Auguste Bravais y las estructuras cristalinas

Barientos Bermeo D. *

Rodriguez Diaz J.**

Universidad Industrial de Santander

Calle 9 # carrera 27, Bucaramanga, Santander

28 de octubre de 2022

Índice

Resumen

En el presente articulo se abordo el tema de las redes de Bravais, estas pueden ser bidimensionales o tridimensionales, estas se representan por celdas primitivas que al ser replicadas y trasladadas crean toda la red. Las redes de Bravais se describen por medio de una serie de vectores que al ser trasladados y reescalonados de forma discreta generan todos los puntos de la red. Inicialmente se trabajo con redes bidimensionales, patrones geométricos, y tapizados, a los cuales se les determinaron sus celdas mínimas, y sus vectores primitivos. A continuación se trabajo con redes tridimensionales (8 de las 14 existentes), a estas redes se les determinaron sus volúmenes usando el triple producto mixto y el álgebra de siempre, seguido de esto se encontraron vectores primitivos para el sistema bcc (cúbica centrada en el cuerpo) y fcc (cúbica centrada en las caras) y se les determino el volumen, y finalmente se hallaron las redes reciprocas para los sistemas cubico simple, bcc, fcc y a su vez el volumen de estos sistemas recíprocos. Como resultado, se obtuvieron expresiones para el volumen de las redes de Bravais, los vectores primitivos de tres variaciones de sistemas cúbicos y sus recíprocos.

*e-mail: `diego2210713@correo.uis.edu.co`

**e-mail: `juan2211704@correo.uis.edu.co`

1. Introducción

Auguste Bravais fue un físico francés conocido por sus aportes en cristalografía, específicamente la concepción de la ley de Bravais que describe como una estructura cristalina se puede denotar como un arreglo de celdas que presentan simetrías geométricas que se reproducen en lo que se conocen redes de Bravais [1]. Asi tambien como para cada celda se puede asignar un arreglo de vectores que representaran la posición de los átomos de una estructura cristalina [2].

A partir de la información anterior, el presente articulo propone la solución para una serie de problemas contenidos en el libro "Matematicas avanzadas Vol 1"[2]. Específicamente el ejercicio 1.3.3, problema 9. Esto con el fin de comprender como se aplican conceptos físicos y del análisis vectorial en el estudio de estructuras cristalinas de estado solido.

La solución de dichos problemas se desarrolla en este articulo de la siguiente manera: En la sección 2 se describen los problemas y se otorga una breve descripción de los conceptos a desarrollar, en la sección 3 se verán contenidas las soluciones a dichos problemas con el desarrollo detallado de las mismas y por ultimo en la sección 4 se expondrán las conclusiones obtenidas una vez desarrolladas las soluciones.

2. Metodología

Para la comprensión del estudio de las redes de Bravais fue esencial iniciar por el análisis bidimensional de las redes de Bravais, es por esto que se desarrolla el siguiente problema.

Redes de Bravais bidimensionales Tal y como muestra la figura 1 existen 5 tipos distintos de redes de Bravais bidimensionales.

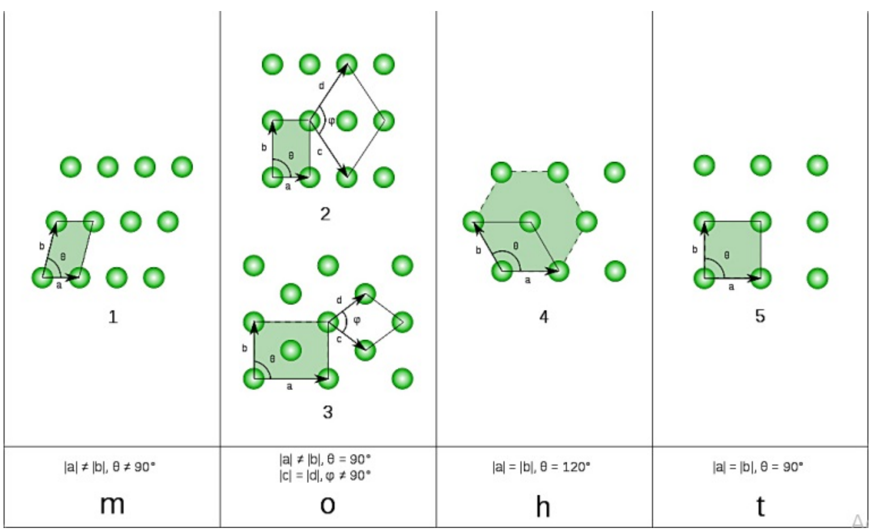


Figura 1: Figura tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice.

I. Dada la red bidimensional de la figura 12 (Izquierda) encuentre todos los posibles vectores primitivos y celdas primitivas asociadas.

