概率论与数理统计

第四章　随机变量的数字特征

练习

设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立,

试证： $X + Y \sim B(n_1+n_2, p)$

设 X 与 Y 相互独立, 且

$$X \sim B(n, p), \quad Y \sim B(m, p),$$

则

$$X + Y \sim B(n + \mathrm{m},\ p)$$

证 $Z = X + Y$ 的可能取值为

$$0,1,2, \ldots, \ n + m$$

（证明中用到 $\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k$ ）

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}C_m^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}$$

$$=C_{n+m}^{k}p^k(1-p)^{n+m-k}$$

$$\boldsymbol{k=0,1,2,\ldots,\ n+m}$$

所以 ***X*** **+*Y*~ *B*（*n*+m，*p*）**

由二项分布背景,不难理解*X*+*Y* 表示做了*n* + *m* 次试验,事件A 发生的次数.

分布函数虽然能完整地描述随机变量的统计特性，但是实际应用中并不都需要知道分布函数，而只需知道随机变量的某些特征.

例如：

判断棉花质量时，既要看纤维的平均长度，又要看纤维长度与平均长度的偏离程度，平均长度越长，偏离程度越小，质量就越好.

随机变量的数字特征，虽不能完整地描述随机变量的统计特性，但能清晰地描述 随机变量在某些方面的重要特征，这些数字特征在理论和实践上都具有重要意义.

在这些数字特征中，最常用的是:

数学期望、方差、协方差、相关系数和矩.

§1　数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质

（17世纪中叶，法国数学家帕斯卡与费马讨论的“合理分配赌注问题”）

1653年夏天，帕斯卡前往埔埃托镇度假．旅途中，他遇到了梅理骑士，这位“赌坛老手”向帕斯卡提出了一个十分有趣的“分赌注”问题．一次梅理与其赌友掷骰子，每人押了32枚金币，并约定，如果梅理先掷出三次6点，或对方先掷出三次4点，便算赢．但是这场赌注不算小的赌博并未顺利结束．当梅理已掷出两次6点，其赌友掷出一次4点时．

梅理接到通知，要他马上陪同国王接见外宾，赌博只好停止，双方为如何分配这**64**枚金币争论不休.

请问金币该如何分配？（假设两人赌技相同）

一、离散型随机变量的数学期望

概念的引入： 我们来看一个引例.

某工厂车间对工人的生产情况进行考察. 甲每天生产的废品数X是一个随机变量. 如何定义X的平均值呢？

我们先观察甲100天的生产情况

若统计100天,

32天没有出废品;
30天每天出一件废品;
17天每天出两件废品;
21天每天出三件废品;

（假定甲每天至多生产三件废品 ）

可以得到这100天中每天的平均废品数为:

这个数能否作为X的平均值呢?

$$0\cdot\frac{32}{100}+1\cdot\frac{30}{100}+2\cdot\frac{17}{100}+3\cdot\frac{21}{100}=1.27$$

可以想象，若另外统计100天，甲不出废品，出一件、二件、三件废品的天数与前面的100天一般不会完全相同，这另外100天每天的平均废品数也不一定是1.27.

一般来说, 若统计n天，

(假定甲每天至多出三件废品)

n_0天没有出废品;
n_1天每天出一件废品;
n_2天每天出两件废品;
n_3天每天出三件废品.

可以得到n天中每天的平均废品数为:

$$0\cdot\frac{n_0}{n}+1\cdot\frac{n_1}{n}+2\cdot\frac{n_2}{n}+3\cdot\frac{n_3}{n}$$

$$0\cdot\frac{n_0}{n}+1\cdot\frac{n_1}{n}+2\cdot\frac{n_2}{n}+3\cdot\frac{n_3}{n}$$

这是以频率为权的加权平均

当n很大时，频率接近于概率，所以我们在求废品数X的平均值时，可以用概率代替频率，得平均值:

$$0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3$$

这是以概率为权的加权平均

这样得到一个确定的数. 我们就用这个数作为随机变量X 的平均值. 这个数就称为随机变量X的数学期望.

