数学文化

见面课（四）

联系方式

李军　数学科学学院416办公室

邮箱：lijun@nankai.edu.cn

鼓励师生课下的联系和交流。上周已经建立了课程的飞书群，教学通知会发到飞书群。大家在学习中遇到问题，就及时通过飞书联系我。

本课程的教材请自己去买，有用！

- 说明：做平台上“测验题”和参与“讨论题”讨论的情况，均会被平台记录，作为慕课成绩的组成部分。
- 千万不要错过平台上做题的截止时间！

  即：每周日的晚上23点30分。

  前3讲的测验题的截止时间都是**10月16日（周日）的晚上23点30分**。

课堂演讲

正十七边形的尺规作图

——从欧几里得到伽罗瓦

22级工科试验班　李宝言

平台上慕课内容的拓展

一个难题

我取定0到15中的一个整数，请你用回答为“是”或“否”的问题提问来确定这个数。我允许说一次谎（但也可以不说谎），你能用七个问题来确定这个数吗？

有兴趣的同学可以在课后思考和讨论一下这个问题。

一种解答

先用三个问题来问该数二进制表示的前三位，再问“你在前三个问题的回答中是否说谎了？”若回答“否”，则前三个问题的回答都是真话，很容易用三个问题来确定该数二进制的最后一位；若回答“是”，则前四个问题的回答中恰有一个是谎话，于是再用一个问题确定该数二进制的最后一位，用两个问题确定前四个问题的回答中哪个是谎话，从而就知道了该数。

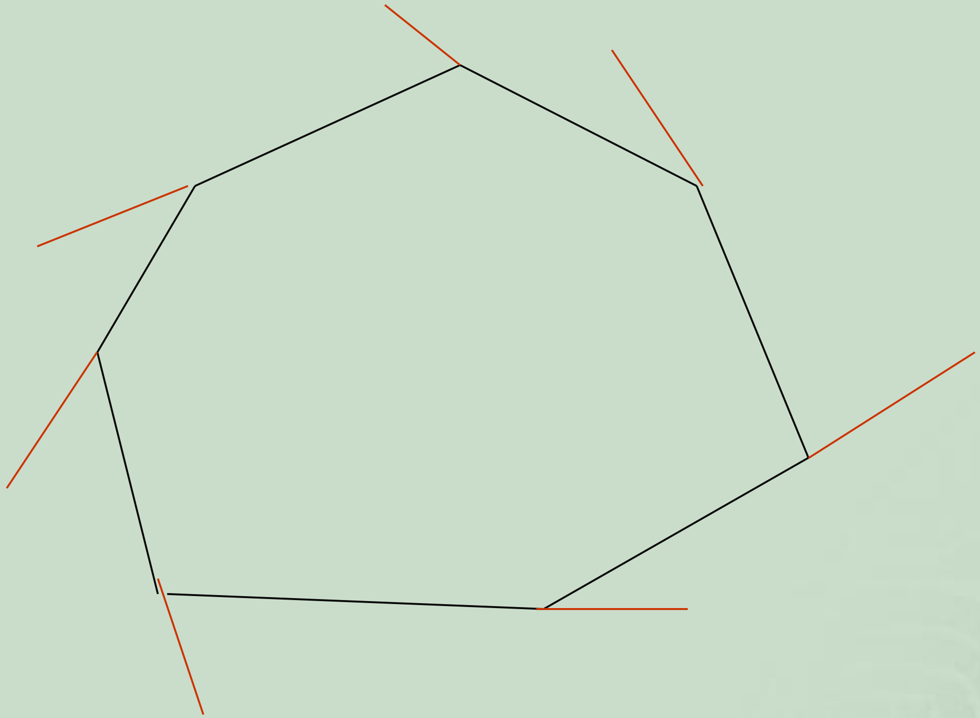
中央电视台《大家》栏目：
《吴文俊·我的不等式》片断

“变中有不变”的思想

客观事物都是运动和变化的。在这种运动和变化中，事物的大多数性质也会随之改变；但有些性质却相对稳定，并不改变，这就是“变中有不变”。

这种“变中有不变”的性质，在事物变化时具有相对的稳定性，说明它反映了事物的某种本质，值得我们更加专注地研究。

凸 n 边形 n 外角之和 = 360 度



这是一个不变量，当 n 变化时凸 n 边形 n 外角之和始终不变。

单选题 1分

设置

在凸n边形的n个内角中，最多能有几个是锐角？

A 3个

B 4个

C 5个

D 6个

提交

在凸n边形的n个内角中，最多能有几个是锐角？

利用凸n边形n外角之和=360度的结果，就不难知道在凸n边形的n个内角中，最多只能有3个是锐角，否则，有4个内角是锐角 ，外角之和就大于360度了。

再如：欧拉公式

无论你用什么绳索织一片网，它的结点数(V)，网眼数(F)，边数(E)都必须适合公式:

