概率论与数理统计

第一章　概率论的基本概念

练习：

A,B,C,D四个事件，用运算关系表示：

（1）A,B,C,D至少有一个发生；

（2）都不发生；（3）都发生；

（4）A,B,C,D恰有一个发生；

（5）至多一个发生。

解：（1）A∪B∪C∪D或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}}$

（2）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ **或** $\overline{A\cup B\cup C\cup D}$

（3）ABCD 或 $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}\cup\bar{D}}$

（4）$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\cup\bar{A}B\bar{C}\bar{D}\cup\bar{A}\bar{B}C\bar{D}\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$

（5）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\cup(4)$

§3　频率与概率

- 频率的定义与性质
- 概率的定义与性质

一、频率的定义与性质

1. 定义

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数.比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率,并记成 $f_n(A)$.

2. 性质

设 A 是随机试验 E 的任一事件, 则

(1) $0 \le f_n(A) \le 1;$

(2) $f(S) = 1,\ \ f(\varnothing) = 0;$

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

实例 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	[illegible]	[illegible]	249	0.498
3	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	0.2	[illegible]	[illegible]	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	262	0.524
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较大

随 n 的增大, 频率 f 呈现出稳定性

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

波动最小

从上述数据可得

(1) 频率有随机波动性,即对于同样的 n, 所得的 f 不一定相同;

(2) 抛硬币次数 n 较小时, 频率 f 的随机波动幅度较大, 但随 n 的增大 , 频率 f 呈现出稳定性.即当 n 逐渐增大时频率 f 总是在 0.5 附近摆动, 且逐渐稳定于 0.5.

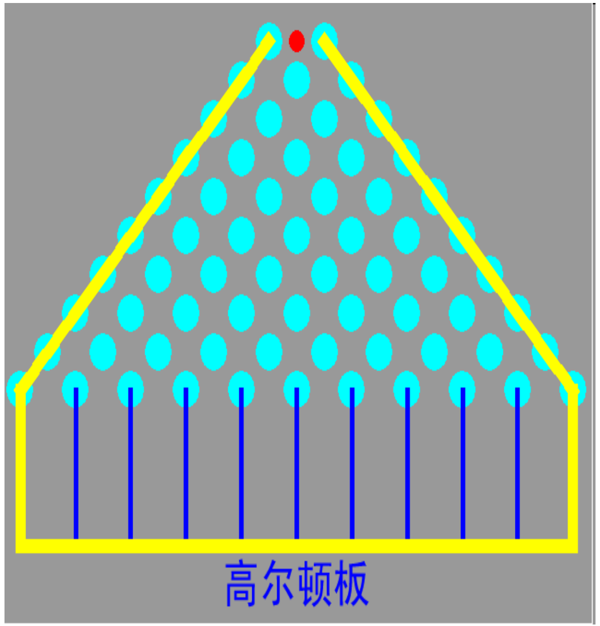
实验者	n	n_H	f
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
$K\cdot$皮尔逊	12000	6019	0.5016
$K\cdot$皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f(H) \xrightarrow{n\text{的增大}} \frac{1}{2}.$$

我们再来看一个验证频率稳定性的著名实验

高尔顿(Galton)板试验.

