概率论与数理统计

第七章　参数估计

练习：

1、设总体$X \sim N(\mu, 0.9^2)$容量为9的简单随机变量，均值$\bar{x}=5$，则未知参数μ的置信度为0.95的置信区间是________

解：$\sigma^2 = 0.9^2$ 已知，　置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$

而$\bar{x}=5, n=9, \sigma=0.9, \alpha=0.05$，　$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

故$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = 0.588$　置信区间为$(4.412, 5.588)$

2、总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，$n \geq$________时，才能使总体均值μ的置信度为0.95的置信区间长不大于L

（A）$15\sigma^2/L^2$；　　（B）$15.3664\sigma^2/L^2$；

（C）$16\sigma^2/L^2$；　　（D）16

解：　置信区间为$\left(\overline{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$ 依题意，区间长度

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq L$$　　而由$\alpha = 0.05, z_{\alpha/2} = 1.96$

$$\text{所以} n \geq \frac{4\sigma^2}{L^2}\left(z_{\alpha/2}\right)^2 = 15.3664\frac{\sigma^2}{L^2}$$

§5 正态总体均值与方差的区间估计

- 三大抽样分布的回顾
- 单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况
- 两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

三大抽样分布的回顾

1、χ^2 分布

定义: 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，都服从正态分布 $N(0,1)$, 则称随机变量：

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

所服从的分布为自由度为 n 的χ^2分布.

记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

χ^2分布的性质

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立, 都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$

2. 设 $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2)$,且$X_1$,$X_2$相互独立,

则$\boldsymbol{X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)}$.

3. 若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则当n充分大时, $\frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}}$的分布近似正态分布**N(0,1).**

4. 若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$, χ^2分布的数学期望与方差,

$$E(\chi^2)=n,\ D(\chi^2)=2n.$$

2、t 分布

定义：设$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且X与Y相互独立，则称变量

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

所服从的分布为自由度为 n的 t 分布.

记为 $t \sim t(n)$. t分布又称为学生氏分布.

t 分布的性质

1. 具有自由度为n的t分布$t \sim t(n)$,其数学期望与方差为：$E(t)=0, D(t)=n/(n-2) \quad (n>2)$

2. t分布的密度函数关于$t=0$对称.当n充分大时,其图形近似于标准正态分布概率密度的图形,

再由Γ函数的性质有 $\lim\limits_{n\to\infty} h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$.

即当n足够大时，$t \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$. 注：$f_n(t)$是偶函数

t分布的上α分位点的性质：

$$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$$

3、F分布

定义： 设$U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$, U 与V相互独立，则称随机变量

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$$

服从自由度为n_1及 n_2 的F分布，n_1称为第一自由度，n_2称为第二自由度，记作 $F \sim F(n_1,n_2)$.

1.F分布的数学期望为:

$$E(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \qquad 若n_2>2$$

即它的数学期望并不依赖于第一自由度n_1.

几个重要的抽样分布定理

定理 1 (样本均值的分布)

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则有

$$\overline{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

即 $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

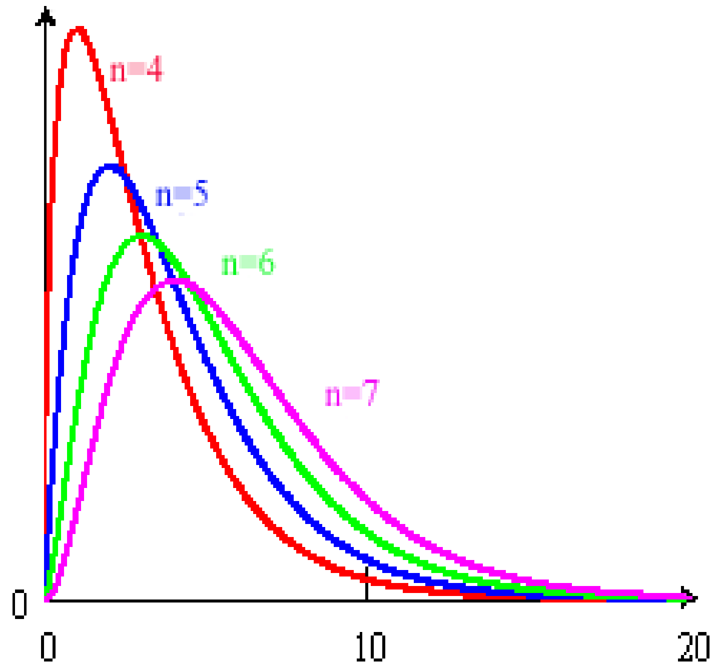
定理 2 (样本方差的分布)

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，则有

(1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

(2) $\bar{X}$与S^2独立.

n取不同值时$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$的分布.



定理 3 (样本均值的分布)

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, $\bar{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差,

则有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

定理 4 (两总体样本均值差、样本方差比的分布)

设$X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$， $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$,且$X$与$Y$独立, $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$是来自$X$的样本,$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$是取自$Y$的样本, $\overline{X}$和$\overline{Y}$分别是这两个样本的样本均值, S_1^2和S_2^2分别是这两个样本的样本方差,则有

1、 $$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

2、 $$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,并设 $X_1,\dots,X_n$ 为来自总体的样本，$\bar{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差.

