离散数学第一部分之三

组合计数

◆鸽巢原理

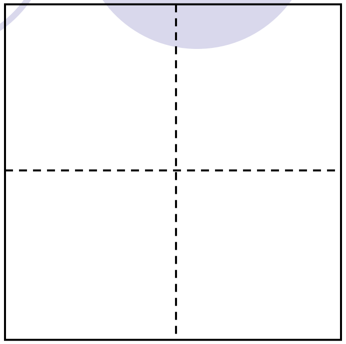
定理： 若有n个鸽巢，n+1只鸽子, 则至少有一个鸽巢里至少有两只鸽子.

注意这里的任意性.

例1. 一年365天，今有366个人，则其中至少有两个人生日相同.

例2. 抽屉里有10双手套，从中取11只出来, 其中至少有两只是完整配对的.

例. 在边长为1的正方形内任取5点, 则其中至少有2点的距离不超过$\sqrt{2}/2$



例. 设$a_1,a_2,\ldots,a_m$是正整数序列, 则至少存在整数k和l, $0\le k<l\le m$, 使得$m|(a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l)$.

令$r_k=a_1+a_2+\ldots+a_k \bmod m$, $k=1,2,\ldots,m$, 则

(a) 若有$r_h=0$, 即$m|(a_1+a_2+\ldots+a_h)$;

(b) 否则, $r_1,r_2,\ldots,r_m$取值为$\{1,2,\ldots,m\text{-}1\}$, 所以存在$k<l$使得$r_k=r_l$, 即$m|(a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l)$.

例：一位国际象棋大师有11周的时间备战比赛，他决定每天至少下1盘棋，但每周不超过12盘。则存在连续若干天，他恰好下了21盘棋。

证明：令a_i为到第i天下的总盘数，

$$1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \le 11 \times 12 = 132,$$

$$22 \le a_1+21 < a_2+21 < \dots < a_{77}+21 \le 132+21=153$$

总共有153种取值，却有154个数

所以存在$i<j$使得

$$a_i+21=a_j.$$

◆鸽巢原理加强形式

条件

$m_1,m_2,\ldots,m_n,n$都是正整数, 现有鸽子$m_1+m_2+\ldots+m_n-n+1$只,鸽巢n个.

结论

第一个鸽巢至少有m_1只鸽子,

或，第二个鸽巢至少有m_2只鸽子,

… …

或，第 n 个鸽巢至少有m_n只鸽子,

至少其中之一必然成立.

证明: 否则总鸽子数$\le(m_1-1)+(m_2-1)+\ldots+(m_n-1)$

与总鸽子数为$m_1+m_2+\ldots+m_n-n+1$矛盾.

- 从1到200的所有整数中任取101个，则这101个整数中至少有一对数，其中的一个一定能被另一个整除。

证明：设$a_1, a_2, \cdots, a_{101}$是被选出的101个整数，对任一$a_i$，都可以唯一地写成如下的形式：

$$a_i = 2^{s_i} \times r_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 101)$$

其中s_i为正整数，r_i为奇数。例如：$64 = 2^6 \times 1 \quad 72 = 2^3 \times 9$

由于$1 \le a_i \le 200$，所以$r_i \ (1 \le i \le 101)$只能取1，3，5，…，199这100个奇数，而共有101项，由鸽笼原理知，存在$1 \le i \ne j \le 101$，使得$r_i = r_j$

不妨设$s_i < s_j$，则

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{2^{s_j} \times r_j}{2^{s_i} \times r_i} = 2^{s_j - s_i} \quad = \text{整数},$$

即a_j能被a_i整除。

二项式定理：

对任意正整数n，恒有

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + \cdots\cdots + C_k^n x^{n-k} y^k + \cdots\cdots + C_n^n y^n$$

或简写为

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k$$

(1) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$，$n$正整数

(2) $C_0^n - C_1^n + C_2^n - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n = 0$，$n$为正整数

基本性质：

在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等。

$$\text{即} C_n^m = C_n^{n-m}$$

在杨辉三角表里，每一个数都等于它肩上两个数的和

$$\text{即}: C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r$$

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$$

$$C_0^n - C_1^n + C_2^n - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

例1 从甲地到乙地, 可以乘火车, 也可以乘汽车, 还可以乘轮船。一天中，火车有4班，汽车有2班，轮船有3班。那麽，一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

