概率论与数理统计

第一章　概率论的基本概念

练习：

设有来自三个地区的各10名、15名和25名考生的报名表，其中女生的报名表分别为3份、7份和5份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份。

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份表是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

[思路] 由于抽到的表与来自哪个地区有关，故此题要用全概率公式来讨论。

解　记 $H_i=\{$抽到i地区考生的报名表$\}$，$i=1,2,3;$

$A_j=\{$第 j 次抽到报名表是男生的$\}$，$j=1,2,$

则有 $P(H_i)=\dfrac{1}{3}(i=1,2,3)$；　$P(A_1|H_1)=\dfrac{7}{10}$；

$P(A_1|H_2)=\dfrac{8}{15}$；　$P(A_1|H_3)=\dfrac{20}{25}$.

(1) 由全概率公式知

$$p=P(\overline{A_1})=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}|H_i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$$

(2) $q=P(\overline{A_1}|A_2)=\dfrac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}$，由全概率公式得

$$P(\overline{A_1}A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}A_2|H_i)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(\overline{A_1}A_2|H_i),$$

又因为 $P(\overline{A_1}A_2|H_1)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{30},$

$$P(\overline{A_1}A_2|H_2)=\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}=\frac{8}{30},$$

$$P(\overline{A_1}A_2|H_3)=\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}=\frac{5}{30}.$$

所以 $P(\overline{A_1}A_2)=\frac{1}{3}\left[\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right]=\frac{2}{9}$,

而 $P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2|H_i)$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(A_2|H_i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$，用到了抓阄模型

所以 $q=\frac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}=\frac{2}{9}\bigg/\frac{61}{90}=\frac{20}{61}$.

§6 独立性

- 事件的相互独立性
- 几个重要定理
- 典型例题

一、事件的相互独立性

1.引例

盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

$A =$ 第一次抽取,取到绿球,

$B =$ 第二次抽取,取到绿球,

则有 $P(B|A) = P(B)$,

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

2.定义 设 A, B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A,B 相互独立，简称 A, B 独立.

说明

事件 A 与事件 B 相互独立, 是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

容易知道, 若 $P(A)>0$, $P(B)>0$, 则 A,B 相互独立与 A,B 互不相容不能同时成立.

请同学们思考

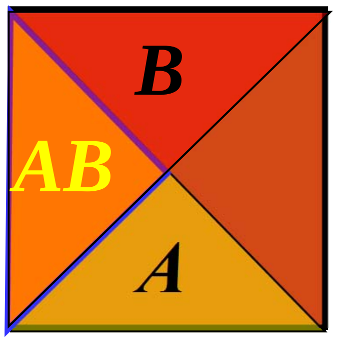
两事件相互独立与两事件互斥的关系.

两事件相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互斥 $AB=\varnothing$

二者之间没有必然联系

例如



若 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2},$

则 $P(AB)=P(A)P(B)$.

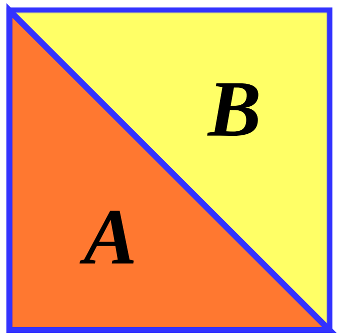
由此可见两事件相互独立，但两事件不互斥.

若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$

则 $P(AB)=0$,

$P(A)P(B)=\frac{1}{4}$,

故 $P(AB)\neq P(A)P(B)$.



由此可见两事件互斥但不独立.

3.三事件两两相互独立的概念

定义　设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 两两相互独立.

4.三事件相互独立的概念

定义 设A,B,C是三个事件，如果足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称事件 A,B,C相互独立.

注意

三个事件相互独立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 三个事件两两相互独立

推广　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意 $k(1 < k \le n)$，任意 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件.

n 个事件相互独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ n 个事件两两相互独立

二、几个重要定理

定理一　设 A, B 是两事件，且 $P(A) > 0$，若 A,B 相互独立，则 $P(B|A) = P(B)$. 反之亦然.