Para la solución de este problema fue relevante tener en cuenta que para una misma red pueden existir varios vectores primitivos y a su vez varias celdas primitivas.

II. La humanidad ha estado seducida por la geometría desde que empezó a representar figuras. A partir de las cuatro imágenes que se ilustran en la figura 12 (Centro), encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.

Para la solución de este problema se desarrollo un trabajo de recorte y reconstrucción de imagenes a traves de herramientas especializadas para el tratamiento de imagenes como lo es photoshop [3].

III. Maurits Cornelis Escher fue un fenomenal dibujante holandés, quien se interesó por las simetrías de los grupos de imágenes de papel tapiz. Berend, hermano de Maurits, era cristalógrafo y le mostró la belleza de las simetrías de la naturaleza. En las cuatro obras del género de teselado11 de M.C. Escher, presentadas en la figura 12 (Derecha) encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas. Al igual que en el punto anterior se hizo un tratado de las imágenes para la resolución del problema.

Redes de Bravias tridimensionales Este tipo de redes complica un poco más el escenario. Se puede demostrar que existen 14 de estas redes, tal y como se muestran en la figura 13 Muestre que los volúmenes de ocupación atómica, para los sistemas: monoclínico, triclínico, ortorómbico, tetragonal, romboédrico, hexagonal y cúbico, corresponden a las expresiones que se muestran en `https://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice`

Sistemas cubicos

I. Muestre que un sistema bcc también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = \alpha\vec{i}, \ \mathbf{b} = \alpha\vec{j}, \ \mathbf{c} = \alpha(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})/2 \tag{1}$$

Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

II. Muestre que un sistema bcc también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = \alpha(\vec{j} + \vec{k} - \vec{i})/2, \ \mathbf{b} = \alpha(\vec{k} + \vec{i} - \vec{j})/2, \ \mathbf{c} = \alpha(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})/2 \tag{2}$$

Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

III. Muestre que un sistema fcc también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = \alpha(\vec{j} + \vec{k})/2, \ \mathbf{b} = \alpha(\vec{k} + \vec{i})/2, \ \mathbf{c} = \alpha(\vec{i} + \vec{j})/2 \tag{3}$$

Otra vez, dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

Sistemas reciprocos Exprese los vectores y las celdas recíprocas para los sistemas cúbico simple, y los distintos bcc y fcc. Calcule además el volumen de cada celda recíproca.

3. Los resultados

Redes de Bravias bidimensionales Partiendo de la definición de vectores primitivos, se sabe que en una red bidimensional existirán al menos dos vectores linealmente independientes capaces de construir todo el espacio, y celdas primitivas como la estructura mínima que reproduce todo el cristal, para este caso se trabajo únicamente con simetrías de traslación para la construcción de las celdas primitivas.

I. Para este problema se usaron las herramientas otorgadas por geogebra para la descripción de los vectores linealmente independientes, es decir los vectores primitivos.

Se obtuvo los siguientes resultados, para cada par de vectores primitivos (figura 2) se tiene una celda primitiva asociada (figura 3).

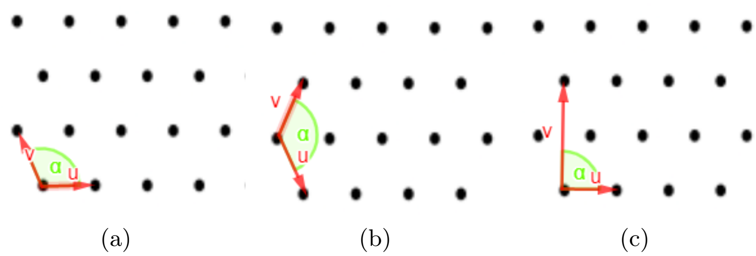


Figura 2: a) vector primitivo red hexagonal; b) y c) vectores primitivos red rectangular centrada

