人所需化验次数为X.

第一种情况是k个人化验一次，则一组人化验X=1次的概率为

$$P\{X=1\}=(1-p)^k$$

第二种情况是k个人化验 (k+1) 次, 其概率为

$$P\{X=k+1\}=1-(1-p)^k$$

X	1	k+1
p	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

所以

$$E(X)=(1-p)^k+(k+1)[1-(1-p)^k]$$

$$=k+1-k(1-p)^k$$

N个人分成N/k组所需的平均化验次数为

$$\frac{N}{k}E(X)=N\left[1-(1-p)^k+\frac{1}{k}\right]$$

由此只要选择k使得下式成立，分组就比不分组节省次数。

$$N\left[1-(1-p)^k+\frac{1}{k}\right]<N$$

考虑N充分大，则使得 $L=1-(1-p)^k+\dfrac{1}{k}<1$, 要 $k(1-p)^k>1$。

注意到p较小时，1－p 较大，容易取到 k 使 $k(1-p)^k>1$。

如果p=0.1

k	1	2	3	4	5	6	7
$k(1-p)^k$	0.9	1.62	2.187	2.6244	2.95425	3.1886	3.3480
$1-(1-p)^k+1/k$	1.1	0.69	0.6043	0.5939	0.60951	0.6352	

可见取 k=4 最好。如果N=1000，第二种方法平均化验数为

$$N\left[1-(1-p)^k+\frac{1}{k}\right]\approx 594$$

连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量X，其密度函数为 $f(x)$. 其数学期望的定义可借鉴离散型情形的定义及普通积分的导出过程来引入.

STEP 1：先设X只在有限区间 $[a, b]$ 上取值，将 $[a, b]$作分割：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

X 落在各小段的概率

$$P\{x_k < X \le x_{k+1}\} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f(x_k)\Delta x_k$$

近似地视为落在一点上x_k 的概率

STEP 2：与它相应的离散型随机变量的数学期望 $\sum x_k f(x_k)\Delta x_k$

STEP 3：令n→∞, $\max\{\Delta x_k\} \to 0$, 则和式的极限为积分.

$$\int_a^b xf(x)dx$$

自然把它作为X的数学期望. 如果X在整个实轴$(-\infty, \infty)$上取值，让$a\to\infty$，$b\to\infty$, 就得如下的一般定义.

Definition 设X为连续型随机变量，有密度函数 $f(x)$，则当

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx < \infty$$

时，称 $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 为X的数学期望.

如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx = \infty$，就称$X$的数学期望不存在.

Example 均匀分布的密度函数：$a \le x \le b$ 时，它的数学期望

$$E(x) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

Example 正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的数学期望.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)+\frac{\mu}{\sigma}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\sigma\int_{-\infty}^{\infty}[y+\frac{\mu}{\sigma}]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\sigma\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\mu$$

因此正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ 中参数 μ 表示它的均值，这在密度函数的图形中已显示出来了.

Example 指数分布的数学期望

设随机变量X服从指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

其中λ>0是常数. 求：E(X)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$
$$=\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$=\int_0^{\infty}-xde^{-\lambda x}$$
$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx$$
$$=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}$$
$$=\frac{1}{\lambda}$$

如果密度函数表示为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $\quad E(x)=\theta$

Example 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待的服务的时间 X(以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{0}^{\infty}x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\,\mathrm{d}\,x=5(\text{分钟}).$$

因此,顾客平均等待5分钟就可得到服务.

