线性代数复习总结

第二部分

第四章 线性空间

1. 知道线性空间的定义、性质，掌握线性子空间的定义及判定.

线性空间V具有的性质:

零元素唯一. 负元素唯一.

等式 $0\alpha=0$; $(-1)\alpha=-\alpha$; $\lambda 0=0$ 成立.

若$\lambda\alpha=0$, 则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=0$.

子空间判定：$\forall\alpha,\beta\in L$, $k\in F$, 有$\alpha+\beta\in L$, $k\alpha\in L$.

2. 理解基底、维数、坐标等概念.

如果线性空间V中存在由n个向量构成的极大线性无关组，则V称为n维线性空间. 记 $\dim(V)=n$.

V的极大线性无关子组称为V的基底.

零空间（没有基底）的维数规定为零.

有了坐标的概念，抽象的n维线性空间的向量及向量的线性运算，通过坐标及坐标的相应运算表示出来，转换为研究我们熟悉的n元有序数组(向量)及其运算.

3. 知道常见线性空间及解空间、向量组生成的子空间等.

R^n, $R^{m\times n}$, $P_n[x]$, $C[a, b]$, 解空间，零空间，

向量组生成的线性空间 $L(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_m)$.

线性空间V中的两组向量生成线性空间相同

$\Leftrightarrow$ 这两个向量组等价.

4. 会用坐标变换公式，会求过渡矩阵、向量在不同基底下的坐标.

求过渡矩阵: 直接看出法、待定系数法、中介法.

$$[\eta_1, \eta_2,\ldots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n]M$$

称M为由$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n]$到$[\eta_1, \eta_2,\ldots, \eta_n]$的过渡矩阵，某向量在上述基下的矩阵分别为$X$，$Y$，则

$$X=MY, \qquad Y=M^{-1}X$$

第五章 线性变换

1. 会判定线性变换.

线性变换判定：保持向量的加法和数乘. 对 $\forall \alpha,\beta \in V$ 及 $a,b \in F$ 有 $T(a\alpha + b\beta) = aT\alpha + bT\beta$

线性变换保持零向量和负向量、保持线性组合与线性线性相关性不变. (不保持线性无关)

2. 会求线性变换在某组基下的矩阵，向量的像坐标

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

像坐标：$Y=AX$

注意：线性空间的元可为矩阵、多项式、函数等，都应会求线性变换在基底下的矩阵，

如:在R^3中，定义下面的线性变换，对任意

$$(x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$ 求T在基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

下的矩阵.

在空间$P_n[x]$中，求微商变换 $Tf(x) = f'(x)$

在基底 $[1, x, x^2, \cdots, x^n]$ 下的矩阵A.

线性变换在不同基底下所对应的矩阵是**相似**的. 反过来，若两个矩阵相似，则可以看作是**同一个线性变换**在两组基下的矩阵.

3. 掌握特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.

设A是n阶方阵，若数λ和n维非零(列)向量X满足

$$AX = \lambda X$$

则称λ为A的特征根(特征值)，X称为A的对应于(属于)特征根λ的特征向量.

λ是A的特征根 $\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$.

特征向量非零，只能属于一个特征值且：

$$\sum \lambda_i = tr(A), \qquad \Pi \lambda_i = |A|$$

相似矩阵有相同的特征根和特征多项式.

属于不同特征根的特征向量是线性无关的.

设λ_0是n阶矩阵A的k重特征根，则A对应于λ_0的特征子空间的维数不超过k.

对于对称阵呢？

求矩阵A的特征根与特征向量的步骤

1. 计算A的特征多项式 $|\lambda E-A|$;
2. 求特征方程 $|\lambda E-A|=0$的**全部根**$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 也就是$A$的全部特征值;
3. 对于特征值λ_i, 求齐次方程组$(\lambda_i E-A)x=0$ 的非零解, 也就是对应于λ_i 的特征向量.

[求出一组**基础解系**，它们就是对应于该特征根的**线性无关**特征向量，它们的所有**非零线性组合**即为属于该特征根的全部特征向量.]