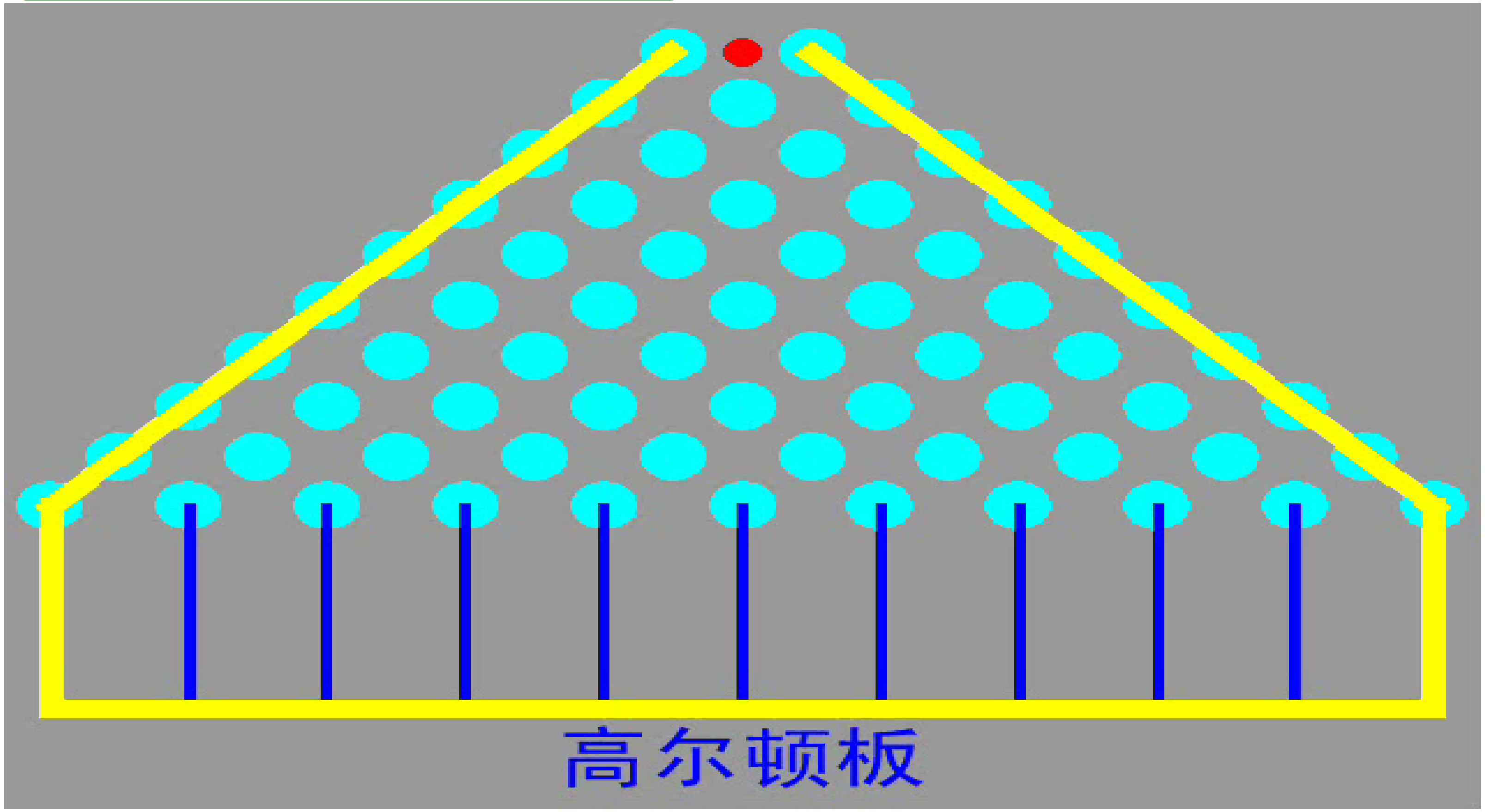
试验模型如下所示:



自上端放入一小球, 任其自由下落, 在下落过程中当小球碰到钉子时, 从左边落下与从右边落下的机会相等. 碰到下一排钉子时又是如此. 最后落入底板中的某一格子. 因此, 任意放入一球, 则此球落入哪一个格子, 预先难以确定. 但是如果放入大量小球, 则其最后所呈现的曲线, 几乎总是一样的.

请看动画演示

单击图形播放/暂停　ESC键退出



重要结论

频率当 n 较小时波动幅度比较大，当 n 逐渐增大时， 频率趋于稳定值，这个稳定值从本质上反映了事件在试验中出现可能性的大小．它就是事件的**概率**．

请同学们思考.