Example 设随机变量X服从Γ(α, β)分布，求它的数学期望

解 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} u^{a-1}e^{-u}du$$

$$EX=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^\alpha e^{-x/\beta}dx$$

$\boxed{y=x/\beta}$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\beta\, y^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-y}dy$$

$$=\frac{\beta\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$=\alpha\beta$$

$$\Gamma(a+1)=\int_0^{+\infty} u^a e^{-u}du$$

$$=-\int_0^{+\infty} u^a de^{-u}$$

$$=-u^a e^{-u}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-u}du^a$$

$$=a\int_0^{+\infty} u^{a-1}e^{-u}du$$

$$=a\Gamma(a)$$

4.1.2 随机变量函数的数学期望

我们知道X的分布列为

X	$x_1 \cdots\cdots\cdots x_k$
p	$p_1 \cdots\cdots\cdots p_k$

可以知道 X^2 的分布列为

X^2	$x_1^2 \cdots\cdots\cdots x_k^2$
p	$p_1 \cdots\cdots\cdots p_k$

故此 $E(X^2)=\sum x_k^2 p_k$

函数g(x)，随机变量Y=g(x)，有 $E(g(X))=\sum g(x_k)p_k$

对于连续随机变量X,其概率密度函数为f(x)，则

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

上式在计算某些随机变量的数学期望时很有用. 如果Y=g(X)，我们不必求Y的概率密度函数 $f_y(y)$，计算 $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_y(y)dy$，而是直接得到 $E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

设有联合概率密度函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，$Y=g(X_1,\cdots,X_n)$，则

$$E(Y)=\iint\limits_{R^n} g(x_1,\cdots,x_n)f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

特别地有

$$E(X_i)=\iint\limits_{R^n} x_i f(x_1,\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$$

Example 假X,Y是在区域 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上满足均匀分布

求 E(X).

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & (x,y)\in\Omega\\ 0 & others\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x\frac{1}{\pi}dxdy=0$$

Example 国际市场上每年对我国某种商品的需求量X服从 [2000, 4000]上的均匀分布.每售出一吨该商品可获利3万美元; 但若积压于仓库，每吨将损失1万美元. 问应组织多少货源才能使收益最大?

[解] 收益 a_s 与需求量X有关，也与组织的货源S有关.

a_s 是随机变量，故“收益最大”的含义是指“平均收益最大”.

抽象得到需求量 $X \sim U[S_1, S_2]$；

季内售出一吨获利 b 万美元，积压一吨损失 l 万美元；

进货量为 S $(S_1 \le S \le S_2)$

为使商店期望利润最大，如何进货S？

$$a_s(X) = \begin{cases} bX - (S - X)l & S_1 \le X \le S \\ bS & S \le X \le S_2 \end{cases}$$

$$a_S(X)=\begin{cases}(b+l)X-Sl & S_1\le X\le S\\ bS & S\le X\le S_2\end{cases}$$

X的概率密度是 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_2-S_1} & S_1\le X\le S_2\\ 0 & others\end{cases}$

$$E(a_s(X))=\int_{-\infty}^{\infty}a_s(x)f(x)dx$$

$$=\int_{S_1}^{S}\frac{1}{S_2-S_1}\left[(b+l)x-Sl\right]dx+\int_{S}^{S_2}\frac{bS}{S_2-S_1}dx$$

$$=\frac{1}{S_2-S_1}\left[\frac{1}{2}(b+l)(S^2-S_1^2)-Sl(S-S_1)\right]+\frac{bS(S_2-S)}{S_2-S_1}$$

$$=\frac{1}{S_2-S_1}\left[\frac{1}{2}(b+l)(S^2-S_1^2)-Sl(S-S_1)+bS(S_2-S)\right]$$

$$=\frac{1}{S_2-S_1}\left[-\frac{1}{2}(b+l)S^2-\frac{1}{2}(b+l)S_1^2+S(lS_1+bS_2)\right]$$

$E(a_s(X))$ 是S的函数，为了使其达到最大，S 满足 $\frac{d}{ds}E(a_s(X))=0$

也就是：

$$-(b+l)S+(lS_1+bS_2)=0$$

$$S=\frac{lS_1}{b+l}+\frac{bS_2}{b+l}$$

容易知道：

(1) $S_1 \le S \le S_2$

(2）S是S_1和 S_2的加权和，如果售出一件商品的利润远远高于售不出而亏损的价值，即 $b>>l$ ，则$S\to S_2$，尽量多进货；反之，一件亏损额较大，则 $S\to S_1$ 。

上述例子中：当S＝3500时，$E(\alpha_s)$ 达到最大值825万.