定义1 设X是离散型随机变量，它的分布率是:

$P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\cdots$,

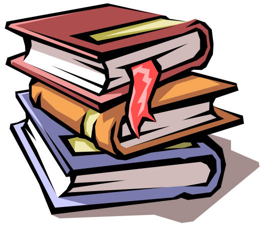
若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

的和为随机变量X的数学期望，记为 $E(X)$,

即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

数学期望简称期望，又称为均值.



关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数，而非变量，它是一种概率的加权平均，与一般的平均值不同，它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变，之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值，它不应随可能值的排列次序而改变.

例1（17世纪中叶，法国数学家帕斯卡与费马讨论的“合理分配赌注问题”）

1653年夏天，帕斯卡前往埔埃托镇度假．旅途中，他遇到了梅理骑士，这位“赌坛老手”向帕斯卡提出了一个十分有趣的“分赌注”问题．一次梅理与其赌友掷骰子，每人押了32枚金币，并约定，如果梅理先掷出三次6点，或对方先掷出三次4点，便算赢．但是这场赌注不算小的赌博并未顺利结束．当梅理已掷出两次6点，其赌友掷出一次4点时．

梅理接到通知，要他马上陪同国王接见外宾．君命难违，赌博只好停止，双方为如何分配这**64**枚金币争论不休．

请问金币该如何分配？（假设两人赌技相同）

解：为了表述方便，梅理用A来表示，梅理赌友用B来表示．

假设继续赌两局，则结果有以下四种情况：

AA	AB	BA	BB
A胜B负	A胜B负	B胜A负	B胜A负
A胜B负	B胜A负	A胜B负	B胜A负

把已赌过的三局(A 胜2局、B 胜1局)与上述结果相结合，即A、B赌完五局（最多赌五局）：

前三局：A 胜2局，B 胜1局

后二局：$\boxed{AA \quad AB \quad BA}$ $\boxed{BB}$

A胜 B胜

所以，在赌技相同的情况下，***A***、***B***最终获胜的概率分别为**3/4，1/4.**

因此，*A* 能“期望”得到的数目应为：

$$64\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=48\text{（枚金币）}$$

而*B* 能“期望”得到的数目， 则为：

$$64\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{4}=16\text{（枚金币）}$$

例2 甲、乙两人进行打靶，所得分数分别记为 X_1, X_2,它们的分布律分别为

X_1	0	1	2
p_k	0	0.2	0.8

X_2	0	1	2
p_k	0.6	0.3	0.1

评定他们的成绩的好坏.

解： 我们来计算X_1 , X_2的数学期望，得

$$E(X_1) = 0\times 0 + 1\times 0.2 + 2\times 0.8 = 1.8(\text{分})$$

$$E(X_2) = 0\times 0.6 + 1\times 0.3 + 2\times 0.1 = 0.5(\text{分})$$

很明显，甲的成绩要乙的成绩好。

例3 设$X \sim \pi(\lambda)$,求$E(X)$.

解 X的分布率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0$$

X的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

即$E(X)=\lambda$

例4　按规定,某车站每天8:00~9:00,9:00~10:00都恰有一辆客车到站,但到站时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立。其规律为:

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	1/6	3/6	2/6

(i) 一旅客8:00到车站,求他候车时间的数学期望.

(ii)一旅客8:20到车站,求他候车时间的数学期望.

解　设旅客的候车时间为 X(以分计).

(i) X的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{1}{6}+30\times\frac{3}{6}+50\times\frac{2}{6}$$

$$=33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

上表中例如

$$P\{X=70\}=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$$

其中A为事件"第一班车8:10到站",B为事件"第二班车9:30到站".候车时间X的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{3}{36}+90\times\frac{2}{36}=27.22\text{分}$$

例5 商店的销售策略

某商店对某种家用电器 的销售采用先使用后付款的方式 ,记使用寿命为 X(以年计),规定 :

$X \le 1$,一台付款 1500 元;$1 < X \le 2$,一台付款 2000 元;$2 < X \le 3$,一台付款 2500 元;$X > 3$,一台付款 3000 元.

设寿命 X 服从指数分布 ,概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-x/10}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

试求该商店一台收费 Y 的数学期望 .