$$V + F - E = 1$$

(这是二维情况,三维情况是

$V + F - E = 2$,可以考虑一个正方体为例)

任何两个顶点之间都有棱相连的凸多面体只能是四面体

设一个凸多面体有n个顶点，任何两个顶点之间都有棱相连，则在欧拉公式中，V=n, E=$\frac{1}{2}n(n-1)$. 注意到每条棱恰属于两个面，每个面至少有三条棱，就有F≤ $\frac{1}{3}$n(n-1). 由欧拉公式V+F-E=2得n+$\frac{1}{3}$n(n-1)- $\frac{1}{2}$n(n-1)≥ 2, 解得3 ≤n≤ 4. 因此，只能n=4, 故该多面体是四面体。

不变的量其值是多少？

任意取定一个大于1的正整数n，随意把它拆成两个正整数之和，在n的下面写下这两个数，同时记下这两个数的乘积。若这两个数中还有大于1的数，就重复上面的操作，将大于1的数随意拆成两个正整数之和，把拆成的两个数写在其下面，同时记下这两个数的乘积。直到分出n个1,不能再分为止。多试几次，会发现给定n之后，无论怎么分，记下的乘积之和是个不变的量。这个不变量的值是多少？

用变中有不变的思想解决问题的例子

取定一个正奇数n. 首先在黑板上写下1, 2, …, 2n 共2n个数，然后每次随意选两个数a, b，擦去它们，在黑板上写下|a-b|，重复这种操作，2n-1次操作后黑板上只剩下一个数。