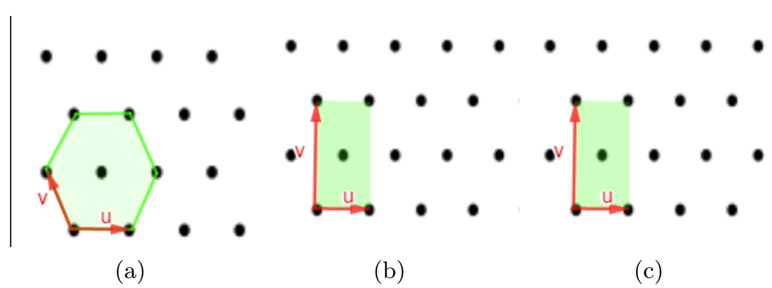
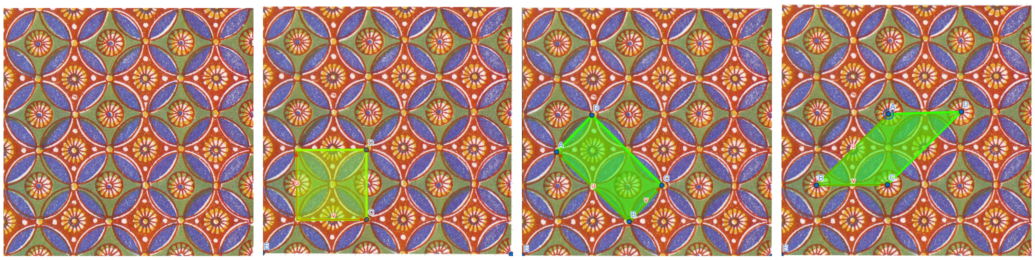


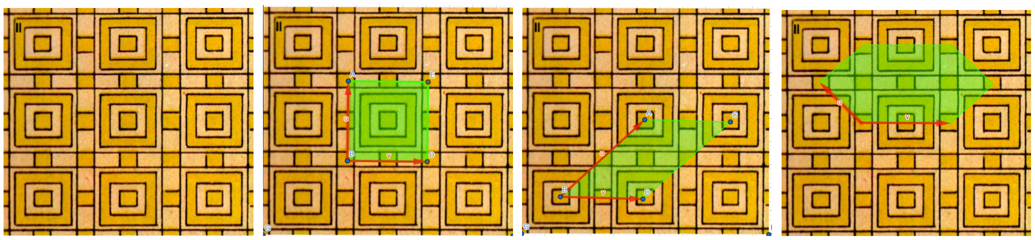
Figura 3: a) celda hexagonal; b) celda romboidea y c) celda rectangular centrada

II. Aplicando el mismo metodo usado para el punto anterior se obtuvo.



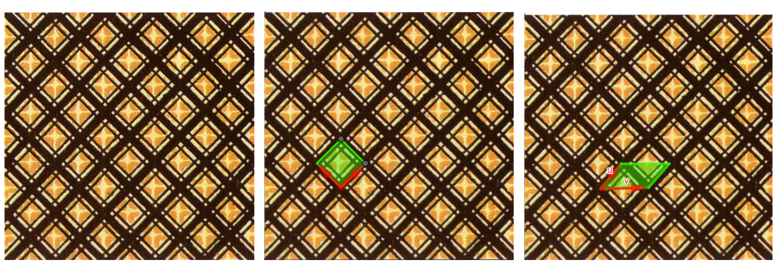
(a) (b) (c) (d)

Figura 4: a) mural egipcio; b) celda y vectores primitivos cuadrados y c) celda y vectores rectangular inclinado; d) celdas y vectores primitivos oblicuas



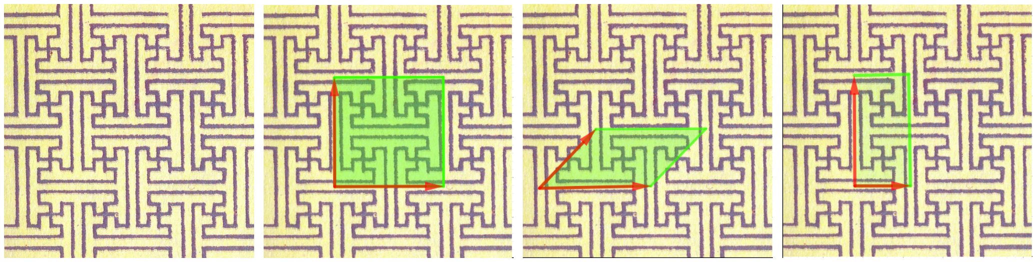
(a) (b) (c) (d)

Figura 5: a) mural asirio; b) celda y vectores primitivos cuadrados y c) celda y vectores oblicuas; d) celdas y vectores primitivos hexagonales



(a) (b) (c)

Figura 6: a) tejido tahiti; b) celda y vectores primitivos cuadrados y c) celda y vectores oblicuas