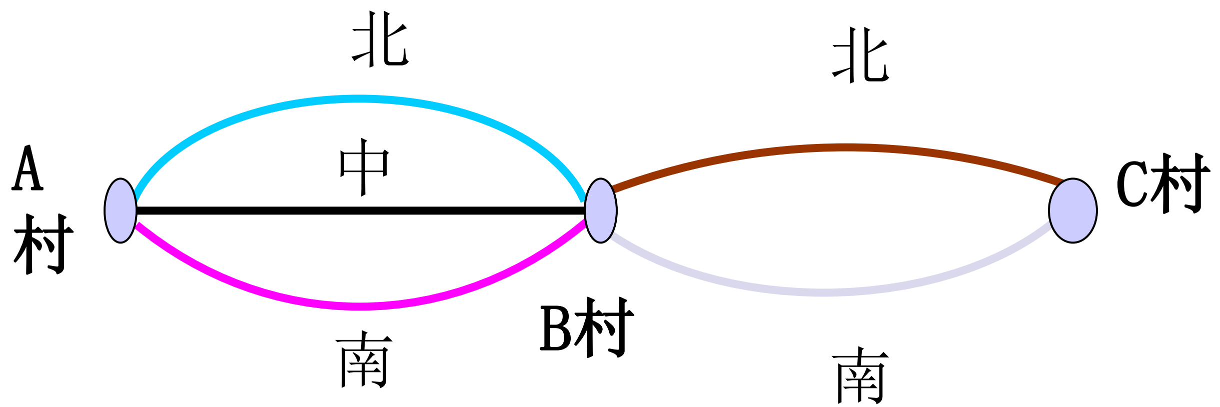
解： 因为一天中乘火车有4种走法，乘汽车有2种走法，乘轮船有3种走法，每一种走法都可以从甲地到乙地，因此，一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有

4+2+3=9 种不同的走法。

加法原理

做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1种不同的方法，在第二类办法中有m_2种不同的方法，… …，在第n类办法中有m_n种不同的方法。那么完成这件事共有 $N= m_1+ m_2+\dots \dots+ m_n$ 种不同的方法。

例2 由 A 村去 B 村的道路有3条，由 B 村去 C 村的道路有2条。从 A 村经 B 村去 C 村，共有多少种不同的走法？



解：从A 村去 B 村有3种不同的走法，按这3种走法中的每一种走法到达B村后，再从 B村到达C 村又有2种不同的走法。因此，从 A 村经 B 村去 C 村共有 $3 \times 2 = 6$ 种不同的走法。

乘法原理

做一件事，完成它需要分成n个步骤，做第一步有m1种不同的方法，做第二步有m2种不同的方法，… …，做第n步有mn种不同的方法。那么完成这件事共有 $N= m_1\times m_2\times\ldots\ldots\times m_n$ 种不同的方法。

加法原理：做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有m_1种不同的方法，在第一类办法中有m_2种不同的方法，… …，在第n类办法中有m_n种不同的方法。那麽完成这件事共有 $N= m_1+ m_2+\dots\dots+ m_n$ 种不同的方法。

乘法原理：做一件事，完成它需要分成n个步骤，做第一步有m_1种不同的方法，做第二步有m_2种不同的方法，… …，做第n步有m_n种不同的方法。那麽完成这件事共有 $N= m_1\times m_2\times\dots\dots\times m_n$ 种不同的方法。

共同点都是把一个事件分解成若干个分事件来完成；前者分类，后者分步；如果分事件相互独立,分类完备,就用加法原理；如果分事件相互关联,缺一不可,就用乘法原理。

例1 书架上层放有 6 本不同的数学书，下层放有 5 本不同的语文书。(1)从中任取一本，共有多少种不同的取法？

(2)从中任取数学书与语文书各一本，共有多少种不同的取法？

解: (2)从书架上任取数学书与语文书各一本,可以分成两个步骤完成：第一步取一本数学书，有6种方法；第二步取一本语文书，有5种方法。根据乘法原理，得到不同的取法的种数是：