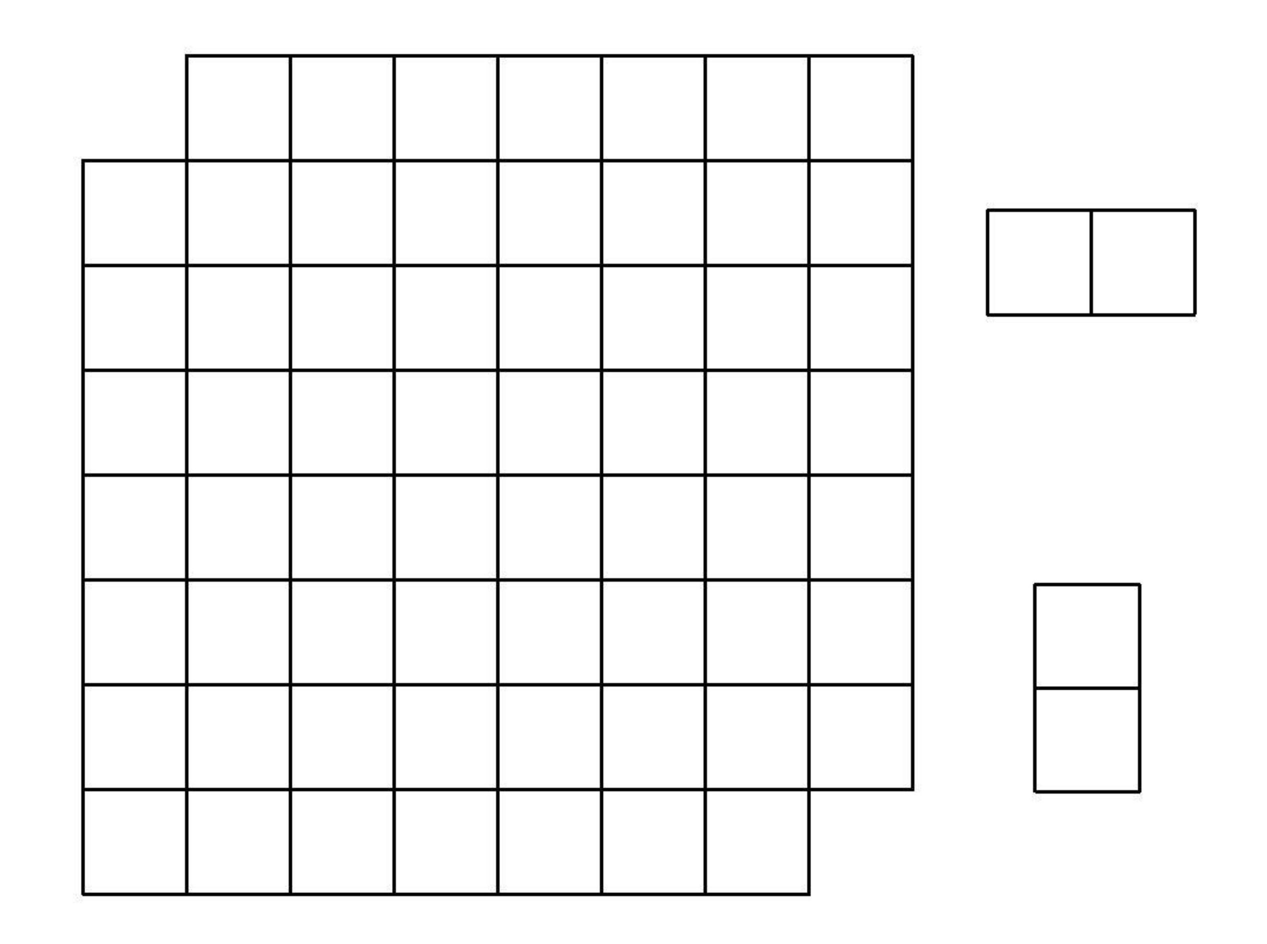
证明：剩下的这个数一定是奇数。

解决问题的关键是发现上面的操作中不变的是什么？

问题赏析：铺砖问题

证明8×8的正方形地面去掉左上角和右下角的两个1×1的小正方形后不能用31块1×2的长方形瓷砖铺盖。这里1×2的长方形瓷砖可以横着放，也可以竖着放，铺满即可。

铺砖问题

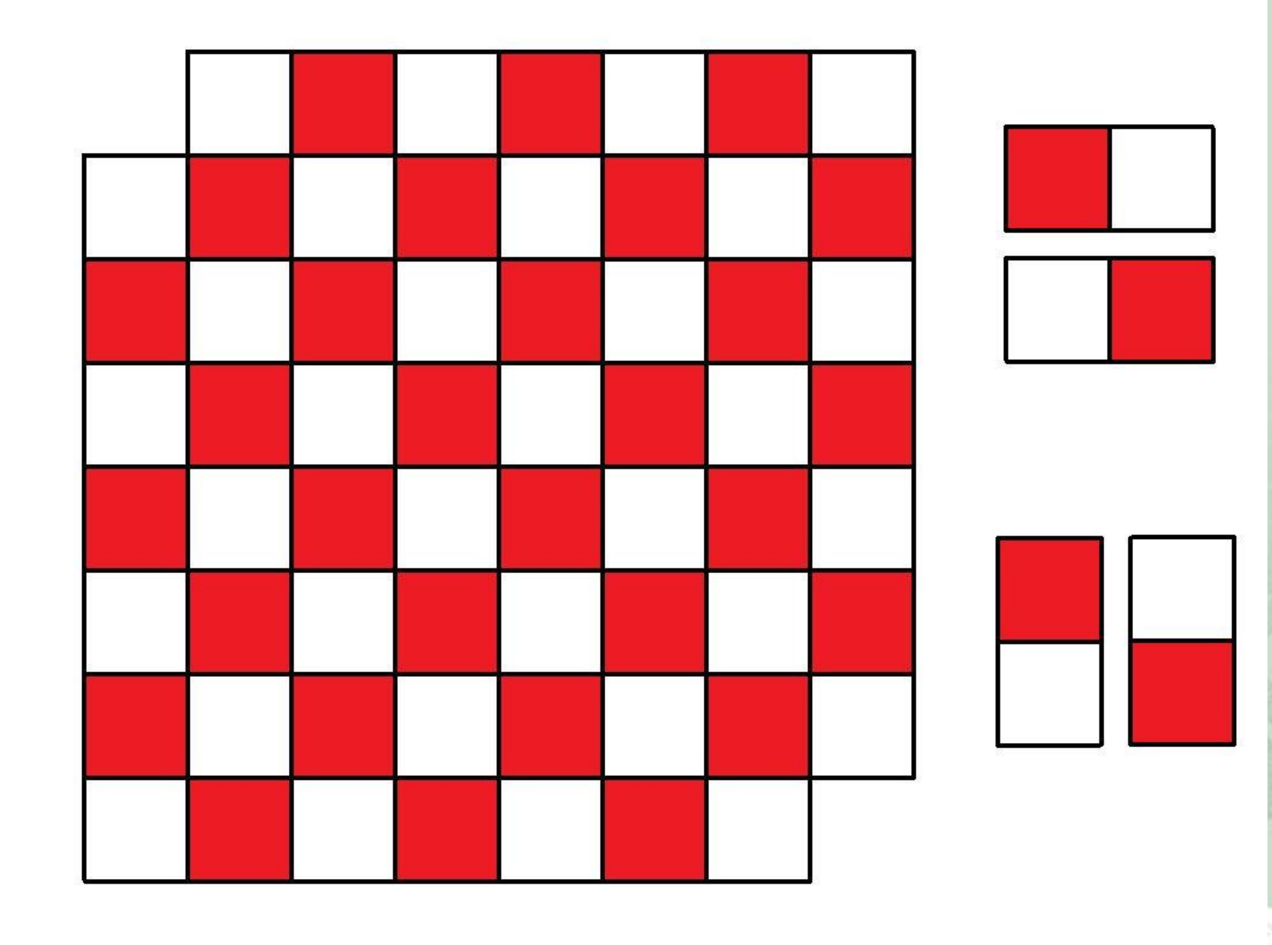


铺砖问题

考虑4×4的正方形地面去掉左上角和右下角的两个1×1的小正方形后能不能用1块1×2的长方形瓷砖铺盖。

由此猜测：8×8的正方形地面，相关结论也是“不能”。

问题的解决思路



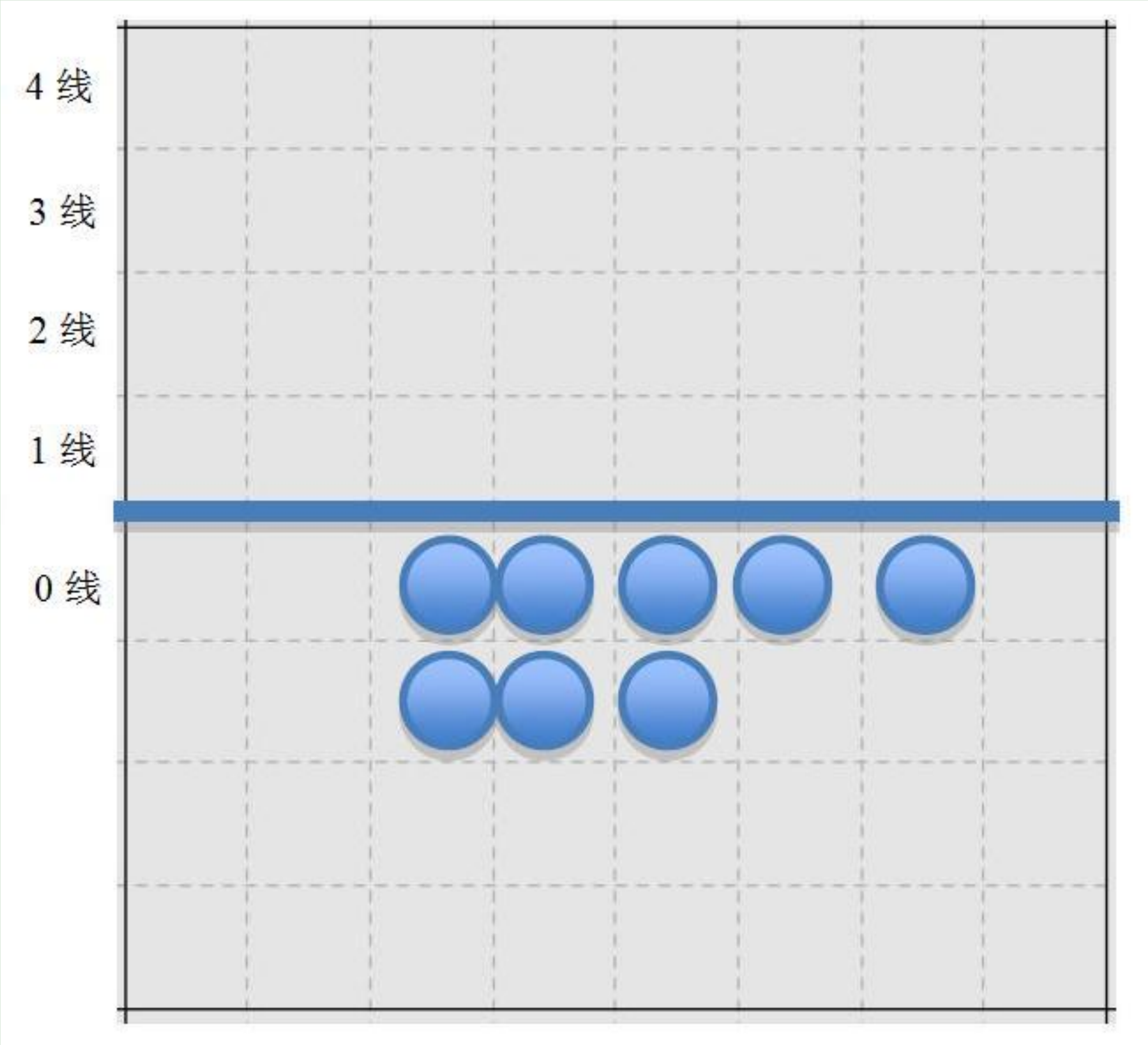
变中有不变：若能铺满，则

红格数 - 白格数 = 0.

趣题推荐：Conway’s soldiers

