RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES
PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA
CURSO 2022-23

INSTRUCCIONES

- La prueba está disponible desde el 17 de abril hasta el 8 de mayo y se entrega a través del curso virtual, para ello se ha abierto una tarea denominada *Prueba de Evaluación Continua*.
- El examen consta de varios apartados, entre todos puntúan un ochenta por ciento de la nota.
- El restante veinte por ciento de la nota depende de la presentación del trabajo. Para obtener la máxima nota en este apartado debe utilizar LaTeX y escribir los códigos de forma eficiente y clara.
- Todas las respuestas deben ser razonadas y los códigos deben estar comentados.
- Entregue un único fichero comprimido que contenga todos los ficheros relacionados con el trabajo: fichero pdf con la respuesta y ficheros con los códigos comentados.

ENUNCIADO

Cuestión A. En esta cuestión trabajará con el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-m)\frac{r_A x_n}{1+\left(\frac{r_A-1}{K_A}\right)x_n} + m\frac{r_B y_n}{1+\left(\frac{r_B-1}{K_B}\right)y_n}, \\ y_{n+1} = m\frac{r_A x_n}{1+\left(\frac{r_A-1}{K_A}\right)x_n} + (1-m)\frac{r_B y_n}{1+\left(\frac{r_B-1}{K_B}\right)y_n}. \end{cases} \tag{1}$$

Este sistema se utiliza como modelo de la dinámica de una población que ocupa dos regiones (A y B) con características distintas y que se encuentran conectadas permitiendo la migración entre las regiones. Los parámetros $r_A > 0$ y $r_B > 0$ miden la tasa de crecimiento de la población y los parámetros $K_A > 0$ y $K_B > 0$ la capacidad de carga, en cada una de las dos regiones cuando se encuentran aisladas. Por otro lado, el parámetro $m \in [0,1]$ mide la proporción de población que abandona la región A para migrar a la región B y viceversa. Finalmente, x_n, y_n representan el tamaño de la población en las regiones A, B en la generación n-ésima.

1. Considere lo que ocurre en la región A cuando esta está aislada ($m = 0$), en ese caso

$$x_{n+1} = r_A x_n / (1 + \left(\frac{r_A - 1}{K_A}\right) x_n).$$

   a) Muestre que si $r_A > 1$ y $x_0 > 0$, entonces $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Muestre que si $r_A > 1$, entonces hay un tamaño positivo de población x^* que permanece invariante para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c) Muestre que se verifican las condiciones para aproximar x^* mediante el método de punto fijo si $r_A > 1$ y se comienza en una condición inicial suficientemente próxima a x^*.

   (Puntuación 10/100)

2. Implemente el algoritmo de punto fijo y de la bisección en MatLab, Maxima, Octave o Scilab utilizando el test de parada $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < 10^{-12}$ para aproximar x^* descrito en el apartado anterior. Compare el tiempo de convergencia para ambos métodos tomando como datos iniciales,

$x_0 = 2.0$, $x_0 = 3.0$, $x_0 = 4$, y $x_0 = 5.0$, respectivamente (para el método de bisección diseñe una estrategia que le permita encontrar un intervalo de la forma $[x_0, x_1]$ o $[x_1, x_0]$ para aplicar el método). Tome $r_A = 2$ y $K_A = 3.5$. (Puntuación 10/100)

3. Aunque no lo demostraremos aquí, para $m \in (0, 1)$ y $r_A, r_B > 1$ el sistema (1) tiene un único punto fijo con ambas componentes positivas $(x(m), y(m))$ al que tienden todas las soluciones del sistema (un atractor global). Implemente una función que aproxime ese punto fijo utilizando el método de punto fijo. La función se sugiere que tenga la siguiente expresión

   $$\mathtt{u} = \mathtt{EDF\_PF}(\mathtt{x0}, \mathtt{y0}, \mathtt{rA}, \mathtt{rB}, \mathtt{KA}, \mathtt{KB}, \mathtt{m})$$

   en donde

   `% (x0,y0) condición inicial`

   `% u vector solución de dimensión 2 con el valor aproximado de` $(x(m), y(m))$

   (Puntuación 10/100)

