

Resumen coloquio victor neumann lara 2020

Rodrigo Chávez

February 29, 2020

1 Resumen

Para un punto x en el plano, una línea en forma de L que consiste de un rayo vertical y uno horizontal que amanan de x es llamada L – línea con esquina en x . Sean n puntos rojos y n puntos azules en el plano lattice en posición general. Se sabe que el número de intersecciones al crear dos árboles geométricos de puntos rojos y azules en el plano depende de el número de alternancias de color en el cierre convexo. En el año 2013 Mikio Kano provó que se pueden construir 2 árboles, rojo y azul, con segmentos de L – líneas con a lo más una intersección. Esta plática tiene como objetivo presentar los avances del problema donde se buscan dos trayectorias de segmentos de L – líneas, monocromáticas, ajenas que visiten cada punto haciendo uso de puntos de Steiner. Un punto Steiner es un punto que no es parte de la entrada original pero es agregado durante la solución del problema.

2 Plática

Primero que nada quisiera agradecer al comite organizador el haber aceptado mi platica, es la segunda edicion a la que asisito al coloqui y la primera en la que doy platica. Gracias. Ahora, como ya vieron el titulo de mi platica consta de un sustantivo y 3 adjetivos, dejenme explicar esto primero introduciendo unas definiciones muy sencillas, las L – líneas, para un punto x en el plano una linea en forma de L consistente de dos rayos uno vertical y uno horizontal emanentes de x es llamado una L – línea con esquina en x . Una linea vertical u horizontal que pasa por el punto x son consideradas L – líneas especiales. Para cada punto existen exactamente 6 L – líneas con esquina en x (hacer los dibujos en geogebra). Consideramos estas L – líneas como lineas en el plano y consideramos problemas desde este punto de vista. Observe que para dos puntos no en la misma horizontal o vertical en entoces hay 2 L – líneas que pasan a travez de estos dos puntos en comparacion de los puntos en el plano donde existe exactamente una linea que pasa por los puntos. Así pues existe una difenecia entre lineas y L – líneas. Además podemos dar una definicion de posicion general por los medios de L – línea.

Un conjunto S de puntos se dice estar en posición general si no tres puntos yacen en la misma L – *línea* (poner dibujos que ejemplifiquen la diferencia entre las posiciones generales). Si S está en posición general dada por la definición anterior entonces el punto más alto (a la izquierda) y más bajo (a la derecha) de S pueden estar en la misma vertical (horizontal). Sin embargo para cualquier otro punto $x \in S$ sí es cierto que se debe cumplir que ningún otro punto en $S - \{x\}$ puede estar en la misma vertical (horizontal). Prueba: observemos que si más de un punto yacen en la misma vertical y no son los extremos entonces puedo encontrar una L – *línea* con los extremos de los lados, pero esto no puede pasar con los extremos, porque aunque estén en la misma vertical no pueden formar una L – *línea* con ninguno de los demás puntos (poner dibujos para la prueba). Por lo tanto ambas definiciones difieren poco pero requieren las mismas condiciones para ambos para la mayoría de los puntos en S .

Una vez dicho esto haré un pequeño parentesis para presentar un resultado de Tokunaga para encontrar árboles generadores que no se intersecan (ajenos) que depende de la alternancia de colores en el cierre convexo de los puntos.

Luego, para un conjunto X de puntos en el plano llamamos X – *árbol* a un árbol generador en X cuyas aristas son segmentos de líneas que unen dos puntos en el conjunto.

Teorema 1 Sean R y B dos conjuntos ajenos de puntos rojos y azules tales que $R \cup B$ están en posición general, Sea $\tau(R, B)$ el número de aristas xy en el cierre convexo de $(R \cup B)$ tal que uno de $\{x, y\}$ es rojo y el otro es azul entonces el número de cruces en $T_R \cup T_B$ está dado por

$$\max \left\{ \frac{\tau(R, B)}{2}, 0 \right\}$$

(voy intentar la prueba como la dice Jorge y poner dibujos). En particular podemos dibujar árboles ajenos si $\tau(R, B) \leq 2|x|$. Voy a dar el sketch de la prueba, va como sigue. Primero encerramos todo en un triángulo que contenga 2 puntos de un color (sin pérdida de generalidad digamos azules) y el tercero del otro (rojo), por el ahora digamos que agregamos 2 puntos para garantizar esta condición aunque no es necesario, omitiré los detalles de porqué esto es cierto ya que no es el resultado principal, ahora dentro de este triángulo si está vacío o solo tiene puntos de color azul ya acabamos si no encontramos un punto de color rojo que me parte el triángulo en otros triángulo con la misma propiedad de dos puntos de un color y el otro punto del otro color, procedemos por inducción y acabamos. Hay algunos detalles de como unir los puntos al árbol pero créanme que siempre se puede. Este parentesis lo hice para ahora análogamente buscar árboles que no se intersecan utilizando segmentos de L – *líneas*, es decir, para un conjunto X en el plano latice en posición general, o sea no dos en la misma vertical