Example（pp.81,例5）

串联 min(X,Y), $f_1(z)=(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}$

并联 Max(X,Y)， $f_2(z)=\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}$

备用 X+Y， $f_3(z)=\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}]$

比较三者的分布函数或概率密度没有意义，比如尽管说备用比串联好，但是这里是随机现象，而不是具体的两个元器件，很可能实际结果是第三种寿命比第一种还短。要从均值角度描述比较。

$$E(Min(X,Y))=\int_0^{\infty}z(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}dz$$

$$=-ze^{-(\alpha+\beta)z}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+\beta)z}dz$$

$$=-\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)z}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+\beta}$$

Example（pp.81,例5）

$$E(Max(X,Y))=\int_0^{\infty} z\{\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}\}dz$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha+\beta}$$

$$E(X+Y)=\int_0^{\infty} z\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}]dz$$

$$=\frac{\beta}{\beta-\alpha}\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\frac{1}{\beta}$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

$$M_3>M_2>M_1$$

4.1.3 数学期望的基本性质

(1) 设 C 为常数，则有 $\boldsymbol{E(C)=C}$

(2) 设 X 是一个随机变量，C 为常数，则有 $E(CX)=CE(X)$

(3) 设 X_1，X_2，…，X_n 是 n 个随机变量，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为实数，则

$$E(c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n)=c_1E(X_1)+c_2E(X_2)+\cdots+c_nE(X_n)$$

(4) 设 X，Y 是相互独立的随机变量，则有

$$\boldsymbol{E(XY)=E(X)E(Y)}$$

Example 设X服从二项分布 $B(n,p)$，求$E(X)$.

解 在例3中已算得$EX=np$，现在利用性质2来计算EX.

设计一个伯努里试验,记

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次试验事件}A\text{发生,}\\ 0, & \text{第}i\text{次试验事件}A\text{不发生,}\end{cases}$$

$p=P(\boldsymbol{A})$，此时ξ_i服从0-1分布，$E\xi_i=p$，

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

$$EX=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=np$$

Example 设ξ是服从超几何分布的随机变量，N件产品中有M件次品，随机抽取n件，ξ为其中次品的数目

$$P(\xi = m) = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n \,(m = 0,1,2,\cdots,n)$$

求 $E\xi$.

解 设计一个不放回抽样. 令ξ_i为第 i 次抽取时的废品数，则

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

由第一章pp.16知道(不论是否放回，每次取得次品的概率都是M/N)

$$P(\xi_i = 1) = M / N, i = 1,2,\cdots,n$$

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = nM/N$$

Example

一客车在有20位旅客从机场出发，沿途有 10 个车站可以下车。如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车次数。设每位旅客在各个车站下车时等可能的，并设旅客是否下车时相互独立的。

求：平均停车次数

解：引入随机变量X_i

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车,} \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车,}\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,10.$$

则

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}.$$

$$P\{X_i = 0\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, 10)$$

$$P\{X_i = 1\} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10})$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10})$$

$$= 10\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]$$

$$= 8.784(\text{次}).$$

4.2 随机变量的方差（Variation）

4.2.1 Introduction/Definition

Example 比较两个随机试验，已知分布为：

甲X：

X	4	6	8	10	12	14	16
p	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7

乙Y：

Y	4	5	7	10	13	15	16
p	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7

二人的平均分：$E(X)=E(Y)=10$

从均值无法分辨优孰劣.还要考虑他们取值的离散程度：如同研究生入学考试，既要看总成绩,又要约定任一单科成绩.

几种可能的比较方式：

（1）最大值－最小值＝**极差**

X：16－4=12, Y：16－4=12

不反映分散程度，其他值被忽略。

（2）**平均差**E(X－E(X)) ＝0

对一切随机变量均成立，X的离差正负相消.