证明　$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B|A) = P(B).$$

定理二　　若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立.

$$A与\overline{B},\ \overline{A}与B,\ \overline{A}与\overline{B}.$$

证　因为 $A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$

于是 $P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})$

$$=P(A)P(B)+P(A\overline{B})$$

$$P(A\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$$

因此 A 与 $\overline{B}$ 相互独立 .由此可立即推出 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立 .

再由 $\overline{\overline{B}}=B$，又推出 $\overline{A}$ 与 B 相互独立 .

两个推论

1° 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \ (n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 $k \ (2 \leq k \leq n)$ 个事件也是相互独立 .

2° 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \ (n \geq 2)$ 相互独立，则将 A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们各自的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立 .

三、典型例题

例1 设试验 E 为“抛甲,乙两枚硬币 ,观察正反面出现的情况”. 设事件 A 为“甲币出现 H”,事件 B 为“乙币出现 H”. E 的样本空间为

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}.$$

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ P(B|A)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}.$$

所以 $P(B|A)=P(B)$, $P(AB)=P(A)P(B)$

由题意，甲币是否出现正面与乙币是否出现正面是互不影响的.

射击问题

例2 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2, 若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

解 设事件 A_i 为 “第 i 名射手击落飞机”,

事件 B 为 “击落飞机” , $i = 1,2,\cdots,10.$

则 $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}$,

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - (0.8)^{10} = 0.893\,.$$

例3 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 ,被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解　设 A_i 表示有 i 个人击中飞机 ,

A, B, C 分别表示甲、乙、丙击中飞机 ,

则 $P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.7,$

由于　$A_1 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$,

故得

$$P(A_1)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$$

$$=0.36\,.$$

因为 $A_2=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$,

得 $P(A_2)=P(AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)$

$$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)$$

$$=0.41\,.$$

由 $A_3 = ABC$， 得 $P(A_3) = P(ABC)$

$$= P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14 .$$

因而, 由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$P = 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14$$

$$= 0.458 .$$

伯恩斯坦反例

例4 一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，而第四面同时染上红、白、黑三种颜色.现以 A，B，C 分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件，问 A，B，C是否相互独立?

解 由于在四面体中红、白、黑分别出现两面，

因此 $$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

又由题意知 $$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$$

故有 $$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}, \\ P(BC) = P(B)P(C) = \dfrac{1}{4}, \\ P(AC) = P(A)P(C) = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 A, B, C 两两独立.

由于 $$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C),$$

因此 A，B，C 不相互独立.

例5 抛掷一对骰子,共抛两次,求两次所得点数分别为7与11的概率.

解 设事件 A_i 为"第 i 次得7点" $i=1,2.$

设事件 B_i 为"第 i 次得11点" $i=1,2.$

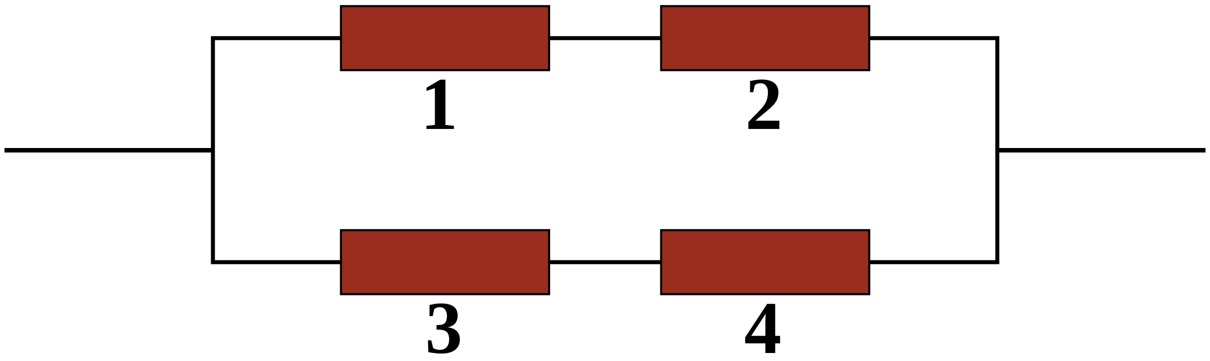
事件 A 为两次所得点数分别为 7 与 11.