$$N = m_1 \times m_2 = 6 \times 5 = 30$$

- 排列：

不同个体集合的一个排列是这些个体的一个有序安排，一个集合的r个元素的有序安排叫做r-排列。

一个n元集合的r-排列记为：$P(n,r)$

定理：n个不同元素集合的r排列数是

$$P(n,r)=n(n-1)\ldots(n-r+1)=n!/(n-r)!$$

例：一个女推销员要访问8个不同的城市，其访问必须从她指定的某个城市开始，但对其他7个城市可以任意进行，当访问这些城市时，推销员可能有多少个不同的次序？

- 组合

　　不同个体集合的一个组合是这些个体的一个无序安排，一个集合的r个元素的无序安排叫做r-组合。

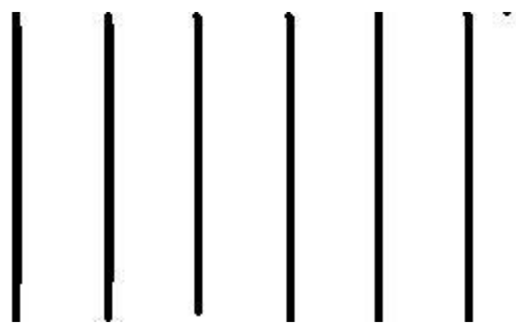
　　一个n元集合的r-组合记为：$C(n,r)$

定理： n个不同元素集合的组合数是

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=C(n,n-r)$$

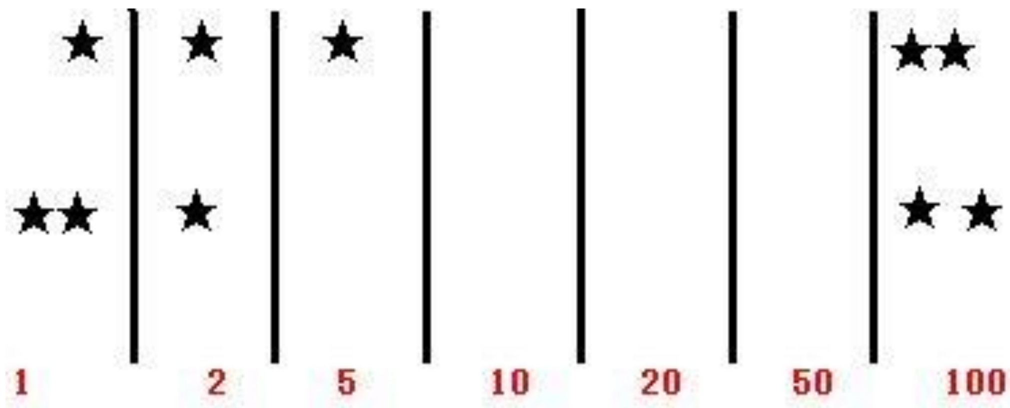
◆ 有重复的组合

例：从包含1美元、 2美元、5美元、 10美元、20 美元、50美元以及100 美元的钱袋中选择5张纸币，有多少中不同的方式?



分析：由于每种美元的数量没有限制，因此，选择5种纸币的方法就包含如下的个数：

$$C(11,5)=\frac{11!}{5!6!}$$



定理2. 从n个元素的集合中允许重复的r−组合有

$$C(n+r-1,r)$$

例. 1. 一家甜点店有四种不同类型的甜点，那么从中选择6块甜点有多少种不同的选择方法？

分析：选择甜点一般只关心种类，不关心先后顺序等，因此根据定理2即可求解。

2. 方程 $x_1+x_2+x_3=11$ 有多少个不同的解？其中变量为非负整数。

分析：问题对应3个元素选择11个元素的方式。因此应用定理2即可求解。

思考：如果限定 $x_1\ge 1, x_2\ge 2, x_3\ge 3$，解个数是多少？

允许和不允许重复的排列和组合数

类型	允许重复	公式
r−排列	不	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r−组合	不	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
r−排列	是	n^r
r−组合	是	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

