

概率论与数理统计

第一章 概率论的基本概念

自我介绍

- ◆姓名：刘会刚， 副教授
- ◆专业：微电子学与固体电子学
- ◆研究方向：IC设计、表面等离激元光学、
天线设计
- ◆邮箱： **liuhg@nankai.edu.cn**
- ◆办公室：津南信息西楼537室

几点要求

- ◆ 不旷课、不迟到、不早退
- ◆ 上课时间不要吃东西
- ◆ 上课时间不要说话, 专心听讲
- ◆ 课前预习, 课后复习
- ◆ 独立完成作业, 作业干净整洁

考试

- ◆每周完成作业（占总成绩的20%~30%）
- ◆期末闭卷考试
- ◆每周交一次作业

教材：《概率论与数理统计》（第四版），
浙江大学 盛骤等编. 高等教育出版社.

本课程总学时：64，周学时：4，学分：4

中国福利彩票“双色球”的中奖率

◆玩法及游戏规则介绍:

- ◆1、“双色球”彩票投注区分为红色球号码区和蓝色球号码区.
- ◆2、“双色球”每注投注号码由6个红色球号码和1个蓝色球号码组成.红色球号码从1--33中选择; 蓝色球号码从1--16中选择.
- ◆3、“双色球”每注2元.
- ◆4、“双色球”采取全国统一奖池计奖.
- ◆5、“双色球”每周销售三期, 期号以开奖日界定, 按日历年度编排.

◆中一等奖的条件是：从33个红色球号码区选中6个规定红色球号码，并且还要从16个蓝色球号码区选中1个规定蓝色球号码。

◆中奖概率： $1/17721088=0.0000056\%$

◆中二等奖的条件是：从33个红色球号码区选中6规定红色球号码，并且还要从16个蓝色球号码区选中0个规定蓝色球号码。

◆中奖概率： $\frac{C_6^6}{C_{33}^6} \cdot \frac{C_{15}^1}{C_{16}^1} \approx 0.0000846\%$

三等奖 (**5+1**) 中奖概率为: $\frac{C_6^5 \cdot C_{27}^1}{C_{33}^6} \cdot \frac{1}{C_{16}^1} \approx 0.000914\%$

四等奖 (**5+0**) 中奖概率为: $\frac{C_6^5 \cdot C_{27}^1}{C_{33}^6} \cdot \frac{C_{15}^1}{C_{16}^1} \approx 0.0137\%$

四等奖 (**4+1**) 中奖概率为: $\frac{C_6^4 \cdot C_{27}^2}{C_{33}^6} \cdot \frac{1}{C_{16}^1} \approx 0.0275\%$

五等奖 (**4+0**) 中奖概率为: $\frac{C_6^4 \cdot C_{27}^2}{C_{33}^6} \cdot \frac{C_{15}^1}{C_{16}^1} \approx 0.413\%$

五等奖 (**3+1**) 中奖概率为: $\frac{C_6^3 \cdot C_{27}^3}{C_{33}^6} \cdot \frac{1}{C_{16}^1} \approx 0.33\%$

六等奖（2+1）中奖概率为： $\frac{C_6^2 \cdot C_{27}^4}{C_{33}^6} \cdot \frac{1}{C_{16}^1} \approx 1.4855\%$

六等奖（1+1）中奖概率为： $\frac{C_6^1 \cdot C_{27}^5}{C_{33}^6} \cdot \frac{1}{C_{16}^1} \approx 2.733\%$

六等奖（0+1）中奖概率为： $\frac{C_{27}^6}{C_{33}^6} \cdot \frac{1}{C_{16}^1} \approx 1.67\%$

总中奖率：**6.6737042%**

按照概率如果守一个号,可能中一等奖可能
需要48550年

概率论的起源:

- ◆ 16世纪, 意大利学者卡丹与塔塔里亚对赌博问题的研究.

有关赌博的最早一个数学问题出现在1494年意大利修士、数学家巴乔罗 (Luca Pacciolo) 的著作《算术, 几何, 比例和比值要义》中.

甲、乙两人相约赌若干局，谁先赢 S 局就将获胜.现在甲赢 A 局 ($A < S$),而乙赢 B 局 ($B < S$) 时赌博终止了,问赌本应如何分?

巴乔罗的解法:

应该按赌博中止时甲乙已赢的局数分配赌本.

比如: $S=3, A=2, B=1$.就按2:1分配.

热衷于占星术和掷骰子的代数学家卡丹(J.Cardan)和塔塔利亚(N.Tartanlia)指出巴乔罗的分法是错误的,认为巴的分法没有考虑甲乙双方取得最终胜利还需要赢的局数.但是他们两人也没有给出正确的解法.

17世纪中叶，法国数学家帕斯卡与费马讨论“合理分配赌注问题”。

- ◆ 1653年夏天,帕斯卡前往埔埃托镇度假.旅途中,他遇到了梅理骑士,这位“赌坛老手”向帕斯卡提出了一个十分有趣的“分赌注”问题:
- ◆ 一次梅理与其赌友掷骰子.每人押了32个金币,并约定,如果梅理掷出三个6点,或对方先掷出三个4点,便算赢.但是这场赌注不算小的赌博并未顺利结束.当梅理已掷出两次6点,其赌友掷出一次4点时,梅理接到通知,要他马上陪同国王接见外宾.君命难违,赌博只好停止,双方为如何分配这64枚金币争论不休.