注意：一般说求特征向量是**求全部**的特征向量，而且要保证特征向量不为零. 如

$k_1X_1+k_2X_2$ (k_1, k_2不同时为0)

4. 掌握相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充要条件及方法.

n阶复矩阵A与对角形矩阵相似$\Leftrightarrow$ A有n个线 性无关的特征向量.

n阶复矩阵A的特征根都是单根，则A必相似于对角形矩阵.

n阶复矩阵A相似于对角形矩阵$\Leftrightarrow$对每个k_i $(1\le k_i\le n)$重特征根λ_i，矩阵$\lambda_i E-A$的秩为$n-k_i$

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是A的n个线性无关的特征向量，且$AX_j= \lambda_j X_j$，令$M=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，则有$M^{-1}AM=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (可相同)是A的全部特征根, 应和M中的$X_1, X_2, \cdots, X_n$顺序对应.

第六章欧几里德空间

1．知道内积、欧氏空间、向量的长度（模）、交角、正交、标准正交基、正交变换等概念.

如：R^n中两个列向量X,Y正交 $\Leftrightarrow X^TY=0$

柯西——布涅柯夫斯基不等式

对于欧氏空间中任意二向量α,β，恒有

$$\langle\alpha,\beta\rangle^2\le\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle \quad \left(\text{或}\left|\langle\alpha,\beta\rangle\right|\le|\alpha||\beta|\right)$$

其中等号成立的充要条件是α与β线性相关.

欧氏空间V中一组两两正交的非零向量，称为V的一个正交(向量)组.

欧氏空间中的正交组是线性无关组.

标准正交基满足关系式：

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

设 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$是$n$维欧氏空间$V$的一个标准正交基底. 向量$\alpha, \beta$在该基底下的坐标分别为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ ,\ (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

则有 $\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

2. 掌握施米特正交化方法，并会进一步标准化.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧氏空间V的一组线性无关向量，则存在V的一个正交组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ ，其中β_k 是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 的线性组合.

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_k=\alpha_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\langle\alpha_k,\beta_j\rangle}{\langle\beta_j,\beta_j\rangle}\beta_j \quad (k=2,\cdots,m) \end{cases}$$

3. 知道正交变换的判定方法

正交变换保持向量的模、内积、夹角不变.

保持内积不变; 把标准正交基变为标准正交基; 在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

第七章二次型

1. 掌握二次型及矩阵表示，二次型秩、等价的概念，二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.

$f(X)=X^TAX$，A是一个对称矩阵，$r(A)$即为矩阵的秩，标准形不唯一，规范形唯一.

n元实二次型 X^TAX 可经坐标变换 $X=CY$ (C为可逆实矩阵)化为二次型 Y^TBY，其中 $B=C^TAC$.

两个实二次型等价 $\Leftrightarrow$ 它们的矩阵是合同矩阵.

等价的实二次型必有相同的秩.

惯性定理：二次型的规范形是唯一确定的.

正惯性指数−负惯性指数 = 符号差.

两个实二次型等价⇔它们有相同的秩和正惯性指数.

2. 掌握用配方法或合同变换法，正交变换法化二次型为标准形的方法.

3. 理解矩阵的合同关系.

4. 知道正定二次型，负定二次型，半正定二次型、半负定二次型和不定二次型的概念.

若对任意 $X\neq 0$，恒有$X^TAX>0$，则实二次型X^TAX称为正定二次型.

坐标变换(非退化线性替换)保持二次型的正定性不变.

5. 掌握二次型和对应矩阵的正定性（负定性）及其判别法.

如：会用定义判定正定矩阵/正定二次型,

(目前认为)正定矩阵必为实对称矩阵,

正定矩阵的行列式大于零.

矩阵A正定的充要条件：

存在可逆矩阵C使得 $A=C^TC$,

A合同与单位矩阵E,

顺序主子式全大于零,

特征根全大于零,

对应二次型正惯性指数为n.

矩阵A负定，则$-A$正定.

例8 设

$$(a_1,a_2,a_3,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&2&3&4\\2&3&a^2&a\end{pmatrix}$$

问 a 取什么值时,

(1) b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示,

且表示式唯一;

(2) b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示,

但表示式不唯一;

(3) b 不可由a_1,a_2,a_3线性表示.