则有 $P(A)=P(A_1B_2\cup B_1A_2)=P(A_1B_2)+P(B_1A_2)$

$$=P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)$$

$$=\frac{6}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{6}{36}=\frac{1}{54}.$$

例6 一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性. 如下图，设有4个独立工作的元件1,2,3,4按先串联再并联的方式联接. 设第i个元件的可靠性为$p_i\ (i = 1,2,3,4)$，试求系统的可靠性.



解　以 A_i $(i=1,2,3,4)$ 表示事件“第 i 个元件正常工作”,以 A 表示事件“系统正常工作”.

系统由两条线路I和II组成. 当且仅当至少有一条线路中两个元件均正常工作时,系统才正常工作,故有

$$A = A_1A_2 \cup A_3A_4 .$$

由事件的独立性,得系统的可靠性

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4 .$$

例7　要验收一批(100件)乐器. 验收方案如下:
自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的), 如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯, 则这批乐器就被拒绝接收. 设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95; 而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01. 如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的. 试问这批乐器被接收的概率是多少?

解　设以 $H_i\ (i=0,1,2,3)$ 表示事件“随机地取出3件乐器，其中恰有 i 件音色不纯”，

H_0, H_1, H_2, H_3 是S的一个划分，

以 A 表示事件“这批乐器被接收”.

已知一件音色纯的乐器, 经测试被认为音色纯的概率为 0.99, 而一件音色不纯的乐器, 经测试被认为音色纯的概率为0.05, 并且三件乐器的测试是相互独立的, 于是有

$$P(A|H_0)=(0.99)^3,\quad P(A|H_1)=(0.99)^2\times 0.05,$$

$$P(A|H_2)=0.99\times(0.05)^2,\ P(A|H_3)=(0.05)^3,$$

而 $P(H_0)=\binom{96}{3}\Big/\binom{100}{3}$, $P(H_1)=\binom{4}{1}\binom{96}{2}\Big/\binom{100}{3}$,

$$P(H_2)=\binom{4}{2}\binom{96}{1}\Big/\binom{100}{3},\quad P(H_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{100}{3}.$$

故 $$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|H_i)P(H_i)$$

$$=0.8574+0.0055+0+0$$

$$=0.8629.$$

例8 甲、乙两人进行乒乓球比赛, 每局甲胜的概率为p，$p \ge 1/2$. 问对甲而言, 采取三局两胜制有利, 还是五局三胜制有利. 设各局胜负相互独立.

解 采用三局二胜制，甲最终获胜，胜局情况可能是：

“甲甲”，“乙甲甲”，“甲乙甲”；

由于这三种情况互不相容,

于是由独立性得甲最终获胜的概率为：

$$p_1 = p^2 + 2p^2(1-p).$$

采用五局三胜制，甲最终获胜，至少需比赛 3 局，且最后一局必需是甲胜，而前面甲需胜二局.

例如，比赛四局，则甲的胜局情况可能是：

“甲乙甲甲”，“乙甲甲甲”，“甲甲乙甲”；

由于这三种情况互不相容，于是由独立性得：

在五局三胜制下，甲最终获胜的概率为：

$$p_2 = p^3 + \binom{3}{2} p^3 (1-p) + \binom{4}{2} p^3 (1-p)^2 .$$

由于 $p_2 - p_1 = p^2(6p^3 - 15p^2 + 12p - 3)$

$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1).$$

当 $p > \dfrac{1}{2}$ 时, $p_2 > p_1$; 当 $p = \dfrac{1}{2}$ 时, $p_2 = p_1 = \dfrac{1}{2}$.

故当 $p > \dfrac{1}{2}$ 时，对甲来说采用五局三胜制有利.

当 $p = \dfrac{1}{2}$ 时，两种赛制甲最终获胜的概率是相同的，都是 $\dfrac{1}{2}$.

小结

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)\,P(B)$

A,B,C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$相互独立.

作业：课后习题 37 、40