多元微分的应用练习题

1. 设可微函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿方向$\vec{l_1}=(1,-1)$的方向导数为$\sqrt{2}$, 沿方向$\vec{l_2}=(0,-2)$的方向导数为3, 则函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿方向$\vec{l}=(-2,3)$ 的方向导数为

2. 求λ的值，使两曲面：$xyz=\lambda$与$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限内相切，并求出在切点处两区面的公共切平面方程。

3. 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上求一切平面，它在坐标轴的正半轴截取相等的线段。

4. 椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$平行于平面$x-y+2z=0$的切平面方程为

5. 螺旋线$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ 上与平面$x+y+z=0$平行的切线有几条？

6. 已知曲面$4x^2+y^2-z^2=1$上的点P处的切平面π平行于平面$2x-y+z=1$, 求切平面π的方程.

7. 设l是曲面$z=y^2+x^3y$上的一条曲线在点$(2,1,9)$的切线。若l在xOy面上的投影平行于直线$y=x$，求此切线l的方程。

8. 设曲面S: $(x-y)^2-z^2=1$.

   (1) 求曲面S在点$M(1,0,0)$处的切平面π的方程.

   (2) 证明：原点到曲面S上的点的距离的最小值等于原点到平面π的距离.

9. 设空间曲面S：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{8}=1$与平面$\Pi$：$x+y+2z=0$的交线为空间曲线$C$，求曲线$C$上任意一点$(x_0,y_0,z_0)$的切线方程.

10. 若函数$f(x,y)=ax^2+bxy-y^2$有一个唯一的极大值$f(0,0)$，则常数a,b应满足

    (A) $a>-\dfrac{b^2}{4}$ (B) $a<\dfrac{b^2}{4}$ (C) $a<-\dfrac{b^2}{4}$ (D) 上述结论都不正确

11. 若可微函数$z=f(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}z=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，则 ( )

    (A) $f(0,0)$为极大值 (B) $f(0,0)$为极小值 (C) $f(0,0)$不是极值 (D) 不能判断f在$(0,0)$处是否有极值

12. 设$F(x,y)$具有2阶连续偏导数，$F(x_0,y_0)=0$，$F'_x(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)>0$. 若$y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的在点(x_0,y_0) 附近的隐函数，则x_0是$y=y(x)$的极小值点的一个充分条件为 ( )

    (A) $F''_{xx}(x_0,y_0)>0$ (B) $F''_{xx}(x_0,y_0)<0$ (C) $F''_{yy}(x_0,y_0)>0$ (D) $F''_{yy}(x_0,y_0)<0$

13. 设$u(x,y)$在平面有界闭区域D上具有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}>0$及$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则 ( )

    (A) $u(x,y)$的最大值点和最小值点必定都在区域D的内部；

    (B) $u(x,y)$的最大值点和最小值点必定都在区域D的边界上；

    (C) $u(x,y)$的最大值点在区域D的内部，最小值点在区域D的边界上；

    (D) $u(x,y)$的最小值点在区域D的内部，最大值点在区域D的边界上。

14. 求函数$z=x^2+y^2$在区域D: $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y\le 5$ 上的最大值与最小值。

15. 设连续函数$f(x,y)$满足$f(x,y)=x^2+y^2-\frac{3}{8}x\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{2}{\pi}y\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中$D_1=\{(x,y)|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$, $D_2=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$, 求$f(x,y)$在$x^2+y^2\le 1$上的最值.

16. 求曲线$\sigma:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+4z=6\end{cases}$ 上点到平面Π: $2x+2y+z=0$ 的最大距离和最小距离.

17. 设圆$x^2+y^2=2y$含与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内部，且圆与椭圆相切于两点（即在这两点处圆与椭圆都有公共切线）。

(1) 求a与b满足的等式；

(2) 求a与b的值，使椭圆的面积最小。