有一个向四个方向都无限延伸的正方格棋盘，取定横行方格作为0线，在0线上面依次是1线，2线，3线，…。只允许在0线以及0线下面的横线的方格中放棋子。棋子放好后，每枚棋子可以沿横线或竖线跳过相邻的一个棋子到空格处，每跳一次被跳过的那个棋子立即取走。容易看出，放2枚棋子就可以跳到1线。可以证明：至少要放4枚棋子才能保证有棋子跳到2线，至少要放8枚棋子才能保证有棋子跳到3线，至少要放20枚棋子才能保证有棋子跳到4线。问至少要放多少枚棋子才能保证有棋子跳到5线?

8个棋子可以跳到3线



Conway’s soldiers

答案是无论初始怎么放，都不能使得有棋子跳到第5线。

解决问题的想法是适当地给每个方格赋值，考虑所有棋子所在方格的值的总和(可能是个无穷和)，这个和数是单调不增的. 借助这个变中有不变的规律就可以证明无论初始怎么放，都不能使得有棋子跳到第5线。对这个问题有兴趣的话，可以在网上寻找到相关材料，例如，搜索“Conway’s soldiers”.

用变中有不变的思想解决问题的例子

在$n \times n$的方格表中，m个方格涂成了红色，其余$n^2 - m$个方格尚未涂色.

下面一步步地对未涂色的方格来涂色，

规则是一步操作把一个尚未涂色的方格涂成红色，操作的前提是与这个尚未涂色的方格相邻的方格（即与其有公共边的方格）中至少有两个已涂成红色.

证明：如果$n^2 - m$步操作后，所有方格都涂成了红色，那么$m \geq n$.

解决问题的关键是发现上面的操作中有什么不变的性质？

一种解题思路

解决这个问题的一种思路是注意到每一步操作下，红色区域的边界长度不增.

最初红色区域的边界长度小于等于$4m$, 最终红色区域的边界长度为$4n$，故$4m \geq 4n$，即$m \geq n$.

考虑这种在变换或操作下单调变化的量，实际上也是“变中有不变”思想的一种应用. 在这里，单调关系是“变中有不变”的性质.

杨辉三角形与斐波那契数

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 ……

杨辉三角形与斐波那契数

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 ……

下次“见面课”

2022年10月18日

（周二）

本次“见面课”结束

谢谢！