例9 设矩阵$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, 其中a_3,a_4线性无关, $a_3=2a_1+a_2$,

$a_4=3a_1+2a_2$. 向量 $b=a_1+a_2+a_3+a_4$, 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

例10 设 $A=\begin{pmatrix}1&5&-1&-1\\1&-2&1&3\\3&8&-1&1\end{pmatrix}$

(1) 求A的列向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 的秩和一个最大无关组,并把其余向量用此最大无关组线性表示;

(2) 求 $Ax=0$ 的通解.

例11 设 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系, 而 η 不是 $Ax=0$ 的解, 证明 $\eta, \eta+\xi_1, \cdots, \eta+\xi_{n-r}$ 线性无关.

例12 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=n$, 证明

$$R(AB)=R(B)$$

例13 设 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(1) 求 $\dim V, V := L(a_1,a_2,a_3,a_4)$;

(2) 说明 a_1, a_2 和 a_3, a_4 为 V 的两个基, 并求从基 a_1, a_2 到基 a_3, a_4 的过渡矩阵.

例14 求方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

例15 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a, b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

例16 设 A, B为n阶矩阵, λ 为AB的非零特征值, 证明 λ 也为 BA 的特征值.

例17 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值, 求 a 的值, 并讨论 A 可否相似对角化.

例8 设

$$(a_1,a_2,a_3,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&2&3&4\\2&3&a^2&a\end{pmatrix}$$

问 a 取什么值时,

(1) b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示,

且表示式唯一;

(2) b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示,

但表示式不唯一;

(3) b 不可由a_1,a_2,a_3线性表示.

解 对 $(A, b)=(a_1,a_2,a_3,b)$ 施行

初等行变换

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&2&3&4\\2&3&a^2&a\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&1&2&6\\0&1&a^2-2&a+4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&1&2&6\\0&0&a^2-4&a-2\end{pmatrix}$$

(1)当$a\neq\pm2$ 时, $R(A,b)=R(A)=3$,

b可由a_1,a_2,a_3线性表示, 且表示

式唯一(因a_1,a_2,a_3线性无关);

(2)当 $a=2$ 时, $R(A,b)=R(A)=2$,

b可由a_1,a_2,a_3线性表示, 但表示

式不唯一(因a_1,a_2,a_3线性相关);

(3)当 $a=-2$ 时, $R(A,b)\neq R(A)$,

b 不可由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

例9 设矩阵$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, 其中a_3,a_4线性无关, $a_3=2a_1+a_2$, $a_4=3a_1+2a_2$. 向量$b=a_1+a_2+a_3+a_4$, 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解 由$a_3=2a_1+a_2$, $a_4=3a_1+2a_2$ 知$\xi_1=(2,1,-1,0)^T$, $\xi_2=(3,2,0,-1)^T$ 为方程组 $Ax=0$ 的两个解, 且有$a_1=2a_3-a_4$, $a_2=2a_4-3a_3$.

又因a_3,a_4线性无关, 所以a_3,a_4为a_1,a_2,a_3,a_4的一个最大无关组, 秩 $R(A)=2$. 易知 $R(\xi_1,\xi_2)=2=4-R(A)$, 因此 ξ_1,ξ_2 为方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

由 $b=a_1+a_2+a_3+a_4$ 知$\eta=(1,1,1,1)^T$为方程组 $Ax=b$的一个特解.

因此, 方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\2\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathrm{R})$$

例10 设 $A=\begin{pmatrix}1&5&-1&-1\\1&-2&1&3\\3&8&-1&1\end{pmatrix}$

(1) 求A的列向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 的秩和一个最大无关组,并把其余向量用此最大无关组线性表示;

(2) 求 $Ax=0$ 的通解.