1、均值 μ 的置信区间

1° σ^2 为已知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

可得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right) \text{或} \left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

2° σ^2 为未知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

此分布不依赖于任何未知参数

由 $$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}|<t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

可得到μ的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

或 $$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

例1 有一大批糖果.现从中随机地取 16 袋，称得重量(以克计)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体均值 μ 的置信水平0.95为的置信区间.

解 这里 $1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, n-1=15,$

$t_{0.025}(15)=2.1315.$

$$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=503.75,$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=6.2022.$$

于是得到μ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

即 $(500.4, 507.1)$

2、方差σ^2的置信区间（书上只介绍μ未知的情况）

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

由

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得到σ^2的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

由

$$P\{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sigma} < \sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\} = 1-\alpha$$

可得到标准差 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

例2 有一大批糖果.现从中随机地取 16 袋, 称得重量(以克计)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布,试求总体标准差 σ 的置信水平0.95为的置信区间.

解 这里 $\alpha/2 = 0.025, 1-\alpha/2 = 0.975, n-1 = 15,$

$$\chi^2_{0.025}(15) = 27.488, \quad \chi^2_{0.975}(15) = 6.262.$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \overline{x})^2} = 6.2022.$$

于是得到 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

即 $(4.58, 9.60).$

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$的情况

设已给定置信水平为 $1-\alpha$，并设 $X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$ 是来自第一个总体的样本，$Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}$ 是来自第二个总体的样本，这两个样本相互独立。且设 $\bar{X},\bar{Y}$ 分别为第一、二个总体的样本均值，S_1^2,S_2^2 为第一、二个总体的样本方差。

1、两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

1° σ_1^2,σ_2^2 为已知

$$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}), \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

因为 X, Y 相互独立，所以 $\bar{X}, \bar{Y}$ 相互独立.

故

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

或

$$\frac{(\bar{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

于是得到$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

2° $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, σ^2为未知

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$, $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

于是得到 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$, $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

例3 为比较 I, II 两种型号步枪子弹的枪口速度,随机地取 I 型子弹 10 发,得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_1} = 500(m/s)$, 标准差 $s_1^2 = 1.10(m/s)$,随机地取 II 型子弹 20 发,得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_2} = 496(m/s)$, 标准差 $s_2^2 = 1.20(m/s)$. 假设两总体都可认为近似地服从正态分布.且生产过程可认为方差相等.求两总体均值差$\mu_1 - \mu_2$的置信水平为 **0.95** 的置信区间.

解　依题意，可认为分别来自两总体的样本是相互独立的.又因为由假设两总体的方差相等，但数值未知，故两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $s_\omega=\sqrt{s_\omega^2}$，$s_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$.

这里 $\alpha/2=0.025, n_1=10, n_2=20, n_1+n_2-2=28,$

$t_{0.025}(28)=2.048.$ $\overline{x_1}=500,$ $\overline{x_2}=496,$ $s_\omega=1.1688.$

故两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=(4\pm 0.93)$$

即 (3.07, 4.93) .

本题中得到的置信区间的下限大于零，在实际中我们就认为μ_1比μ_2大.

例4 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂.为慎重起见，在实验工厂先进行试验。设采用原来的催化剂进行了$n_1=8$次试验，得到得率的平均值$\overline{x_1}=91.73$.样本方差为$s_1^2=3.89$；又采用新的催化剂进行了$n_2=8$次试验，得到得率的均值$\overline{x_2}=93.75$,样本方差$s_2^2=4.02$. 假设两总体都可认为服从正态分布，且方差相等，两样本独立.试求两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.95的置信区间。

解 由题意， $$s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$s_w = \sqrt{3.96}$$

可得所求的置信水平为**0.95**的置信区间为

$$(\overline{x_1} - \overline{x_2} - t_{0.025}(14)s_w\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}, \overline{x_1} - \overline{x_2} + t_{0.025}(14)s_w\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}})$$

即（**-4.15,0.11**）

由于所得置信区间包含零，在实际中我们就认为采用这两种催化剂所得的得率的均值没有显著差别.

2、两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

$(\mu_1,\mu_2$ 为未知 $)$

由 $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$

$$P\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\} = 1-\alpha$$

即

$$P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\} = 1-\alpha$$

可得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例5 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径，随机地抽取机器 A生产的钢管18只，测得样本方差 $s_1^2 = 0.34(mm^2)$；随机地取机器 B 生产的钢管13只，测得样本方差 $s_2^2 = 0.29(mm^2)$. 设两样本相互独立，且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径分别服从正态分布 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，这里 μ_i,σ_i^2 $(i=1,2)$ 均未知. 试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 0.90 的置信区间.

解 这里 $\alpha = 0.10, \alpha/2 = 0.05, 1-\alpha/2 = 0.95,$

$n_1 = 18, s_1^2 = 0.34, n_2 = 13, s_2^2 = 0.29.$ $F_{0.05}(17,12) = 2.59,$

$$F_{0.95}(17,12) = \frac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \frac{1}{2.38}.$$

故两总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

即 (0.45 , 2.79) .