◆ 具有不可区别物体的集合的排列

某些计数问题中，一些元素是没有区别的，因此，需要进行区别对待。

例 重新排序单词：SUCCESS中的字母能够组成多少个不同的串？

分析：该单词中存在多个相同的字母，所以实际串的个数并不是7的排列。首先选择3个位置给S，而后从4个空位中选择2个给C，其余2个选择一个给U,另外一个给E.所以总数为：

$$C(7,3)C(4,2)C(2,1)C(1,1)$$

定理3 设类型1的相同的物体有n_1个，类型2的相同的物体有n_2个，…..类型k的相同的物体有n_k个，则n个物体的不同排列数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- **物体放入盒子**

不同的物体进入不同的盒子

例. 将52张标准的扑克牌发给4个人，每人5张牌，有多少种发法？

$$C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(37,5)$$

定理4. 把n 个不同的物体分配到k个盒子使得n_i个物体放入盒子i(i=1, 2, …k)的方式数为：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

例. 6本不同的书平均分成3堆，每堆2本共有多少分法？

分析：分三部取书共有分法：

$$C(6,2)C(4,2)C(2,2)$$

但是这样存在重复计数，所以实际分法为：

$$\frac{C(6,2)C(4,2)C(2,2)}{P(3,3)}$$

◆ 生成排列和组合

有的时候，不仅是进行排列组合，而且需要创造排列和组合。

4.7.2生成排列

字典顺序：如果对于某个k,1$\leq k \leq n$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, …. $a_{k-1}=b_{k-1}$,$a_k<b_k$,那么，序列$a_1a_2,\ldots a_n$ 排在排列$b_1,b_2,\ldots b_n$的前面。

例如：

集合{1，2，3，4，5}的排列23415排在23514的前面，而41532则排列在52143的前面。

生成一个排列的方法

对于给定的排列$a_1a_2\ldots a_n$,按照下列步骤生成下一个最大的排列：

(1). 首先找到整数a_j 和 a_{j+1}使得$a_j<a_{j+1}$ 且$a_{j+1}>a_{j+2}>..>a_n$, 即在这个排列中的最后一对相邻的整数，其中第一个整数小于第二个整数。

(2). 将a_{j+1} $a_{j+2}\ldots a_n$ 中大于a_j最小的整数放在第j个位置。

(3). 按照递增顺序从位置j+1到n列出$a_j,a_{j+1}, \ldots a_n$中其余的整数。

例： 列出按照字典顺序的362541的下面一个最大排列

分析：

(1). $j=3$, $a_j=2$

(2). 364…

(3). 364125

◆ 生成组合

目的：生成一个有限集合的所有子集

方法：利用$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$和n位二进制串之间的关系，即如果$a_k$在子集中，对应的二进制在位置k为1, 否则为0.

生成所有n位二进制串的方法：

(1). 第一个串为n个0，即：0000…000

(2). 从串的右边开始找到**第一个不是1**的位置k

(3). 把该位置k 右边的所有的1变为0，而后将k位置的0变为1.

例： 找出在10 0010 0111 后面的下一个最大的二进制串。

(1) 10 0010 0111

(2) 10 0010 0000

(3) 10 0010 1000.

- **生成集合{1,2,…,n}的r-组合的算法**

(1). 在序列中找到使得：$a_i \neq n-r+i$ 的最后元素 a_i

(2). 用a_i+1代替a_i。

(3). 对于j=i+1,i+2,…,r 用a_i+j-i+1代替a_i

例：找出集合{1,2,3,4,5,6}在{1,2,5,6}后面的下一个最大组合。

分析：

(1). {1,2,5,6}

(2). {1,3,5,6}

(3). {1,3,4,5}   4=2+3-2+1;5=2+4-2+1;

(1). 在序列中找到使得：$a_i \neq n-r+i$ 的最后元素 a_i

(2). 用a_i+1代替a_i。

(3). 对于j=i+1,i+2,…,r 用a_i+j-i+1代替a_i

4.4 离散概率

4.4.1 有限概率

定义4.4.1 一个事件E是具有相等可能性结果的有限样本空间S的子集，E的概率是

$$p(E)=\frac{|E|}{|S|}$$

例：1. 一个缸子里有5个白球和4个蓝球，随意取出一个是白球的概率是多少？

2. 掷两个骰子使得其点数之和为6的概率是多少？

3. 一种彩票是，当人们挑选的6个数字按照正确的顺序和一个随机选择的6个数字完全匹配时，此时可以中得大奖，问人们中大奖的概率是多少?

4. 现在有许多彩票使那些从前n 个正整数中选择对6个数的人得到特别大奖，这里的n通常在30到50之间，一个人从40个数中选择对6个数的概率是多少？

4.4.3 事件组合的概率

定理1. 设E是样本空间S的一个事件。事件 $\overline{E}$ 的概率是

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E)$$

借用：$|\overline{E}| = |S| - |E|$

例：随机生成一个10位二进制数，其中至少一位是0的概率是多少？

分析：至少一位是0的否是没有一位是0（所有位都是1）

因而易解

定理2 设E1和E2是样本空间的两个事件，那么

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

证明：略。

例：随机从一组不超过100的正整数中选出一个正整数使得它能够被2或者5整除的概率是多少？

分析：能够被2整除的是50个，能够被5整除的20个，同时能够被2和5整除的是10个，因此概率=3／5.

4.5 概率论

4.5.1 概率赋值

设S是某个具有有穷个或者可数个结果的样本空间，我们对每一个结果s赋予一个概率p(s)，使得满足如下条件：

(1) $0 \le p(s) \le 1$, 对每个$s \in S$

(2)

$$\sum_{s \in S} p(s) = 1$$

例：投掷一个材质均匀的硬币，头像向上和向下的概率是多少？如果材质不均匀，经常头像向上的次数是向下次数的两倍，此时事件的概率是多少？

定义 1　事件E的概率是E中结果的概率之和，即：

$$p(E)=\sum_{s\in E}p(s)$$

例：一个不均匀的骰子，3出现的次数是其他数字出现的两倍，求掷一次骰子出现奇数点的概率？

分析：略

4.5.2 条件概率

设E和F是具有p(F)>0的事件。给定F的条件下E的条件概率记作p(E|F)

$$p(E|F)=\frac{p(E\cap F)}{p(F)}$$

例:1. 随机生成4位二进制串，对于一个给定的串，在第一位是0的前提下，至少包含两个连续0的串的概率是多少?

分析：E:第一位是0且至少包含两个连续0

F:第一位是0

$E=\{0011, 0001, 0100, 0000, 0010\}$

$p(E|F)=(5/16)/(8/16)=5/8$;

2. 一批产品的次品率为4%，正品中一等品率为75%，现从这批产品中任意取一件，试求恰好取到一等品的概率。(0.72)

◆ 独立性

事件E和F是独立的，当且仅当：

$$p(E\cap F)=p(E)p(F)$$

例：假定一个可以有两个孩子的4种情况是等概率出现的。事件 E是该家庭有两个男孩，事件F是家庭至少有一个男孩，事件E和F是否独立？

◆ 贝努力实验与二项式分布

当一个实验有两种结果时，这类实验可以称为贝努力实验，如果一种结果叫做成功，且成功的概率是p,另外一种结果叫做失败，其概率为q, 则p+q=1.

定理：在n次独立的贝努力实验中，有k次成功的概率在成功概率是p，失败概率是q的情形下是：

$C(n,k)p^k q^{n-k}$

显然， 当k=0,1,…., n时有：

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\,p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

随机变量

一个随机变量是从实验的样本空间到实数集的**函数**。即一个随机变量对每个可能的结果赋予一个实数值。

例：设x是掷一对骰子时出现的点数之和。则x的取值为2～12.

什么时候是2，什么时候是5？

数学期望

定义：随机变量X(s)在样本空间S的期望值等于

$$E(X)=\sum_{s\in S} p(s)X(s)$$

例： 设x是掷一对骰子时出现的点数之和。则x的取值为 2 的数学期望是：

2×1/36=1/18.

例： 当执行n次贝努力实验成功次数的数学期望是什么？

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kp(X=k)$$

- **独立随机变量**

定义：随机变量X和Y在样本空间S上是独立的，如果：

p(X(s)=r1 且Y(s)=r2)= p(X(s)=r1) ×p(Y(s)=r2)

- **方差**

定义：设X是样本空间上的随机变量，则方差

$$V(X)=\sum_{s\in S}(X(s)-E(X))^2 p(s)$$

标准差定义为： $\sqrt{V(X)}$