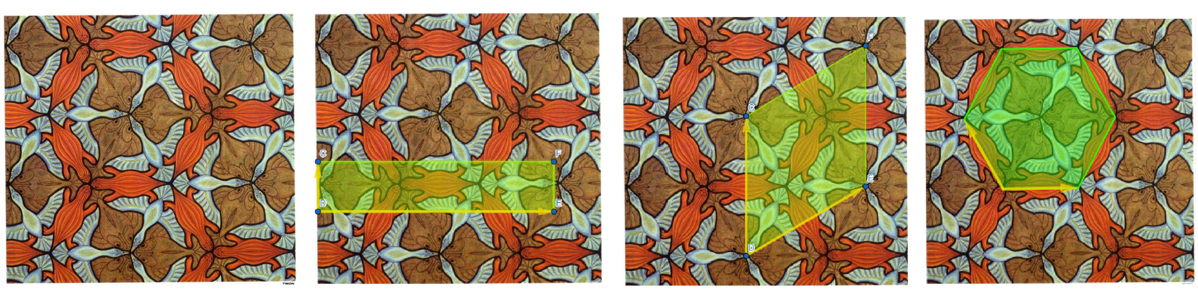
(a) (b) (c) (d)

Figura 7: a) Porcelana china; b) celda y vectores primitivos cuadrados; c) celdas y vectores oblicuos; d) celdas y vectores primitivos rectangulares

III. Se reproduce el tratamiento de imágenes.

(a) (b) (c) (d)

Figura 8: a) Lizard, 1942; b) celda y vectores primitivos rectangulares; c) celdas y vectores oblicuos; d) celdas y vectores primitivos hexagonales



(a) (b) (c) (d)

Figura 9: a) Symetry Drawing; b) celdas y vectores rectangulares; c) celdas y vectores oblicuos; d) celdas y vectores hexagonales

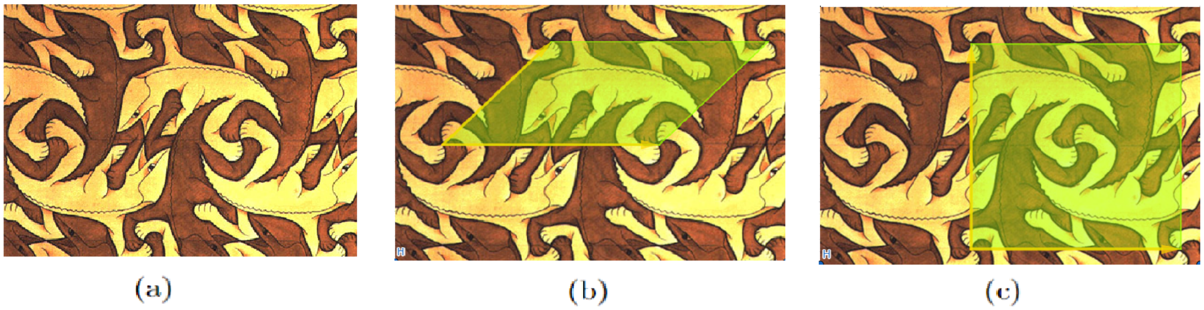


Figura 10: a) Lizard, 1937; b) celdas y vectores oblicuos; c) celdas y vectores cuadrados

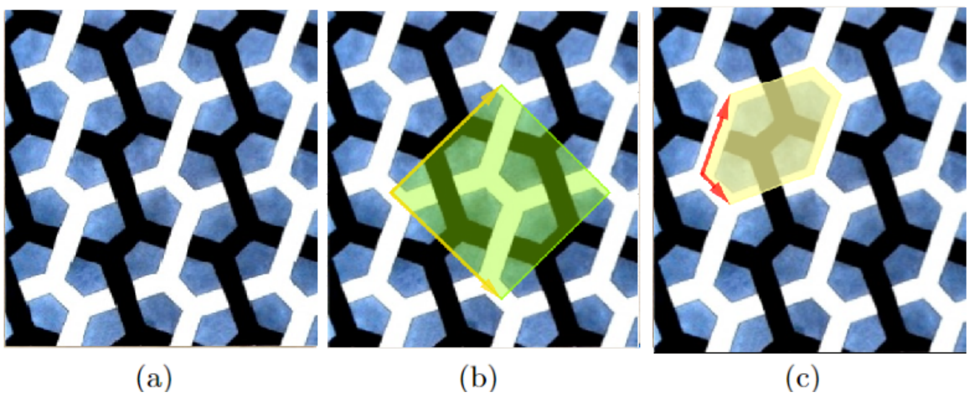


Figura 11: a) Teselado de M.c. Escher; b) celdas y vectores cuadrados; c) celdas y vectores hexagonales

Redes de Bravias tridimensionales Una red tridimensional esta formada por tres vectores primitivos que serán a, b y c. El ángulo entre a y b sera α, el ángulo entre b y c sera β, y el ángulo entre c y a sera γ.
La siguiente es la demostración del volumen atómico para el **sistema monoclínico**:

$$\text{Demuestre que } V = abc\sin\beta, \text{ las propiedades de este sistema son: } |a| \neq |b| \neq |c|,\ \alpha = \gamma = 90^\circ \tag{4}$$

Esto se demuestra con el triple producto mixto donde $\cos\theta$ es el angulo entre (a,b×c).

$$a.(b \times c) = |a||b \times c|\cos\theta = |a||b||c|\cos\theta\sin\beta = abc\sin\beta \tag{5}$$

El producto escalar se puede escribir como el modulo de los vectores por el coseno del ángulo entre ellos, a su vez el modulo del producto vectorial se puede escribir como el producto entre los módulos de los vectores y el seno del ángulo entre ellos, el vector a por definición del sistema monoclínico es perpendicular al vector b y al vector c por ende es perpendicular al plano que genera $b \times c$, esto implica que $\cos\theta = 1$ ya que a es paralelo al vector normal del plano.