解　先求出寿命X落在各个时间区间的概率.既有

$$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10}\,\mathrm{d}x$$

$$= e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10}\,\mathrm{d}x$$

$$= e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} \,\mathrm{d}x$$

$$= e^{-0.3} = 0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y) = 2732.15$, 即平均一台收费 2732.15.

练习： $X \sim B(n, p)$，求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k p^k (1-p)^{(n-1)-k} = \boldsymbol{np}$$

特例 若Y ~ B (1 , p)，则 E(Y) = p

例6　在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验N个人的血,可以用两种方法进行.(i)将每个人的血分别去验，这就需验N次.(ii)按k个人一组进行分组，把从k个人抽来的血混合在一起进行检验，如果这混合血液呈阴性反应，就说明k个人的血都呈阴性反应，这样，这k个人的血就只需要验一次.若呈阳性，则再对这k个人的血液分别进行化验.这样，k个人的血总共要化验k+1次.假设每个人化验呈阳性的概率为p，且这些人的试验反应是相互独立的.试说明当p较小时，选取适当的k，按第二种方法可以减少化验的次数.并说明k取什么值时最适宜.

解　各人的血呈阴性反应的概率为$q=1-p$.因而k个人的混合血呈阴性反应的概率为q^k, k个人的混合血呈阳性反应的概率$1-q^k$.

设以k个人为一组时，组内每人化验的次数为X,则X是一个随机变量，其分布律为：

X	1/k	(k + 1)/k
P	q^k	$1-q^k$

X的数学期望为：

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}$$

N个人平均需化验的次数为：

$$N\left(1-q^k+\frac{1}{k}\right)$$

由此可知，只要选择**k**使

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1$$

则**N**个人平均需化验的次数< **N.**当**p**固定时，我们选取**k**使得

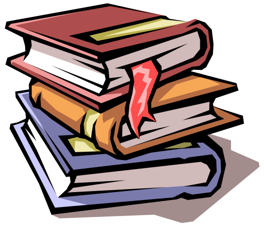
$$1-q^k+\frac{1}{k}=L$$

$L<1$且取到最小值，这时就能得到最好的分组方法

例如，**p=0.1,**则**q=0.9,**当**k=4**时， L 取到最小值**.**此时得到最好的分组方法**.**若**N=1000**，此时以**k=4**分组，则按第二种方案平均只需化验

$$1000\left(1-0.9^4+\frac{1}{4}\right)=594(次)$$

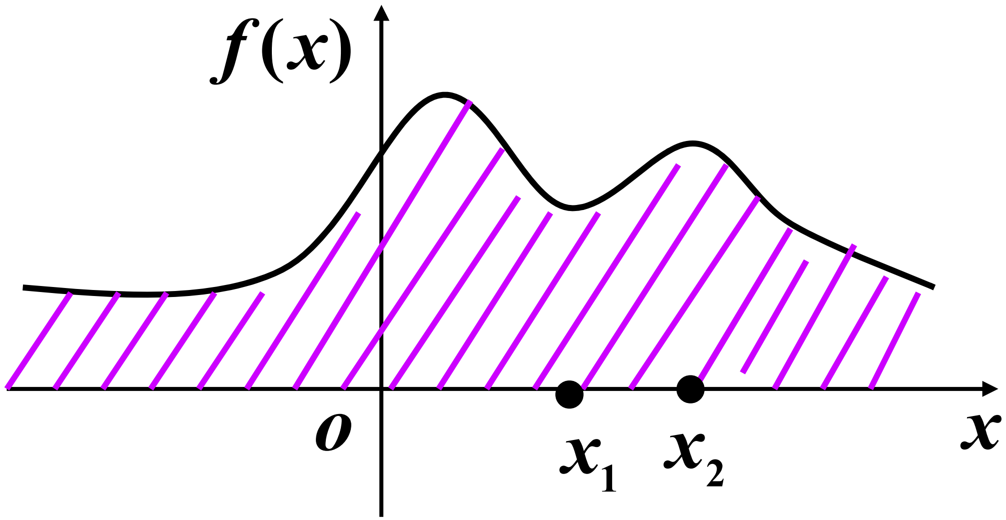
这样平均来说，可以减少**40%**的工作量**.**



思考

如何求解连续型随机变量的数学期望呢？

连续型随机变量取某一确定值得概率为零。



连续型随机变量数学期望的定义

定义　设X是连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$,如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛,则称此积分值为 X 的数学期望, 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx$$