由于σ_1^2/σ_2^2的置信区间包含1，在实际中我们就认为σ_1^2/σ_2^2 两者没有显著差别.

§5 (0-1) 分布参数的区间估计

- 置信区间公式
- 典型例题

一、置信区间公式

设有一容量$n>50$的大样本，它来自$(0-1)$分布的总体X，X的分布律为 $f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$，$x=0,1$，其中p为未知参数，则p的置信度为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

其中$a=n+z_{\alpha/2}^2$, $b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)$, $c=n\overline{X}^2$.

推导过程如下:

因为(0–1)分布的均值和方差分别为

$$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p),$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，因为容量n较大,

由**中心极限定理**知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

近似地服从 $N(0,1)$ 分布,

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha,$$

不等式 $-z_{\alpha/2} < \dfrac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$

等价于 $(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\overline{X}^2 < 0,$

令 $p_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad p_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2, \quad b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2), \quad c = n\overline{X}^2.$

则 p 的近似置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$(p_1, \ p_2).$$

二、典型例题

例1 设从一大批产品的100个样品中, 得一级品60个, 求这批产品的一级品率 p 的置信水平为0.95的置信区间.

解 一级品率 p 是(0-1)分布的参数

$$n = 100, \quad \bar{x} = \frac{60}{100} = 0.6,$$

$$1 - \alpha = 0.95, \quad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

则 $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84,$

$$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^{2}) = -(2n\overline{x} + z_{\alpha/2}^{2}) = -123.84,$$

$$c = n\overline{X}^{2} = n\overline{x}^{2} = 36,$$

于是 $$p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.50,$$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.69,$$

p 的置信水平为0.95的置信区间为 $(0.50, 0.69)$.

例2　设从一大批产品的120个样品中, 得次品9个, 求这批产品的次品率 p 的置信水平为0.90的置信区间.

解　$n = 120, \quad \bar{x} = \dfrac{9}{100} = 0.09, \quad 1 - \alpha = 0.90,$

则 $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 122.71,$

$$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -24.31,$$

$$c = -n\overline{X}^2 = -n\bar{x}^2 = 0.972,$$

于是 $p_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.056,$

$$p_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.143,$$

p 的置信水平为0.90的置信区间为 (0.056, 0.143).

小结

在本节中，我们学习了单个正态总体均值、方差的置信区间，两个正态总体均值差、方差比的置信区间 以及 **(0-1)** 分布参数的区间估计.

作业：课后习题 21、22、23

练习：

1、 某单位要估计平均每天职工的总医疗费，观察了30天,其总金额的平均值是170元,标准差为30元，试决定职工每天总医疗费用平均值的区间估计（置信水平为0.95）.

解 设每天职工的总医疗费为X，则有

$$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$$

由中心极限定理，

$$\overline{X}\text{近似服从正态分布}N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

σ未知，$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 近似服从自由度为***n-1***的***t***分布

使 $P\{|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}|\le t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$

得均值μ 的置信水平为$1-\alpha$ 的区间估计为

$$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$$

将$\bar{X}$ =170,S=30,n=30, $t_{\alpha/2}(29)$ =2.0452代入得,

μ 的置信水平为0.95的置信区间是[158.80, 181.20]

2、某工厂生产一批滚珠，其直径 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从某天的产品中随机抽取 6 件，测得直径为

15.1，14.8，15.2，14.9，14.6，15.1

$\left.\begin{array}{l}\text{(1) 若}\sigma^2\text{=0.06, 求}\mu\text{的置信区间} \\ \text{(2) 若}\sigma^2\text{未知,求}\mu\text{的置信区间} \\ \text{(3) 求方差}\sigma^2\text{的置信区间.}\end{array}\right\}$ 置信度均为0.95

解 (1) $\bar{X} \sim N(\mu, 0.06/6)$ 即 $N(\mu, 0.01)$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{0.1} \sim N(0,1) \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

由给定数据算得 $\bar{x}=\dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=14.95$

由置信区间 $\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$ 得 μ 的置信区间为

$$(14.95-1.96\times0.1,\quad 14.95+1.96\times0.1)$$

$$=(14.75,\quad 15.15)$$

(2) 取 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{6}}\sim t(5)$ 查表 $t_{0.025}(5)=2.5706$

由给定数据算得 $\bar{x}=14.95$

$$s^2=\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2\right)=0.051.\quad s=0.226$$

由置信区间$(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$得$\mu$的置信区间为

$$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5),\quad \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5))$$

$$=(14.71,\quad 15.187)$$

(3) 选取统计量 $K=\frac{5S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)\quad s^2=0.051.$

查表得 $\chi^2_{0.025}(5)=12.833,\quad \chi^2_{0975}(5)=0.831$

由置信区间$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$得$\sigma^2$的置信区间为

$$(\frac{5s^2}{\chi^2_{0.025}(5)},\quad \frac{5s^2}{\chi^2_{0.975}(5)})=(0.0199,\quad 0.3069)$$