# 第十二章

# 麦克斯韦电磁理论

# § 1 麦克斯韦方程组

## 1. 麦氏第一假说----涡旋电场

法拉第： $\dfrac{d\Phi_m}{dt} \rightarrow \varepsilon_i \rightarrow I_i$

麦克斯韦： $\dfrac{d\Phi_m}{dt} \rightarrow E_{涡} \rightarrow \varepsilon_i \rightarrow I_i$

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

一般情况下，空间某一点的总电场：

$$\vec{E} = \vec{E}_{(1)} + \vec{E}_{(2)}$$

$\vec{E}_{(1)}$：静电场，有源场；

$\vec{E}_{(2)}$：涡旋电场，无源场.

$\begin{cases} \text{异：一个有源、一个无源；} \\ \text{同：对电荷有力的作用。} \end{cases}$

静电场： $\oint \vec{E}_{(1)} \cdot d\vec{l} = 0$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_{(1)} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_{(2)} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad (1)$$

实质：变化的磁场产生电场

**提出** $\vec{\boldsymbol{B}}$变化 $\longrightarrow \vec{\boldsymbol{E}}$

**反过来** $\vec{E}$变化 $\longrightarrow$ 得到什么？

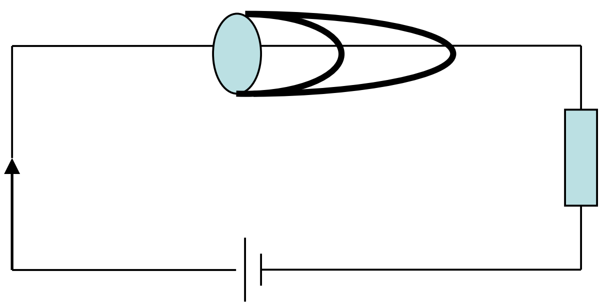
**——位移电流**

## 2 麦氏第二假说--位移电流

麦克斯韦对电磁场理论的重大贡献的核心是**位移电流**的假说，它是将安培环路定理应用于含有电容的交变电路中出现矛盾而引出的。

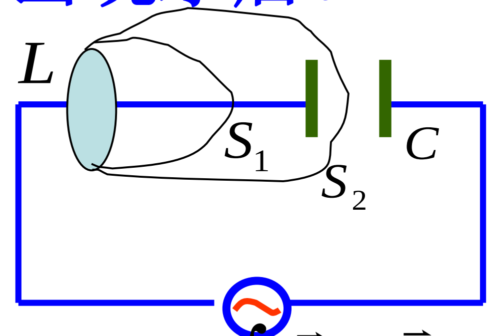
### A 安培环路定理

稳恒电流：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_i$



通过以环路为周界所有曲面的电流相等，与曲面形状、位置无关。

在研究含有电容$C$的交变电流电路时（非稳恒电流的磁场），应用安培环路定理就会出现矛盾。




$S_1$面：

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0$$

$$= \iint_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{dq}{dt} = S\frac{d\sigma}{dt}$$

$S_2$面：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}$

$$= \iint_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

**H**的环流与同样边界的不同曲面有了关系，显然在稳恒情况下得到的安培定理不能应用于交变电路中。推翻？修正？）

电流连续方程 $$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

闭合面内的电量对时间的减少率

电流稳恒条件 $$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

稳恒电流是指大小和方向都不随时间变化，或者说电流场不随时间变化，因此不能有电荷的积累

或者单位时间流入闭合面的电量与流出的电量相等。

## B 矛盾的解决

矛盾是由电流变化造成的，即传导电流在交变电容电路中不再连续；如果假设在变化的电容器中有另一种电流存在，整个电路的电流就又连续了。

- 研究电容器充、放电过程

传导电流终止在电容器极板上的同时，极板上积累电荷

$$q_0(t) \longrightarrow E(t)$$

根据电流连续性方程 $$\oint\!\!\!\oint_{(S)} \boldsymbol{j}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(b)}$$

其中 $S = S_1 + S_2$， $q_0(t)$ 是闭合面 S 所包围的自由电荷。

按高斯定理有

$$\oint\!\!\!\oint_{(S)} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q_0$$

从而有 $$\frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint\!\!\!\oint_{(S)} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint\!\!\!\oint_{(S)} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{（c）}$$

代入(b)得 $$\oint\!\!\!\oint_{(S)} \boldsymbol{j}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint\!\!\!\oint_{(S)} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\Longrightarrow \quad \oint\!\!\!\oint_{(S)} \left(\boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

或 $$\iint_{(S_1)} \left(\boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{(S_2)} \left(\boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot d\boldsymbol{S}$$

- 虽然传导电流 $j_0$ 终止在电容器极板上，但是 $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 在极板间延续了 $j_0$ 的作用—— $j_0+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 是连续的。

- $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 与 $j_0$ 地位相当，令 $j_d=\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$，它对于任意曲面 S 的通量等于电位移通量的变化率——位移电流

$$I_d=\iint_{(S)} j_d\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{(S)}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{d}{dt}\iint_{S}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{d\Psi}{dt}$$

电位移通量的变化率

在电容器中无传导电流但有变化的电场，有位移电流。

在电容器中中断的传导电流被位移电流取代，在回路中保持电流的连续性。

位移电流密度：

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- 全电流 $I = I_0 + I_d$ 在任何情况下都是连续的。

非恒定情况下，全电流为

$$I = \sum_{(S)} I_0 + \iint_{(S)} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{(S)} \boldsymbol{j}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{(S)} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

麦克斯韦全电流：$I=\sum I_0+\sum I_d$

全电流安培环路定理：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0+\frac{d\Phi_d}{dt}=\iint_S\left(\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

说明：

位移电流与传导电流的异同：

同：产生磁场的规律相同。

异：1. 位移电流的实质是变化的电场，它不是电荷的定向移动。2. 位移电流不仅在导体中，而且在介质和真空中存在。3. 位移电流不产生焦耳热。

特别：在介质中主要是位移电流，在导体中主要是传导电流，在高频电流流过的情况下，二者均起作用。

- **传导电流：** 电荷宏观定向运动。
- **磁化电流：** 分子电流有序排列的宏观表现。
- **位移电流：** 电场随时间变化而产生的电流。

# 麦克斯韦方程组的积分形式

- 电场有两种：静电场、涡旋电场：

任意电场： $\vec{E}=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{涡}$ $\vec{D}=\vec{D}_{静}+\vec{D}_{涡}$

对于静电场： $\oint\!\!\oint \vec{D}_{静}\cdot d\vec{S}=\sum q_{0i}$

对于涡旋电场： $\oint\!\!\oint \vec{D}_{涡}\cdot d\vec{S}=0$

两式相加： $\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_{0i}$ —— (1)

- 任意电场的电位移矢量对闭合曲面的通量等于闭合曲面所包围的自由电荷代数和。

对于静电场： $\oint_L \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0$

对于涡旋电场： $\oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

两式相加： $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ ——（2）

- 任意电场沿闭合环路的线积分，等于以环路为边界的任意曲面的磁通量随时间变化率的负值。

磁场：

- 对于任意磁场，不管是由传导电流、磁化电流、还是位移电流产生的，其共同特点是磁感应线总是闭合的，故有：

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \text{——（3）}$$

- 任意磁场对闭合曲面的磁通量都等于零。

- 如前所述，普适的安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + I_D \text{——（4）}$$

$$I_D = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \text{——（}S\text{为以}L\text{为边界的曲面）}$$

- **任意磁场的磁场强度矢量沿闭合环路的线积分等于穿过以环路为边界的任意曲面的传导电流和位移电流的代数和。**

- （1）—（4）式为麦克斯韦电磁场基本方程（普适方程）的积分形式。

# 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_{0i} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \quad \vec{D} = \vec{D}_{(1)\text{静}} + \vec{D}_{(2)\text{涡}}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \cdots (2) \quad \vec{E} = \vec{E}_{(1)\text{静}} + \vec{E}_{(2)\text{涡}}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \quad \vec{B} = \vec{B}_{(1)\text{传}} + \vec{B}_{(2)\text{位}}$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \cdots (4) \quad \vec{H} = \vec{H}_{(1)\text{传}} + \vec{H}_{(2)\text{位}}$$

# 麦克斯韦方程组的微分形式

- 积分形式只能反映一定大小空间内各物理量的关系，而不能反映逐点的性质，为此研究其微分形式。
- **散度的定义：**

任一矢量$\vec{f}$，在空间中$M$点的散度定义为：

$$\nabla\cdot\vec{f}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_{\Delta S}\vec{f}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}\quad\left(\begin{array}{l}\text{点}M\text{在}\Delta S\text{内，}\Delta V\\ \text{为}\Delta S\text{包围的体积}\end{array}\right)$$

反过来有： $$\oiint_S\vec{f}\cdot d\vec{S}=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{f})dV$$ **高斯公式**

$V$是S包围的体积

$$\therefore \quad \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{D}) dV$$

S包围的自由电荷：

$q_f = \iiint_V \rho_f dV$ —（$\rho_f$为自由电荷密度）

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{D}) dV = \iiint_V \rho_f dV$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{e0} \text{——} \quad (1)'$$

- 空间任一点的电位移矢量的散度等于该点自由电荷体密度。

- **旋度的定义：**

任一矢量$\vec{f}$在$M$点的旋度定义为：

$$(\nabla\times\vec{f})_{\hat{n}}=\lim_{S\to 0}\frac{\oint_L \vec{f}\cdot d\vec{l}}{S}$$

（旋度在$S$的法线方向$\hat{n}$的分量，点M在$S$内，$S$以$L$为界。）

斯托克斯公式：$$\oint_L \vec{f}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{f})\cdot d\vec{S}$$

$$\therefore\quad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

比较可得： $\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ —— （2）$'$

- 空间任一点电场强度矢量的旋度等于该点磁感应强度矢量随时间变化率的负值。

用类似的方法可以得到：

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$ —— （3）$'$

$\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ —— （4）$'$

$\vec{j}_f$为传导电流密度矢量。

# 麦克斯韦方程组的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{e0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

在有介质时，上述方程组不完备需要补充三个描述介质性质的方程，对于各向同性介质来说，三个方程为：

## 各向同性线性介质性质方程 (物质方程)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$$

- 不同导体界面

**电流密度矢量j**的法向分量连续； $(\vec{j}_2-\vec{j}_1)\cdot\vec{n}=0$

**电场强度矢量E** 的切向分量连续。 $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\times\vec{n}=0$

- 不同电介质界面

**电位移矢量D** 的法向分量连续； $(\vec{D}_2-\vec{D}_1)\cdot\vec{n}=0$

**电场强度矢量E** 的切向分量连续。 $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\times\vec{n}=0$

- 不同磁介质界面

**磁感应强度矢量B**的法向分量连续； $(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\cdot\vec{n}=0$

**磁场强度矢量H**的切向分量连续。 $(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\times\vec{n}=0$

## 麦克斯韦电磁场方程组：

基本方程（**4**个积分形式，**4**个微分形式）——电磁普适方程。（对宏观电磁问题普遍适用）

物质方程（**3**个）——物性方程（反映电磁场与物质相互作用）

边界条件（**6**个）——（电磁场在边界上面的性质）

# § 2　电磁波理论

## 电磁波的波动方程

**1864**年《电磁场的动力学原理》，导出了电磁波的波动方程，预言了迅变电磁场互相激发以波的形式在空间传播，并得到电磁波的传播速度与当时的真空中的光速相等，于是他预言：光是按照电磁定律经过场传播的电磁扰动---即光是电磁波。

麦克斯韦把表面上似乎不相干的光现象和电磁现象统一了起来，为人类深刻认识光的本质树立了一座历史的丰碑。

# 均匀平面波的波动方程

从麦克斯韦方程出发：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_{e0} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

在自由空间：$\rho_{e0}=0,\vec{j}_0=0$

$$\xrightarrow[\vec{B}=\mu\vec{H}]{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$$

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{H}=0 \end{cases}$$

对第一方程两边取旋度，得：

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{H})=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E})$$

根据矢量运算：

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{H})=\nabla(\nabla\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}$$

由此得：$-\nabla^2\vec{H}=\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}(-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t})$

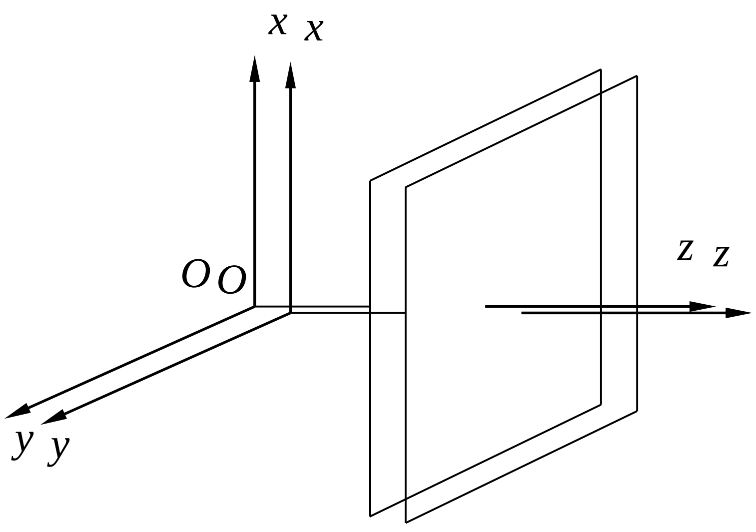
则：

$$\boxed{\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0}$$

——磁场的波动方程

同理可得：$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$ ——电场的波动方程

对均匀平面波而言，选直角坐标系，假设电磁波沿 $z$ 方向传播，等相位面平面平行于$xOy$平面。如图所示：




$$\frac{\partial}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}=0$$

所以：

$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

可见：均匀平面波满足一维波动方程。

它表明脱离了场源的电磁场是以波的形式在自由空间中传播的，它们的传播速度为：

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

把真空中的介电常数带入上式：

$$v = 3\times 10^{8} m/s = c$$

这说明电磁波和光波是性质相同的波，因此，麦克斯韦预言了电磁波的存在，预言了光就是电磁波，把表面上似乎不相干的光现象和电磁现象统一了起来。

## 电磁波性质

1）变化的电磁场在空间以波动形式传播，形成电磁波；
2）电磁波是横波，$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$；三者成右手螺旋关系；电振动和磁振动同相位，且振幅成比例；

$\vec{E} \times \vec{H}$沿波传播的方向；

3）电磁波传播速度：

介质中速度 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$ 真空中光速 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

4）电磁波传播伴随着能量和动量的传播

The end!