连续型随机变量的数学期望为什么这么定义？

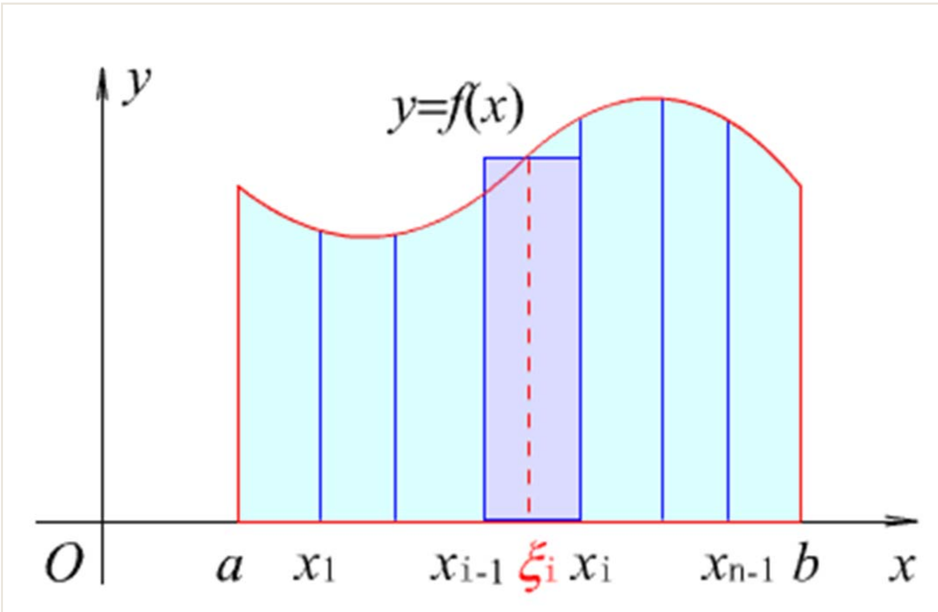
定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上有界.

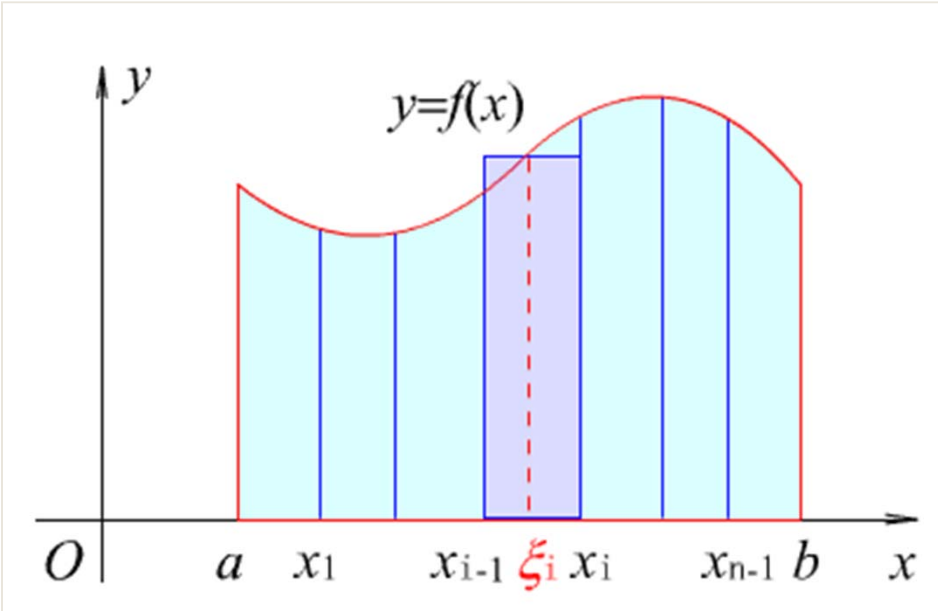
在区间$[a, b]$内插入分点：$a=x_0<x_1<x_2< \cdots <x_{n-1}<x_n=b$;