这一貌似简单的问题难住了天才数学家帕斯卡,他思索了很久仍没有解决.于是,他开始了与**费马(P.Fermat)**关于这一问题的通信讨论.帕斯卡在**1654年7月29日**给费马的信中给出了这一问题的解.这一问题讨论中,产生了“**概率**”和“**数学期望**”等基本概念.

帕斯卡的这封信被公认为是概率论的第一篇文献,是数学史上的一个里程碑.

在随后的**200**多年里,概率论不仅在理论上获得了一定发展,而且在人口统计、保险业、误差理论、天文学等自然科学中得到了应用.在这一时期,对概率论在理论和应用方面作出重要贡献的数学家有雅格布·伯努利(**Jakob Bernoulli**),丹尼尔·伯努利(**Daniel Bernoulli**),棣莫弗(**De Moivre**),拉普拉斯(**P.Laplace**),欧拉(**L.Euler**),贝叶斯(**T.Bayes**),蒲丰(**G.Buffon**),高斯(**F.Gauss**),泊松(**S.Poisson**),布尼亚可夫斯基(**V.Bunjakovskii**),切比雪夫(**Chebyshev**),马尔可夫(**A.Markov**),李雅普诺夫(**A.Lyapunov**)等.

尽管18,19世纪,概率论在理论和应用方面得到了很多成果,但与其它数学分支比较,概率论的发展是缓慢的.

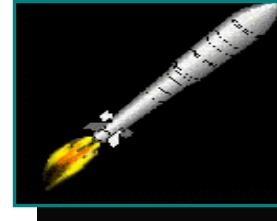
直到20世纪以前概率论还未进入主流数学.其基本原因是概率论缺乏严密的逻辑基础.

1933年柯尔莫哥洛夫(A.Kolmogorov)的著作《概率论基础》正式出版,给出了概率论公理化的完整结构.从此,概率论才正式成为真正的数学分支.

概率论的应用

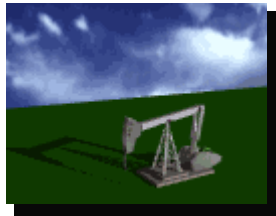


气象、水文、
地震的预报



武器精度评估

工农业生产

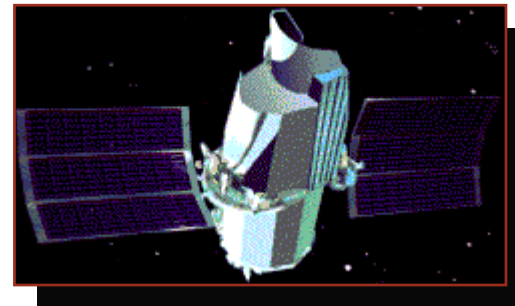


社会、经济、
医学、生物

优化试验方案

产品的抽样验收

生产自动化控制



课程内容

- ◆第一章 概率论的基本概念
- ◆第二章 随机变量及其分布
- ◆第三章 多维随机变量及其分布
- ◆第四章 随机变量的数字特征
- ◆第五章 大数定律及中心极限定理
- ◆第六章 样本及抽样分布
- ◆第七章 参数估计
- ◆第八章 假设试验
- ◆第九章 方差分析和回归分析
- ◆第十章 随机过程及其统计描述
- ◆第十一章 马尔科夫链
- ◆第十二章 平稳随机过程

概率论

数理统计

随机过程

第一章 概率论的基本概念

- ◆ 随机试验
- ◆ 样本空间、随机事件
- ◆ 频率与概率
- ◆ 等可能概型（古典概型）
- ◆ 条件概率
- ◆ 独立性

概率论序言

◆自然界和社会上发生的现象是多种多样的.

◆考察下列现象:

A:上抛物体必然下落

B:同性电荷必不相互吸引

C:太阳从东方升起

D:标准大气压下纯水在 $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时

必然沸腾, 在 $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时必然结冰

确定性现象

► 考察下列现象：

A:明天的最高温度

B:一个人的体重

C:相同条件下抛同一枚硬币

D:用同一门炮向同一目标射击,
观察其弹着点的位置

非确定性现象

自然界与社会生活中的两类现象

确定性现象

不确定性现象

◆确定性现象：结果确定

◆不确定性现象：结果不确定

现在我们来考察一下不定性现象的特点

- ◆ 例如：在相同的条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么。
- ◆ 又如：同一门炮在一定条件下向同一目标进行射击，各次的弹着点不尽相同，在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置。
- ◆ **特点1：**这类现象，在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果。

- ◆ 人们经过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性. 例如,多次重复抛一枚硬币得到正面朝上大致有一半,同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布,等等.
- ◆ **特点2:** 不确定性现象在大量重复观察或试验下,它的结果却呈现出固有规律性,就是我们以后所说的**统计规律性**.
- ◆ 在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复观察或试验中其结果却具有统计规律性的现象,称为**随机现象**.

- ◆ 从表面上看, 随机现象的每一次观察结果都是随机的, 但多次观察某个随机现象, 便可以发现, 在大量的偶然之中存在着必然的规律.

**概率论与数理统计是研究
随机现象数量规律的一门学科.**

§ 1 随机试验

◆ 随机现象

◆ 随机试验

一、随机现象

自然界所观察到的现象：确定性现象 随机现象

1.确定性现象

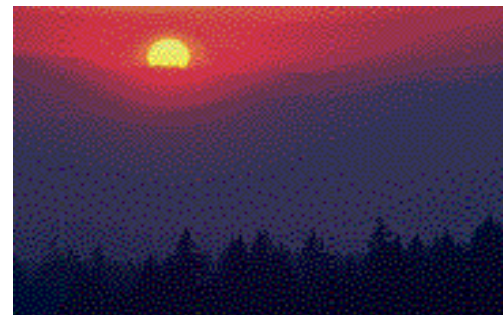
在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象.

实例

“太阳不会从西边升起”，

“水从高处流向低处”，

“同性电荷必然互斥”，



“函数在间断点处不存在导数” 等.

确定性现象的特征 ■■■ 条件完全决定结果

2. 随机现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象
称为随机现象.

实例1 在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察
正反两面出现的情况.



结果有可能出现正面也可能出现反面.

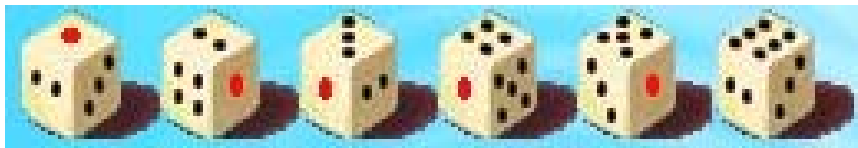
实例2 用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况.

结果：弹落点会各不相同.



实例3 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

结果有可能为:

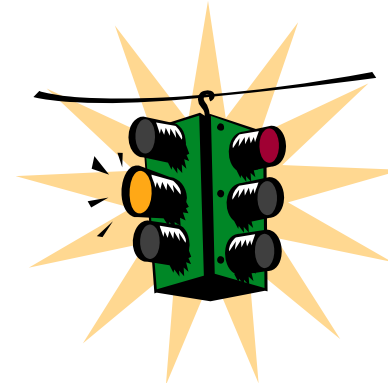


1, 2, 3,
4, 5 或 6.

实例4 从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品.

其结果可能为：
正品、**次品**.

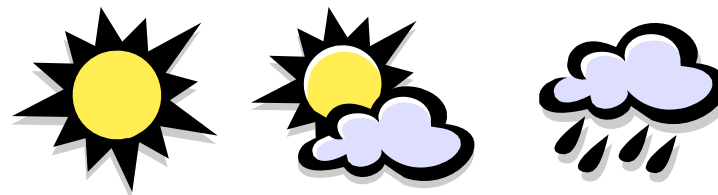
实例5 过马路交叉口时，可能遇上各种颜色的交通指挥灯.



实例6 出生的婴儿可能是男,也可能是女.



实例7 明天的天气可能是晴,也可能是多云或雨.



随机现象的特征 ■ 条件不能完全决定结果
概率论就是研究随机现象规律性的一门数学学科.

说明

1. 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系, 其数量关系无法用函数加以描述.
2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性, 但在大量试验或观察中, 这种结果的出现具有一定的统计规律性, 概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.

问题 什么是随机试验?



二、随机试验

定义

在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为随机试验.

1. 可以在相同的条件下重复地进行;
2. 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;
3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

说明

1. 随机试验简称为试验, 是一个广泛的术语. 它包括各种各样的科学实验, 也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或“测量”等.
2. 随机试验通常用 E 来表示.

实例 “抛掷一枚硬币, 观察字面, 花面出现的情况”

分析



- (1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:

字面、花面;



(3) 进行一次试验之前不能
确定哪一个结果会出现.

故为随机试验.

同理可知下列试验都为随机试验.

1. 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



2. 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的件数.



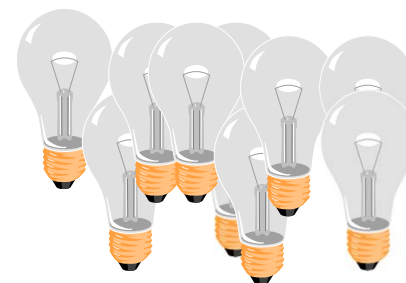
3. 记录某公共汽车站
某日上午某时刻的等
车人数.



4. 考察某地区 10 月
份的平均气温.



5. 从一批灯泡中任取
一只,测试其寿命.



小结

1. 概率论是研究随机现象规律性的一门数学学科.

随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

2. 随机现象是通过随机试验来研究的.

随机试验 { (1) 可以在相同的条件下重复地进行;
(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.