解 (1) 化 A 为**行最简形**:

$$A\sim\begin{pmatrix}1&5&-1&-1\\0&-7&2&4\\0&-7&2&4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&3/7&13/7\\0&1&-2/7&-4/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

a_1, a_2, a_3, a_4 的秩为2,

一个最大无关组为a_1, a_2, 且有

$$a_3=\frac{3}{7}a_1-\frac{2}{7}a_2,\ a_4=\frac{13}{7}a_1-\frac{4}{7}a_2$$

(2) $Ax=0$ 的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+(3/7)x_3+(13/7)x_4=0\\ x_2-(2/7)x_3-(4/7)x_4=0\end{cases}$$

令**自由未知元** $x_3=k_1, x_4=k_2$,

得 $Ax=0$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-3/7\\2/7\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-13/7\\4/7\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中 k_1, k_2 为任意数.

例11 设$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$是$Ax=0$的一个基础解系, 而η不是$Ax=0$的解, 证明$\eta, \eta+\xi_1, \cdots, \eta+\xi_{n-r}$线性无关.

证1 设存在一组数$x, x_1, \cdots, x_{n-r}$, 使

$$x\eta + x_1(\eta+\xi_1) + \cdots + x_{n-r}(\eta+\xi_{n-r}) = \mathbf{0}$$

即 $(x + x_1 + \cdots + x_{n-r})\eta + x_1\xi_1 + \cdots + x_{n-r}\xi_{n-r} = \mathbf{0}$ (1)

因$A\xi_i = \mathbf{0}$ $(i=1,\cdots,n-r)$, 上式两边左乘A得

$$(x + x_1 + \cdots + x_{n-r})A\eta = \mathbf{0}$$

因$A\eta \neq \mathbf{0}$, 所以

$$x + x_1 + \cdots + x_{n-r} = 0 \tag{2}$$

代入(1)得 $x_1\xi_1 + \cdots + x_{n-r}\xi_{n-r} = \mathbf{0}$

而$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关, 所以$x_1 = \cdots = x_{n-r} = 0$,

由(2)得$x=0$, 所以$\eta, \eta+\xi_1, \cdots, \eta+\xi_{n-r}$线性无关.

例11 设$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$是$Ax=0$的一个基础解系,而η不是$Ax=0$的解,证明$\eta, \eta+\xi_1, \cdots, \eta+\xi_{n-r}$线性无关.

证2 因$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$的线性组合也是$Ax=0$的解,所以η不可由$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性表示,而$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关,由定理知$\eta, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关,从而

$$R(\eta, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}) = n-r+1$$

易知$\eta, \eta+\xi_1, \cdots, \eta+\xi_{n-r}$与$\eta, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$等价,因此

$$R(\eta, \eta+\xi_1, \cdots, \eta+\xi_{n-r}) = R(\eta, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}) = n-r+1$$

所以$\eta, \eta+\xi_1, \cdots, \eta+\xi_{n-r}$线性无关.

定理 设向量组$a_1, \cdots, a_r$线性无关,若$a_1, \cdots, a_r, b$线性相关,则向量b可由$a_1, \cdots, a_r$线性表示.

例12 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=n$, 证明

$$R(AB)=R(B)$$

证1 因 $R(A)=n$, 可知 A 的等价标准形为

$$F=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix} \quad \text{(也是行最简形)}$$

于是存在 m 阶可逆矩阵 P, 使 $A=PF$. 因此

$$R(AB)=R(PFB)=R(FB)=R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=R(B)$$

例12 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=n$, 证明

$$R(AB)=R(B)$$

证2 若 x 满足 $Bx=0$, 则有 $A(Bx)=0$, 即 $(AB)x=0$;

若 x 满足 $(AB)x=0$, 则有 $A(Bx)=0$, 因为 $R(A)=n$,

所以 $Bx=0$.

综上可知 $(AB)x=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 设解空间为 S,

则有

$$R(AB)=R(B)=n-\dim(S)$$

- n 元方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $R(A)<n$.

- n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为解空间S 的一个基, $\dim S=n-R(A)$.

例13 设 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}1&-2&-3&7\\-1&2&3&-7\\2&-1&0&8\end{pmatrix}$

(1) 求 $\dim V, V := L(a_1,a_2,a_3,a_4)$;

(2) 说明 a_1, a_2 和 a_3, a_4 为V的两个基, 并求从基 a_1, a_2 到基 a_3, a_4 的过渡矩阵.