记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1, 2,\cdots, n)$， $\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2,\cdots, \Delta x_n\}$;

在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 ξ_i $(i=1,2,\ldots,n)$,作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$



•如果当$\lambda\to 0$时，上述和式的极限存在，且极限值与区间$[a, b]$的分法和ξ_i的取法无关， 则称此极限为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx$ 即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$



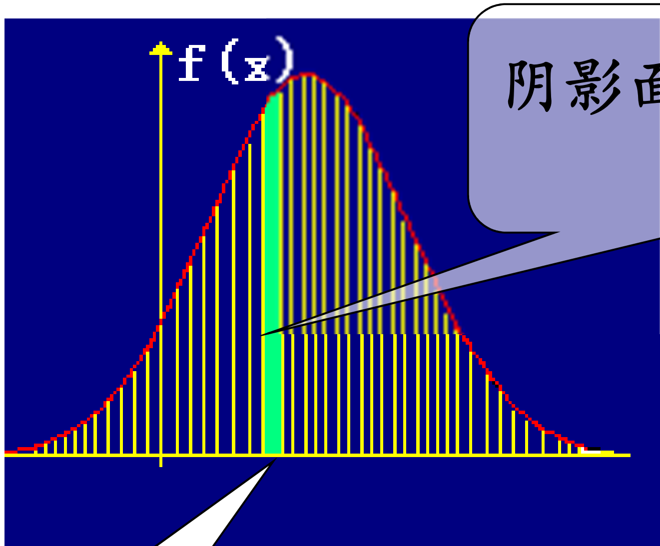
二、连续型随机变量的数学期望

设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$,在数轴上取很密的分点$x_0<x_1<x_2<\ldots$,则X落在小区间$[x_i, x_{i+1})$的概率是

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\approx f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$$

$$= f(x_i)\Delta x_i$$



阴影面积近似为 $f(x_i)\Delta x_i$

小区间$[x_i, x_{i+1})$

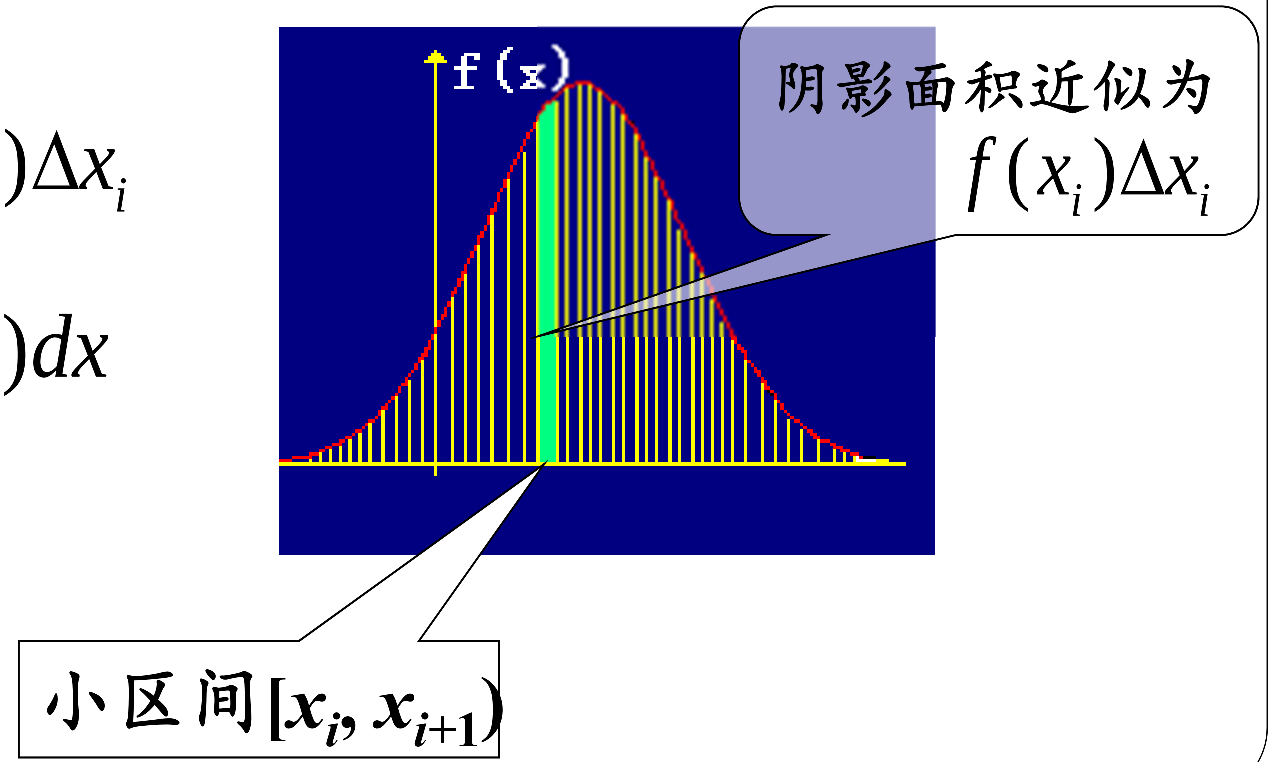
由于x_i与x_{i+1}很接近，所以区间$[x_i, x_{i+1})$中的值可以用x_i来近似代替.