4. En este apartado debe construir un código que genere una gráfica que represente cómo varía el valor asintótico de la población total (la suma del tamaño de la población en cada una de las componentes) al hacer variar la dispersión manteniendo el resto de parámetros constantes. Incluya en el trabajo la gráfica para los valores $r_A = 2$, $r_B = 3$, $K_A = 5$ y $K_B = 7$ e interprete la gráfica. Investigue si para otros valores la gráfica es cualitativamente similar o no. (Puntuación 10/100)

Cuestión B. La versión en tiempo continuo del modelo del apartado anterior es la siguiente

$$\begin{cases} x'(t) = r_A x(t)(1 - \frac{x(t)}{K_A}) - m(x(t) - y(t)), \\ y'(t) = r_B y(t)(1 - \frac{y(t)}{K_B}) - m(y(t) - x(t)), \end{cases} \tag{2}$$

en donde $m \in [0, +\infty)$ es ahora el parámetro que mide la intensidad de la dispersión.

Se pide lo siguiente:

1. Utilice MatLab, Octave, Scilab o Maxima para implementar una función que calcule el valor de una solución aproximada del sistema anterior tras un tiempo t_1 desde un instante inicial t_0 en el que el estado inicial es (x_0, y_0) mediante el método explícito de Euler. La función se sugiere que tenga la siguiente expresión

   $$\mathtt{u} = \mathtt{EDO\_EulerExp(u0, t0, t1, n, rA, rB, KA, KB, m)}$$

   en donde

   ```
   % t0 tiempo inicial
   % u0 estado inicial
   % t1 tiempo transcurrido
   % n número de pasos entre t0 y t0+t1
   % u vector de dimensión 2 con solución en t0+t1
   % rA, rB, KA, KB, m son los parámetros que intervienen en el sistema
   ```

   (Puntuación 10/100)

2. Para cualquier condición inicial con componentes positivas, la solución de (2) tiende a un vector constante. Para calcular ese vector constante, diseñe una nueva función que utilice la función del apartado anterior. La nueva función debe tener como entradas dos condiciones iniciales y como salida la aproximación del vector constante al que tienden todas las soluciones (como cota para el error establezca que la norma euclídea de la diferencia de los valores de las dos soluciones sea menor que 10^{-5}). Muestre el resultado de aplicar ese código a las condiciones con las condiciones iniciales $(0,2,2)$ y $(0,1,3)$, para $r_A = 2$, $r_B = 3$, $K_A = 5$, $K_B = 7$ y $m = 15$. (Puntuación 10/100)

3. Los métodos de Runge-Kutta son métodos de un paso que generalizan al método de Euler como alternativa a los métodos multipasos. Uno de los más conocidos es el método de cuatro etapas. Considerando un problema de valor inicial

   $$u'(t) = f(t, u(t)),\ u(0) = u_0,$$

   se define iterativamente de la siguiente manera:

   $$\texttt{(RK4)} \begin{cases} k_1 = hf(t_n, u_n), \\ k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 = hf(t_n + h, u_n + k_3), \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \tag{3}$$

   En este ejercicio se pide realizar lo mismo que en los apartados anteriores pero usando este método en lugar del método de explícito de Euler. (Puntuación 10/100)

4. En este apartado debe construir un código que genere una gráfica que represente cómo varía el valor asintótico de la población total (la suma del tamaño de la población en cada una de las componentes) al hacer variar la dispersión entre $m = 0$ y $m = 50$ manteniendo el resto de parámetros constantes. Incluya en el trabajo la gráfica para los valores $r_A = 2$, $r_B = 3$, $K_A = 5$ y $K_B = 7$. Investigue si para otros valores la gráfica es cualitativamente similar o no al igual que hizo en la **Cuestión A**. (Puntuación 10/100)