Demostración para el **sistema triclínico**:

$V = |a||b||c|\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$, donde el modulo de los vectores y los ángulos pueden tomar cualquier valor, nuevamente se usa el triple producto mixto pero en este caso se toma como si fuera una matriz a la cual se denotara como M.

$$V = a\cdot(b\times c) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Se eleva al cuadrado ambos términos de la ecuación y se aplican las propiedades $\det(M) = \det\left(M^T\right)$ y $\det(M)\det\left(M^T\right) = \det\left(MM^T\right)$ dando como resultado.

$$V^2 = \det(M)^2 = \det(M)\det(M) = \det(M)\det\left(M^T\right) = \det\left(MM^T\right) = \begin{vmatrix} a\cdot a & a\cdot b & a\cdot c \\ b\cdot a & b\cdot b & b\cdot c \\ c\cdot a & c\cdot b & c\cdot c \end{vmatrix} \tag{7}$$

Resolviendo el determinante:

$$\begin{aligned}
&V^2 = \{a\cdot a((b\cdot b)(c\cdot c)-(b\cdot c)(c\cdot b)) \\
&+ a\cdot b((c\cdot a)(b\cdot c)-(b\cdot a)(c\cdot c)) \\
&+ a\cdot c((b\cdot a)(c\cdot b)-(c\cdot a)(b\cdot b))\} \\
&V^2 = \left\{|a|^2\left(|b|^2|c|^2-|b|^2|c|^2\cos^2\beta\right)\right. \\
&+ |a||b|\cos\gamma\left(|c|^2|a||b|\cos\alpha\cos\beta-|b||a||c|^2\cos\gamma\right) \\
&\left.+|a||c|\cos\alpha\left(|b|^2|a||c|\cos\gamma\cos\beta-|c||a||b|^2\cos\alpha\right)\right\}
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
V^2 &= |a|^2|b|^2|c|^2\left(1-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha\right) \\
V &= |a||b||c|\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}
\end{aligned}$$

Demostración para el **sistema ortorrómbico**:

$$\text{Demuestre que } V = abc, \text{ sus propiedades son:, } |a| \neq |b| \neq |c|,\ \alpha=\beta=\gamma=90 \tag{8}$$

Nuevamente la demostración es con el triple producto mixto donde $\cos\theta$ es el ángulo entre (a,$b\times c$).

$$a.(b\times c) = |a||b\times c|\cos\theta = |a||b||c|\cos\theta\sin\beta = abc \tag{9}$$

El vector a es perpendicular a los vectores b y c por ende es paralelo a el vector normal que genera $(b \times c)$, esto implica que $\cos\theta = 1$, b y c son ortogonales por eso el seno del ángulo entre ellos es igual a 1.

Demostración para el **sistema tetragonal**:

$$\text{Demuestre que } V = a^2c, \text{ sus propiedades son:, } |a| = |b| \neq |c|,\ \alpha = \beta = \gamma = 90 \tag{10}$$

Esto se demuestra con el producto triple mixto donde $\cos\theta$ es el ángulo entre (a,$b \times c$)

$$a.(b \times c) = |a||b \times c| \cos\theta = |a||b||c| \cos\theta \sin\beta = a^2c \tag{11}$$

El vector a es perpendicular a los vectores b y c por ende es paralelo a el vector normal que genera $(b \times c)$, esto implica que $\cos\theta = 1$, b y c son ortogonales por eso el seno del ángulo entre ellos es igual a 1 y |a|=|b| entonces |a||b|=a^2.