因此X与以概率 $f(x_i)\Delta x_i$ 取值x_i的离散型随机变量近似，该离散型随机变量的数学期望是

$$\sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i$$

这正是 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

的渐近和式.



由此我们引进如下定义

定义 设X是连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$,如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛,则称此积分值为 **X 的数学期望**, 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx$$

请注意：连续型随机变量的数学期望是一个**绝对收敛**的积分.

例7　设$X \sim U(a,b)$,求$E(X)$.

解　X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

即数学期望位于区间(a,b)的中点.

例8 有2个相互独立工作的电子装置，它们的寿命X_k（K=1,2）服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0,\end{cases}\qquad \theta>0$$

若将这个电子装置串联连接组成整机,求整机寿命(以小时计) N 的数学期望.

解 $X_k(k=1,2)$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$N=\min(X_1,X_2)$ 的分布函数为

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}1-e^{-\frac{2x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

于是N的概率密度为

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\min}(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}}dx=\frac{\theta}{2}$$

三、随机变量函数的数学期望

问题的提出：

设已知随机变量X的分布，我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数的期望，比如说 $g(X)$的期望. 那么应该如何计算呢？

一种方法是，因为$g(X)$也是随机变量，故应有概率分布，它的分布可以由已知的X的分布求出来. 一旦我们知道了$g(X)$的分布，就可以按照期望的定义把$E[g(X)]$计算出来.

使用这种方法必须先求出随机变量函数$g(X)$的分布，一般是比较复杂的．

那么是否可以不先求$g(X)$的分布而只根据X的分布求得$E[g(X)]$呢？

下面的定理指出，答案是肯定的.

定理 设Y是随机变量X的函数:$Y=g(X)$ (g是连续函数)

(1) 当X为离散型时,它的分布率为$P(X=x_k)=p_k$;

$(k=1,2,\cdots)$,若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

(2) 当X为连续型时,它的概率密度为$f(x)$.若

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

证明：设 X 是连续型随机变量，且 $y=g(x)$ 满足第二章第五节中定理的条件.

随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]\,|h'(y)|\,\mathrm{d}y.$$

当 $h'(y)$ 恒 >0 时,

$$E(Y)=\int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]\,h'(y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 $h'(y)$ 恒 <0 时,

$$E(Y)=-\int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]\,h'(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{\infty}^{-\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k, & X\text{离散型}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & X\text{连续型}\end{cases}$$

该公式的重要性在于: 当我们求$E[g(X)]$时，不必知道$g(X)$的分布，而只需知道X的分布就可以了.

这给求随机变量函数的期望带来很大方便.

上述定理还可以推广到两个或两个以上随 机变量的函数的情况。

设Z是随机变量X,Y的函数$Z=g(X,Y)$(g是连续函数)

Z是一维随机变量,则

(1)若(X,Y)是二维连续型,概率密度为$f(x,y)$,则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

(2) 若(X,Y)是二维离散型,概率分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i,j=1,2\cdots)\text{则有}$$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

这里假定上两式右边的 积分或级数都绝对收敛.