解 $(a_1,a_2,a_3,a_4)\sim\begin{pmatrix}1&-2&-3&7\\0&0&0&0\\0&3&6&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\dim V = R(a_1,a_2,a_3,a_4)=2$$

易知$R(a_1,a_2)=R(a_3,a_4)=2$, 故a_1,a_2和a_3,a_4都是V的基.

从基 a_1, a_2 到基 a_3, a_4 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}$.

例14 求方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 方阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \\ 0 & -1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-3, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1.$

例14 求方阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 当 $\lambda_1=-3$ 时, 解方程组 $(-3E-A)x=0$. 由

$$-3E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&1\\-1&-3&1&-1\\-1&1&-3&-1\\1&-1&-1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-3\\-1&-3&1&-1\\-1&1&-3&-1\\-3&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-3\\0&-4&0&-4\\0&0&-4&-4\\0&-4&-4&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&0&1\\0&0&-4&-4\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,

方阵 A 对应于 $\lambda_1=-3$ 的全部特征向量为 $k_1p_1\ (k_1\neq 0)$.

例14 求方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 当 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 解方程组 $(E-A)x=\mathbf{0}$. 由

$$E-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

方阵 A 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 的全部特征向量为

$$k_2p_2+k_3p_3+k_4p_4 \quad (k_2, k_3, k_4 \text{ 不同时为零})$$

例15 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a, b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

解 (1) 因 A 与对角阵 B 相似, 知 A 的特征值为 $2, 2, b$.

由特征值的性质得

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{vmatrix}=6(a-1)=4b$$

$$\operatorname{tr}(A)=5+a=4+b$$

求得 $a=5,\ b=6.$

例15 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a, b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

解 (2) 当 $\lambda=2$ 时, 解方程组 $(2E-A)x=0$, 得基础解系

$$p_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ p_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

当 $\lambda=6$ 时, 解方程组 $(6E-A)x=0$, 得基础解系

$$p_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$$

取可逆矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

则有 $P^{-1}AP=B$.

例15 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a, b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

解 (3) $A=PBP^{-1}$, $A^n=PB^nP^{-1}$.

$$P^*=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ -3 & -3 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$|P|=1\times2+(-1)\times(-3)+1\times1=-4$$

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^*=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ -3 & -3 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

例15 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$$

(1) 求常数 a, b; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. (3) 求 A^n.

解 (3) $A=PBP^{-1}$, $A^n=PB^nP^{-1}$.

$$A^n=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-3&-3&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=-2^{n-2}\begin{pmatrix}3^n-5&3^n-1&1-3^n\\2(1-3^n)&-2(3^n+1)&2(3^n-1)\\3^{n+1}-3&3^{n+1}-3&-3^{n+1}-1\end{pmatrix}$$

例16 设 A, B 为 n 阶矩阵, λ 为 AB 的非零特征值, 证明 λ 也为 BA 的特征值.

证明 存在非零向量 p, 使 $ABp = \lambda p$. 于是

$$BA(Bp) = B(ABp) = B(\lambda p) = \lambda(Bp)$$

由 $\lambda \neq 0$, $p \neq 0$, 可知 $Bp \neq 0$. 因此 λ 为 BA 的特征值.

(而 Bp 为对应的特征向量)

例17 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 有一个二重特征值，求 a 的值，并讨论 A 可否相似对角化.

解 方阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

例17 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值,

求 a 的值, 并讨论 A 可否相似对角化.

解 若 $\lambda=2$ 是二重特征值, 则 $\lambda=2$ 是

$$\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$$

的根, 求得 $a=-2$.

$$2E-A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(2E-A)=1$, $\lambda=2$ 的几何重数为 2, 等于代数重数,

从而 A 可相似对角化.

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

例17 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值，求 a 的值，并讨论 A 可否相似对角化.

解 若 $\lambda=2$ 不是二重特征值，则

$$\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$$

有重根 $\lambda=4$，求得 $a=-2/3$.

$$4E-A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 2/3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(4E-A)=2$，$\lambda=4$ 的几何重数为 1，小于代数重数 2，从而 A 不可相似对角化.

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$