医生在检查完病人的时候摇摇头：“你的病很重，在十个得这种病的人中只有一个能救活.”当病人被这个消息吓得够呛时，医生继续说：“但你是幸运的．因为你找到了我，我已经看过九个病人了，他们都死于此病.”

医生的说法对吗?

二、概率的定义与性质

1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率论的公理化结构，给出了概率的严格定义，使概率论有了迅速的发展.

柯尔莫哥洛夫资料

1. 概率的定义

设 E 是随机试验, S 是它的样本空间.对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件:

(1) **非负性:** 对于每一个事件 A, 有 $P(A) \geq 0$;

(2) **规范性:** 对于必然事件 S,有 $P(S) = 1$;

(3) **可列可加性** :设 $A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容的事件,即对于 $i \neq j$, $A_iA_j = \varnothing$, $i, j = 1, 2, \cdots$,则有

$$\underbrace{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots}_{\text{概率的可列可加性}}$$

2. 性质

(1) $P(\varnothing)=0.$

证明 $A_n=\varnothing\ (n=1,2,\cdots)$,

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j.$

由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$$\left.\begin{aligned}&=\sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing)\\ &P(\varnothing)\geq 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow P(\varnothing)=0.$$

(2) 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

概率的有限可加性

证明　令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$,

$$\Rightarrow A_i A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots.$$

由概率的可列可加性得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0$$

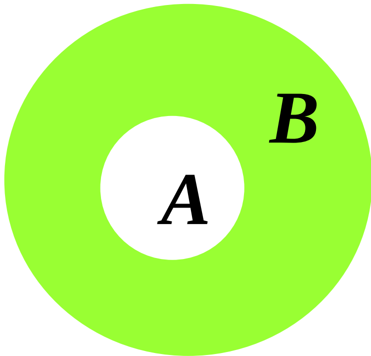
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

(3) 设 A,B 为两个事件,且 $A \subset B$,则

$$P(A) \le P(B), \quad P(B-A) = P(B) - P(A).$$

证明　因为　$A \subset B$,

所以　$B = A \cup (B-A)$.



又　$(B-A) \cap A = \varnothing$,

得　$P(B) = P(A) + P(B-A)$.

于是　$\boxed{P(B-A) = P(B) - P(A).}$

又因　$P(B-A) \ge 0$,　故 $P(A) \le P(B)$.

(4) 对于任一事件 A, $P(A) \le 1$.

证明 $A \subset S \Rightarrow P(A) \le P(S) = 1$,

故 $P(A) \le 1$.

(5) 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件, 则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明 因为 $A \cup \overline{A} = S$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $P(S) = 1$,

所以 $1 = P(S) = P(A \cup \overline{A})$

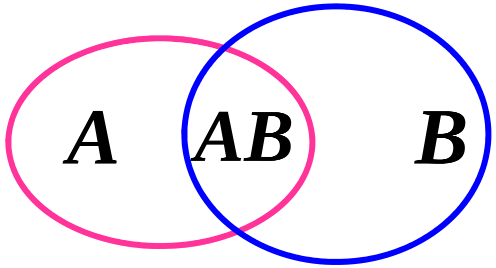
$$= P(A) + P(\overline{A}).$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

(6) (加法公式) 对于任意两事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明　由图可得



$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$

且 $A \cap (B - AB) = \varnothing,$

故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB).$

又由性质 3 得

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB),$$

因此得　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

推广　三个事件和的情况

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3)$$
$$- P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

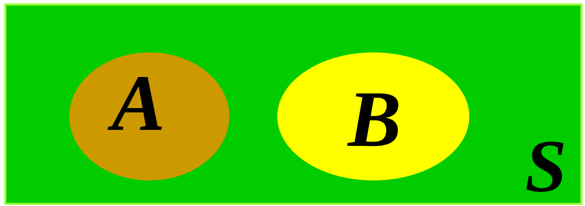
n 个事件和的情况

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_iA_j)$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例1 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 求在下列三种情况下 $P(B\overline{A})$ 的值.

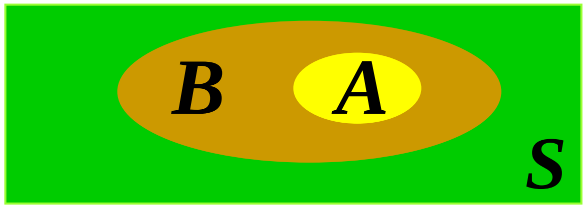
(1) A与B互斥; (2) $A \subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1) 由图示得 $P(B\overline{A}) = P(B)$,



故 $P(B\overline{A}) = P(B) = \frac{1}{2}$.

(2) 由图示得



$$P(B\overline{A}) = P(B) - P(A)$$

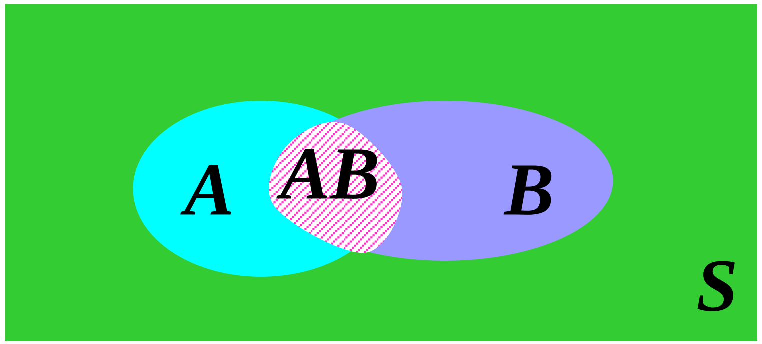
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

(3) 由图示得 $A \cup B = A \cup B\overline{A}$, 且 $A \cap B\overline{A} = \varnothing$,

又 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

$P(A \cup B\overline{A}) = P(A) + P(B\overline{A})$,

因而 $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$.



小结

1. 频率 (波动) $\xrightarrow{n\to\infty}$ 概率(稳定).

2. 概率的主要性质

(1) $0 \le P(A) \le 1$, $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$;

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

(4) 设 A, B 为两个事件,且 $A \supset B$,则

$P(A) \ge P(B)$, $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

柯尔莫哥洛夫资料

Andrey Nikolaevich Kolmogorov

Born: 25 Apr. 1903 in Tambov, Tambov province,Russia

Died: 20 Oct. 1987 in Moscow, Russia

1939年任苏联科学院院士.先后当选美,法,意,荷,英,德 等国的外籍院士 及皇家学会会员. 为 20 世纪最有影响的俄国数学家.

柯尔莫哥洛夫为开创现代数学的一系列重要分支作出重大贡献.

他建立了在测度论基础上的概率论公理系统, 奠定了近代概率论的基础.

他又是随机过程论的奠基人之一,其主要工作包括:

20年代 关于强大数定律、重对数律的基本工作;

1933年在《概率论的基本概念》一文中提出的概率论公理体系

30年代建立的马尔可夫过程的两个基本方程;

用希尔伯特空间的几何理论建立弱平稳序列的线性理论;

40年代完成独立和的弱极限理论,经验分布的柯尔莫哥洛夫统计量等;

在动力系统中开创了关于哈密顿系统的微扰理论与K系统遍历理论;

50年代中期开创了研究函数特征的信息论方法，他的工作及随后阿诺尔德的工作解决并深化了希尔伯特第13问题——用较少变量的函数表示较多变量的函数；

60年代后又创立了信息算法理论;

1980年由于它在调和分析, 概率论,遍历理论及 动力系统方面 出色的工作获沃尔夫奖;

他十分重视数学教育,在他的指引下,大批数学家在不同的领域内取得重大成就.其中包括и.M.盖尔范德,B.и.阿诺尔德, Я.Г.西奈依等人.

他还非常重视基础教育, 亲自领导了中学 数学教科书的编写工作.

作业：课后习题 **3、4**