例9 设风速V在$(0,a)$上服从均匀分布,即具有概率密度

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<v<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

又设飞机机翼受到的正压力W是V的函数:$W=kV^2$ $(k>0$,常数$)$,求W的数学期望.

解:由上面的公式

$$E(W)=\int_{-\infty}^{+\infty}kv^2f(v)dv=\int_0^a kv^2\frac{1}{a}dv=\frac{1}{3}ka^2$$

例10 设随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x,\ x>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y), E(\dfrac{1}{XY})$.

解 $$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{1}^{\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^3y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}[\ln y]_{\frac{1}{x}}^{x} \mathrm{d}x = 3\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}\right]_1^{\infty} + \frac{3}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{4}.$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{xy} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^{\infty} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^4 y^3}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{5}.$$

例11 某公司计划开发一种新产品市场,并试图确定该产品的产量. 他们估计出售一件产品可获利 m 元,而积压一件产品导致 n 元的损失.再者,他们预测销售量 Y(件)服从指数分布,其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-y/\theta}, y>0, \\ 0, \qquad y\le 0.\end{cases} \qquad \theta>0,$$

问若要获得利润的数学期望最大,应生产多少件产品(m,n,θ 均为已知)?

解 设生产 x 件, 则获利 Q 是 x 的函数：

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & Y < x, \\ mx, & Y \geq x. \end{cases}$$

$$E(Q) = \int_0^{\infty} Q f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_0^x [my - n(x - y)] \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta}\,\mathrm{d}\,y + \int_x^{\infty} mx \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= (m + n)\theta - (m + n)\theta \mathrm{e}^{-x/\theta} - nx,$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} E(Q) = (m + n)\mathrm{e}^{-x/\theta} - n = 0,$$

得 $$x = -\theta \ln\left(\frac{n}{m + n}\right).$$

又 $$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E(Q)=\frac{-(m+n)}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}<0,$$

故知当 $x=-\theta\ln(\frac{n}{m+n})$ 时, $E(Q)$ 取得极大值，且可知这也是最大值.

例如, 若 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{10000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{10000}y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

且有 $m=500$ 元, $n=2000$ 元, 则

$$x=-10000\ln(\frac{2000}{500+2000})=2231.4.$$

取 $x=2231$(件).

例12 某甲与其他三人参与一个项目的竞拍,价格以千美元计,价格高者获胜.若甲中标,他就将此项目以10千美元转让给他人.可认为其他三人的竞拍价是相互独立的,且都在7~11千美元之间均匀分布.问甲应如何报价才能使获益的数学期望为最大(若甲中标必须将此项目以他自己的报价买下).

解　设 X_1,X_2,X_3 是其他三人的报价，按题意 X_1,X_2,X_3 相互独立,且在区间(7,11)上服从均匀分布. 其分布函数为

$$F(u)=\begin{cases}0, & u<7,\\ \dfrac{u-7}{4}, & 7\le u<11,\\ 1, & u\ge 11.\end{cases}$$

以 Y 记三人最大出价,即 $Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

Y的分布函数为

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0, & u < 7, \\ \left(\dfrac{u-7}{4}\right)^3, & 7 \le u < 11, \\ 1, & u \ge 11. \end{cases}$$

若甲的报价为x，按题意$7 \le x \le 10$，知甲能赢得这一项目的概率为

$$p = P\{Y \le x\} = F_Y(x) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3, \ (7 \le x \le 10).$$

以 $G(X)$ 记甲的赚钱数，$G(X)$ 是一个随机变量，

它的分布律为

$G(X)$	$10-x$	0
概率	$\left(\dfrac{x-7}{4}\right)^3$	$1-\left(\dfrac{x-7}{4}\right)^3$

于是甲赚钱的数学期望为

$$E[G(X)]=\left(\frac{x-7}{4}\right)^3(10-x).$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E[G(X)]=\frac{1}{4^3}[(x-7)^2(37-4x)]=0,$$

得 $$x=\frac{37}{4},\ x=7(\text{舍去}).$$

又知 $$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2x}E[G(X)]\Big|_{x=37/4}<0.$$

故知当甲的报价为 $x=37/4$ 千美元时，他赚钱的数学期望达到极大值，还可知这也是最大值.