Demostración para el **sistema romboédrico**:

Se puede demostrar este sistema al igual que todos los que ya se hicieron usando el proceso que se hizo para el sistema triclínico o simplemente remplazando la información que ya se tiene en la ecuación del sistema triclínico entonces:

$$V = |a||b||c|\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$
$$V = |a||b||c|\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\alpha\cos\alpha}$$
$$V = |a||a||a|\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}$$
$$V = |a|^3\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}$$

Demostración para el **sistema hexagonal**:

$$\text{Demuestre que } V = \sqrt{3}a^2c/2, \text{ sus propiedades son:, } |a| = |b| \neq |c|,\ \alpha = \beta = 90,\ \gamma = 120 \tag{12}$$

Se demuestra con el triple producto mixto donde $\cos\theta$ es el ángulo entre (b,$c \times a$)

$$a.(b \times c) = b.(c \times a) = |b||c \times a| \cos\theta = |b||a||c| \cos\theta \sin\gamma = \sqrt{3}a^2c/2 \tag{13}$$

El triple producto mixto es cíclico, el vector b es perpendicular a los vectores a y c por ende es paralelo a el vector normal que genera $(c \times a)$, esto implica que $\cos\theta = 1$, el ángulo entre a y c es de 120° por eso el seno del ángulo entre ellos es igual a $\sqrt{3}/2$ y |a|=|b| entonces |a||b|=a^2.

Demostración para el **sistema cubico**:

$$\text{Demuestre que } V = a^3, \text{ sus propiedades son:, } |a| = |b| = |c|,\ \alpha = \beta = \gamma = 90 \tag{14}$$

Se demuestra con el triple producto mixto donde $\cos\theta$ es el ángulo entre (a,$b \times c$).

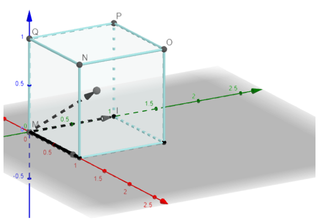
$$a.(b \times c) = |a||b \times c| \cos\theta = |a||b||c| \cos\theta \sin\beta = a^2c \tag{15}$$

El vector a es perpendicular a los vectores b y c por ende es paralelo a el vector normal que genera $(b \times c)$, esto implica que $\cos\theta = 1$, b y c son ortogonales por eso el seno del ángulo entre ellos es igual a 1 y |a|=|b|=|c| entonces |a||b||c|=a^3.

Sistemas cúbicos

I. Muestre que un sistema bcc también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2$$

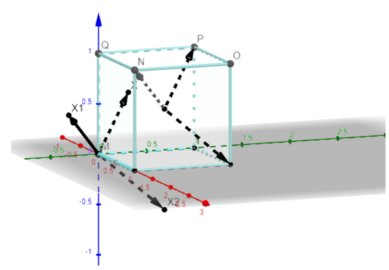


Un sistema cubico se puede representar con los vectores $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = a\hat{\mathbf{k}}$, si se realiza un corte justo por la mitad de cada una de las caras del cubo el punto donde se intersectan estos cortes es el centro del cubo, es decir que en el eje i mide la mitad de a, en el eje j mide la mitad de a, y en el eje k mide la mitad de a, esto se puede expresar vectorial mente como $\mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})/2$ los vectores $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}$ son capaces de crear la cara inferior del cubo, y en combinación lineal con el nuevo $\mathbf{c}$ son capaces de crear las demás caras del cubo. un ejemplo de esto seria la combinación $2\mathbf{c} - \mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ que es una de las esquinas superiores del cubo. El volumen del sistema bcc esta dado por el triple producto mixto: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a\hat{\mathbf{i}}) \cdot (a\hat{\mathbf{j}} \times a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2) = a^3/2(\hat{\mathbf{i}} \cdot (-\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}})) = a^3/2$

II. Muestre que un sistema bcc también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{i}})/2, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})/2, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})/2$$

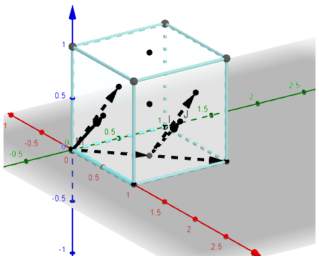
si estos 3 vectores en un sistema bcc parten desde un vértice de cualquiera de los cubos del sistema, terminan en los centros de los cubos que se encuentran a su alrededor, esto se debe al eje que se mueve en sentido opuesto, al trasladar estos vectores base al centro de un cubo cualquiera terminan en 3 de los vértices de ese cubo, esto se debe nuevamente a los ejes que se mueven en sentido opuesto, este eje que se mueve en sentido opuesto es diferente para cada vector, evitando que sean vectores LD, como estos vectores generan tanto centros como vértices del los cubos del sistema solo haría falta hacer las traslaciones para crear toda la red.



$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{i}})/2) \cdot ((a(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})/2) \times (a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})/2)) = a^3/4$$

III. Muestre que un sistema fcc también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})/2$$



Si estos vectores parten de uno de los vértices del cubo terminan en tres centros de las caras de ese cubo, si se trasladan al centro de una cara inferior estos vectores terminan en dos de los centros de las caras y en uno de los vértices del cubo, si se trasladan a una de las caras laterales terminan de completar los centros de las caras del cubo y terminan en otro vértice del cubo, si se siguen trasladando terminan de formar la celda primitiva y por ende toda la red.