（3）必须相加不能抵消.

$$E|X-E(X)| \Rightarrow E(X-EX)^2$$

Definition X为随机变量，若存在$E(X-\mu)^2$，就称它是随机变量X的**方差**(variance)，记作D(X)或Var(X). 其中$\mu=E(X)$.

Important. 方差可以看作是随机变量函数$(X-E(X))^2$的数学期望，根据数学期望的定义，可写出方差的计算公式

$$Var(X)=E(X-E(X))^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\ x^2-2xE(X)+\left[E(X)\right]^2\right\} f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-2E(X)\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+\left[E(X)\right]^2$$

$$=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

Remark1. 注意到D(X)的量纲与X不同

为了统一量纲，有时用$\sqrt{D(X)}$，称为X的**标准差**

(standard deviation)或均方差，记为$\sigma(X)$.

Remark2. 前面例子中，区分两个成绩的优异

E(X)＝E(Y)＝10

D(X)＝16，D(Y)＝20

如此，我们知道甲比乙要好一些

Example 均匀分布的方差

分布密度 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

方差

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

Example 泊松分布X~π(λ)的方差.

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}j\frac{\lambda^{j+1}}{j!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}$$

Example 计算泊松分布π(λ)的方差.

$$= e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j+1}}{(j-1)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j}}{j!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j}}{j!}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

所以

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Example 设X服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求D(X).

解 $E(X)=\mu$

$$D(X)=E(X-\mu)^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx$$

$$\Big\Downarrow\ t=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/2}dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\quad=\sigma^2$$

可见正态分布中参数σ²就是它的方差, σ就是标准差.

Example 指数分布的方差:设随机变量X服从指数分布，

其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中λ>0是常数. 求：$D(X)$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\int_0^{\infty}x^2 de^{-\lambda x}$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2xe^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty}x(\lambda e^{-\lambda x})dx$$

$$=\frac{2}{\lambda}E(X)$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(x)=E(X^2)-(EX)^2$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\quad =\theta^2$$

Example 二项分布的方差　　分布律 $X \sim B(n, p)$

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad E(X) = np$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P\{X = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p)$$

常见分布及其期望和方差列表

分布名称	数学期望 E(X)	方差 D(X)
0-1分布	p	pq
二项分布	np	npq
泊松分布	λ	λ
均匀分布	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
正态分布	μ	σ^2
指数分布	$\frac{1}{\lambda}$ （或θ）	$\frac{1}{\lambda^2}$ （或θ^2）

4.2.3 方差的性质

(1) $D(C)=0;\quad (C\text{为常数})$

（2） $D(aX+b)=a^2D(X);$

此式说明：

随机变量平移$X+b$**不影响方差；**

随机变量的比例（尺度）变换 aX**，会比例放大方差。**

（3） $X_1,\cdots,X_n$为随机变量，如果$X_1,\cdots,X_n$相互独立，

$c_1,\cdots,c_n$为常数， $D(c_1X_1+\cdots+c_nX_n)=\sum_{j=1}^{n}c_i^2D(X_i)$

4.2.3 方差的性质

(4) $D(X)=0$ **的充分必要条件是以概率1取得常数**C**，即**

$$P(X=C)=1$$

证明：

如果$P(X=C)=1$

那么$\mu=E(X)=C$

$$D(X)=E(X-\mu)^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-C)^2 f(x)dx$$

$$=0$$

4.2.3 方差的性质

证明： 如果 $D(X)=0$，

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(Chebyshev不等式)

$$P\{|X-\mu|\geq\frac{1}{n}\}\leq 0$$

$$P\{|X-\mu|\geq\frac{1}{n}\}=0$$

$$P\{|X-\mu|<\frac{1}{n}\}=1$$

$$\Downarrow$$

$$P\{|X-\mu|=0\}=1$$

Example 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，则其标准化变量 $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}\ (\sigma>0)$ 的均值为0，方差为1。

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] = 0$$

$$E(X^{*2}) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]$$

$$= 1$$

$$D(X) = E(X^{*2}) - \left[E(X^*)\right]^2 = 1$$

Example （pp.115，17）设 c 是常数，则 $D(X) \le E(X-c)^2$

证明：

$$E(X-c)^2 = E(X-\mu+\mu-c)^2$$

$$= E(X-\mu)^2 + 2E(X-\mu)(\mu-c) + (\mu-c)^2$$

$$= D(X) + (\mu-c)^2$$

$$\ge D(X)$$

此结果说明：均值 μ 是最能描述一个变量的平均分布的。任何一个其它值 c，随机变量 X 偏离 c 的情况都比偏离 μ 要糟。

Example 设相互独立同分布随机变量 $X_1,\cdots,X_n$

$$E(X_i)=\mu,\ \ D(X_i)=\sigma^2\ (i=1,2,\cdots,n)\qquad \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

求 $E(\bar{X}),D(\bar{X})$

$$E(\bar{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$$

$$D(\bar{X})=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

Remark 这说明在独立同分布时，作为各X_i的算术平均 $\bar{X}$，它的数学期望与各X_i的数学期望相同，但方差只有X_i的$1/n$倍. 这一事实在数理统计中有重要意义.

4.2.4 切比雪夫(Chebyshev)不等式

切比雪夫(Chebyshev)不等式 若随机变量的方差存在，

则对任意给定的正数ε，恒有 $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

Proof:

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-u|\geq\varepsilon}f(x)dx$$

$$\leq\int_{|x-u|\geq\varepsilon}\frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}f(x)dx$$

$$\leq\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}f(x)dx=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

上面的式子等价于

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}=1-P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\geq1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

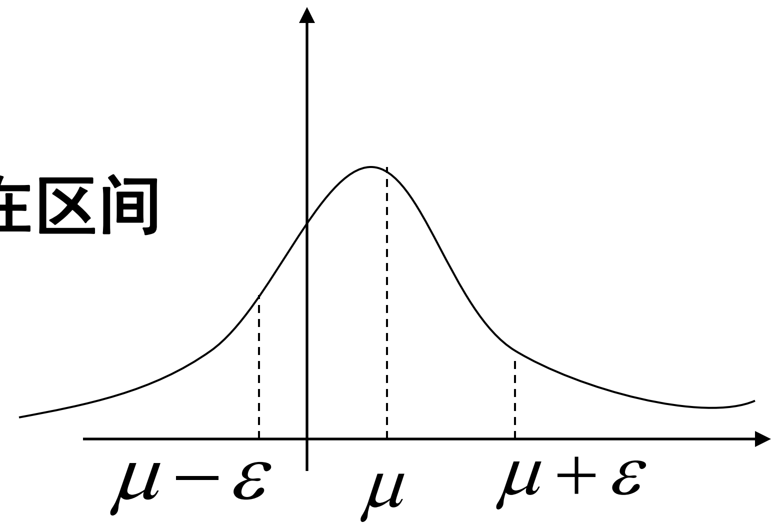
切贝雪夫不等式意义

- 证明方法上
- 结论

事实上，该式断言随机变量X落在区间

$(-\infty, E(X)-\varepsilon)$和$(E(X)+\varepsilon, \infty)$

内的概率小于等于$D(X)/\varepsilon^2$



或者说，X落在区间$(E(X)-\varepsilon, E(X)+\varepsilon)$之外的概率小于$D(X)/\varepsilon^2$，之内的概率大于$1-D(X)/\varepsilon^2$，从而只用数学期望和方差就可对上述概率进行估计。

切贝雪夫不等式意义.

这一定律可用来估计分布未知情况下事件的概率

$$\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\text{或}\{|X-\mu|\leq\varepsilon\}$$

例如

$$P\{|X-u|<\sigma\}\geq 0$$

$$P\{|X-u|<2\sigma\}\geq 0.75$$

$$P\{|X-u|<3\sigma\}\geq 0.8888$$

$$P\{|X-u|<4\sigma\}\geq 0.9375$$

切贝雪夫不等式意义.

以正态分布 $X \sim N(u,\sigma^2)$ 为例，已知其均值和方差μ,σ^2，

我们有3σ原则：

$$P\{|X-u|<\sigma\}=2\Phi(1)-1\approx 0.6826$$

$$P\{|X-u|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1\approx 0.9544$$

$$P\{|X-u|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1\approx 0.9973$$

$$P\{|X-u|<4\sigma\}=2\Phi(4)-1\approx 1$$

可与Chebyshev不等式比较；

可见Chebyshev不等式的估计还是比较粗略。

4.3 协方差与相关系数

4.3.1 协方差

单个随机变量的期望与方差分别反映了随机变量取值的平均水平和随机变量取值相对于均值的分散程度.

对于两个随机变量 X, Y，他们之间的关系如何描述？

前面知道如果 X, Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

$$=E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)\quad =0$$

而当 X, Y 不独立，$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 其实也可以为0。

4.3 协方差与相关系数

4.3.1 协方差

[Definition] 设（X，Y）是二维随机变量，如果 $E(X), E(Y)$ 都存在, 且 $E\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)$ 也存在，则称之为 X 与 Y 的协方差，记为 $Cov(X,Y)$ 。

易见

(1) $Cov\left(X, X\right)=D\left(X\right)$

(2) $Cov(X, Y)=Cov(Y, X)$.

4.3.1 协方差

$$(3)\ \ Cov(X,Y)=E[XY-XE(Y)-E(X)Y+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$(4)\ \ D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$

$$D(X+Y)$$

$$=E[(X+Y)-E(X+Y)]^2$$

$$=E(X-E(X))^2+E(Y-E(Y))^2+2E(X-E(X))(Y-E(Y))$$

$$=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$

性质：

(1) $Cov(X,C)=0;$　（C为任意常数）

(2) $Cov\left(a_1X_1+a_2X_2,Y\right)=a_1Cov\left(X_1,Y\right)+a_2Cov\left(X_2,Y\right)$

$$Cov\left(a_1X_1+a_2X_2,Y\right)=E\left(a_1X_1+a_2X_2-E(a_1X_1+a_2X_2)\right)(Y-EY)$$

$$=E\left(a_1(X_1-EX_1)+a_2(X_2-EX_2)\right)(Y-EY)$$

$$=E\left(a_1(X_1-EX_1)(Y-EY)+a_2(X_2-EX_2)(Y-EY)\right)$$

$$=a_1Cov(X_1,Y)+a_2Cov(X_2,Y)$$

(3) $Cov\left(aX,bY\right)=abCov\left(X,Y\right)$，$\left(a，b\text{为常数}\right).$

关于每个参数是线性的，关于两个参数是双线性的。

4.3.2 相关系数

协方差虽在某种意义上表示了两个随机变量间的关系，但 $Cov(X,Y)$的取值大小与 X, Y 的量纲有关. 我们考虑消除量纲，同时把这种关系归一化。

Definition 称下式为 X, Y 的相关系数(correlation coefficient).

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

Remark: ρ_{XY} 是无量纲的，它事实上是 X, Y 的标准化随机变量的协方差

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = E\left[\frac{(X-E(X))}{\sqrt{D(X)}}\ \frac{(Y-E(Y))}{\sqrt{D(Y)}}\right]$$

$$= Cov(X^*,Y^*)$$

相关系数的意义：

假设以 X 的线性函数 $aX+b$ 逼近Y，以均方误差

$$e = E[(Y-(aX+b))^2]$$

表示逼近的程度，e 越小说明逼近越好，反之越差。

那么最好的逼近是否存在？

如存在是什么样的？

$$e = E[Y-(aX+b)]^2$$

$$= E[Y^2 - 2aXY - 2bY + a^2X^2 + b^2 + 2abX]$$

$$= E(Y^2) - 2aE(XY) - 2bE(Y) + a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2$$

为求得最佳的 a, b 应该满足偏导为零：

$$0=\frac{\partial e}{\partial a}=-2E(XY)+2aE(X^2)+2bE(X)$$

$$0=\frac{\partial e}{\partial b}=-2E(Y)+2aE(X)+2b$$

$$\begin{cases} aE(X^2)+bE(X)=E(XY) \\ aE(X)+b=E(Y) \end{cases}$$

解出：

$$a^*=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{E(X^2)-[E(X)]^2}=\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}$$

$$b^*=\frac{E(X^2)E(Y)-E(X)E(XY)}{E(X^2)-[E(X)]^2}$$

相关系数的意义：

$$b^* = \frac{\{E(X^2)-[E(X)]^2\}E(Y)+[E(X)]^2E(Y)-E(X)E(XY)}{E(X^2)-[E(X)]^2}$$

$$= E(Y)-E(X)\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}$$

将 a^*, b^* 代入得

$$\min e = E(Y-(a^*X+b^*))^2$$

$$= E\left(Y-\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}X-E(Y)+E(X)\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}\right)^2$$

$$= E\left(Y-E(Y)-\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}[X-E(X)]\right)^2$$

$$\min(e) = E\left[[Y - E(Y)]^2 - 2\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}[Y - E(Y)][X - E(X)] + \left[\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}\right]^2 [X - E(X)]^2 \right]$$

$$= D(Y) - 2\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}Cov(X,Y) + \left[\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}\right]^2 D(X)$$

$$= D(Y) - \frac{[Cov(X,Y)]^2}{D(X)} = D(Y)\left(1 - \frac{[Cov(X,Y)]^2}{D(X)D(Y)}\right)$$

$$= D(Y)[1 - \rho_{XY}^2]$$

以 $aX + b$ 逼近 Y，最好的逼近与Y的均方差是 $D(Y)\left[1 - \rho_{XY}^2\right]$

[定理]: $(1)\ |\rho_{XY}| \le 1$

$(2)\ |\rho_{XY}| = 1$ **的充分必要条件是，存在常数** a, b **使得**

$$P\{Y = aX + b\} = 1$$

Proof:

（1） 由 e **的非负性得到** $|\rho_{XY}| \le 1$

（2）如果 $|\rho_{XY}| = 1$ **，则对于上述的** a^*, b^* **得到**

$$E[(Y - a^* X - b^*)^2] = D(Y)\left(1 - \rho_{XY}^2\right) = 0$$

由 D(X)＝E(X²)－(EX)² 得到

$$D[(Y-a^{*}X-b^{*})^{2}]+[E(Y-a^{*}X-b^{*})]^{2}=E(Y-a^{*}X-b^{*})^{2}=0$$

上式中两项全是正数，故此必须

$$\begin{cases} D[(Y-a^{*}X-b^{*})^{2}]=0 \\ E(Y-a^{*}X-b^{*})=0 \end{cases}$$

第一式子得到

$$P\{Y-a^{*}X-b^{*}=C\}=1$$

进一步由第二式得到 $C=0$;

$$P\{Y=a^{*}X+b^{*}\}=1$$

反之，如果存在 a^*, b^* 使得 $P\{Y = a^* X + b^*\} = 1$，则得到

$$P\{Y - a^* X - b^* = 0\} = 1$$

$$P\{[Y - a^* X - b^*]^2 = 0\} = 1$$

$$E[(Y - a^* X - b^*)^2] = 0$$

则得到

$$E[Y - a^* X - b^*]^2 = 0 \geq \min e = [1 - \rho_{XY}^2] D(Y)$$

必然 $|\rho_{XY}| = 1$

Remark: e 是 $|\rho_{XY}|$ 的严格单调递减函数。

$|\rho_{XY}|$ 越大，e 越小，说明 X,Y 的线性相关性越大。

特别地 $|\rho_{XY}|=1$ ，则 X,Y 以概率1线性相关。

$|\rho_{XY}|$ 表征了 X,Y 的线性相关程度，如是为什么称为**相关系数**。

Definition 如果 $\rho_{XY}=0$，称X、Y不相关

Remark

（1）X,Y 独立必然有 $\rho_{XY}=0$，则X，Y 不相关；

（2）$\rho_{XY}=0$ 未必有 X, Y 独立。

Example 设随机变量θ服从均匀分布$U\,[0, 2\pi]$，$X=\cos\theta$, $Y=\sin\theta$，显然 $X^2+Y^2=1$, 故 X与Y 不独立. 但

$$EX=\int_0^{2\pi}\cos\varphi\frac{1}{2\pi}d\varphi=0$$

$$EY=\int_0^{2\pi}\sin\varphi\frac{1}{2\pi}d\varphi=0$$

$$E(XY)=E\left(\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\frac{1}{2\pi}d\varphi=0$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

即X与Y不相关.

[定理] 对随机变量 X 和 Y, 下列事实等价：

(1) $Cov(X,Y)=0$

(2) X 与 Y 不相关;

(3) $E(XY)=E(X)E(Y)$

(4) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

对于正态分布情形，独立与不相关是一致的。

这将在下面进行讨论

Example 设 X,Y 服从二元正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

试求 ρ_{XY} .

解： 前面知 X, Y 分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}dxdy$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) \qquad z = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_1 z)(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}t+\rho\sigma_2 z)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}t^2\right]\left(\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2\right)dzdt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}zt+\rho\sigma_1\sigma_2 z^2)\exp\left[-\frac{1}{2}(z^2+t^2)\right]dzdt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,zt\exp\left[-\frac{1}{2}(z^2+t^2)\right]dzdt+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\sigma_1\sigma_2 z^2\exp\left[-\frac{1}{2}(z^2+t^2)\right]dzdt$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{1}{2}t^2}dt+$$

$$\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$=0+\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}$$

$$=\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\boxed{\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho}$$

Remark 1： 二维正态随机变量的分布函数完全由于参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 决定;

Remark 2: 如果 (X,Y) 服从正态分布，则 X,Y 独立与 X,Y 不相关是等价的。条件是 $\rho = 0$ 。

4.4 矩(moment)与协方差阵

Definition：随机变量 X,Y

$E(X^k)\ \ (k=1,2,\ldots)$ 称为X的**k阶原点矩**，简称**k阶矩**。

$E\left[X-E\left(X\right)\right]^k\ \ (k=1,2,\ldots)$ 称为X的**k阶中心矩**。

$E\left(X^kY^l\right)\ \ (k,l=1,2,\ldots)$ 称为X, Y的**k+l阶混合矩**。

$E\left[X-E\left(X\right)\right]^k\left[Y-E\left(Y\right)\right]^l\ \ (k,l=1,2,\ldots)$

称为X, Y的**k+l阶混合中心矩**。

Example 设 X 服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量，$EX=0$，且

$$m_n = c_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ 1\times 3\times\cdots\times(n-1)\sigma^n, & n = 2k. \end{cases}$$

Example 如果ξ服从参数为λ的指数分布，那么 对于$k \geq 1$，

$$E\xi^k = \int_0^{+\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{k}{\lambda}E\xi^{k-1}$$

根据递推关系得 $E\xi^k = \dfrac{k!}{\lambda^k}$

即指数分布的任意阶矩存在.

对于n个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ，可以定义：

$$C_{ij} = Cov(X_i, X_j) \quad i, j = 1,2,\cdots,n$$

进一步定义

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

称 C为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的协方差矩阵。

[定理] 设 $X \sim N(\mu, C)$ ，B 是一 n 维的可逆矩阵，$Y = BX$ 则

$$Y \sim N(B\mu, BCB^T)$$