四、 数学期望的性质

1. 设C为常数，则有$E(C)=C$.

证　可将C看成离散型随机变量，分布律为 $P\{X=C\}=1$，故由定义即得$E(C)=C$.

2. 设C为常数，X为随机变量，则有$E(CX)=CE(X)$.

证　设X的概率密度为$f(x)$，则有

$$E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cxf(x)\mathrm{d}x=C\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=CE(X).$$

3. 设 *X*, *Y* 为任意两个随机变量，都有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

证 设二维随机变量 (*X*, *Y*) 的概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，

则 $$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=E(X)+E(Y)$$

推广到任意有限多个随机变量之和的情形，有

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

$$E(k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n)=k_1E(X_1)+k_2E(X_2)+\cdots+k_2E(X_n)$$

4. 设X, Y为相互独立的随机变量，则有

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

证　因为X与Y相互独立，故其联合概率密度与边缘概率密度满足

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

所以 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=E(X)E(Y)$$

推广到任意有限多个相互独立的随机变量之积的情形，有

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

例13　一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车．如果到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）.

解　引入随机变量，

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车}, \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车}, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,10.$$

易知 $$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}.$$

现在来求 $E(X)$.

按题意,任一旅客在第 i 站不下车的概率为 $\dfrac{9}{10}$,

因此20位旅客都不在第 i 站下车的概率为 $\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$,

在第i站有人下车的概率为 $1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$,也就是

$$P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20},$$

$$i=1,2,\cdots,10.$$

由此 $$E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \qquad i=1,2,\cdots,10.$$

进而 $$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1+X_2+\cdots+X_{10}) \\ &= E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10}) \\ &= 10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right] = 8.784(\text{次}). \end{aligned}$$

例14 设一电路中电流 I(A)与电阻 $R(\Omega)$是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$g(i)=\begin{cases}2i, & 0\le i\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{9}, & 0\le r\le 3,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

试求电压 $V=IR$ 的均值.

解 $$E(V)=E(IR)=E(I)E(R)$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty} i g(i)\,\mathrm{d}i\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} r h(r)\,\mathrm{d}r\right]$$

$$=\left[\int_0^1 2i^2\,\mathrm{d}i\right]\left[\int_0^3 \frac{r^3}{9}\,\mathrm{d}r\right]=\frac{3}{2}(\mathrm{V}).$$

如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金,想投资于某项目，预估成功的机会为 30%,可得利润8万元，失败的机会为70%，将损失 2 万元. 若存入银行,同期间的利率为5% ,问是否作此项投资?

解 设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$E(X)=8\times0.3-2\times0.7=1$(万元)，存入银行的利息:

$10\times5\%=0.5$(万元)，故应选择投资.

数学期望不存在的实例

设离散型随机变量X的分布律为

$$p_k = P\left\{X = (-1)^k \frac{2^k}{k}\right\} = \frac{1}{2^k}, k = 1,2\cdots,$$

求$E(X)$.

解　由于 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\ln k.$

但是 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$

因而其数学期望E(X)不存在.

小结

1.离散型 $$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$$

2.连续型 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

3.$Y=g(X)$ $$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

4.Y=g(X, Y) $$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

5、数学期望是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值.

6、数学期望的性质

1° $E(C)=C$.

2° $E(CX)=CE(X)$.

3° $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

4° X和Y相互独立 $\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$.

作业：课后习题2 、4、9、11、12

练习 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1-x^3y+xy^3), & |x|<1,|y|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试验证 $E(XY)=E(X)E(Y)$，但X和Y是不独立的.

解 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xy\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y+xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(-\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{5}x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[-\frac{2}{15}x^5+\frac{2}{15}x^3\right]_{-1}^{1}=0$$

$$E(X)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y+xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}2x\mathrm{d}x=0$$

$$E(Y)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}y\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y+xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}2y\mathrm{d}y=0$$

$$E(XY)=E(X)=E(Y)=0$$

所以 $E(XY)=E(X)E(Y)=0$

X的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1-x^3y+xy^3)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同理可得Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然有$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故X和Y是不独立的.