Sistemas recíprocos Exprese los vectores y las celdas recíprocas para los sistemas cúbico simple, y los distintos bcc y fcc. Calcule además el volumen de cada celda recíproca.

Sistema cubico El sistema cubico cuenta con las siguientes propiedades: |a|=|b|=|c|, y sus vectores son ortogonales de tal manera que a,b,c se pueden escribir de las siguiente manera:

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = a\hat{\mathbf{k}}$$

Ya se probo anteriormente que $V = a.(b \times c) = a^3$.

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{(a\hat{\mathbf{j}} \times a\hat{\mathbf{k}})}{a^3} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}})}{a^3} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{(a\hat{\mathbf{k}} \times a\hat{\mathbf{i}})}{a^3} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}})}{a^3} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \frac{(a\hat{\mathbf{i}} \times a\hat{\mathbf{j}})}{a^3} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}})}{a^3} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{k}}$$

Ahora se puede calcular el volumen de la celda usando el triple producto mixto:

$$V = \mathbf{a}' \cdot \left(\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'\right) = \frac{1}{a^3}(\hat{\mathbf{i}} \cdot (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}})) = \frac{1}{a^3} \tag{16}$$

Sistema bcc

En este sistema a,b son ortogonales y sus magnitudes son iguales mientras que c apunta hacia el centro y |c|=$\sqrt{3}/2$ en vectores seria algo como:

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2$$

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a\hat{\mathbf{i}})\cdot(a\hat{\mathbf{j}}\times a(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})/2) = a^3/2(\hat{\mathbf{i}}\cdot(-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}})) = a^3/2$, entonces los recíprocos serán:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} = \frac{a^2/2(\hat{\mathbf{j}}\times(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}))}{a^3/2} = \frac{1}{a}(-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}})$$
$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} = \frac{a^2/2((\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})\times\hat{\mathbf{i}})}{a^3/2} = \frac{1}{a}(-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}})$$
$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} = \frac{a^2(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}})}{a^3/2} = \frac{2}{a}\hat{\mathbf{k}}$$

El volumen de su celda primitiva sera:

$$V = \mathbf{a}'\cdot\left(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\right) = \frac{2}{a^3}[(-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}})\cdot((-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}})\times\hat{\mathbf{k}})] = \frac{2}{a^3}[(-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}})\cdot(\hat{\mathbf{i}})] = \frac{2}{a^3}$$

Sistema fcc

En este sistema los vectores forman ángulos de 60 y sus módulos son |a|=|b|=|c|=$\sqrt{2}a/2$ y pueden representarse por los siguientes vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})/2 \tag{17}$$

El triple producto mixto entre estos vectores es:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a/2(\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}))\cdot(a/2(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}})\times a/2(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})) = \frac{a^3}{8}((\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})\cdot(\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{i}})) = \frac{a^3}{4}$$

Entonces los recíprocos serán:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} = \frac{a^2/4((\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}})\times(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}))}{a^3/4} = \frac{1}{a}(\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{i}})$$
$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} = \frac{a^2/4((\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})\times(\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}))}{a^3/4} = \frac{1}{a}(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{i}})$$
$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} = \frac{a^2/4((\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})\times(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}}))}{a^3/4} = \frac{1}{a}(-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})$$

Y su volumen sera:

$$V = \mathbf{a}'\cdot\left(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\right) = \frac{1}{a^3}[(\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{i}})\cdot((\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{i}})\times(-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}))] = \frac{1}{a^3}[(\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{i}})\cdot(\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})]$$
$$V = \frac{1}{a^3}[(\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{i}})\cdot(2\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}})] = \frac{2}{a^3}\left[(1)^2+(1)^2\right] = \frac{4}{a^3}$$

4. Conclusiones y Recomendaciones

En primera instancia se pudo concluir la importancia del álgebra vectorial para el estudio y desarrollo de sistemas físicos, se pudo apreciar la aplicación de métodos matemáticos al estudio de estructuras cristalinas de estado solido.

Se comprendieron los conceptos de vectores primitivos y celdas primitivas y su aplicación en la construcción de las denominadas redes de Bravias. También fue posible relacionar el calculo vectorial con la posición de átomos en estructuras cristalinas y el volumen de cristales.

Por ultimo se pudo entender el concepto vectores recíprocos de las bases que forman redes de Bravais y como interactúan entre si creando redes reciprocas con propiedades interesantes comparadas con las redes originales.