u horizontal, podemos dibujar arboles generadores sin cruces en X cuyas aristas son segmentos de $L - \text{lineas}$ que unen dos puntos en X , o sea un $X - \text{arbol con segmentos de } L - \text{lineas}$. Aqui dos ejemplos de estos $X - \text{arboles}$ el segundo es un $X - \text{arbol}$ con grado máximo 3. Estos van a ser importantes despues. Para un conjunto S de puntos en el plano latice el cirre rectangular, denotado por $\text{rect}(S)$ es la caja rentangular más pequeña que encierre al conjunto S . Su cardinalidad puede ser 1 cuando solo hay un punto, 2 cuando la caja esta definida por las esquinas, 3 si esta definida por una esquina y 2 lados o 4 si esta definida por los 4 lados.

Teorema 2 Sean R y B conjuntos ajenos de puntos en el plano latice, $R \cup B$ en posicion general. Sea $\tau^*(R, B)$ el número de segmentos xy de $L - \text{lineas}$ en la frontera de $\text{rect}(R \cup B)$ tal que uno de $\{x, y\}$ es rojo y el otro es azul. Entonces $\tau^*(R, B)$ es 0, 2 o 4. El maximo numero de cruces entre $R - \text{tree}$ y $B - \text{tree}$ es uno cuando $\tau^*(R, B) = 4$, Ademas sin $\tau^*(R, B) \leq 2$ podemos dibujar los arboles sin cruces con $\Delta(T_R) \leq 3$ y $\Delta(T_B) \leq 3$

Notemos que $\tau^*(R, B) = 4$ los arboles deben cruzarse al menos una vez. Digamos que $a, b \in R$ son los extremos verticales y $x, y \in B$ son los extremos horizontales entoces es imposible llegar de extremo a extremo sin atravezar una arista del otro arbol. Pero si agregamos un punto extra, al que llamamos de Steiner, un punto no del problema sin para ayudar a encontrar la solucion, entonces sí podemos unir los los extremos de un arbol para evitar la alternancia y el cruce.

Para probar el teorema 2 harán falta unas definiciones. un poligono espiral ortogonal es un poligono cuyas fronteras consiste de dos cadenas de aristas llamadas interna y externa. Cada angulo interno de la cadena exterior es de $\frac{\pi}{2}$ y cada angulo externo de la cadena interna es de $\frac{3\pi}{2}$. observemos que pueden compartir aristas las cadenas entonces se veria como una arista.

Lema 1 Sea P un poligono espiral ortogonal en el plano latice y S un conjunto de planos en posicion general contenido en P entonces existe un $S - \text{arbol } T$ tal que $\Delta(T) \leq 3$ y T esta dentro de P

Aqui la prueba: una arista interna incluida en una externa lo llamamos rectangulo aplanado. Notemos que un rectangulo aplanado puede contener un punto de S

(esto es para despues: ahora teniendo estos arboles ajenos utilizando 1 punto steiner [decir que es un punto steiner] nos gustaria encontrar no arboles sino trayectorias, y es aquí donde extendimos el resultado dado por Mikio kano. Tambien pensar en poner que la conjetura se resuelve parcialmente con el teorema que dice que se puede encajar cualquier arbol con grado maximo 3 estando todos estos en una trayectoria)

Ahora $C_q[n, k, d]$ es un código lineal con q símbolos, de longitud n , con

dimensión k , y distancia mínima d . Al ser de dimensión k se tiene que el código tiene 2^k palabras de código.

2.1 Suposiciones

De este momento en adelante harán las siguientes suposiciones:

$$n \geq k$$

$x_1 = \mu_1, x_2 = \mu_2, \dots, x_k = \mu_k$ son los símbolos de información

$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ son los símbolos de paridad o de redundancia.

Ejemplo: Código de paridad par de longitud 4:

Table 1: Código de paridad de longitud 4

μ_1	μ_2	μ_3	
x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$x_4 = x_1 + x_2 + x_3$. Aquí nos referimos a la suma en el campo de los binarios