Referencias

[1] B Gruber. The relationship between reduced cells in a general bravais lattice. *Acta Crystallographica Section A: Crystal Physics, Diffraction, Theoretical and General Crystallography*, 29(4):433–440, 1973.

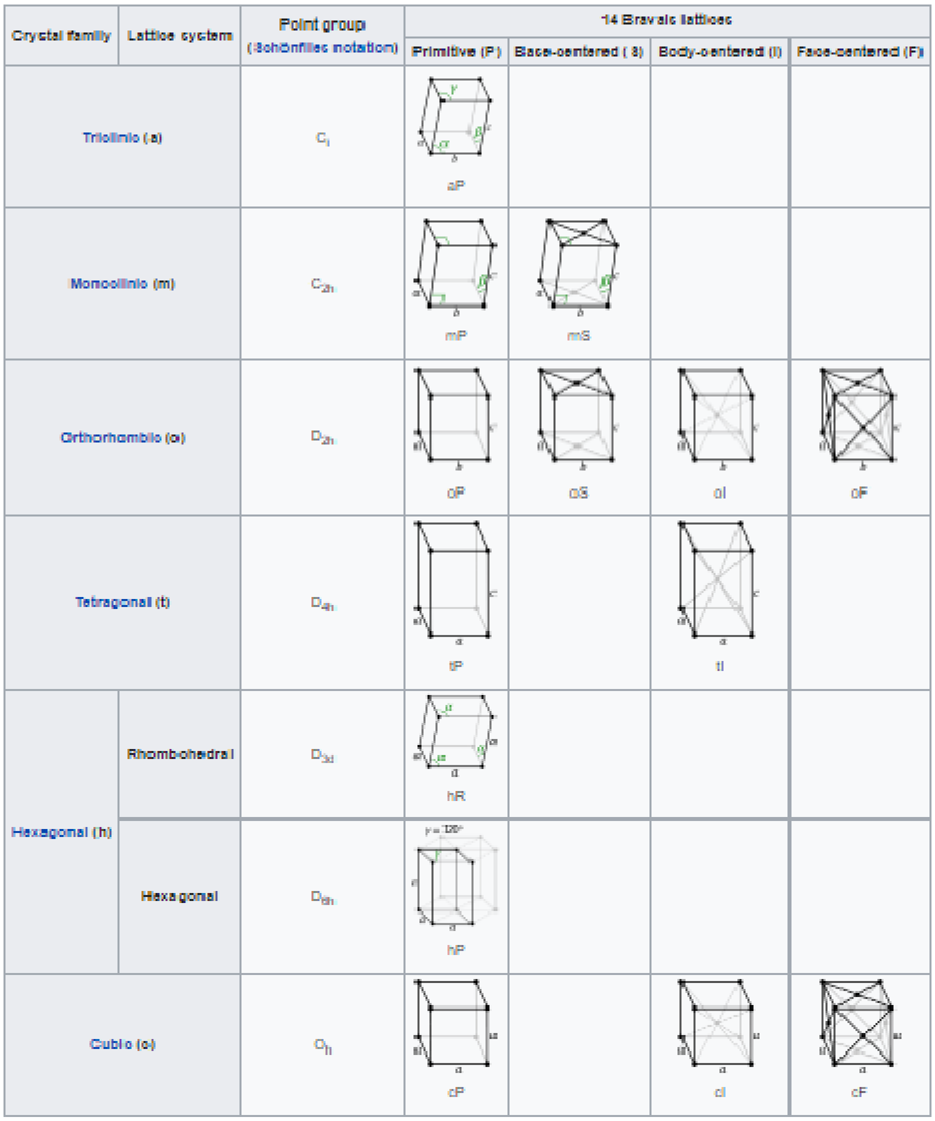
[2] L Hernandez, H & Nuñez. Matematicas avanzadas. *UIS*, 1:28–31, 2022.

[3] Adobe photoshop. https://www.adobe.com/co/products/photoshop.html.

5. Anexos

En esta sección se tienen contenidos algunos recursos relevantes para el desarrollo del articulo pero que se confinan aquí para no afectar la legibilidad del mismo.

Figura 12: Figura tomada de: https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group



Crystal family	Lattice system	Point group (Schönflies notation)	14 Bravais lattices			
			Primitive (P)	Base-centered (S)	Body-centered (I)	Face-centered (F)
Triclinic (a)		C_i	aP			
Monoclinic (m)		C_{2h}	mP	mS		
Orthorhombic (o)		D_{2h}	oP	oS	oI	oF
Tetragonal (t)		D_{4h}	tP		tI	
Hexagonal (h)	Rhombohedral	D_{3d}	hR			
	Hexagonal	D_{6h}	hP			
Cubic (c)		O_h	cP		cI	cF

Figura 13: Tomado de: https://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice