Números complejos

Def. Sean a, b dos números reales cualesquiera, un número complejo se define por el par ordenado (a, b) y se denota $z = (a, b)$: $z \in \mathbb{C}$ donde $\mathbb{C}$ es un conjunto de todos los números complejos.

Suma y multip. vectorial

+ ·

de básicas b.m.

Operaciones básicas

Suma

Sean $z_1 = (a, b)$ & $z_2 = (c, d)$ números complejos

i.e. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $z, z_2 \in \mathbb{R}$

La suma de z_1 y z_2 es un número complejo z, definido por:

$$z = (a + c,\ b + d)$$

Note que el símbolo "+" dentro del par es la suma tradicional de numeros reales

Producto

Dados z_1 & $z_2 \in \mathbb{C}$ el producto entre z_1 y z_2 es un número complejo z definido por:

$$z = (ac - bd,\ ad + bc)$$

$\boxed{i = (0,1)}$

$x^2 + 1 = 0$

$(0,1)\cdot(0,1) + 1 = 0$

$(-1,0) + 1 = 0$

$-1 + 1 = 0$

En un número complejo $z = (a, b)$ a es conocido como parte real, b es conocido como parte ~~real~~ imaginaria y se denota:

a: $Re(z)$ b: $Im(z)$

Suma

$w_1 = (0, d)$ $w_2 = (0, c)$

$w_1 + w_2 = (0, d + c) = (d + c)i$

$= (d + c)(0,1)$

$\neq$ C·V (Producto Vectorial)

$z_1 = (a, 0) = a$

$z_2 = (b, 0) = b$

$z_1 + z_2 = (a + b, 0) = a + b$

$z_1 \cdot z_2 = (ab - 0, 0) = (ab, 0) = ab$

En general: $z = (a, b) = (a + 0) + (0 + b)$

$\boxed{= a + bi}$

forma binómica

* Reales Puros
* Imaginarios Puros

multi

$\omega_1 \cdot \omega_2 = (-de, 0)$
$= -de$

$z_1 = c_1 = (0, c_1)$

$z_2 = c_2 i = (0, c_2)$
$= -c_1 c_2$
$= c_1 c_2 ..$
$- c \cdot c_2$

Recordemos

$a, b \in \mathbb{R}$
$a + b \in \mathbb{R}$
$a - b = x \in \mathbb{R}$
$x + b = a$

Sea z_1 & $z_2 \in \mathbb{R}$
$z_1 = (a, b)$
$z_2 = (c, d)$
$z_1 - z_2 = (x, y) = (a-c, b-d)$

---

23 - Agosto - 16

$z_1 = a + ib$ $\quad (a+ib) \cdot (c+id)$
$z_2 = c + id$
$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + cb)$

División

$\frac{z_1}{z_2} = z$

$a = cx - dy$
$b = dx + cy$

$a = cx - dy$
$b = dx + cy$

Se debe cumplir $\boxed{z_1 = z \cdot z_2}$

$z_2 \neq 0$
$z_2 \neq 0 + i0$

$a + ib = (x+iy)(c+id)$
$= (cx - dy) + i(dx + cy)$

mult. x c $\quad ac = c^2 x - cdy$
mult x d $\quad bd = d^2 x + cdy$
$ac + bd = c^2 x + d^2 x$
$ac + bd = (c^2 + d^2) x$

$\Rightarrow x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$

mult 1. x c
$ac = c^2 x - cdy$
mult 2 x d
$bd = d^2 x + cdy$

$ac + bd = c^2 x + d^2 x$
$ac + bd = (c^2 + d^2) x$

$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$

mult por d $\quad ad = cdx - d^2 y$ (4)
mult por c $\quad bc = cdx + c^2 y$ (3)

(3) - (4)

$bc - ad = (c^2 - d^2) y$

$\Rightarrow y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

$y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad z_2 \cdot z_2 = (c^2-d^2) + i\,2cd$$

Note que $z_2 \neq 0$ i.e. $c \neq 0$, $d \neq 0$ $\therefore c^2+d^2 \neq 0$

$$z_2^* = c - id$$
$$z_2 z_2^* = c^2 + d^2 + i(\cancel{-cd} + \cancel{cd})$$
$$z_2 z_2^* = c^2 + d^2$$

Definición: Sea $z = a+ib \in \mathbb{C}$, se dice que z^* es el "complejo conjugado" de z y está dado por: $z^* = a - ib$

Note que en general $z \neq z^*$

OBS:

i) z^* es el complejo conjugado de z
z es el complejo conjugado de z^* $\Rightarrow (z^*)^* = z$

ii) Si $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z^* = z$ //solo por tener parte im
Notese si $z = a + i0 \Rightarrow z^* = a - i0$
//a está en los reales

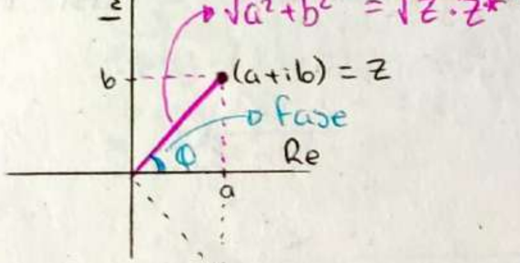
iii) $zz^* = a^2 + b^2$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{z_2 z_2^*} + i\,\frac{bc-ad}{z_2 z_2^*}$$

pero $z_1 z_2^* = (a+ib)(c-id)$
$= (ac+bd) + i(bc-ad)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}$$

Representación Gráfica



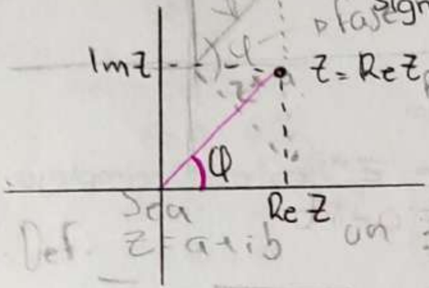
$\Rightarrow$ Modulo de un complejo (Distancia de origen hasta nuestro # complejo

Def: Sea $z = a + ib$ un número complejo cualquiera

$\bar{z} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z z^*}$ se conoce como el modulo de z $(|z|)$

φ es la fase de z y está dada por $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)$ (Si $\operatorname{Re} z = 0$ la fase es $\frac{\pi}{2}$ ó $-\frac{\pi}{2}$, dependiendo del signo de $\operatorname{Im} z$)



$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ $\quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$ Parte Imaginaria

$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ Parte Real.

Sea $\rho = |z|$ $0 \leq \rho$ $\rho \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{Im} z$ $\rho \cos \varphi = \operatorname{Re} z$

$\Rightarrow z = \rho \cos \varphi + i \rho \operatorname{sen} \varphi$ // Forma polar de z

Recordatorio:

i) $e^{a+b} = e^a e^b$

ii) $(e^a)^b = e^{ab}$

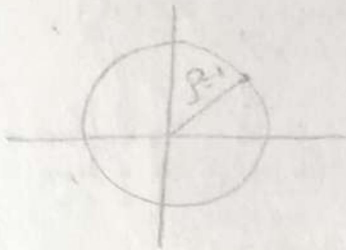
$\ln e = 1$

Sea $z = x + iy$

$e^z = e^{x+iy}$
$= e^x e^{iy}$

$z = \rho \cos \varphi + i \rho \operatorname{sen} \varphi$
$= \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$
$= |z| (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

Sea $z = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$



Ejercicio: Dado $z = 1 + i$, encuentre la forma binómica de z^3 así como $|z^3|$ y fase de z^3

$z^2 = (1+i)(1+i)$
$= (1-1) + i(1+1)$
$= 2i$

$z^3 = z^2 z = (0 + 2i) \cdot (1 + i)$

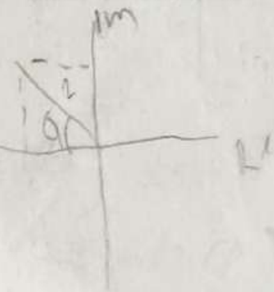
$z^3 = \underline{-2 + 2i}$

$|z^3| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

fase de $z^3 = tg^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right)$

$\varphi = tg^{-1}(-1)$

$= \frac{\pi}{4}$



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} \quad \text{forma binómica}$$

$$z_2 z_2^* \in \mathbb{R} \qquad \frac{z_1}{z_2} = a + ib$$

$z_1 = a + ib = (a, b)$
$z_2 = c + id = (c, d)$
$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + cb)$

1. Encuentre el módulo y la fase de $\frac{(4+3i)(1+i)}{(7-i)}$. Bosqueje la forma binómica.

2. Demuestre que el módulo de $t - \frac{3}{4}i = \frac{1}{4}$ si $t = \frac{i-t}{1+2it}$ y t es real.
$t - \frac{3}{4}i = \frac{1}{4}$ si $t = \frac{i-t}{1+2it}$

Para 1) $z = \frac{(4+3i)(1+i)}{(7-i)} = \frac{(4-3)+i(4+3)}{7-i} = \frac{1+7i}{7-i}$

$z_2 = 7 - i$
$z_2^* = 7 + i$

$$\frac{(1+7i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \frac{(7-7)+i(1+49)}{49+1} = \frac{0+i50}{50} = i$$

$z_2 z_2^* = a^2 + b^2 \qquad |z| = \sqrt{1} = 1$

Para 2) $\left|T - \frac{3}{4}i\right| = \frac{1}{4}$ si $T = \frac{i-t}{1+2it}$

$$T = \frac{-t+i}{1+2it}\left(\frac{1-2it}{1-2it}\right) = \frac{(-t+2t)+i(2t^2+1)}{1+4t^2}$$

$$T = \frac{t + i(2t^2+1)}{(1+4t^2)}$$

$\Rightarrow$ Sustituyendo a T en $T - \frac{3}{4}i$

$$\frac{t}{1+4t^2} + i\left(\frac{2t^2+1}{1+4t^2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{t}{1+4t^2} + \left(\frac{8t^2+4-3-12t^2}{4(1+4t^2)}\right)$$

$$= \frac{t}{1+4t^2} + \frac{1-4t^2}{4(1+4t^2)}$$

$$\left|t - \frac{3}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{t}{4t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1-4t^2}{4(4t^2+1)}\right)^2} = \sqrt{\frac{t^2}{(4t^2+1)^2} + \frac{(1-4t^2)^2}{16(4t^2+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{16t^2+(1-4t^2)^2}{16(4t^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{16t^2+1-8t^2+16t^4}{16(4t^2+1)^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1+8t^2+16t^4}{16(4t^2+1)^2}} = $$

$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$

$z^* = a - ib$

$w = i\tau = ix$

$w^* = -i\tau = -x; \ \tau \in \mathbb{R}$

$\tau = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

Si $\tau = x + iy$

$w = i\tau = ix - y = -y + ix$

$w^* = -y - ix$

$= -(y + ix)$

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tal que $a, b \in \mathbb{R}$

$\sqrt{(a+ib)} = \sqrt{z} = w \quad w \in \mathbb{C}$ tal que $w \cdot w = z$

Sea $w = x + iy \Rightarrow (x+iy)(x+iy) = z = a + ib$

$= (x^2 - y^2) + i\, 2xy$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array}}$$

$z = 1 + i$ Encuentre las raíces cuadradas de z.

$\sqrt{z} = \sqrt{(1+i)} = w$

$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1+y^2}$ ①

$2xy = 1$ ②

Sust. ① en ②

$(2\sqrt{1+y^2}\, y = 1)^2$

$4(1+y^2)y^2 = 1 \Rightarrow$

$4y^2 + 4y^4 = 1$

$u + \frac{u^2}{4} = 1$

$u = 2y$

$u^2 = 4y^2$

$u^4 = 16y^4$

$u = 4y^2$

$u^2 = 16y^4$

$\frac{u^2}{4} + u - 1 = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(\frac{1}{4})(-1)}}{2(\frac{1}{4})} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1}}{2(\frac{1}{4})} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\left(u + \frac{u^2}{4} = 1\right)4 = 4u + u^2 = 4 = u^2 + 4u - 4 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$u_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} \qquad u_1 = \frac{-4 + \sqrt{32}}{2} \qquad u_2 = \frac{-4 - \sqrt{32}}{2}$$

$u_1 = 4y^2$

$-2 + 2\sqrt{2} = 4y^2$

$-1 + \sqrt{2} = 2y^2$

$y = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$

Para x

$2xy = 1$

$x = \frac{1}{2y}$

$x = \frac{1}{2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}}$

Multiplicación en forma polar

Sea $z_1 = a + ib \quad z_2 = c + ib \,; \; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Es posible $z_1 = |z_1|[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]$

$z_2 = |z_2|[\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha]$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[(\cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha) + i(\cos\theta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta + \alpha) + i\operatorname{sen}(\theta + \alpha)]$$

$$z = z_1 \cdot z_2 \qquad |z| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \arg(z) = \varphi = \theta + \alpha$$

En general; para $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$

si $z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n$

$\Rightarrow |z| = \rho = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$ $\qquad (z_k = |z_k|\cos\theta_k + i|z_k|\operatorname{sen}\theta_k,\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, n$

$\arg(z) = \varphi = \sum_{k=1}^{n} \arg(z_k)$ donde $\arg(z_n) = \theta_k$

Caso particular

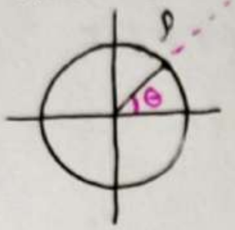
si $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$

$$z_1 z_2 \ldots z_n = |z_1|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Formula de De Moivre

Fórmula de De Moivre

Sea $z \in \mathbb{C}$ con argumento θ y módulo $|z| = \rho$ si n es un entero, entonces.



$$\boxed{z^n = \rho^n[\cos n(\theta + \cancel{2\pi}) + i \operatorname{sen} n(\theta + \cancel{2\pi})]}$$

↳ Dos vueltas adicionales

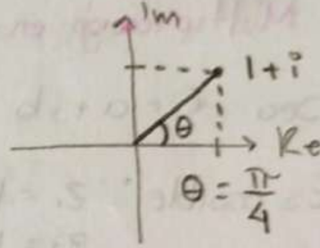
$\Rightarrow z^n = \rho^n[\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$

Sea $z = 1 + i$ utilize la formula de De Moivre para encontrar la forma binomica de z^{13}

$\Rightarrow z^n = \rho^n [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$

$|z| = \rho = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)$
$= tg^{-1}(1) = 45° = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ o del Dibujito



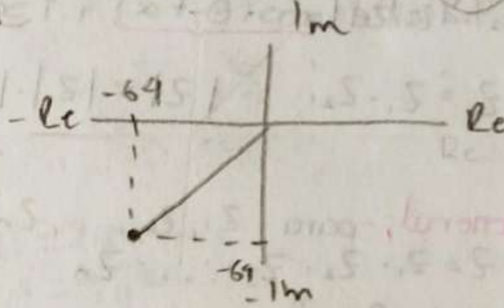
$\Rightarrow z^{13} = (\sqrt{2})^{13} [\cos 13\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen} 13\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Como $13\frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{5}{4}\pi$

$\Rightarrow z^{13} = 64\sqrt{2} [\cos \frac{5}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{4}\pi]$

$z^{13} = 64\sqrt{2} [-\frac{1}{\sqrt{2}} + i(-\frac{1}{\sqrt{2}})]$

$z^{13} = -64 - i64$



$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$
$z^n = \rho(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = \omega$

$\omega = \rho[\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$

$z^n = \omega \quad \rho = \rho^n \quad \varphi = n\theta$

Sea $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$$\boxed{(z)^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \checkmark \text{ (Primer raiz)}$$

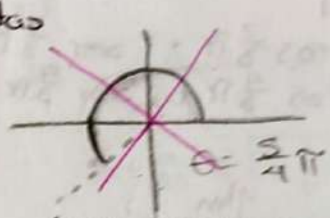
$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Note que:

$$(z^{\frac{1}{n}})^n = \rho^{\frac{n}{n}}\left[\cos\frac{\cancel{n}(\theta+2k\pi)}{\cancel{n}} + i \operatorname{sen}\frac{\cancel{n}(\theta+2\pi k)}{\cancel{n}}\right]$$

Dado $z = -1 - i$ encuentre las raíces cuartas

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$



$$w_k = z^{\frac{1}{4}} = \rho^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi k}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi k}{4}\right)\right]$$

$\Rightarrow w_0 = (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\left(\frac{5}{16}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{16}\pi\right)\right]$

$w_1 = (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{5}{4} + 2\pi}{4}\right)\right]$

$= 2^{1/8}\left[\cos\frac{13}{16}\pi + i \operatorname{sen}\left(\frac{13}{16}\pi\right)\right]$

$w_2 = 2^{1/8}\left[\cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 4\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 4\pi}{4}\right)\right]$

$= 2^{1/8}\left[\cos\left(\frac{21}{16}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{21}{16}\pi\right)\right]$

$w_3 = 2^{1/8}\left[\cos\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 6\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 6\pi}{4}\right)\right]$

$= 2^{1/8}\left[\cos\left(\frac{29}{16}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{29}{16}\pi\right)\right]$

$w_4 = 2^{1/8}\left[\cos\left(\frac{37}{16}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{37}{16}\pi\right)\right]$

$$\Rightarrow \boxed{z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}$$

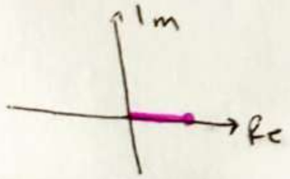
$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

$z = 1 \in \mathbb{C}$ $\qquad \rho = 1$

$\sqrt{z} = \sqrt{1}$ $\qquad \theta = 0$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1}\left[\cos\left(\frac{0+2\pi k}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0+2\pi k}{2}\right)\right]$

$= \cos(k\pi) + i \operatorname{sen}(k\pi)$



$k = 0, 1$

$w_0 = 1 + 0i = 1$

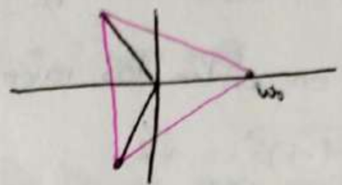
$w_1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$
$= -1 + 0i$
$= -1$

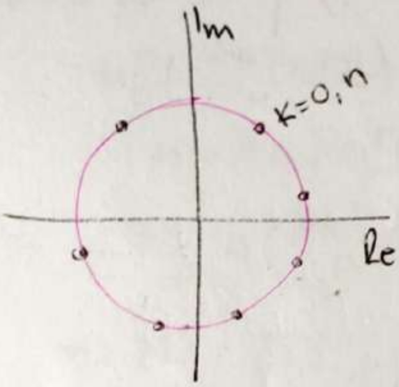
$1^{\frac{1}{n}} \quad n > 2$

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{0 + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$$

Si $n = 3$

$w_0 = 1$
$w_1 = \cos \frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi$
$w_2 = \cos \frac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi$





31/08/16

Raices de un número complejo.

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k = \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Polinomio
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = f(x)$

Def.
Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeros complejos y $z \in \mathbb{C}$ una variable compleja, $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n = f(z)$ es una función polinomial en la variable compleja z,
i.e. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si $z_k \in \mathbb{C}$ y $f(z_k) = 0 \Rightarrow z_k$ es raiz de f.

El teorema fundamental del algebra dice que $f(z)$ (polinomio de grado n) tiene n raices complejas tales que

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)$$

Ejemplo:

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = f(z)$$

Si z_0 & z_1 satisfacen $f(z_0) = f(z_1) = 0$

$$\Rightarrow f(z) = (z - z_0)(z - z_1)$$
$$= z^2 - z_1 z - z z_0 + z_0 z_1$$
$$= z^2 - (z_1 + z_0) z + (z_0 z_1)$$

Si $a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = -(z_0 + z_1)$
$a_0 = z_0 z_1$

$iz^2 + 2z + (1 - 2i) = f(z)$ factorice $f(z)$

$$az^2 + bz + c = 0$$
$$z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0$$
$$z^2 + \frac{b}{a} z = -\frac{c}{a}$$
$$z^2 + \frac{b}{a} z + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$$
$$z^2 + \frac{b}{a} z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$z + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$
$$z + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$
$$z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$
$$z = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} - \frac{b}{2a}$$
$$z = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{(\sqrt{b^2 - 4ac})_0 - b}{2a}$$

$$\& \quad z_1 = \frac{(\sqrt{b^2 - 4ac})_1 - b}{2a}$$

$a = i \quad b = 2 \quad c = 1 - 2i$

$$z_0 = \frac{(\sqrt{b^2 - 4ac})_0 - b}{2a}$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{\left[\sqrt{2^2 - 4(i)(1 - 2i)}\right](-2i)}{4} = \frac{(\sqrt{4 - 4i - 8})_0 - 2}{2i}$$

$$= \frac{\left[(\sqrt{-4 - 4i})_0 - 2\right](-2i)}{4} = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{-4 - 4i})_0 - 2\right](-2i)$$

Para $\sqrt{-4-4i} = \sqrt{-4(1+i)} = 2i\sqrt{1+i}$

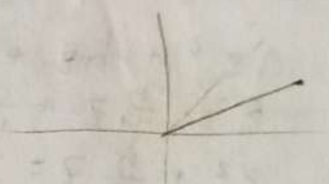
Los raices de $\sqrt{1+i}$ son

$$w_k = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{2}\right) + i\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{2}\right)\right].$$

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{\pi}{8} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right]$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi/4 + 2\pi}{2} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi/4 + 2\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i\ \mathrm{sen}\frac{9}{8}\pi\right)$$

$$z_{0,0} = (2i)(-2i)\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right) - 2\right]$$



$$= 4\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right) - 2\right] =$$
$$= 4\left[(1.189 + i\ 0.006) - 2\right]$$
$$= -3.244 + i\ 0.02$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\,z}{|z|}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{Im}\,z}{|z|}$$

John Derrick

pág 18 y 19.

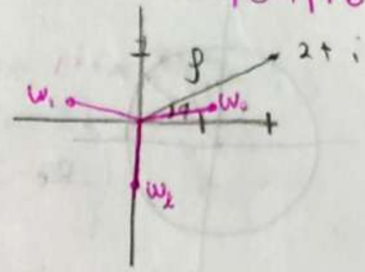
$$\mathrm{Re}\,z = \cos\theta\,|z|$$
$$\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8} \simeq 1.189$$

Mejor

$$z_0 = (2i)(-2i)\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right) - 2\right.$$

Encuentre las soluciones de la siguiente ec. 2/09/16

$$z^3 - 2 - i = 0$$



$$z^3 = 2 + i$$
$$z = (2+i)^{1/3}$$

Usando De Moivre

$$w_k = \sqrt[6]{5}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right)\right]$$

$$w_0 = 5^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right]$$

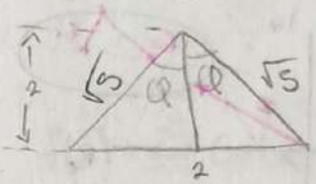
$$w_1 = 5^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right)\right]$$

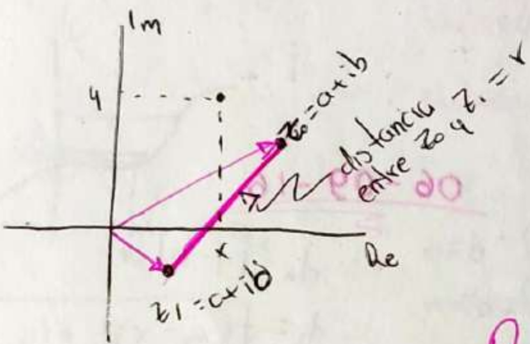
$$w_2 = 5^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right)\right]$$

$$|2+i| = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$|z| = \sqrt{5}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right) = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$



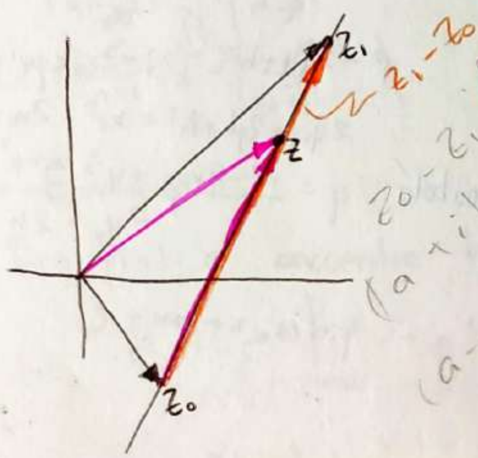


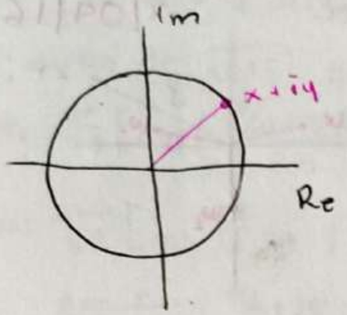
$$r = \sqrt{(a+b)^2 + (c+b)^2}$$

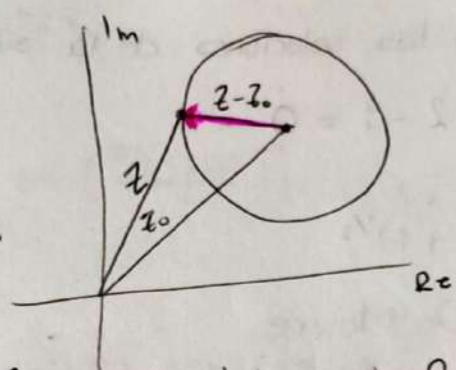
$$r = |z - z_1|$$

Recta ~~de~~ en el plano Complejo

$$\{z \mid \boxed{z - z_0 = m(z_1 - z_0)} \quad m \in \mathbb{R}\}$$





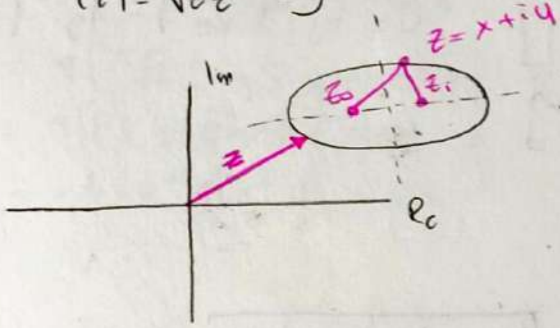


Unitario

$x^2+y^2=1^2$

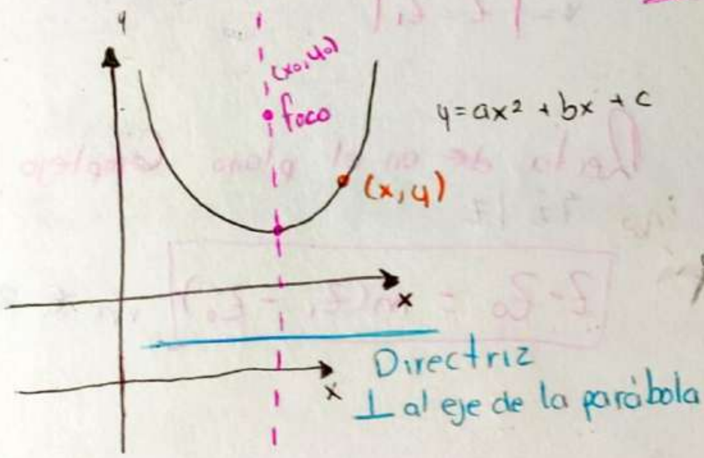
$|Z| = \sqrt{ZZ^*} = \rho$

Cuando $= \{ z = \mid |z - z_0| = \rho \; ; \; \rho \in \mathbb{R} \}$



$z_0, z \subset \mathbb{C}$ (fijos)

$|z - z_0| + |z - z_1| = \ell \; ; \; \ell \in \mathbb{R}$



$y = ax^2 + bx + c$

$d_1 = d_2$

06-09-16

$d_2 = |y-h|$

$d_1 = \sqrt{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2}$

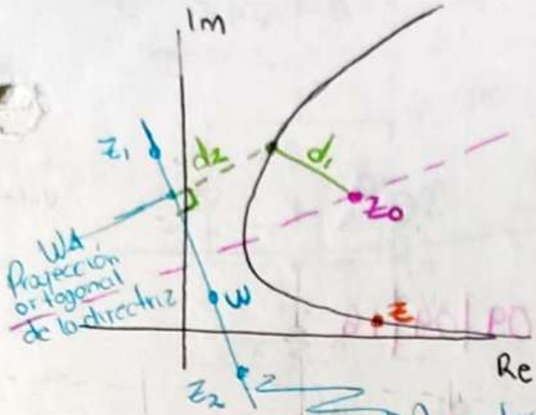
$(y-h)^2 = (x_0-x)^2 + (y_0-y)^2$

$y^2 - 2yh + h^2 = x_0^2 - 2x_0x + x^2 + y_0^2 - 2y_0y + y^2$

$2y_0y - 2yh + h^2 = x_0^2 - 2x_0x + x^2 + y_0^2$

$y = \frac{x^2 - 2x_0x + y_0^2 + x_0^2 - h^2}{2y_0 - 2h}$

$y = ax^2 + bx + c$



$d_1 = d_2$

$\Rightarrow d_1 = |z_0 - z|$

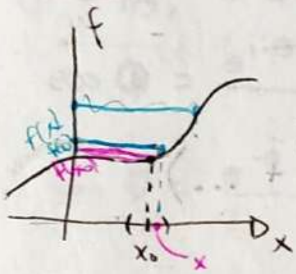
$d_2 = |z - w_\perp|$

$\Rightarrow$ Directriz $\equiv (z_1 - z_2) = m(z_1 - w)$

$f = f(x) : A \to B$

$x = x_0$

Expansión en series



Taylor // $(x_0 = 0)$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

McLawrin $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$n=0 \quad f(x) \approx a_0 x^0 = a_0$

$n=1 \quad f(x) \approx a_0 + a_1 x$

$a_1 = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} \frac{x^n}{n!}$$

Ejercicio 1

Sea $f(x) = e^x$ encuentre la serie de McLawrin para toda x.

$$f(x) = e^x\Big|_{x=0} + e^x\Big|_{x=0} \frac{x}{1!} + e^x\Big|_{x=2} \frac{x^2}{2!} + e^x\Big|_{x_3} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Sea $x = i\theta$ en donde i es el # imaginario.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{6} + \ldots$$

09|09|16

Note que:

$(i)^0 = 1$ $\quad (i)^4 = 1$ $\quad (i)^8 = 1$

$(i)^1 = i$ $\quad (i)^5 = i$ $\quad (i)^9 = i$

$(i)^2 = -1$ $\quad (i)^6 = -1$ $\quad (i)^{10} = -1$

$(i)^3 = -i$ $\quad (i)^7 = -i$ $\quad (i)^{11} = -i$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1 + \underbrace{i\theta}_{Im} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \frac{i\theta^9}{9!} - \frac{\theta^{10}}{10!} - \frac{i\theta^{11}}{11!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \frac{\theta^{10}}{10!} + \ldots$$

$$+ i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \frac{\theta^{11}}{11!} + \ldots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}(-1)^n + i \sum_{n=0} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$$

$$= a + ib = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Si $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$
es una función multivariada.

si $\rho = e^{|z|}$

$\rho e^{i\theta} = e^{|z|} e^{i\theta} = e^{|z| + i\theta}$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$
$$= (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n$$

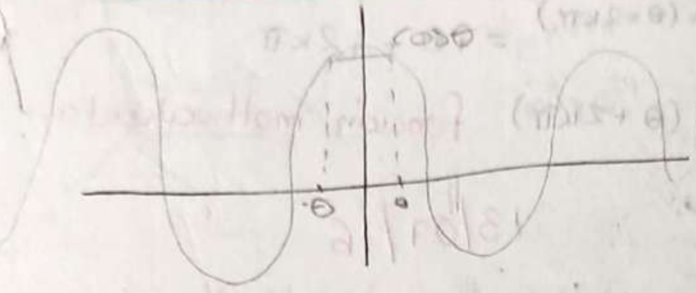
Sea $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = x + iy$

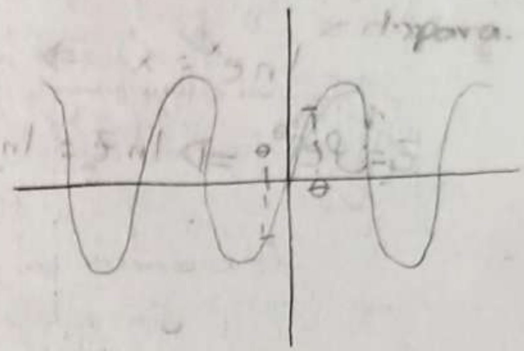
$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$$

$$|w| = e^x$$

$$\therefore \arg|w| = y$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}\,(-\theta) = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$$





en la suma $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

en la resta $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \text{sen}\,\theta$

$\dfrac{(e^{i\theta} - e^{i\theta})(-2i)}{4} \quad \dfrac{-2ie^{i\theta} + 2ie^{-i\theta}}{4}$

$\varphi = i\theta, \quad \varphi \in \mathbb{C}$

$$\cos\varphi = \frac{e^{ii\theta} + e^{-ii\theta}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2},$$

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2i}$$

Dada la ec. $x^2 + x + 1 = 0$ encuentre sus raíces y escríbalas en forma exponencial.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

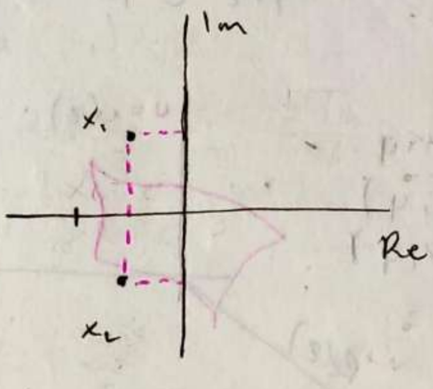
$$|x_2| = |x_1| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\arg(x_1) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arg(x_2) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$x_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$x_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = \cos(\theta + 2\pi k) + i\,\text{sen}(\theta + 2\pi k)$$

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \qquad \forall\; k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\ln e^{x} = x \Rightarrow \ln e^{i(\theta+2k\pi)} = i\theta + i2k\pi$$

$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \ln z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi)$ función multivaluado.

13/09/16

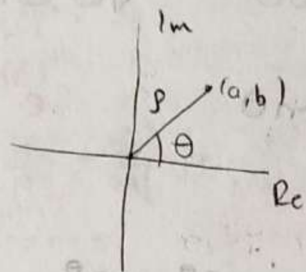
$z \in \mathbb{C}$

$z = (a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$

$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$\rho = |z| \quad \theta = \arg(z)$

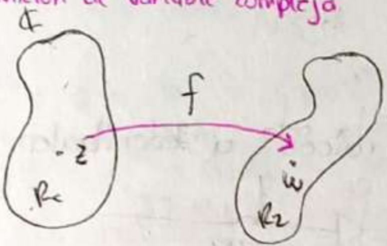
$\boxed{z = a + ib}$



$z = x + iy$ es una variable compleja

$f : R_1 \to R_2$

↳ función de variable compleja



$R_1, R_2 \in \mathbb{C}$

donde R_1 y R_2 son el dominio e imagen de la función compleja f

si $f \in \mathbb{C} \Rightarrow f = U(z) + i\,V(z)$

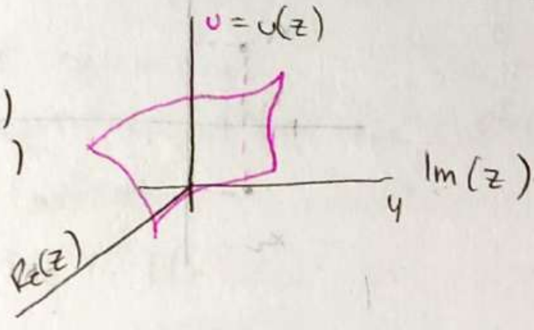
$f = f(z)$

Note que $U = U(z)$ es la parte real de f $V = V(z)$ es la parte imaginaria de f.

$z = x + iy$

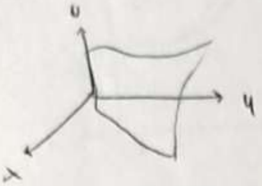
$U = U(x, y)$

$V = v(x, y)$



$u = u(x,y)$

$u: \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$



Ejemplo.

$f(z) = e^z$

$= e^{x+iy}$

$= e^x + e^{iy}$

$z = x+iy$

Dom $f(z) = \mathbb{C}$

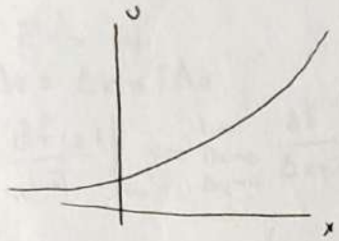
Ran $[f(z)] =$

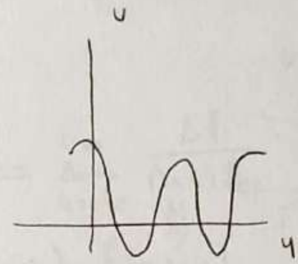
$f(z) = e^x e^{iy} = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$= e^x [\cos y + i \,\text{sen}\, y]$

$= e^x \cos y + i e^x \,\text{sen}\, y$

$u(x,y) = e^x \cos y \qquad v(x,y) = e^x \,\text{sen}\, y$





$f(z) = \ln(z)$; $z = x+iy$

$f(z) = \ln(x+iy)$

$z = x+iy = \rho e^{i\theta}$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$f(z) = \ln[\rho e^{i\theta}]$

$= \ln\rho + i[\theta + 2k\pi]$

$u(x,y) = \ln[x^2+y^2]^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$v(x,y) = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi \quad k = 0,1,2,\dots$

$f(z) = z^2$

$z = x+iy$

$z^2 = (x+iy)^2$

$= x^2 - y^2 + 2ixy$

$u(x,y) = x^2 - y^2$

$v(x,y) = 2xy$

$f(z) = \cos z$

$z = x+iy$

$f(z) = \cos(x+iy)$

$= \cos x \cos iy - \text{sen}\, x \,\text{sen}\, iy$

$= \cos x \cosh y - \text{sen}\, h(y)\, \text{sen}(x)$

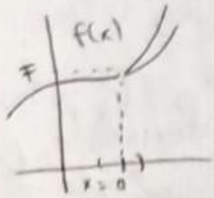
$\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

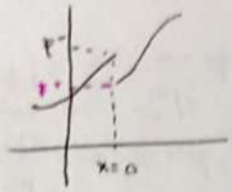
14/09/16

$f = f(x)$

$\lim_{x \to a} f(x) = F$ el limite existe

F existe $\longleftrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

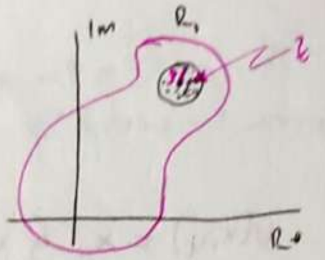




$$\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

$\Delta z \to 0$

$\Delta z = z - z_0$



$|z - z_0| \leq \rho$

Forma Polar

Radial y angular

$z = x + iy$

$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$

$$\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z_0} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y = cte}} \frac{\Delta f}{\Delta x + i \Delta y} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ x = cte}} \frac{\Delta f}{\Delta x + i \Delta y}$$

$$\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+iy - x_0 - iy_0) - f(x+iy)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+iy - x_0 - iy_0) - U(x+iy)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+iy - x_0 - iy_0) - V(x+iy)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+x_0, y_0) - U(x, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+x_0, y_0) - V(x, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{U(x_0, y+y_0) - U(x_0, y)}{i \Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{V(x_0, y+y_0) - V(x_0, y)}{i \Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$= \underbrace{-i \frac{\partial U}{\partial y}}_{} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{} = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{} + \underbrace{i \frac{\partial V}{\partial x}}_{}$$

Note que:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \& \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}}$$

Sea $f(z)$ una función compleja definida en una región compleja R_1, tal que $z_0 \in R_1$; $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$; $z = x + iy$
Se dice derivable si satisface las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i)}\ \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \text{ii)}\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \end{array}}$$

// Si se satisfacen f es derivable.

Ejemplo:

Sea $f(z) = z = x + iy$ $\quad u(x,y) = x$ & $v(x,y) = y$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{dz} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{dV}{\partial x} = 1$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{dz}{dz} = 1$$

Ejercicio 1:

Verifique si las cond. de Cauchy-Riemann se satisfacen para las siguientes funciones:

a) $f(z) = z^2$
b) $f(z) = e^z$
c) $f(z) = z^*$

a) $f(z) = z^2 = zz = (x+iy)(x+iy) = (x^2 - y^2) + i\,2xy$

$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad v(x,y) = 2xy$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -2y$$

$$\Rightarrow \frac{df}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + i2y$$

$$= 2(x+iy)$$

$$= 2z$$

b) $f(z) = e^z$, $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$$

$u(x,y) = e^x \cos y \qquad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y - i e^x \operatorname{sen} y$$
$$= e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$$

c) $f(z) = z^* = (x - iy)$

$u(x,y) = x \qquad v(x,y) = -y$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1}_{\text{No se satisface C-R}}$$

20/09/16

Sea $f = f(z)$ una función compleja definida $\forall z \in \mathbb{C}$ f se dice entera si satisface las condiciones de Cauchy - Riemann $\forall z \in \mathbb{C}$

Ejemplo

Sea $f(z) = z = x + iy$

$\Rightarrow u(x,y) = x$

$v(x,y) = y$

Note que:

i) $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

ii) $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $f(z)$ es una función entera

Si $f(z)$ satisface las condiciones de C-R en una región $R \subset \mathbb{C}$ se dice que $f(z)$ es "analítica" en R.

Linealidad K

i) Sean $v \in V$ $K(c \odot v) = c \odot K(v)$

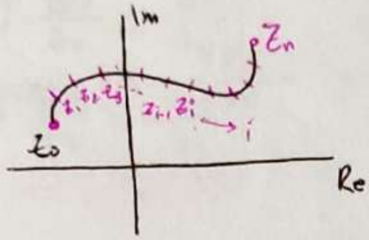
ii) Si $u, v \in V$ $K(u \oplus v) = K(u) \oplus K(v)$

28/09/16

Integración Compleja.

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz \qquad z = x+iy \in \mathbb{C} \qquad f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$dz = dx + i\,dy$$



$$\int f(z)\,dz = \int [u+iv][dx+i\,dy]$$

$$= \int (u\,dx - v\,dy) + i\int (u\,dy + v\,dx)$$

$$\forall\,(z_i, z_{i-1}) \text{ existe } \xi_i \in \mathbb{C} \mid z_{i-1} < \xi_i < z_i \Rightarrow \int_{z_0}^{z_n} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(z_i - z_{i-1})$$

arco.

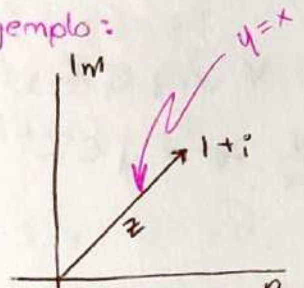
Un arco "γ" en el plano complejo es un conjunto infinito de puntos complejos $z = x+iy$ tal que la parametrización

$$x = x(t)\,;\quad y = y(t) \quad \forall\ \alpha\ t < \beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Es posible entonces

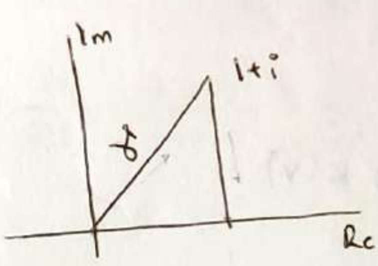
$$\gamma : z = z(t)$$

Ejemplo:



$$z \in \mathbb{C}$$
$$z = x+iy$$

$$y = x \qquad x = t \qquad y = t$$
$$x = x(t) = t$$
$$y = y(t) = t$$
$$0 \le t \le 1$$
$$z = x(t) + i\,y(t)$$
$$= t + it$$
$$z = z(t)$$



$$\gamma : z(t) = \begin{cases} t + it & 0 \le t \le 1 \\ 1 + i(2-t) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

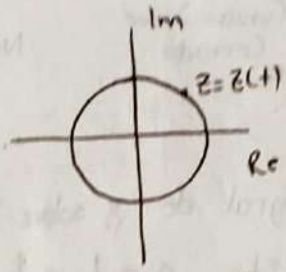
$$z = z(t) \quad \forall\ t \in (0,2)$$

Definición:
Sea γ un arco definido por $z = z(t)$ $\forall\, t \in (\alpha, \beta)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, γ es un arco "suave" si $z' = z'(t)$ existe y no se anula en $t \in (\alpha, \beta)$

$$z'(t) = \begin{cases} 1+i & \forall\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0-i & \forall\ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Definición:
Se dice que γ es un arco "SIMPLE" si para t_1, t_2 y $z(t_1) = z(t_2)$ entonces $t_1 = t_2$ (excepto los extremos)

Encuentre la integral de línea de $z\,dz$ donde γ es el círculo unitario centrado en el origen



$$\int_\gamma z\,dz =$$

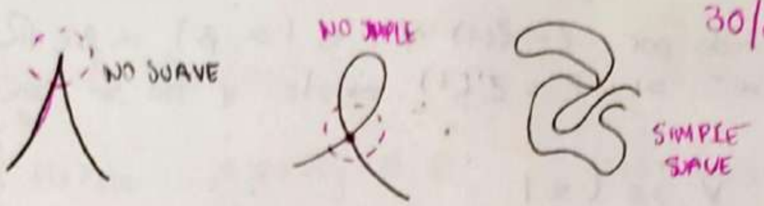
γ: Círculo unitario con centro en el origen

$$\gamma : z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$= e^{it}$$
$$dz = i e^{it}\, dt$$

$$\int_\gamma z\,dz = \int_{t=0}^{2\pi} i e^{it} e^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} e^{2it}\, dt = \left.\frac{i e^{2it}}{2i}\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2it}$$
$$= \left[\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} i \operatorname{sen}(2t)\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

30/09/16



Definición:

Sea γ una curva (arco) tal que $\gamma : z = z(t) \quad \forall \ \alpha \le t \le \beta$

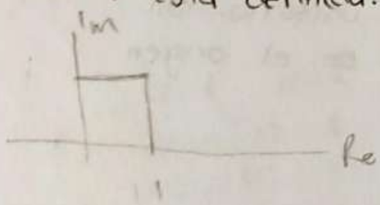
Si γ es una curva suave, simple y además

$$z(\alpha) = z(\beta)$$

Entonces se dice q una curva CERRADA

Evalue la integral de x sobre γ, donde γ está definida: (curva por partes)

$$z(t) \begin{cases} 1 + it & 0 \le t \le 1 \\ 2 - t + i & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$



$$\int_\gamma x \, dz = \int_0^1 dz + \int_1^2 (2-t) \, dz$$

$$dz = d(x + iy) = dx + i\,dy$$

$$z = x + iy$$

$$dz_1 = (1 + it) = i\,dt$$

$$dz_2 = (2 - t + i) = -1\,dt$$

$$= \int_0^1 i\,dt + \int_1^2 (2-t)(-dt)$$

$$= i + \left.\frac{(2-t)^2}{2}\right|_1^2$$

$$= i - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + i$$

Resuelva la integral anterior utilizando la sig. parametrización

$$\gamma: z(t) = \begin{cases} 1+i\ln t & 1 \le t \le e \\ 2-\frac{t}{e}+i & e \le t \le 2e \end{cases} \qquad dz = \begin{cases} \frac{i}{t}\,dt; & 1 \le t \le e \\ -\frac{1}{e}\,dt; & e \le t \le 2e \end{cases}$$

$= \frac{i}{1} - \frac{1}{2}$

b) γ es la trayectoria recta desde 1 hasta i

$y = -x+1$

$x = t$

$y = -t+1$

$z = t + i(1-t)$

$dz = dt - i\,dt$

$\le t \le$

$x = -y+1$

$y = t$

$x = -t+1$

$\boxed{R: -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$

4/10/16

$\int z^n dz \quad n \geq 1$ entero

$|z| = 1$

$\int_{|z|=1} z^n =$

$z = x + iy$

$|z| = x^2 + y^2 = 1$

$|z| = |e^{it}|$

$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

$e^{it} = z \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

$dz = ie^{it} dt$

$$\int z^n dz = \int (e^{it})^n \, ie^{it} dt$$

$$= \int e^{itn} \, ie^{it} dt$$

$$= \int ie^{(itn+it)} dt \qquad \int e^v dv = e^v + c$$

$$= \int ie^{it(n+1)} dt$$

$$= \frac{1}{n+1} \int e^{it(n+1)} i(n+1) dt$$

$$= \frac{1}{n+1} e^{it(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1}\left[e^{i2\pi(n+1)} - e^0\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\cos^{\nearrow 1} 2\pi n + i \operatorname{sen}^{\nearrow 0} 2\pi - 1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}(0)$$

$$= 0$$

$\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi}$

$\frac{1}{n+1} e^{i(n+1)2\pi} - \frac{1}{n+1} = 0$

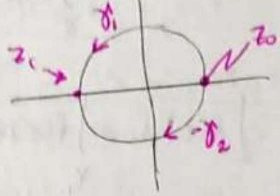
$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$

21

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_{\gamma_1} z^n dz + \int_{\gamma_2} z^n dz \qquad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 .$$

$$= 0$$

$$\int_{\gamma_1} z^n dz = - \int_{\gamma_2} z^n dz$$



$$= \int_{-\gamma_2} z^n dz$$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = it \Big|_0^{2\pi} = i2\pi$$

Depende de la trayectoria.

$$z = e^{it}$$
$$dz = ie^{it} dt$$

T.F.C.

Sea $f_1 = f(x)$ una función definida $\forall\ x \in I$ continua, def.:

i) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ $\qquad \int e^{-x^2} dx \quad F(x) = ?$

donde F es la antiderivada

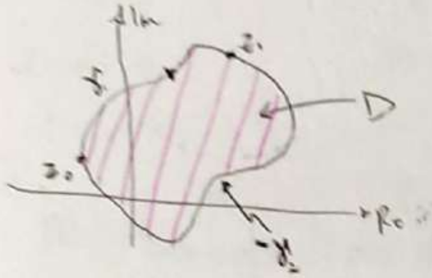
ii) $\frac{dF}{dx} = f(x)$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_0) - F(z_1)$$

$$\int_{z_0=1}^{z_1=1} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_1^1 = 0$$

11/10/16

Sea $f = f(z)$ una función analítica en una región cerrada D acotada por una curva γ cerrada simple, entonces $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$



$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz$$

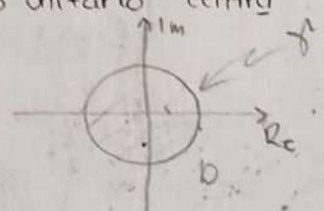
$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Note que la trayectoria de z_0 a z_1 no es importante si $f(z)$ es una función analítica. (facilita la parametrización de las trayectorias)
geometría diferencial *métrica*

Ejercicio

Evalúe la siguiente integral $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9}$ donde γ es un círculo unitario centrado en el origen



Si es analítica vale 0
Es analítica si cumple C-R

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9} \qquad z = x + iy$$

$$f(z) = \frac{1}{(x+iy)^2+9} = \frac{1}{x^2-y^2+i2xy+9}\left(\frac{x^2-y^2+9-i2xy}{x^2-y^2+9-i2xy}\right)$$

$$= \frac{x^2-y^2+9-i2xy}{(x^2-y^2+9)^2+(2xy)^2}$$

$$f(z) = \overbrace{\frac{x^2-y^2+9}{(x^2-y^2+9)^2+(2xy)^2}}^{u(x,y)} + -i\,\overbrace{\frac{2xy}{(x^2-y^2+9)^2+(2xy)^2}}^{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2+9}{(x^2-y^2+9)^2+4x^2y^2}\right)$$

$$= \frac{\left[(x^2-y^2+9)^2+4x^2y^2\right]2x - \left[x^2-y^2+9\right]\left[2(x^2-y^2+9)2x + 8xy^2\right]}{\left[(x^2-y^2+9)^2+4x^2y^2\right]^2}$$

$$\left[(x^2-y^2+9)^2+4x^2y^2\right]^2$$

$$= \frac{2x\left[(x^2-y^2+9)^2+4x^2y^2\right] - 4x(x^2-y^2+9)^2 - 8xy^2(x^2-y^2+9)}{\left[(x^2-y^2+9)^2+4x^2y^2\right]\left[(x^2-y^2+9)^2+4x^2y^2\right]}$$

$$= 2x(x^2-y^2+9)^2 + 8x^3y^2 - 4x(x^2-y^2+9)^2 - 8xy^2(x^2-y^2+9)$$

$8x^3$

$(x^2-y^2+9)(x^2-y^2+9)$

$x^4 - x^2y^2 + 9x^2 - x^2y^2 + y^4 - 9y^2 + 9x^2 - 9y^2 + 81$

$\frac{u}{v}$ $\frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

x^2-y^2+9

$x^4 - 2x^2y^2 + 18x^2 - 18y^2 + y^4 + 81$

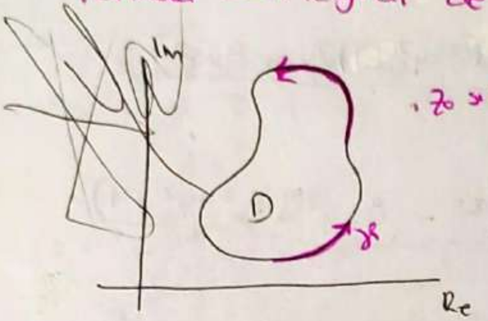
$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z^2 9}$ $z_0 = 0$ z_1 $1+i$

$z_0 = 0$ $z_1 = 1+i$

z_0 $9z_1 = 1+i$

Formula Integral de Cauchy. 12/10/16

14/18/19/21



, z_0 si es analítico

D es simplemente conexa está delimitada por una curva cerrada simple.
Si γ se recorre en sentido positivo si se observa el interior de D a la izquierda.

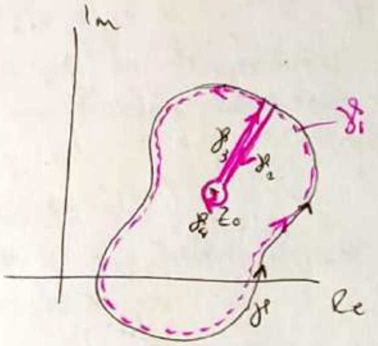
Si $f(z)$ es analítica en y sobre D.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad f(z) \text{ es analítica en } D!!$$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \quad \text{donde } z_0 \text{ es un número fijo} \qquad z_0 \notin D$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = ? \implies \int_\gamma g(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } g(z) \text{ es analítica} \\ \neq 0 & \text{si } g(z) \text{ no es analítica} \end{cases}$$

$z_0 \in D$



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

Note que $z_0 \notin D_1$

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \boxed{\cancel{\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \int_{-\gamma_3} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}} + \int_{\gamma_4} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \int_{-\gamma_4} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = -\int_{-\gamma_4} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \oint_{\gamma_4} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

parametrizando $\gamma_4: z = \rho e^{i\theta} + z_0$ 12/10/16

$dz = \rho i e^{i\theta} d\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\int_{\gamma_4} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \cancel{\rho} i \int \frac{f(\rho e^{i\theta} + z_0)}{(\cancel{\rho} \cancel{e^{i\theta}} + \cancel{z_0}) - \cancel{z_0}} \cancel{e^{i\theta}} d\theta$$

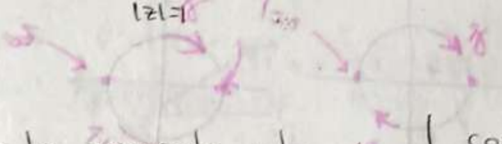
$$= i \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta} + z_0)\, d\theta \qquad \text{Si } \rho \to 0 \Rightarrow \gamma_4 = \gamma_1 \approx \gamma$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(z_0)\, d\theta = i f(z_0) 2\pi$$

$$\boxed{\therefore \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)}$$ F.I.C.

Utilice la fórmula integral de Cauchy para encontrar la integral siguiente: $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i f(0) \qquad f(z) = 1$

$= 2\pi i$

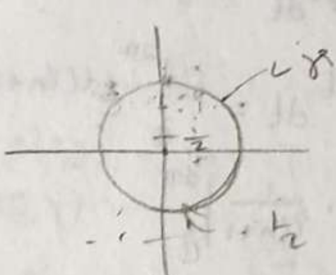


Evalue la siguiente integral: $\int \frac{\cos z}{z^3 + z} dz$ sobre las curvas dadas:

a) $\gamma: |z| = 2$

b) $\gamma: |z - i\frac{1}{2}| = 1$

b) $|z - \frac{i}{2}| = 1$



$$\int \frac{\cos(z)}{z^3+z} dz = \int \frac{\cos z}{z} dz - \frac{1}{2} \int \frac{\cos z}{z+i} dz - \frac{1}{6} \int \frac{\cos z}{z-i} dz$$

Como $\frac{\cos(z)}{z^3+z}$ es analítico en el disco y $-i$ no pertenece eso

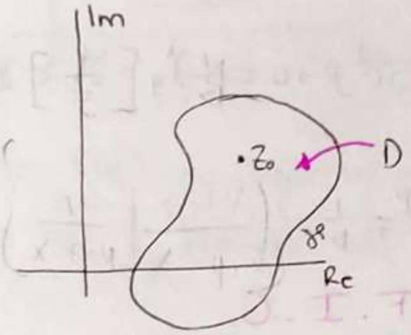
$$\int \frac{\cos(z)}{z^3+z} dz = \int \frac{\cos(z)}{z} dz - \frac{1}{2} \int \frac{\cos(z)}{z-i} dz$$

$= i 2\pi (\cos 0) - \frac{1}{2} i \cos(i) 2\pi$

$= 2\pi i [1 - \frac{1}{2}\cos(i)]$

$= 2\pi i (1 - \frac{1}{2}\cosh 1)$

Suponga que $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa contenida por una curva simple cerrada γ. Si z_0 es interior a la región dada, demuestre que $\frac{2\pi i}{n!} \cdot \left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$



Sea z_0 un punto interior a γ

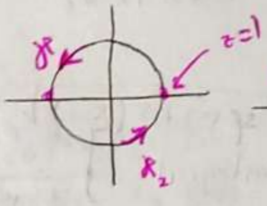
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \frac{f(z_0)}{dz_0}$$

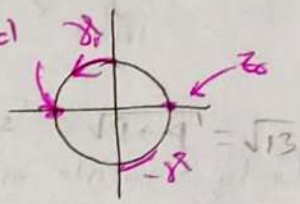
$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz(-1)(z-z_0)^{-2}(-1) = 2\pi i \frac{df(z_0)}{dz_0}}$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} = 2\pi i \frac{df(z_0)}{dz_0}$$

*/ $\int z^n dz$

$|z| = 1 \quad n \geq 1$ entero





$e^{it} = z$ para $0 \leq t \leq 2\pi$

$dz = i e^{it} dt$

$$\int z^n dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n i e^{it} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{int + it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{t(in+i)} dt$$

$$= i e^{t(in+i)} \cdot \left.\frac{1}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)2\pi} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0 \quad */$$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$ γ encierra a una región (simple conexa) en donde $f(z)$ es analítica.

14/10/16 ?

Recordemos

» Teorema de Stokes

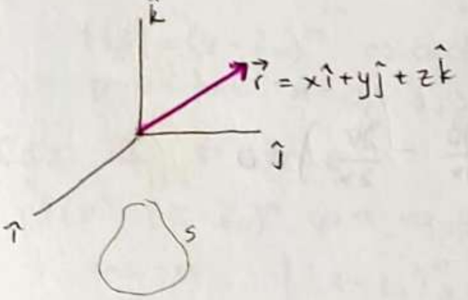
Sea $\vec{f} = \vec{f}(x,y,z)$ una función vectorial definida en una región volumétrica ∇

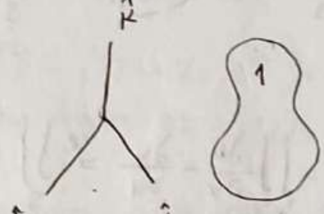
$$\iint_S \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Donde S es una superficie abierta acotada por una curva cerrada C, donde $\oint_c$ denota curva cerrada

$$\vec{f} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$$

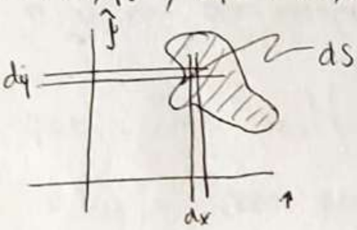
$f_x = f_x(x,y,z)$; $f_y = f_y(x,y,z)$; $f_z = f_z(x,y,z)$
(funciones escalares)

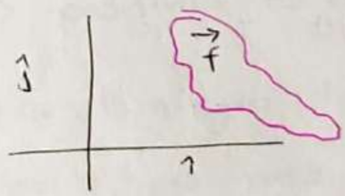




$\vec{f} = \hat{i} f_x + \hat{j} f_y$ $\quad$ $\vec{\nabla} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$f_x = f(x,y)$; $f_y = f(x,y)$





$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right).$$

$$d\vec{S} = \hat{n}\, dS = \hat{n}\, dx\, dy = \hat{k}\, dx\, dy \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Por otro lado

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = f_x\, dx + f_y\, dy$$

$$\iint_S \left(\frac{d f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_c \left(f_x\, dx + f_y\, dy\right)$$

$$\int_\gamma F(z)\, dz = 0$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + i\, dy)$$

$$= \int_\gamma (u\, dx - v\, dy) + i\int_\gamma (v\, dx + u\, dy)$$

Por separado

$$\int_c (u\, dx - v\, dy) = \iint_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \overset{CR}{=} \iint_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

$f_x = u$

$f_y = -v$

$$\int_c (v\, dx + u\, dy) = \iint_S \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \overset{CR}{=} \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

$f_x = v$

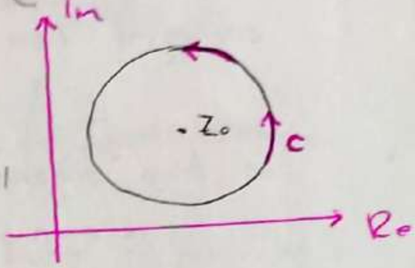
$f_y = u$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 + i0 = 0$$

21/11/2016

① La integral de contorno C muestre que la integral de contorno de $(z-z_0)^n$ es igual a $\begin{cases} 2\pi i & \text{para } n = -1 \\ 0 & \text{para } n \neq -1 \end{cases}$

Donde el contorno C encierra al punto $z = z_0$ en un sentido positivo.



$$\int_c (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{para } n=-1 \\ 0 & \text{para } n \neq -1 \end{cases}$$

CASO I

$$\int_c \frac{dz}{(z-z_0)} \qquad f(z_0)=1 \qquad 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

CASO II

$$\int_c (z-z_0)^n \, dz \; ; \; n \neq -1$$

$f(z) = (z-z_0)^n$ es analítica para toda $n = 0, 1, 2, 3$

CASO III F.G.C-R.

$f(z) = (z-z_0)^n$ ya no es analítica para toda $n = -2, -3, -4 \ldots$

$$m = -n \qquad \int_c (z-z_0)^n \, dz = \int_c \frac{dz}{(z-z_0)^m} = 2\pi i\, f(z_0) = 0$$

Muestre que $\frac{1}{2\pi i}$ multiplica a la integral de contorno z^{n-m-1} donde n y m son enteros positivos es la representación de la

Muestre que $\frac{1}{2\pi i}$ multiplica a la integral de contorno z^{n-m-1} donde n y m son enteros positivos es la representación de la Δ de Kronecker $\Delta^m_n = 1$ si son iguales

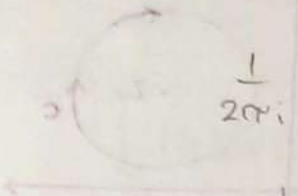
$\Delta^m_n = 0$ si son $\neq$ si $m = n \Rightarrow$

$$\int_c z^{n-m-1} \frac{dz}{2\pi i} = \int z$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int z^{m-n-1}\,dz$$

Caso I Si m y n son iguales $\Rightarrow m-n=0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int z^{-1}\,dz \qquad z_0=0 \qquad f(z)=1$$



$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{z-z_0}\,{}^{-1^0}\,dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i f(z)\right]=1$$

CASO II Si $m<n \Rightarrow m-n-1=-\bar{n}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int z^{-\bar{n}}\,dz$$

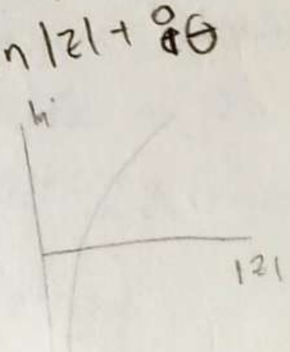
Cuando es + la pot es analítico

$\ln z = \cancel{\ln}\,[\,|z$

Sea $z=|z|[\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta]$
$=|z|e^{i\theta}$

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\theta})$$
$$=\ln|z|+\ln e^{i\theta}$$
$$=\ln|z|+i\theta$$

$|z|<1$



26/10/16

Series Infinitas

- Sea $a_i \in \mathbb{C}\ \forall\ i = 0, 1, 2, \ldots$
Una serie infinita tiene la forma $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$
donde una suma parcial para los primeros $n+1$ terminos está dada por $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

Si $A \in \mathbb{C}$ se dice que la serie infinita CONVERGE a A si las sumas parciales convergen a A cuando $n \to \infty$

i.e. $\lim_{n\to\infty} S_n = A$

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n+1} a_i = A$$

$$-\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = A$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \right) = 0$$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$

Si la serie infinita converge entonces el a_{n+1} tiende a cero cuando $n \to \infty$

Ejemplo:

Sea $a_i = 1 \in \mathbb{C}$; la serie infinita $1 + 1 + 1 + \ldots$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1)$$

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} 1 = (n+2)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (n+1) \to \infty$ Diverge $\therefore$ la serie infinita diverge

$$S_{n+1} - S_n = 1$$

ejemplo $\lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

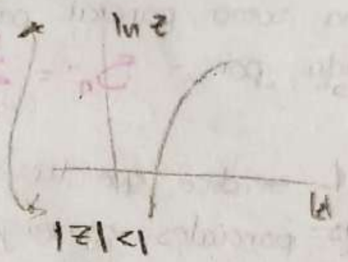
21

Una serie importante (serie geometrica)

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}} \quad \text{si } |z|<1$$

El enésimo termino es: $Z^n = (x+iy)^n$

$$\lim_{n\to\infty} Z^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln Z} = 0$$



Sea $z = |z|[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]$

$= |z| e^{i\theta}$

$\ln z = \ln |z| e^{i\theta}$

$= \ln|z| + \ln e^{i\theta}$

$= \ln|z| + i\theta$

además Sea $S_n = \sum_{i=0}^{n} z^i = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$

y también $S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} z^i = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + z^{n+1}$

$$S_{n+1} - S_n = z^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A\ ?$$

$$S_n = S_{n+1} - z^{n+1}$$

$$(1-z)S_n = (1+z+z^2+z^3+\dots+z^n)(1-z)$$
$$= (1+z+z^2+z^3+\dots+z^n)$$
$$- (z+z^2+z^3+\dots+z^n+z^{n+1})$$
$$= 1 - z^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z}.$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{si } |z|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1$$

4/11/16

Series

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = A \quad a_i \in \mathbb{C}$$ Converge a A si las sumas parciales convergen

$a_j = Re(a_j) + i\, Im(a_j)$

$a_j = x_j + i y_j$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_j + i y_j) = Re(A) + i\, Im(A)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_i + i \sum_{j=1}^{\infty} y_j = Re(A) + i\, Im(A)$$

es eq. $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = Re(A)$ & $\sum_{j=1}^{\infty} y_j = Im(A)$

Sea $z_n \in \mathbb{C}$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^* = S^*$

$z_n = x_n + i y_n$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i y_n) = Re(S) + i\, Im(S)$

igualamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Re(S) + Im(S)$$

$$-i \sum_{n=1}^{\infty} y_n = -i\, Im(S)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - i y_n) = Re(S) - i\, Im(S)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^* = Re(S^*) + i\, Im(S^*)$$

4/11/16

Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{r^2+1-2r\cos\theta}$

$\forall\ 0 \le r \le 1$

Sugerencia: Suponga a $z = re^{i\theta}$ (f. polar)

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

$z = re^{i\theta}$

$z^n = r^n e^{ni\theta}$ Serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{ni\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta + i \sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (re^{i\theta})^n = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (re)^{i\theta n} = \frac{1}{1-re^{i\theta}} \cdot \frac{1-re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} - 1 = \frac{1-re^{-i\theta}}{1-re^{i\theta}-re^{i\theta}+r^2} - 1$$

$$= \frac{1-re^{i\theta}}{1+2\cos\theta+r^2} - 1$$

$$= \frac{1-r\cos\theta + i r \operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} - 1$$

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{ni\theta}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \operatorname{Re}\left[\frac{r\cos\theta - r^2 + i r \operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

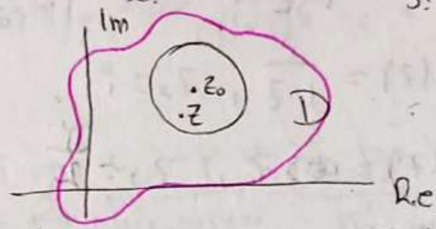
4/11/16.

Serie de Taylor

Sea $f=f(z)$ una función compleja analítica en una región $D \in \mathbb{C}$, si $z_0 \in D$, entonces

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!} + f'''(z_0)\frac{(z-z_0)^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)\frac{(z-z_0)^n}{n!}$$



Sea $f(z) = e^z$; encuentre la expansión en serie de Taylor alrededor de z_0. (e^z es analítica, entera).

$$f(z) = e^z$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)\frac{(z-z_0)^n}{n!} =$$

$$f'(z_0) = e^{z_0} = f''(z_0) = f'''(z_0)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)\frac{(z-z_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{z_0}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$$

$$= e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!} \qquad z-z_0 \in \mathbb{C}$$

$$= e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$$

Suponga $z_0 = 0$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad z = i\theta$$

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}!$$

$$[\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta]$$

9/11/16

Desarrolle las funciones dadas en una serie de Taylor alrededor de z_0. Indique el maximo disco donde sea válida esta representación.

a) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = -1$

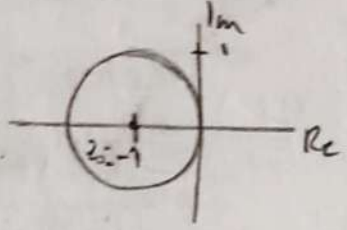
b) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = i$

c) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{1-z-1+1} = \frac{1}{-z-1+2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z+1}{2}\right)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)$ $\quad f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n = \sum_{n=0} [z-(-1)]^n$

Por separado:



$$f^{0}(-1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(-1) = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-z}\right]\Big|_{-1} = \frac{1}{(1-z)^2}\Big|_{-1} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2}$$

$$f''(-1) = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1-z)^2}\right] = 2\cdot\frac{1}{(1-z)^3}\Big|_{-1} = 2\cdot\frac{1}{2^3}$$

$$f'''(-1) = \frac{d}{dz}\left[2\frac{1}{(1-z)^3}\right] = 3\cdot 2\frac{1}{(1-z)^4}\Big|_{-1} = 3\cdot 2\,\frac{1}{2^4}$$

$$f^{iv}(-1) = \frac{d}{dz}\left[6\,\frac{1}{(1-z)^4}\right] = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,\frac{1}{(1-z)^5} = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,\frac{1}{2^5}$$

$\vdots$

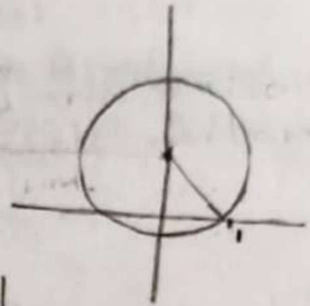
$$F^n(-1) = n!\,\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(-1)\frac{(z+1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{n!}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{(z+1)^n}{\cancel{n!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-z-1+1} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum_{n=0} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

b) $f(z)=\frac{1}{1-z}$, $z_0 = i$



$$f^{0}(i)=\frac{1}{1-i}$$

$$f'(i)=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{(1-z)^2}\Big|_i=\frac{1}{(1-i)^2}$$

$$f''(i)=\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1-z)^2}\right]=2\frac{1}{(1-z)^3}\Big|_i=2\frac{1}{(1-z)^3}$$

$$f'''(i)=\frac{d}{dz}\left[2\frac{1}{(1-z)^3}\right]=3\cdot 2\frac{1}{(1-z)^4}\Big|_i=3\cdot 2\frac{1}{(1-i)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(i)=n!\,\frac{1}{(1-i)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}\frac{(z-i)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\cancel{n!}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\frac{(z-i)^n}{\cancel{n!}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^n}(z-i)^n$$

$$=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-i)^n \quad \text{Donde } a_n=\frac{1}{(1-i)^n}$$

c) $f(z)=\cos z$; $z_0=\frac{\pi}{2}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n}(z_0)\frac{(z-z_0)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!}$$

$f^{0}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$ $\qquad f^{(2n)}(z)=(-1)^n\cos z$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ $\qquad f^{(2n+1)}(z)=(-1)^n\,\mathrm{sen}\,z$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ $\qquad f^{(2n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $\qquad f^{(2n+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$

$f^{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$$\cos z=\cancel{\sum_{n=0}^{\infty}f^{(2n)}(z_0)\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{2n!}}^{\,0}+\sum_{n=0}^{\infty}f^{(2n+1)}(z_0)\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ y Converge en todo el plano complejo.

Sea $f(z) = \frac{1}{1+z}$ $\forall z \mid |z|<1$

Encuentre el desarrollo de Mclauren $z_0=0$

$$f(z)=\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

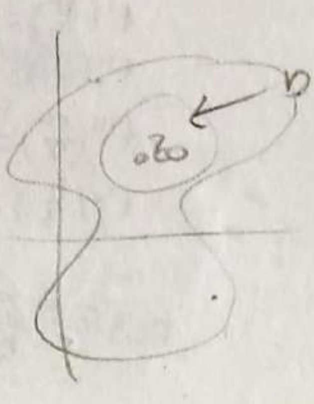
Sea $f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ Encuentr el desarrollo de McLauren

* Dado que $f(z)$ no es analítica en $z=0$ la serie de Taylor no existe en $z=0$

Sea $f(z)=\frac{1}{z_0}$ y $|z|<1$; Encuentre el desarrollo ~~de~~ en Serie de McLauren (Serie de Taylor con $z_0=0$)

$$f(z)=\frac{1}{1-z} \quad ; |z|<1$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)\frac{(z-z_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f(0)^n\frac{(z)^n}{n!}$$



$f^0(0)=1$

$f'(0)=\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-z}\right]\Big|_0 = 1$

$\vdots$

$f^n(n)=n!$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n!\,\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Serie de Laurent

11/11/16

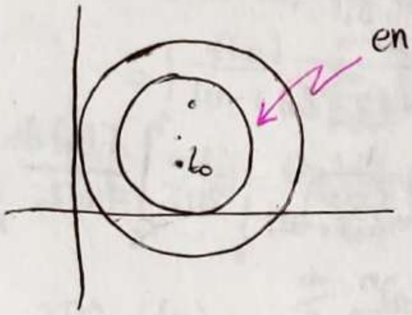
Sea $f = f(z)$ una función analítica en una región D definida por $r < |z - z_0| < R$, $f(z)$ se desarrolla en serie de potencias

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

donde: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{n+1}}$ donde $r < \rho < R$

Este desarrollo se conoce como serie de Laurent.

en D, f es analítica



Sea $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$ Encuentre el desarrollo en serie de potencias (T. o L. no ya es analítica en z_0) alrededor de $z_0 = 0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad f(z) = \frac{\cos z}{z}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{\cos z}{z^2}}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cos z}{z^2 (z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cos z}{z^{n+3}}\,dz$$

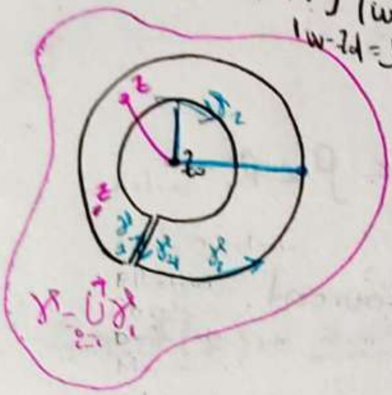
$$= \frac{1}{2\pi i} \int \cos z \; z^{-(n+3)}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{n!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \left. \frac{d^{(n+2)} (\cos z)}{dz^{(n+2)}} \right|_{z_0} = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{n+2} \cos z}{dz^{(n+2)}} \right|_{z_0}$$

15-11-16

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{No es analítica en } z_0$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)} z_0}{n!}$ $\qquad r<|z-z_0|<R$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma_3} \frac{f(w)dw}{w-z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z+z_0-z_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} f(w)dw \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n a_n$$

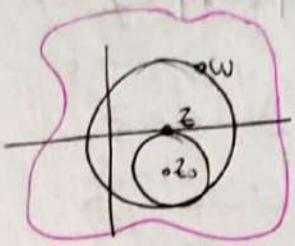
Donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \quad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1 \text{ Converge.}$$

21/11/21

Demostración de la serie de Taylor.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)}$$



$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)\,dw}{(w-z)}$$

z_0 debe estar dentro de w.

$$w - z = w - z + z_0 - z_0$$
$$w - z = (w - z_0) - (z - z_0)$$

$$2\pi i f(z) = \int \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \int_{\gamma} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)\left[1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)\right]} \rightarrow \text{Geometrica converge a..}$$

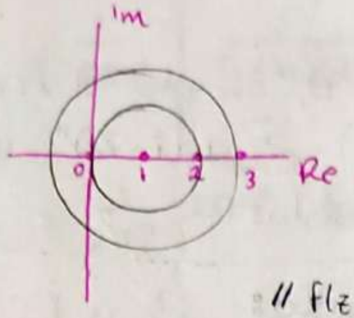
$$= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw \; ; \quad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^n(z_0)}{n!} \quad \text{q.e.d.}$$

25/11/16



$$f(z) = \frac{1}{z^2+z} \qquad 1 < |z-1| < 2$$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$// \ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

$$z_0 = 1 \qquad = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{(z-1)^{-n}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{1}{z^2+z}}{(z-1)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{1}{z+1}}{z(z-1)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{1}{z+1}}{z}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{1}{z+1}}{(z-1)}\,dz$$

$$= -1 + \frac{1}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{-1-n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$= -(1-z)^{-1} - (1-z)^{-2} - (1-z)^{-3} - \dots$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (1-z)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n (z-1)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-1)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad \text{Si } n=-1 \Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^0}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\rho} f(z)\,dz \qquad 1 < \rho < 2 \qquad \int_{|z-1|=\rho} f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

$$\int_{|z-1|=\rho} \frac{dz}{z^2+z} = 2\pi i\, a_{-1}$$

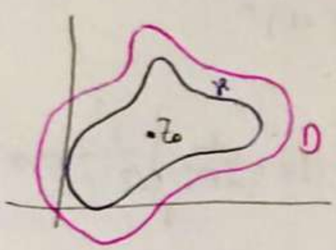
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{1}{z^2+z}}{(z-1)^0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{z+1}\,dz$$

$$= 1 - 0 = \underline{1}$$

Definición:

Sea $f(z)$ una función analítica en una región D, excepto tal vez en z_0, si γ es un contorno D encerrando z_0, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y a_{-1} se conoce como el residuo de f en z_0 se denota:

$$\boxed{a_{-1} = Res_{z_0} f(z)}$$



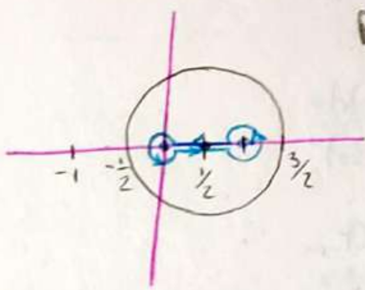
Teorema del residuo:

Sea $f(z)$ una función analítica en una región D, excepto en z_0, si γ es un contorno en D encerrando z_0 entonces $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$

Donde $a_{-1} = Res_{z_0} f(z)$.

29-11-16

Sea $f(z)=\frac{e^z}{z^3-z}$. Observe las singularidades para evaluar la integral sobre γ, donde γ es un circulo centrado en $\frac{1}{2}$ y radio 1.



$$f(z)=\frac{e^z}{z^3-z} = \frac{e^z}{z(z^2-1)} = \frac{e^z}{z(z+1)(z-1)}$$

$\gamma: |z-\frac{1}{2}| = 1$ Sing. en $-1, 0, 1$ → queda fuera.

//Expansión en serie de Laurent alrededor de 0 y luego de 1 (Por separado)

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z+1)(z-1)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{(z+1)(z-1)}}{z-\underbrace{0}_{z_0}}dz \qquad z_0 = 0$$

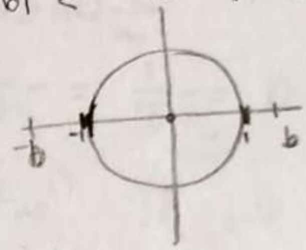
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)(-1) = \underline{-1}$$

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z+1)(z-1)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z(z+1)}}{z-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,2\pi i\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{e}{2}-1\right) = \underline{\pi i(e-2)}$$

Encuentre la integral del circulo unitario $1<|b|<$ a $\gamma = |z|$



$$f(z) = \frac{z+a}{z^n(z+b)}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{z+a}{z+b}}{z^n}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\frac{2\pi i}{(n-1)!}\left.\frac{d^{n-1}\frac{z+a}{z+b}}{dz^{n-1}}\right|_{z_0=0}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\frac{(b-a)(-1)^n(n-1)!}{b^n} = \frac{(b-a)(-1)^n(n-1)!}{b^n}$$

$$\frac{dg(z)}{dz} = \frac{z+b-(z+a)}{(z+b)^2} = \frac{b-a}{(z+b)^2} = (b-a)(z+b)^{-2} \quad \left| \frac{d^{m-1}g(z)}{dz^{m-1}}\right.$$

$$= \frac{(b-a)(-1)^m(m-1)!}{(z+b)^m}$$

$$\frac{d^2g(z)}{dz^2} = (b-a)(-2)(z+b)^{-3}$$

$$\frac{d^3g(z)}{dz^3} = (b-a)(-2)(-3)(z+b)^{-4}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i\,\frac{(b-a)(-1)^n(n-1)!}{b^n}$$

Sea $f(z) = z^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{z})$. Utilice la serie de Taylor de sen w alrededor de 0 para encontrar el residuo de f alrededor del 0.

$$\operatorname{sen} w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \ldots$$

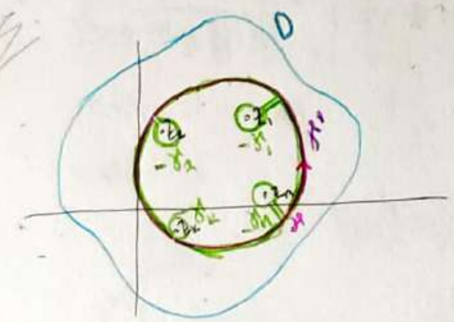
$$f(z) = z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$= z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{\frac{1}{z^3}}{3!} + \frac{\frac{1}{z^5}}{5!} - \frac{\frac{1}{z^7}}{7!} + \ldots\right)$$
$$= z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \ldots$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n = \ldots + \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

$$a_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

$$a_{-3} = \frac{1}{5!} \quad a_{-4} = 0 \quad a_{-5} = \frac{1}{7} \quad a_{-6} = 0$$

$$a_{-2m} = 0 \quad \forall\ m \text{ positiva}$$

30/11/16



Sea $f(z)$ una función analítica en una región D, excepto en $z_k \ \forall\ k = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k)$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_k)^n$$

$$\gamma = [\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_k \cup \ldots \cup \gamma \cup \gamma']$$

$$\int f(z)dz + \int_{-\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_k} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)dz = 0$$

$$\int f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i\, a_{-1,k}$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} a_{-1,k} = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res} f(z)$$

$$f(z)=\sum_{m=-n}^{\infty} a_m (z-z_k)^m$$

$$f(z)=\left[\overset{m=-n}{\cdots}+a_{-n}(z-z_k)^{-n}+a_{-n+1}(z-z_k)^{-n+1}+a_{-n+2}(z-z_k)^{-n+2}+\dots\right]\frac{(z-z_k)^n}{(z-z_k)^n}$$

$$f(z)=\frac{a_{-n}+a_{-n+1}(z-z_k)+a_{-n+2}(z-z_k)^2+\dots}{(z-z_k)^n}=\frac{g_k(z)}{(z-z_k)^n} \qquad g_k(z)=f(z)(z-z_k)^n$$

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=\int\frac{g_k(z)\,dz}{(z-z_k)^{n}}$$ → Orden del polo (n negativa más grande)

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=\int\frac{g_k(z)\,dz}{(z-z_k)}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\left.\frac{d^{(n-1)}g_k(z)}{dz^{(n-1)}}\right|_{z=z_k}$$

En general: $\boxed{g_k(z)=f(z)(z-z_k)^n}$

CASO I ; $n=0$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0$$

CASO II ; $\forall\, n>0$

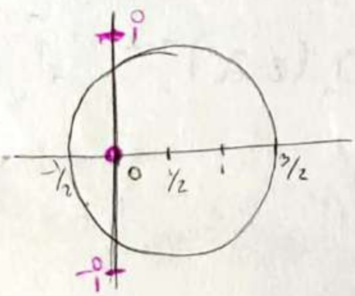
$$\int_\gamma f(z)\,dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\,g^{(n-1)}(z_k)$$

CASO III $n\to\infty$

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi i}{(n-1)!}\,g^{(n-1)}(z_k)$$

Ejemplo:

Evaluar $\int_\gamma \operatorname{sen}\frac{z}{z^3+z}$ $\quad \gamma: \left|z-\frac{1}{2}\right|=1$



6/12/16

$f: f(z)$

n-singularidades

$K = 1, 2, \dots, n$

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{K=1}^{n} a_{-1K}$$

a_{-1K} residuo en la K-ésima singularidad

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_k)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^n \quad \text{(CASO I)}$$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_k)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^{n+1} \quad \text{(CASO II)}$$

$$f(z) = (z - z_k) f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^{n+1}$$

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \to z_k} \left[a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^{n+1} \right] = a_{-1}$$

Para el polo simple

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z)$$

Polo de orden m (CASO III)

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_k)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_k)^{m-1}} + \frac{a_{-m+2}}{(z - z_k)^{m-2}} + \dots + \frac{a_{-m+m-1}}{(z - z_k)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^n$$

$$(z - z_k)^m f(z) = a_{-m} + \frac{a_{-m+1}(z - z_k)^m}{(z - z_k)^{m-1}} + \frac{a_{-m+2}(z - z_k)^m}{(z - z_k)^{m-2}} + \dots + \frac{a_{-1}(z - z_k)^m}{z - z_k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^{n+m}$$

$$= a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_k) + a_{-m+2}(z - z_k)^2 + \dots + a_{-1}(z - z_k)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^{n+m}$$

$\forall\ m = 1, 2, \dots$

$$\frac{d}{dz}\left[(z - z_k)^m f(z)\right] = a_{-m+1} + 2a_{-m+2}(z - z_k) + \dots + (m-1)\, a_{-1} (z - z_k)^{m-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m) (z - z_k)^{n+m-1}$$

6/12/16

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_k)^m f(z)\right] = (m-1)!\,a_{-1} + \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_m (z-z_k)^{n+m}$$

$$\boxed{\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_k)^m f(z)\right] = a_{-1}}$$

1. Evalúe la $\oint_{\gamma} \frac{(z^2-2z)\,dz}{(z+1)^2(z^2+4)}$ Donde γ es un contorno que encierra todas las singularidades de la función.

$z_1 = -1$; $z_2 = 2i$; $z_3 = -2i$

$z_1 = -1$ $\quad \cancel{\frac{1}{(m-1)!}}^{\,1} \lim_{z\to z_k} \frac{d^{1-1}}{dz}\left[(z-z_k)^m f(z)\right] = a_{-1}$

$$\Rightarrow \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z+1)^2} \frac{(z^2-2z)}{\cancel{(z+1)^2}(z^2+4)}\right] = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-2z}{z^2+4}\right]$$

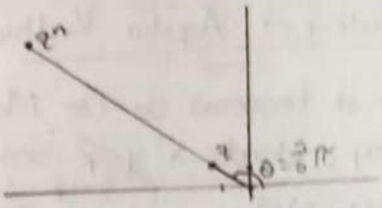
$$= \lim_{z\to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}$$

$$= \frac{(5)(-4)-(3)(-2)}{5^2} = \frac{-20+6}{25} = -\frac{14}{25}$$

$z_2 = 2i$

15. $(-\sqrt{3}+i)^{13}$; $z=-\sqrt{3}+i$; $n=13$; $\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}=2$; $\theta=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)=-30=\frac{5}{6}\pi$

$z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\operatorname{sen} n\theta)$



$(-\sqrt{3}+i)^{13}=2^{13}(\cos 13\tfrac{5}{6}\pi+i\operatorname{sen}13\tfrac{5}{6}\pi)$

$=2^{13}(\cos\tfrac{5}{6}\pi+i\operatorname{sen}\tfrac{5}{6}\pi)$

$=2^{13}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$

$=2^{12}(-\sqrt{3}+i)$ ✗

Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

16. $z^2=i$; $z=i$; $\rho=1$; $\theta=\frac{\pi}{2}$; $z^{1/n}=i^{1/2}$

$z^{1/n}=\rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

$(z^{1/2})_0=1^{1/2}\left(\cos\frac{\pi/2}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi/2}{2}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(z^{1/2})_1=\cos\frac{\pi/2+2\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi/2+2\pi}{2}$

$=\cos\frac{5}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$ ✗

17. $z^2=1+i$; $z=(1+i)^{1/2}$; $\rho=\sqrt{2}$; $\theta=\frac{\pi}{4}$

$z_0=(\sqrt{2})^{1/2}\left(\cos\frac{\pi/4}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi/4}{2}\right)$

$=2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$ ✗

$z_1=2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi/4+2\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi/4+2\pi}{2}\right)$

$=2^{1/4}\left(\cos\frac{9}{8}\pi+i\operatorname{sen}\frac{9}{8}\pi\right)$ ✗

18. $z^2=2-i$; $z=(2-i)^{1/2}$; $\rho=\sqrt{(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$; $\theta=$

$z_0=(\sqrt{5})^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$

$z_1=5^{1/4}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{2}\right)$

Rodriguez Aguilar Kathia

Use el teorema de De Moivre para expresar cada número en la forma $x+iy$, donde x y Y son reales.

10. $(1+i)^{29}$; $z=1+i$; $\rho=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$; $\theta=tg^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=45=\frac{\pi}{4}$

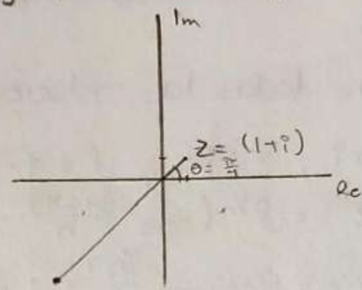
$z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\,\text{sen}\,n\theta)$

$(1+i)^{29}=(\sqrt{2})^{29}\left(\cos 29\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,29\frac{\pi}{4}\right)$

$=16384\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$

$=16384\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\underline{-16384(1+i)}$



11. $(-1+i)^{17}$; $z=-1+i$; $\rho=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$; $\theta=tg^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)=-45=\frac{3}{4}\pi$

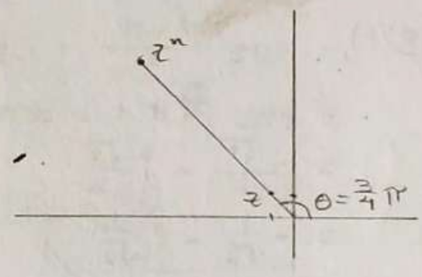
$z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\,\text{sen}\,n\theta)$

$(-1+i)^{17}=(\sqrt{2})^{17}\left(\cos 17\frac{3}{4}\pi+i\,\text{sen}\,17\frac{3}{4}\pi\right)$

$=256\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$

$=256\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\underline{256(-1+i)}$



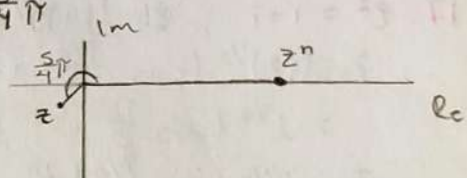
12. $(-1-i)^{36}$; $z=(-1-i)$; $\rho=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$; $\theta=\frac{5}{4}\pi$

$z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\,\text{sen}\,n\theta)$

$(-1-i)^{36}=\sqrt{2}^{36}\left(\cos 36\frac{5}{4}\pi+i\,\text{sen}\,36\frac{5}{4}\pi\right)$

$=2^{18}(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)$.

$=2^{18}(-1+i0)=\underline{2^{18}}$



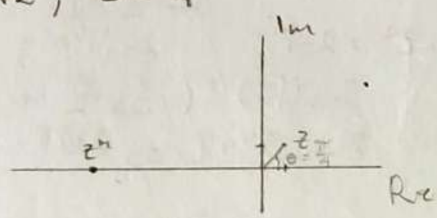
13. $(2+2i)^{12}$; $z=2+2i$; $n=12$; $\rho=\sqrt{(2)^2+(2)^2}=2\sqrt{2}$; $\theta=\frac{\pi}{4}$

$z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\,\text{sen}\,n\theta)$

$(2+2i)^{12}=(2\sqrt{2})^{12}\left(\cos 12\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,12\frac{\pi}{4}\right)$

$=2^{18}(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)$

$=2^{18}(-1+0)=\underline{-2^{18}}$



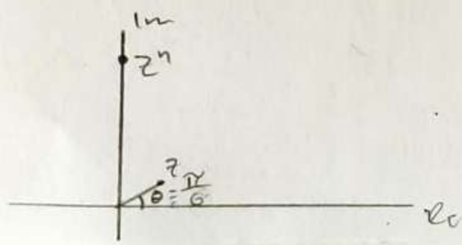
14. $(\sqrt{3}+i)^{15}$; $z=\sqrt{3}+i$; $n=15$; $\rho=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=2$; $\theta=tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30=\frac{\pi}{6}$

$z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\,\text{sen}\,n\theta)$

$(\sqrt{3}+i)^{15}=2^{15}\left(\cos 15\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,15\frac{\pi}{6}\right)$

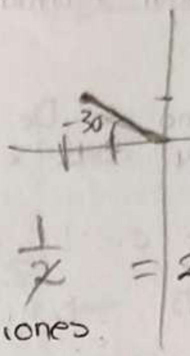
$=2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

$=2^{15}(0+i)=\underline{i2^{15}}$



15. $(-\sqrt{3}+i)^{13}$; $z=-\sqrt{3}+i$; $n=13$; $\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$; $\theta=tg^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)=-30$

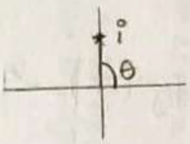
$$\Rightarrow z^{13}=2^{13}[\cos 13(-30)+i\ \mathrm{sen}\ 13(-30)]$$
$$=2^{13}[\cos(-390)+i\ \mathrm{sen}\ (-390)]$$
$$=2^{13}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=2^{12}(\sqrt{3}-i)$$



$$2^{12}\cdot\cancel{2}\ \frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}}+i\frac{1}{\cancel{2}}=2^{12}(-\sqrt{3}+i)$$

Encuentre todas las soluciones de las sig. ecuaciones.

16. $z^2=i$; $z=i^{\frac{1}{2}}$; $\rho=1$; $\theta=\frac{\pi}{2}$



$$\Rightarrow z_0=1^{1/2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+i\ \mathrm{sen}\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$
$$z_0=1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$
$$z_1=1^{1/2}\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi}{2}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi/2+2\pi}{4}\right)$$
$$z_1=1\left(\cos\frac{5/2\,\pi}{2}+i\ \mathrm{sen}\frac{5/2\,\pi}{2}\right)$$
$$z_1=\cos\frac{5}{4}\pi+i\ \mathrm{sen}\frac{5}{4}\pi$$
$$z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

17. $z^2=1+i$

$z=(1+i)^{1/2}$; $\rho=\sqrt{2}$; $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$z_0=(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi/4}{2}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi/4}{2}\right)$$
$$z_0=2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right)$$
$$z_1=2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi/4+2\pi}{2}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi/4+2\pi}{2}\right)$$
$$z_1=2^{1/4}\left(\cos\frac{9}{8}\pi+i\ \mathrm{sen}\frac{9}{8}\pi\right)$$

18. $z^2=2-i$

$z=(2-i)^{1/2}$; $\rho=\sqrt{5}$; $\theta=tg^{-1}$

$$z_0=5^{1/4}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\ \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$
$$z_1=5^{1/4}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+i\ \mathrm{sen}\frac{\theta+2\pi}{2}\right)$$

$z=(-1)^{1/4}$ $\quad z\ \rho=1 \quad \theta=\pi$

$$z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$z_1=\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi+2\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_2=\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_3=\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\ \mathrm{sen}\frac{\pi+6\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

30 / 292

Rodriguez Aguilar Kathia

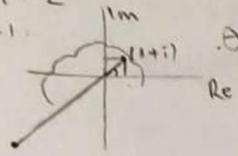
Use el teorema de De Moivre para expresar cada número en la forma $x + iy$, donde x y y son reales.

10. $(1+i)^{29}$

$z = 1+i \quad z = 1+i$

$\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = tg^{-1}$ $\quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) =$



$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta)$

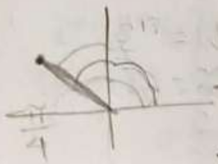
$\Rightarrow (1+i)^{29} = (\sqrt{2})^{29}\left(\cos 29\frac{\pi}{4} + i \text{ sen } 29\frac{\pi}{4}\right)$

$= 16384\sqrt{2}\left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \text{ sen } \frac{5}{4}\pi\right)$

$= 16384\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$= -16384 - 16384i$

11. $(-1+i)^{17}$ $\quad z = (-1+i) \quad n = 17 \quad \rho = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2} \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -45$



$z^{17} = (\sqrt{2})^{17}\left(\cos 17\frac{3}{4}\pi + i \text{ sen } 17\frac{3}{4}\pi\right)$

$= 256\sqrt{2}\left(\frac{5}{4}\cos\frac{3}{4}\pi + i \text{ sen}\frac{3}{4}\pi\right) = 256\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \text{ sen } \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 256\sqrt{2}(-1 + i(0))$ $\quad = 256\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + i\frac{256\sqrt{2}}{2}$

$= -256\sqrt{2}$ $\quad = 256(-1+i)$

30
295 292

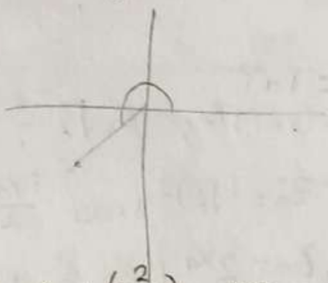
12. $(-1-i)^{36}$ $\quad z = (-1-i) \quad n = 36 \quad \rho = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = 45$

$z^{36} = (\sqrt{2})^{36}\left[\cos\left(36\frac{\pi}{4}\right) + i \text{ sen}\left(36\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 262144(\cos \pi + i \text{ sen } \pi)$

$= 262144(1 + i0)$

$= 262144 = 2^{18}$



13. $(2+2i)^{12}$ $\quad z = 2+2i \quad n = 12 \quad \rho = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = 2\sqrt{2} \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 45 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z^{12} = (2\sqrt{2})^{12}\left(\cos 12\frac{\pi}{4} + i \text{ sen } 12\frac{\pi}{4}\right)$

$z^{12} = 262144(\cos \pi + i \text{ sen } \pi)$

$z^{12} = 2^{18}(-1 + i0)$

$z^{12} = -2^{18}$ $\Rightarrow$ libro $= 2^{18}$

14. $(\sqrt{3}+i)^{15}$; $z = \sqrt{3}+i$; $n = 15$; $\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$; $\theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30 = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow z^{15} = 2^{15}\left(\cos 15\frac{\pi}{6} + i \text{ sen } 15\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2^{15}\left(\cos\frac{3}{6}\pi + i \text{ sen } \frac{3}{6}\pi\right)$

$= 2^{15}(0 + i) = i2^{15}$

6.2.2 Show whether or not the function $f(z) = \mathbb{R}(z) = x$ is analytic.

$z = x + iy \qquad f(z) = u(x+iy) + iv(x,y)$

$u = u(x,y) = x$

$v = v(x,y) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (0)}{\partial y} = 0$

$\therefore f(z)$ No es analítica

6.2.3 Having shown that the real part $u(x,y)$ and the imaginary part $v(x,y)$ of an analytic function $w(z)$ each satisfy Laplace's equation, show that $u(x,y)$ and $v(x,y)$ cannot both have either a maximum or a minimum in the interior of any region in which $w(z)$ is analytic.

Sabemos que w es analítica $\Rightarrow$

$\nabla^2 u = 0 \quad \& \quad \nabla^2 v = 0$

i.e. u, v tiene puntos críticos

6.2.1 The functions $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are the real and imaginary parts, respectively, of an analytic function $w(z)$

a) Assuming that the required derivatives exist, show that

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

Solutions of Laplace's equation such as $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are called harmonic functions.

$z = x + iy \qquad w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Sabemos que $w(z)$ es analítica, entonces las condiciones de C-R se satisfacen, es decir: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0 \qquad \nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \cancel{\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}}$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Sabiendo que las Condiciones de C-R se satisfacen $\Rightarrow$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= 0$$

b) Show that $\frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v \partial v}{\partial x \partial y} = 0$

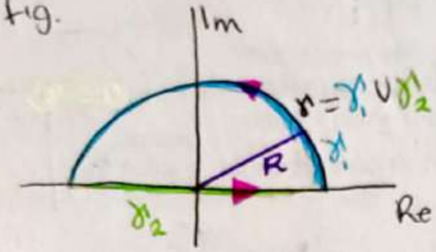
Como se satisface C-R $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

7-12-16

Evalue $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx$ Considerando γ como el mostrado en la fig.



$z = x+iy$

$z_1 = -1+2i$ (chicarronera)

$z_2 = -1-2i$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx \text{ se parece a } \int_\gamma \frac{z e^{i\pi z}\,dz}{z^2+2z+5} = I$$

$$z^2+2z+5 = [z-(-1+2i)][z-(-1-2i)]$$

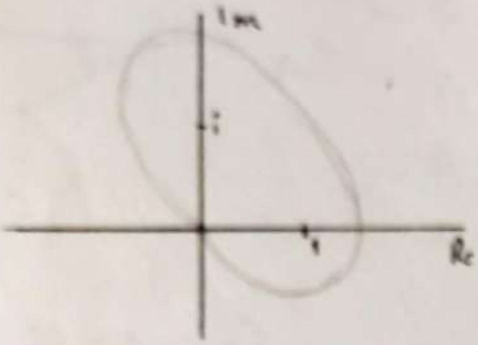
$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{z e^{i\pi z}\,dz}{[z-(-1+2i)][z-(-1-2i)]} = 2\pi i\, a_{-1}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to(-1+2i)} \cancel{[z-(-1-2i)]} \frac{z e^{i\pi z}}{[z-(-1+2i)]\cancel{[z-(-1-2i)]}}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to(-1+2i)} \frac{z e^{i\pi z}}{z-(-1-2i)} = \frac{(-1+2i)e^{i\pi(-1-2i)}}{\cancel{-1}+2i\cancel{+1}+2i} = \frac{(-1+2i)e^{-2\pi-\pi i}}{4i}$$

$$a_{-1} = \frac{(-1+2i)(e^{-2\pi-\pi i})(4i)}{16}$$

25. Exprese la ecuación de la elipse con focos 1 e i que pasa por el origen ¿Cuál es la fórmula correspondiente en geometría analítica?



$z_0 = 1 \quad z_1 = i \quad z = 0$

$|z - z_0| + |z - z_1| = \lambda$

$|0 - i| + |0 - 1| = \lambda$

$\sqrt{1^2} + \sqrt{(-1)^2} = \lambda$

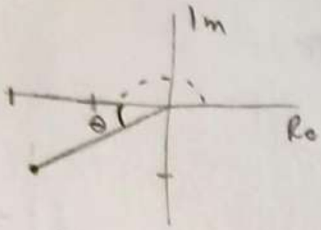
$1 + 1 = \lambda$

$2 = \lambda$

$\underline{|z - i| + |z - 1| = 2}$

19. $-z^2 = \sqrt{3} + i$

$z = (-\sqrt{3} - i)^{1/2}$; $\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$; $\theta = tg^{-1}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = 30 = \frac{\pi}{6}$



$\Rightarrow z_0 = 2^{1/2}\left(\cos \frac{\frac{7\pi}{6}}{2} + i \text{ sen } \frac{\frac{7\pi}{6}}{2}\right)$

$z_0 = 2^{1/2}\left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \text{ sen } \frac{7}{12}\pi\right)$

$z_1 = 2^{1/2}\left(\cos \frac{7/6\pi + 2\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{7/6\pi + 2\pi}{2}\right)$

$z_1 = 2^{1/2}\left(\cos \frac{19}{12}\pi + i \text{ sen } \frac{19}{12}\pi\right)$

20. $z^3 = 2 + i$

$z = (2+i)^{1/3}$; $\rho = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{3}$; $\theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$z_0 = \sqrt[6]{3}\left(\cos \frac{\theta}{3} + i \text{ sen } \frac{\theta}{3}\right)$

$z_1 = \sqrt[6]{3}\left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\theta + 2\pi}{3}\right)$

21. $z^3 = 1 + \sqrt{3}i$

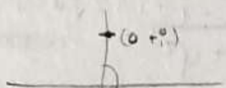
$z = (1 + \sqrt{3}i)^{1/3}$; $\rho = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\theta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60 = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow z_0 = 2^{1/3}\left(\cos \frac{\frac{\pi}{3}}{3} + i \text{ sen } \frac{\pi/3}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \text{ sen } \frac{\pi}{9}\right)$

$z_1 = 2^{1/3}\left(\cos \frac{\pi/3 + 2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\pi/3 + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{7}{9}\pi + i \text{ sen } \frac{7}{9}\pi\right)$

$z_2 = 2^{1/3}\left(\cos \frac{\pi/3 + 4\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\pi/3 + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{13}{9}\pi + i \text{ sen } \frac{13}{9}\pi\right)$

22. $z^4 = i$; $z = (i)^{1/4}$; $\rho = \sqrt{1^2} = 1$;



$\theta = \frac{\pi}{2}$

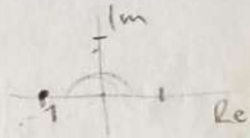
$z_0 = 1^{1/4}\left(\cos \frac{\frac{\pi}{2}}{4} + i \text{ sen } \frac{\pi/2}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{8} + i \text{ sen } \frac{\pi}{8}$

$z_1 = \cos \frac{\pi/2 + 2\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{\pi/2 + 2\pi}{4} = \cos \frac{5}{8}\pi + i \text{ sen } \frac{5}{8}\pi$

$z_2 = \cos \frac{\pi/2 + 4\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{\pi/2 + 4\pi}{4} = \cos \frac{9}{8}\pi + i \text{ sen } \frac{9}{8}\pi$

$z_3 = \cos \frac{\pi/2 + 6\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{\pi/2 + 6\pi}{4} = \cos \frac{13}{8}\pi + i \text{ sen } \frac{13}{8}\pi$

✗ 23. $z^4 = -1 \Rightarrow z = (-1)^{1/4}$; $\rho = 1$, $\theta = \pi$



$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

$z_1 = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right)$ ✗

$= \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \text{ sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$ ✗

2

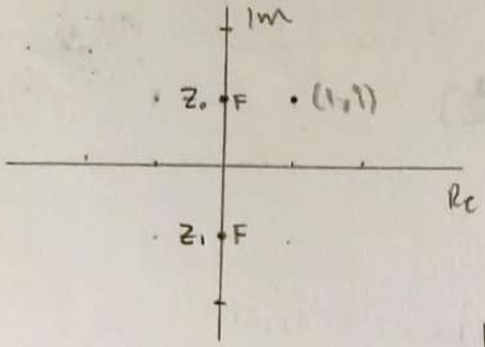
$$z_2 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi + 4\pi}{4} = \cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i) = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi + 6\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 6\pi}{4} = \cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)}$$

24. Encuentre la ec. de la elipse con focos $\pm i$ que pasa por el punto $1+i$. En geometria analítica, ¿cuál es la fórmula correspondiente?



$$|z - z_0| + |z - z_1| = l \quad ; \quad l \in \mathbb{R}$$

$$|(1+i) - i| + |(1+i) - (-i)| = l$$

$$|1 + 0i| + |1 + 2i| = l$$

$$1 + \sqrt{1^2 + 2^2} = l$$

$$1 + \sqrt{5} = l$$

$$\underline{|z - i| + |z + i| = 1 + \sqrt{5}}$$

Pruebe que $|z| \leq |\text{Re}\, z| + |\text{Im}\, z| \leq \sqrt{2}|z|$

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\text{Re}\, z| + |\text{Im}\, z| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = x + y$$

$$\sqrt{2}|z| = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| \leq |\text{Re}\, z| + |\text{Im}\, z| \leq \sqrt{2}|z|$$

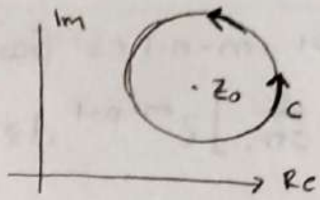
$$\left[\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}\right]^2$$

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2xy \leq 2(x^2 + y^2)$$

Rodriguez Aguilar Kathia.

>> Show that $\oint_c (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n\neq -1, \end{cases}$ where the contour C encircles the point $z=z_0$ in a positive (conterclockwise) sense. The exponent n is an integer. See also eq. (6.27a).

$$\int_c (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{para } n=-1 \\ 0 & \text{para } n\neq -1 \end{cases}$$



CASO I

$$\int_c^{n-1} \frac{dz}{(z-z_0)} \quad f(z_0)=1 \longrightarrow 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

CASO II

$$\int_c^{n} (z-z_0)^n dz \; ; \; n\neq -1$$

$f(z)$ es analitica para todo $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

CASO III F.G. C-R

$f(z) = (z-z_0)^n$ ya no es analitica para toda $n = -2, -3, -4, \ldots$

$$m=-n \; ; \int_c (z-z_0)^n dz = \int_c \frac{dz}{(z-z_0)^m} = 2\pi i f(z_0) = 0$$

>> Show that $\frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-n-1} dz$, m and n integers (with the contour encircling the origin once counterclockwise) is a representation of the Kronecker δ_{mn}

$\delta_{mn} = 1$ si m y n son iguales ; $\delta_{mn}=0$ si m y n son diferentes

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c z^{n-m-1} =$$

CASO I: Si m y n son iguales $\Rightarrow m-n=0$

$$\& \quad \frac{1}{2\pi i}\int z^{-1} dz \qquad z_0=0 \quad f(z)=1$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{\underbrace{z-z_0}_{0}} = \frac{1}{2\pi i}[2\pi i\, \underbrace{f(z)}_{=1}] = 1$$

CASO II. Si $m < n \Rightarrow m - n - 1 = -\bar{n}$

$-n = 1$ $\quad \frac{1}{2\pi i} \int_z z^{-\bar{n}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{(z-z_0)^1} = \frac{1}{2\pi i} [2\pi i f(z_0)]$

$= f(z_0) = 0$

CASO III: Si $m-n-1$ es positivo es analitica y $\int z^{m-n-1} dz = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int z^{m-n-1} dz = 0$

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

OTROS APUNTES

I Variable Compleja
a) Algebra de números complejos
b) Derivación de integración Compleja

II) Análisis de fourier
a) Series y transformadas de fourier
b) Teoremas Integrales (convolución en el tiempo y frecuencia).

* Alguno metodos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\oint_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{r}$ $\ddot{x} + kx = 0$ Ae^{iat}

Numeros complejos: si $z \in \mathbb{C}$ → numero complejo de la forma $z = a + ib$ donde i es la unidad imaginaria que resulta de la ecuación $i^2 + 1 = 0$ ($\rightarrow i^2 = -1$) y donde a y $b \in \mathbb{R}$ ($ó\ i = \pm\sqrt{-1}$)

Campo de los números complejos

Por ejemplo: $z_1 = 2 - 3i$
$z_2 = \pi - \frac{1}{e} i$

Es común denotar a $a \equiv Re(z)$ & $b \equiv Im(z)$ i.e partes real e imaginaria de z.

→ Igualdad de complejos

Si $z_1 = a + bi$ & $z_2 = c + di$ (forma binomial)

$$z_1 = z_2 \Rightarrow Re(z_1) = Re(z_2) \ \& \ Im(z_1) = Im(z_2)$$

→ Suma de complejos

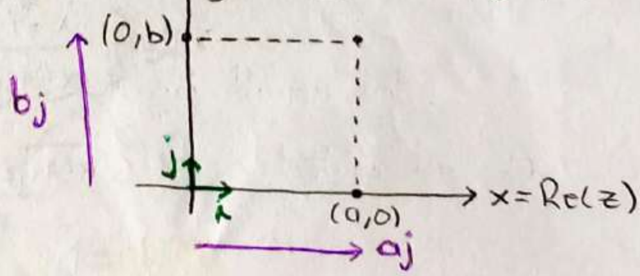
$$z_1 + z_2 = z_3 \quad | \quad z_3 = f + gi$$

donde $f = Re(z_3) = Re(z_1) + Re(z_2)$
& $g = Im(z_3) = Im(z_1) + Im(z_2)$

del ejemplo

$$z_3 = (2 + \pi) - (3 + \tfrac{1}{e})i$$

geometricamente



magnitud del vector z

donde $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ es $|\bar{c}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es:

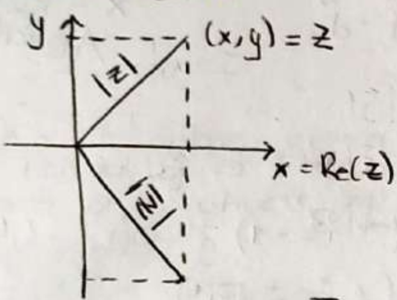
$a\hat{i} + b\hat{j}$ $\quad |z|^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

modulo de z $\quad |z| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2}$

observese que: $-|z| = |z-0|$ es la distancia entre el complejo 0 $(0 \pm 0i)$ y el punto z

$-$ Si $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} \equiv x - iy$ que se define como el complejo conjugado de z resulta que.

geometricamente



en terminos de lo anterior

si $z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di$

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$$
$$= (ac + adi + cbi + bdi^2) \text{ y } i^2 = -1$$
$$\Rightarrow z_1 z_2 = e + fi$$

Además $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ y observese que $z_2 \bar{z}_2 = (c + di)(c - di)$

$$= c^2 - cdi + cdi - i^2 d$$
$$= c^2 + d^2 = |z_2|^2$$

Por ejemplo si $z_1 = -2 + 3i$ & $z_2 = 3 + 4i$

$$|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{3}$$
$$|z_2| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$
$$z_1 + z_2 = 1 + 7i$$
$$(z_1)(z_2) = -6 - 8i + 9i - 12 = -18 + i$$

*Encuentre el lugar geometrico de la parte real de $Re\left\{\frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{2}$

$$Re\left\{\frac{1}{x+iy}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow Re\left\{\frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$Re\left\{\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$Re\left\{\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i\right\} = \frac{1}{2}$$

io

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$2x = x^2 + y^2$$
$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

TAREA: Encuentre el lugar geometrico de la parte img.

$$\text{Im}\left\{\frac{3}{x-iy}\right\} = 5 \Rightarrow \text{Im}\left\{\frac{3}{x-iy} \cdot \frac{x+iy}{x+iy}\right\} = 5$$

$$\text{Im}\left\{\frac{3x+3yi}{x^2+y^2}\right\} = 5$$

$$\text{Im}\left\{\frac{3x}{x^2+y^2} + \frac{3y}{x^2+y^2}\, i\right\} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{3y}{x^2+y^2} = 5$$

$$3y = 5x^2 + 5y^2$$

$$5x^2 + 5y^2 - 3y = 0$$

$$5(x^2+y^2) = 3y$$

$$x^2+y^2 = \frac{3}{5}y$$

$$(x+0)^2 + \left(y-\frac{3}{10}\right)^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

*Imprimir lista 1

Resumiendo

$z = a+bi \quad a = \text{Re}(z) \quad i^2+1=0 \quad z_1 z_2 = z_3 \quad \frac{z_1}{z_2} = z_3$

$b = \text{Im}(z)$

$|z| = |\bar{z}| = \{[\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2\}^{1/2}$

$f(-x) = f(x)$ PAR

$f(-x) = -f(x)$ IMPAR

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau) + i\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\text{sen}(\omega\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$f(\omega) = x(\omega) + i g(\omega)$$

$$\text{Re}\left\{\frac{1}{x+iy}\right\} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Re}\left\{\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right\} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Re}\left\{\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\, i\right\} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x^2+y^2$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+0)^2 = 4$$

$$(x-2)^2 + (y+0)^2 = 2^2$$

Circunferencia con centro en (2,0) y radio 2.

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 \pm \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$(x \pm \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 \pm \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a} = 0$

ej. $x^2 - \frac{3}{2}x = 0$

$(x - \frac{3}{4})^2 = (\frac{3}{4})^2$

$|z-1| = \lambda|z+i|$ Si $z = x+iy$

$|x+iy-1| = \lambda|x+iy+i|$

$\Rightarrow |(x-1)+iy|^2 = \lambda^2|x+i(y+1)|^2$

$(x-1)^2 + y^2 = \lambda^2[x^2+(y+1)^2]$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - \lambda^2x^2 - \lambda^2y^2 - 2\lambda^2 y - \lambda^2 = 0$

$x^2(1-\lambda^2) - 2x + y^2(1-\lambda^2) - 2\lambda^2 y + (1-\lambda^2) = 0$

Si $1-\lambda^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2x}{1-\lambda^2} + y^2 - \frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2}y = -1$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

donde $(x_0, y_0) = \frac{1}{1-\lambda_0}(1, \lambda^2)$

& $r^2 = -1 + \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{\lambda^n}{(1-\lambda^2)^2} = \frac{-(1-\lambda^2)^2 + 1 + \lambda^4}{(1-\lambda^2)^2}$

$= \frac{2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} = \left[\frac{\sqrt{2}\lambda}{1-\lambda^2}\right]^2$

i.e. $r = \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{2}$

pero si $1-\lambda^2 = 0$ i.e $\lambda^2 = 1$ i.e $\lambda = \pm 1$

$\Rightarrow -2x - 2y = 0$

i.e. $y = -x$

Tarea: Encuentre el lugar geométrico que representa las siguientes ecuaciones.

* $|z+2| + |z-2| = 4$ (elipse)

$|z+2|^2 = (4 - |z+2|)^2$

donde $z = x+iy$

$(x+2)^2 + y^2 = 16 - 8|z-2| + |z-2|^2$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 16 - 8\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + (x-2)^2 + y^2$

$\cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} = 16 - 8\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 4x + \cancel{4}$

$$8x - 16 = -8\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = \left(\frac{8x-16}{-8}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = (-x+2)^2$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{4x} + \cancel{4} + y^2 = \cancel{x^2} - \cancel{4x} + \cancel{4}$$

$y^2 = 0$

$y = 0 \Rightarrow$?

$* \; |z| = \lambda |z - i| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Donde $z = x + iy$

$$|x+iy|^2 = \lambda^2 |x + iy - i|^2$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 [x^2 + (y-1)^2]$$

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 + 2y\lambda^2 - \lambda^2 = 0$$

$$* \; x^2(1-\lambda^2) + y^2(1-\lambda^2) + 2y\lambda^2 = \lambda^2$$

si $1 - \lambda^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{2y\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$

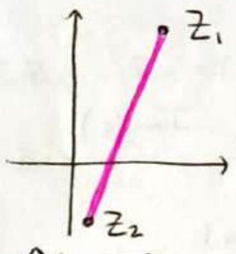
$$(x+0)^2 + \left(y + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda^4}{(1-\lambda^2)^2}$$

Circunferencia con centro en $\left(0, -\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)$ y $r = \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$

pero si $1 - \lambda^2 = 0$ i.e. $1 = \lambda^2$ $\lambda = \pm 1$

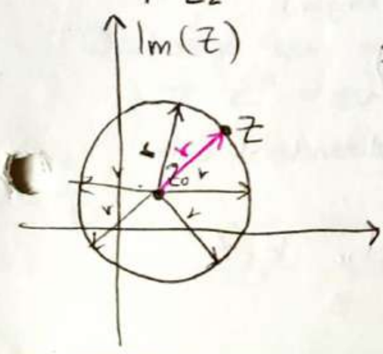
$2y = 1$ i.e. $y = \frac{1}{2}$ //

Recuerde que $|z| = |z - 0|$ representa geometricamente la distancia entre el complejo z al complejo "0", en general.



$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

|Módulo|: Representa la distancia entre dos puntos del plano complejo



$z_0 = (x_0, y_0)$

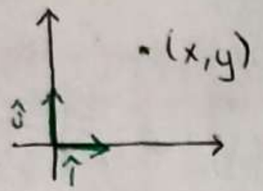
$r = |z - z_0|$

$$|(x - x_0) + i(y + y_0)|^2 = r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = (x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 \; *$$

$|z - i| = 2$

(centro en i y radio 2.



$(x,y) \cdot \vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j}$ $\Rightarrow |z - i| = 2$

$$|x + (y-1)i| = 2$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 2^2$$
$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

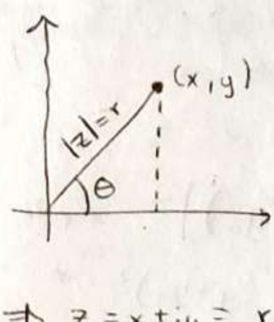
Si $\lambda = 1$ $|z - 0| = |z - i|$

$$|x + iy|^2 = |x + (y-1)i|^2$$
$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + (y-1)^2$$
$$0 = 2y + 1$$

*Un ej. $|z+3| + |z-3| = 10$

$$|z+3|^2 = (10 - |z-3|)^2$$
$$(x+3)^2 + \cancel{y^2} = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + (x-3)^2 + \cancel{y^2}$$
$$\cancel{x^2} + 6x + \cancel{9} = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 6x + \cancel{9}$$
$$20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 100 - 12x$$
$$(x-3)^2 + y^2 = \left(\frac{100 - 12x}{20}\right)^2$$
$$(x-3)^2 + y^2 = \left(5 - \frac{3}{5}x\right)^2$$
$$x^2 - \cancel{6x} + 9 + y^2 = 25 - \cancel{6x} + \frac{9}{25}x^2$$
$$\left(\frac{16}{25}x^2 + y^2 = 16\right)\frac{1}{16}$$
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{Elipse}$$

Si $z = a + ib$; sabemos que $a = Re(z)$ & $b = Im(z)$ $\quad Im(z)$



$(x,y) = z$ en el plano complejo o plano de Argard

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\} \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

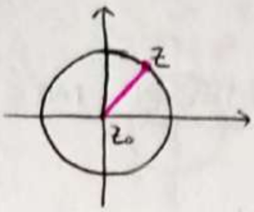
$\Rightarrow z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta$; Aplicando T. Euler

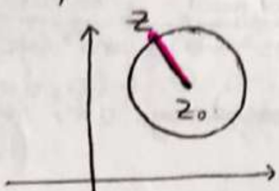
$\Rightarrow z = x + iy = r[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]$ $\quad \boxed{z = re^{i\theta}}$ Forma Polar de z

donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z) \equiv$ argumento de z

También $|z| = |re^{i\theta}| = |re^{i\theta}| = r|\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta| = r[1] = \underline{r}$ //

$\rightarrow |z| = r \quad ; \quad |z - 0| = r$





$|z - z_0| = r$

$|x + iy - (x_0 + iy_0)| = r$

$|(x - x_0) + i(y - y_0)|^2 = r^2$

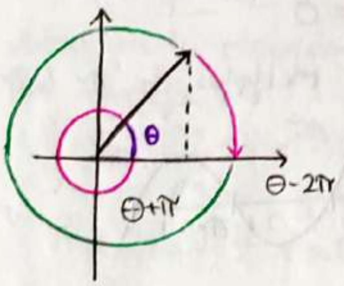
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$|x| = 1$ (Un punto)

$|x| \leq 1$ (Puntos entre 0 y 1)

$|z| = 1$ (Circulo)

$|z| \leq$ (Punto dentro de un circulo)

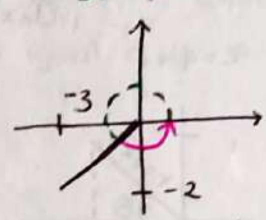


$\theta = \theta_0 + 2\pi K \; ; \; K \in \mathbb{Z}$

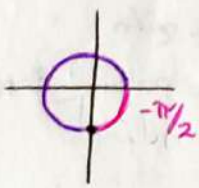
↳ Argumento principal

$\equiv \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$

Ejemplo



En este caso se toma el complemento.



$z = 0 - 4i$

Por ejemplo: si $z = r_1 e^{i\theta}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3} \; \big| \; r_3 = r_1 r_2 \;\&\; \theta_3 = \theta_1 + \theta_2$

$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} \ldots r_n e^{i\theta_n} = r_1 r_2 \ldots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 \ldots + \theta_n)} = Re^{i\phi}$ — (1)

$z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = r_3 e^{i\theta_3} \; ; \; r_3 = \dfrac{r_1}{r_2} \;\&\; \theta_3 = \theta_1 - \theta_2$

Observese que si en (1) si $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$ & $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta$

$\rightarrow z^n = e^{i(\underbrace{\theta + \theta + \theta \ldots}_{n \text{ veces}})} = z^n = e^{in\theta}$ (De Moivre)

i.e. $\underline{(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

Observe que para n negativo i.e., $n = -m$ $(m \in \mathbb{Z}^+)$

$[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]^{-m} = \cos(-m\theta + i\,\text{sen}(-m\theta)$

i.e. $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^{-m} = \dfrac{1}{(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^m}$

$$= \frac{1}{\cos(m\theta) + i\,\text{sen}(m\theta)} = \frac{\cos(m\theta) - i\,\text{sen}(m\theta)}{\cos^2(m\theta) + \text{sen}^2(m\theta)}$$

$\Rightarrow [\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]^{-m} = \cos(-m\theta) + i\,\text{sen}(-m\theta)$ ya que, $\cos(\theta) = \cos\theta$ PAR

& $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$ IMPAR.

$(1-3i)(1-3i)\dots(1-3i)$ Binomial

$(r_1 e^{i\theta})^{1000} = r_1^{1000} e^{i1000\theta_1}$ Polar

$= r^{1000}[\cos(1000\theta_1) + i\,\text{sen}(1000\theta_1)]$

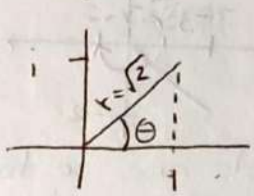
$a^{1/n}$ raiz n-ésima de a

Recuerde que en variable real $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} = \pm(a)^{1/2}$

$\Rightarrow x^n = a \quad x = a^{1/n}$

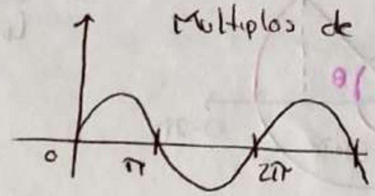
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a x + a_0 = 0.$$

$z = 1 + i$



$\theta = 45\ (\pi/4)\ (\tan^{-1}\frac{1}{1})$

Múltiplos de π ($n\pi\ \forall n \in \mathbb{Z}$)



Ahora, supongamos que **z** y **w** son complejos | $w^n = z \Rightarrow w = z^{1/n}$,
i.e. w es igual a la raiz n-ésima de z. Sean $w = Re^{i\phi}$ (en forma polar) $z = re^{i\theta}$

$(Re^{i\phi})^n = re^{i\theta}$; $R^n e^{in\phi} = re^{i\theta} = R^n = r$ & $n\phi = \theta$

i.e $w = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}$ & $\phi = \frac{\theta}{n} \longrightarrow \in [-\pi, \pi]$

donde $r = |z|$ & $\theta = \arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi K \to K \in \mathbb{Z}^+$ y θ se determina con el valor de K.

(Euler) $W_K = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2\pi K}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta_0 + 2\pi K}{n}\right)\right]$ $\quad K = 0, 1, 2, \dots, n-1$

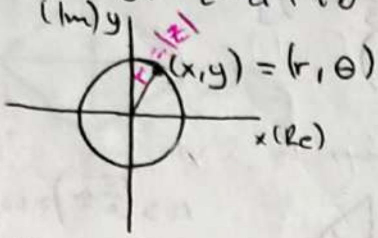
(1) por ejemplo: $x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm(-4)^{1/2}$

∴ Las raices cuadradas de -4 serán $W_K =$

Raices n-ésimas de z

Si $z = a + ib \rightarrow z = re^{i\theta} = r[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ //Circulo

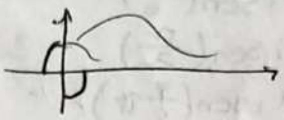


$\boxed{\theta = \arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi k}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Arg(z) : Argumento principal $\in [-\pi, \pi]$

Observese que si $z = -i$

$\Rightarrow \text{Arg}(z) \notin [-\pi, \pi]$



por lo que tomamos el complemento.

>> Consideremos r y R en forma por, ie; $z = re^{i\theta}$ & $w = Re^{i\phi}$, queremos valore en la ecuación $w^n = z$ i.e; $w = z^{1/n}$ (w es igual a la n-sima del complejo z).

$\therefore (Re^{i\phi})^n = re^{i\theta} \Rightarrow R^n e^{in\phi} = re^{i\theta}$

$\Rightarrow R^n = r \quad R = r^{1/n}$ & $n\phi = \theta$; $\phi = \frac{\theta}{n}$

$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \qquad z = x + iy \qquad z = 1 + i$

$\therefore w = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}} \qquad w_k = r^{1/n} e^{i\phi k}$ donde $\phi k = \frac{\theta}{n}$

i.e. $\phi_k = \frac{\text{Arg}(z) + 2\pi k}{n} = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$\therefore$ Las raices n-ésimas de z están dadas por:

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right] \qquad w = r^{1/n} e^{i\phi k}$$

donde $r = |z|$ $\quad \theta = \text{Arg}(z)$ $\quad n$ = numero de raices & $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

* Ejemplo: Encontrar los valores de z que satisfagan:

a) $z^2 - 1 = 0$; c) $z^3 - i = 0$;

b) $z^3 + i = 0$; d) $z^n - 1 - i = 0$;

Solución para a) $z^2 - 1 = 0$; $z^2 = 1$ i.e. $z = 1^{1/2}$ $\therefore$ las raices están dadas por:

$w_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{2}\right) = \cos(\pi k) + i\,\text{sen}(\pi k)$

donde $k = 0, 1$ $\quad r = |1| = 1$ $\quad \theta = \text{Arg}(z) = 0$

Solución para b) $z^3+i=0$; $z^3=-i$, $z=(-i)^{1/3}$. Las raíces cúbicas de $-i$ están dadas por

$$w_k = |-i|^{1/3}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)\right]$$

i.e. $$w_k = \cos\left(\frac{-\pi+4\pi k}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{-\pi+4\pi k}{6}\right)$$

$k=0,1,2$, i.e si

$k=0 \rightarrow w_0=\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

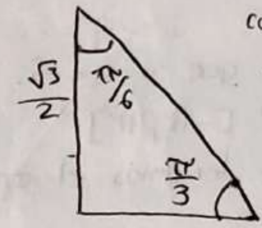
$k=1 \rightarrow w_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$k=2 \rightarrow w_2=\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right)$

i.e; $w_0=\cos\frac{\pi}{6}-i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

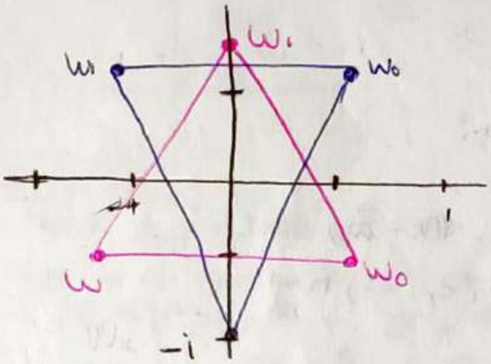
$w_1=i$

$w_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$



$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$
$=\cos\pi\cos\frac{\pi}{6}$

Geometricamente:



Analogamente para c)

$z=i^{1/3}$; las raíces cúbicas de i estarán dadas por:

$$w_k=\cos\left(\frac{\pi+4\pi k}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi+4\pi k}{6}\right)$$

$k=0 \rightarrow w_0=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$k=1 \rightarrow w_1=\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos(\pi)\cos\frac{\pi}{6}+\text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,\pi/6$
$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\text{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\text{sen}\,\pi\cos\pi/6-\cos\pi\,\text{sen}\,\pi/6=\text{sen}\,\pi/6=\frac{1}{2}$

$k=2 \rightarrow w_2=\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-i$

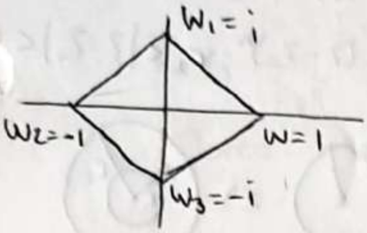
TAREA

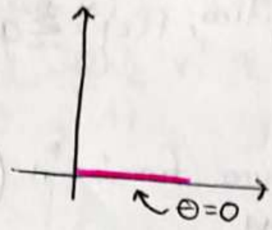
e) $z^4-i=0$; $z=i^{1/4}$ $\longrightarrow$ $z^4-i=0$; $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)=0$

f) $z^4+i=0$; $z=(-i)^{1/4}$

Si $w = z^{1/n} \Rightarrow W_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]$

en este caso $w = 1^{1/n} \Rightarrow W_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}k\right)$ $\quad k=0,1,2,3$





i.e. $W_k = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}k\right)$

$k=0 \quad W_0 = 1$

$k=1 \quad W_1 = i$

$k= \quad W_2 = -1$

IDENTIDADES DE LAGRANGE

$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) \ldots$

Sugerencia: Use el hecho de que $1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$

$[s(z) = 1 + z + \ldots + z^n]$

& $z \mid |z| = 1$ en forma polar $(z = re^{i\theta})$

$1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + (e^{i\theta})^2 \ldots + (e^{i\theta})^n = \frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-(e^{i\theta})}$

$1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) + \ldots + i[\text{sen}\theta + \text{sen}(2\theta) + \ldots + \text{sen}(n\theta)]$

$= [1 - \cos(n+1$

$1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) + \ldots + i[\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta$

$+ \ldots + \text{sen}(n\theta)] = \frac{[1-\cos(n+1)\theta] - i\,\text{sen}(n+1)\theta}{(1-\cos\theta) - i\,\text{sen}\,\theta} \left(\frac{1-\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}{(1-\cos\theta) + i\,\text{sen}\,\theta}\right)$

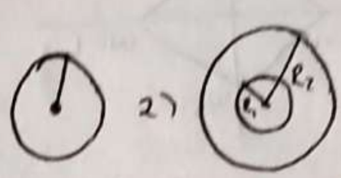
$= \frac{\quad}{(1-\cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta)}$

RESUMEN DEL PRIMER PARCIAL.

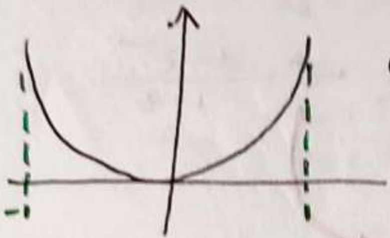
$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \begin{cases} 0; & \text{Analítico}; \ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n;\ z-z_0<R \\ 2\pi i\,(\text{algo}); & \text{No analítico}; \ f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n;\ r_1<|z-z_0|<r_2 \end{cases}$$

Cualquier Trayectoria Cerrada.

Analogamente en variable compleja, $f(z)$ es una función 1) 2) tal que $w=f(z)$, donde z es la variable ind.



Por ejemplo:



$y=f(x)$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ & grafica de f

$g=f(x,y)$ $f: A\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Su grafica de $f(x) \in \mathbb{R}^3$

x ejemplo si $w=f(z)=z^2-2z$

Sabemos, $z=x+iy \Rightarrow w=f(x+iy)=(x+iy)^2+2(x+iy)$

$w=x^2-y^2+2ixy-2x-2iy$

$=(x^2-y^2-2x)+i(2xy-2y)$

Nota: Cuando la función es igual a una cte.

i.e $w=u(x,y)+i\,v(x,y)$

// Planos de Argan.

$$\begin{matrix} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{matrix} \iff \begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{matrix}$$

Mapeo

Por ejemplo: $w=f(z)=iz+(3-2i)$

$\boxed{f(z)=\alpha z-\beta \quad \& \ \alpha\,\beta\in\mathbb{C} \quad \text{mapeo lineal.}}$

Encuentre la parte Im de

a) $x=1$, b) $x-y=2$ c) $(x-2)^2+(y+3)^2=(\sqrt{5})^2$

d) $x^2-3x+y^2=0$

$\left[(x-\frac{3}{2})^2+(y-0)^2=(\frac{3}{2})^2\right]$ $|z-z_0|=r$; $z_0=(\frac{3}{2},0)$ $r=\frac{3}{2}$

bajo el mapeo dado.

Sol a) Sabemos que $z=x+iy$ & $w=u+iv$

$u+iv=i(x+iy)+3-2i$

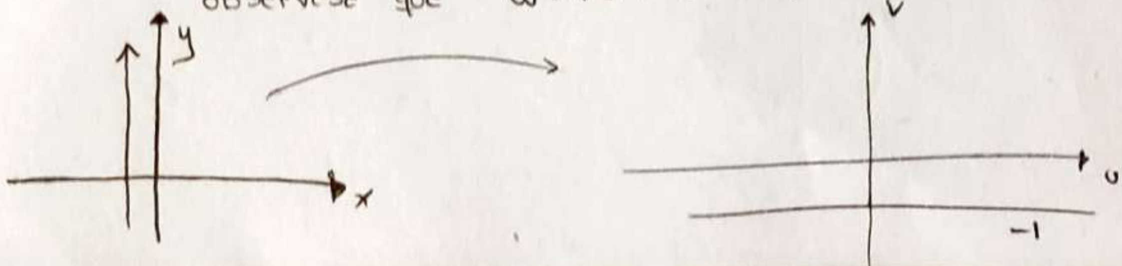
$=ix+i^2y+3-2i$

$=(3-y)+(x-2)i \Rightarrow u=3-y \quad v=x-2$

Sust. en lugar geometrico dado

$x=1 \Rightarrow v+2=1$, i.e. $v=-1$

observese que $w=iz+(3-2i)$



analogamente para c)

$$(u+2-2)^2+(3-u+3)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$v^2+[-(u-6)]^2=(\sqrt{5})^2$$

$$\text{i.e. } (u-6)^2+v^2=(\sqrt{5})^2$$

Tarea: b) y d)

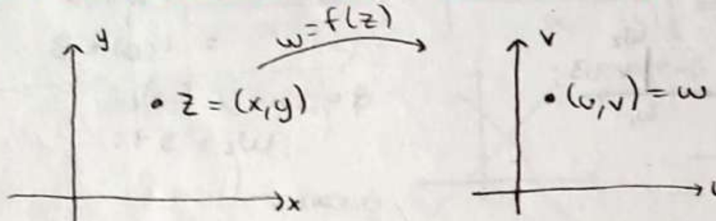
26/08/14

$w=iz+(3-2i)$

i) $x-y=2$

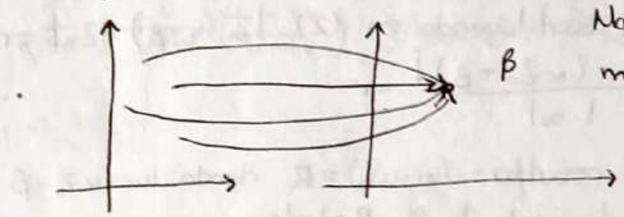
ii) $x^2-3x+y^2=0$

MAPEO LINEAL $w=f(z)=\alpha z+\beta \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$



i) $\alpha=0$ y $\beta\neq 0$; $w=f(z)=\beta$

esquematicamente



ii) $\alpha\neq 0$ y $\beta=0$; $w=f(z)=\alpha z$

$\Rightarrow z=\frac{1}{\alpha}w$

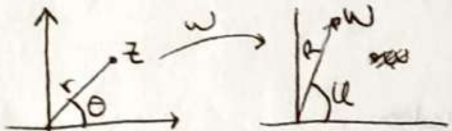
Mapeo degenerado: (imagen?) no existe mapeo inverso.

$z=re^{i\theta}$

Observese que α y z están en forma polar, i.e; $\alpha=|\alpha|e^{i\phi}$ Donde $\phi=\arg\alpha$

recuerde que $\arg(x)=\operatorname{Arg}(x)+2\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow w=|\alpha|e^{i\phi}re^{i\theta}=|\alpha|re^{i(\theta+\phi)}$

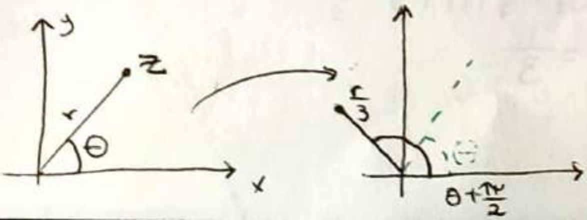
i.e $w=Re^{iu}$, esquematicamente:



Ejemplo: $\alpha=1+i$; $|\alpha|=\sqrt{2}$; $\varphi=\operatorname{Arg}(\alpha)=\pi/4$

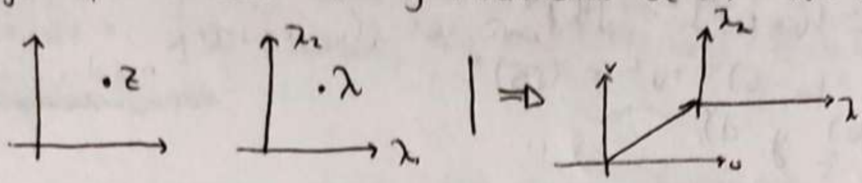
$R=\sqrt{2}r \quad \alpha=\frac{i}{3}\ |\alpha|=\frac{1}{3}$ y $\varphi=\operatorname{Arg}(\alpha)=\frac{\pi}{2}$

Bajo el mapeo αz



i.e; $w=\alpha z$ presenta efectos de amplificación y rotación, asociado a $|\alpha|$ y $\operatorname{Arg}(\alpha)$ respectivamente.

iii) $\alpha \neq 0$ & $\beta \neq 0$; $w = \alpha z + \beta$ reescribir del mapeo; $w - \beta = \lambda$ — (1) i.e; $\lambda = \alpha z$ igual que el caso ii y finalmente de (1) $w = \lambda + \beta$



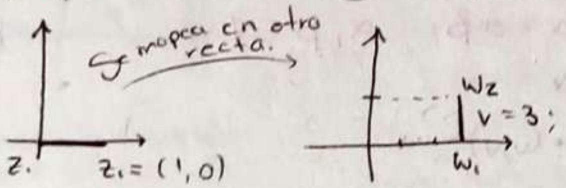
i.e; efecto de traslación.

En resumen

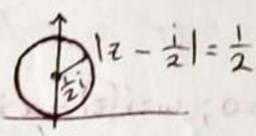
$$z \to |\alpha| e^{i\phi} z \longrightarrow |\alpha| e^{i\phi} z + \beta = \alpha z + \beta = w$$

amplificación y rotación — traslacion (β)

Por ejemplo: Si $w = iz + 3 \to$ Desplazamiento de 3 unidades.



Observese que $w_1 = i z_1 + 3$
$= i(0) + 3$
$= 3$
$w_2 = 3 + i$



En general bajo el mapeo lineal $w = \alpha z + \beta$ se preservan rectas y circulos, a saber:

i) $|z - z_0| = r$ — (2); del mapeo dado: (encuentra la inversa) $z = \frac{1}{\alpha}[w - \beta]$

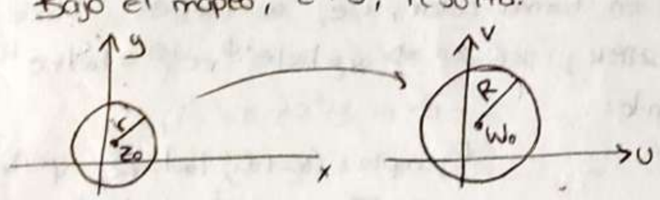
$\hookrightarrow \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$; sustituyendo en (2) $\left|\frac{1}{\alpha}(w - \beta) - z_0\right| = r$

$\Rightarrow \left|\frac{w - \beta - \alpha z_0}{\alpha}\right| = r$; $\frac{|w - (\alpha z_0 + \beta)|}{|\alpha|} = r$

finalmente, en el plano w resulta: $|w - w_0| = R$ dando $w_0 = \alpha z_0 + \beta$
$R = |\alpha| r$

por ejemplo en el plano z, $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$

Bajo el mapeo; $z + 3$, resulta:

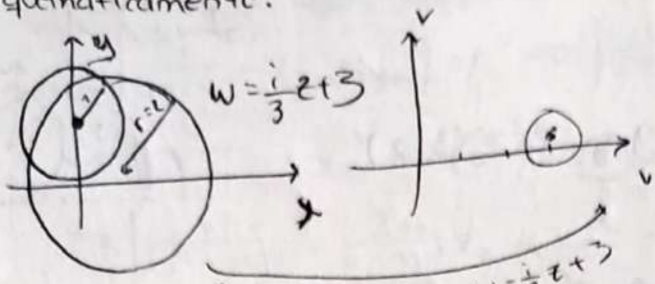


Por ej. bajo el mapeo $= \frac{i}{3} z + 3$, los circulos

a) $x^2 - 2x + y^2 = 3$ y b) $|z - i| = 1$ Se mapean en $|w - w_1| = R_1$ y $|w - w_2| = R_2$ Donde $w_1 = \frac{i}{3} + 3$, $w_2 = \frac{i}{3}(i) + 3 = \frac{8}{3}$

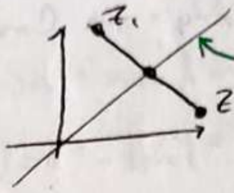
$R_1 = |\alpha| r = \frac{2}{3}$ $\quad R_2 = \frac{1}{3}$

esquemáticamente:



Bajo el mapeo $w=\frac{i}{3}z+3$

Para el caso de rectas
$|z-z_1| = |z-z_2|$

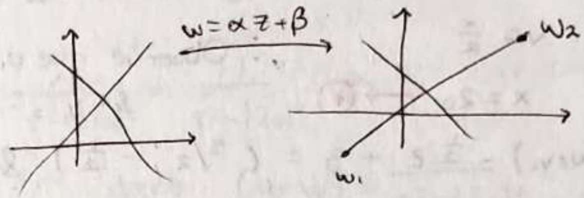


$|z-z_1| = |z-z_2|$ — (3)
recta que equidista $\perp$ a la recta que va de z_1 a z_2

en forma análoga sust. $z=\frac{1}{\alpha}(w-\beta)$ en (3) $\left|\frac{1}{\alpha}(w-\beta)-z_1\right| = \left|\frac{1}{\alpha}(w-\beta)-z_2\right|$

$\Rightarrow \left|\frac{w-(\alpha z_1+\beta)}{\alpha}\right| = \left|\frac{-(\alpha z_2+\beta)+w}{\alpha}\right| \Rightarrow |w-w_1| = |w-w_2|$;

donde $w_1=\alpha z_1+\beta$



Consideremos el mapeo $w=\frac{1}{z}$ (mapeo inverso) en el plano z si $|z-z_0|=r$;
en que se mapea dicho círculo $z_0=x_0+iy_0$; $z=x+iy$; $w=u+iv$
$z=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}\left(\frac{u-iv}{u-iv}\right)$ Asociamos Re con Re $\Rightarrow \left|\left(\frac{u}{u^2+v^2}-x_0\right)-i\left(\frac{v}{u^2+v^2}-y_0\right)\right|=r$

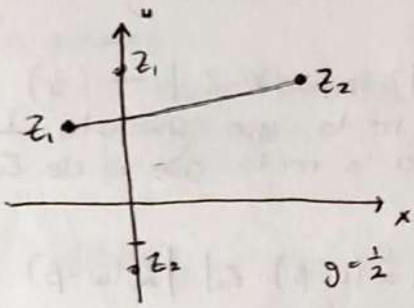
Ej.- de tarea.

Dado el mapeo lineal $w = \frac{i}{2}z + 3$ encuentre

a) la recta que une los puntos z_1 $(-1, 1)$ y $z_2 = (3, 2)$

b) $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

c) $|z - 2i| = |z + 3i|$



$x - y = cte$ Curvas de nivel.

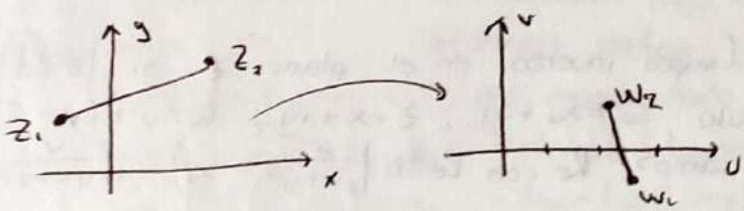
$y = \frac{1}{2}$

Del mapeo dado; si $w = (u, v)$ y $z = (x, y)$ $u + iv = \frac{i}{2}(x + y) + 3 \Rightarrow (3 - \frac{y}{2}) + i\frac{x}{2}$

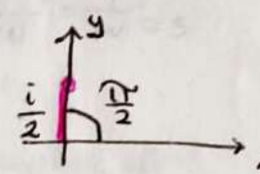
$\Rightarrow u = 3 - \frac{y}{2}$ $\quad v = \frac{x}{2}$ $\qquad$ Observe que $u_1 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$y = (3 - u)2$ $\quad x = 2u \longrightarrow$ (*) $\qquad$ & $v_1 = -\frac{1}{2}$

i.e $w_1 = (u_2 v_1) = \frac{1}{2}z + 3 = (5/2, -\frac{1}{2})$ & $w_2 = Im(z_2) = \frac{i}{2}(3 + 2i) + 3$
$= (2, \frac{3}{2})$

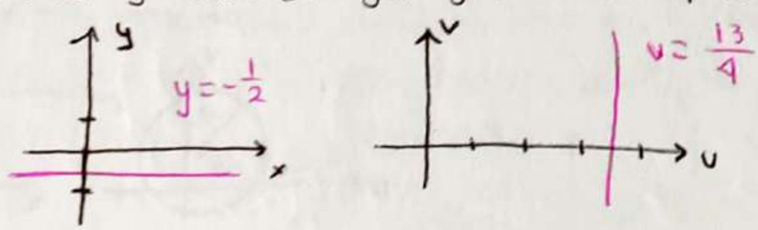


Valor de $\beta \rightarrow$ traslación ; α menor de uno "ampliación"



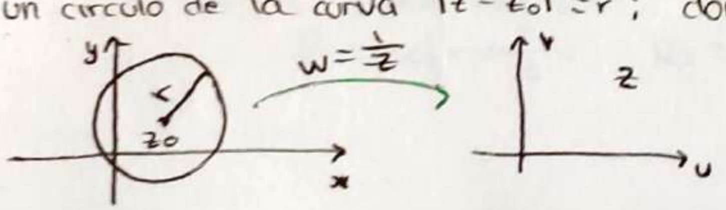
c) Observese de las ecuaciones (*) y sust. el lugar geometrico para c)

$-\frac{1}{2} = 6 - 2u \Rightarrow u = \frac{13}{4}$



MAPEO INVERSO

$w = \frac{1}{z}$; $\Rightarrow z = \frac{1}{w}$ $\qquad$ Sabemos $z = x + iy$ & $w = u + iv$; consideremos un circulo de la curva $|z - z_0| = r$; donde $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$



Sust. en el lugar geometrico;

$$\left|\frac{1}{u+iv}-(x_0+iy_0)\right|=r \Rightarrow \left|\frac{1}{u+iv}\left(\frac{u-iv}{u-iv}\right)-(x_0+iy_0)\right|=r$$

$$\Rightarrow \left|\left(\frac{u}{u^2+v^2}-x_0\right)-i\left(\frac{v}{u^2+v^2}+y_0\right)\right|=r$$

$$\Rightarrow \left|\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}-\frac{2x_0}{u^2+v^2}x_0+\underbrace{x_0^2+\frac{v^2}{u^2+v^2}+\frac{2y_0}{u^2+v^2}+y_0^2}_{|z_0|^2}\right|=r^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[u^2+v^2\right]+\frac{2}{u^2+v^2}\left(y_0v-x_0u\right)=r^2-|z_0|^2$$

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left(1+(2y_0v-2x_0u\right)=r^2-|z_0|^2$$

$$1+2y_0v-2x_0u=(r^2-|z_0|^2)(u^2+v^2)$$

i.e. $(r^2-|z_0|^2)(u^2+v^2)+2x_0u-2y_0v=1$ —— (1)

si $r^2-|z_0|^2\neq 0$, i.e $r^2\neq|z_0|^2$ $\rightarrow$ i.c. circulos que no pasan por el origen

$$\Rightarrow u^2+\frac{2x_0}{r^2-|z_0|^2}u+v^2-\frac{2y_0}{r^2-|z_0|^2}=\frac{1}{r^2-|z_0|^2}$$

$$\Rightarrow (u_0-v_0)^2+(u-v_0)^2=r^2 \quad \text{donde} \quad (u_0,v_0)=\frac{1}{r^2-|z_0|^2}(-x_0,y_0)$$

$$y \quad r=\frac{1}{r^2-|z_0|^2}+\frac{x_0}{(r^2-|z_0|^2)}+\frac{y_0}{(r^2-|z_0|)^2}$$

$$r=\frac{1}{r^2-|z_0|^2}+\frac{|z_0|^2}{[r^2-|z_0|^2]^2}$$

$$\Rightarrow r=r^2-|z_0|^2+z_0^2=\left[\frac{v}{r-|z_0|^2}\right]^2$$

i.e. $R=\frac{r}{r^2+|z_0|^2}$; Observese que si $r^2-|z_0|^2=0$

$r^2=|z_0|^2$ i.c $r=z_0$ Circulos que pasan por el origen de (1)

MAPEO BILINEAL.

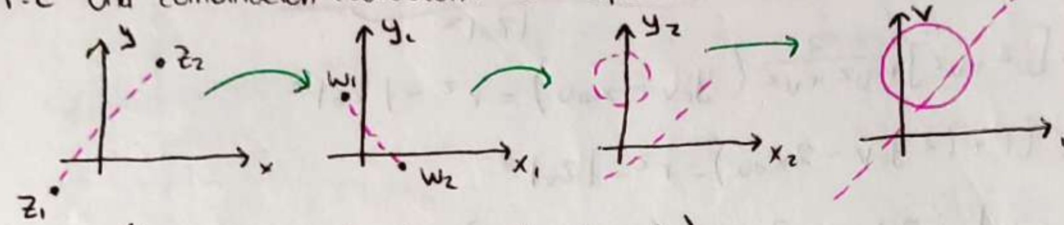
$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \to \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{da}{c} + b}{cz+d} \Rightarrow w = \lambda \frac{a}{c} + \frac{\mu}{\alpha z + \beta}$$

donde
$\lambda = \frac{a}{c}$
$\mu = bc - ad$ - (1)
$\alpha = cz$
$\beta = cd$

ii) si $c = 0$ y $d \neq 0$ es lineal.

$$\Rightarrow w = \mu z_2 + \lambda \quad \Big| \quad z_2 = \frac{1}{z_1} \;\&\; z_1 = \alpha z + \beta$$

i.e Una combinación (sucesión) de mapeos lineales e inversos.



No pasa cuando $r^2 = |z_0|^2 \neq 0$

(Ampliación, rotación y traslación)

Ejemplos: Consideremos los siguientes lugares geométricos en el plano z.

a) $y = 2x + 3$ c) $x^2 + 2x + y^2 = 0 \equiv |z - z_0| = r$

b) $|z - i| = |z + i|$ d) $|z - i| = 1$

Encuentre las imagenes bajo los mapeos siguientes

i) $w = 4z + 6$ Observe que $\mu \neq 0 \to$ efectivamente es mapeo bilineal.

ii) $w = \frac{1}{z}$ * La combinación (1) suele llamarse el determinante del mapeo $\left[A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]$

iii) $\frac{2z+1}{z+i}$

Imagen

$z_1 = (1, -1) \to (0, 1) = w_1 \quad w = \alpha z + \beta \quad 1 - i = \alpha(i) + \beta$ ②

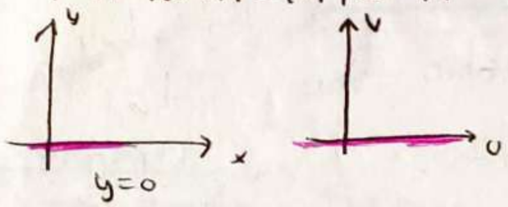
$z_2 = (0, 1) \to (1, -1) = w_2 \quad i = \alpha(1+i) + \beta$ ①

Sol. para el caso b) y ii);

$z = \frac{1}{w}$; sust. en el lugar geom. resulta $\left|\frac{1}{w} - i\right| = \left|\frac{1}{w} + i\right|$

$$\Rightarrow \left|\frac{1 - wi}{w}\right| = \left|\frac{1 + iw}{w}\right| \Rightarrow |-i(w+i)| = |i(w-i)|$$

$|-i|\,|w+i| = |i|\,|w-i|$ finalmente $|w - i| = |w + i|$



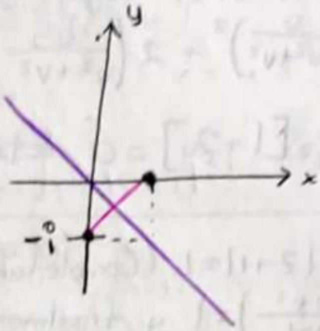
NOTA: Si tengo rectas que pasan por el origen, obtengo rectas que pasan por el origen; si no pasan obtengo circulos que no pasan. Si son circulos que pasan por el origen obtengo lineas que pasan por el origen.

Para el caso c); si se quiere encontrar la transformación se hace de la forma

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} \Rightarrow \text{ene.} \quad u = u(x,y) \text{ y } v = v(x,y) \Rightarrow \begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix}$$

// Pts, recta o circulos, todo depende del valor de λ.

c) $\left|\frac{z-1}{z+i}\right| = \lambda$



$\lambda = 0 \Rightarrow z = 1$

$\lambda = 1 \Rightarrow |z-1| = |z+i|$

$y = mx + b$

$|(x-1) + iy|^2 = |x + i(y+1)|^2$

$-2x + 1 = 2y + 1 \qquad y = -x$

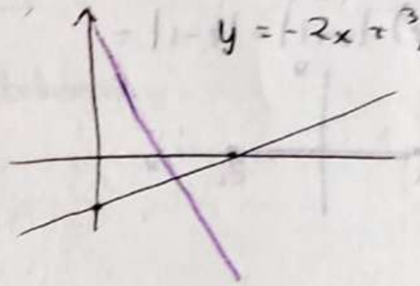
$\left|\frac{z-2}{z+i}\right| \quad \lambda = 0 \Rightarrow z = 2$

$\lambda = 1 \Rightarrow |z-2| = |z+i|$

$|(x-2) + iy|^2 = |x + i(y+1)|^2$

$-4x + 4 = 2y + 1$

$2y = -4x + 3$



$y = -2x + 3/2$

// $\lambda \neq 1$ Fam. circulos.

$|z-2| = \lambda |z+i| \Rightarrow |(x-2) + iy| = \lambda |x + i(y+1)|$

$(x-2)^2 + y^2 = \lambda^2 [x^2 + (y+1)^2]$

$x^2(1-\lambda^2) - 4x + y^2(1-\lambda^2) - 2\lambda^2 y = \lambda^2 - 4$

Si $1 - \lambda^2 \neq 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{4}{1-\lambda^2} x + y^2 - \frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2} y = \frac{\lambda^2 - 4}{1-\lambda^2}$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

donde $R^2 = \frac{\lambda^2 - 4}{1-\lambda^2} + \frac{4}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda^4}{(1-\lambda^2)}$

$= \frac{(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1) + 4 + \lambda^4}{(1-\lambda^2)^2}$

$= \frac{-[\lambda^4 - \lambda^2 - 4\lambda^2 + 4] + 4 + \lambda^4}{(1-\lambda^2)^2}$

$= \frac{5\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$

$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{5}\lambda}{1-\lambda^2} \quad \& \quad (x_0, y_0) = \left\{\frac{1}{1-\lambda^2}(2, \lambda^2)\right)$

24/08/201

de $w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w}$ i.e: $x+iy=\frac{1}{u+iv}\left(\frac{u-iv}{u-iv}\right)$

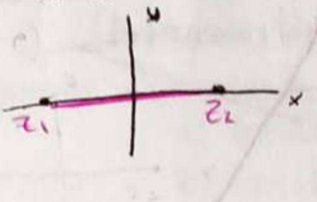
$\Rightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2} \quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$ $\Big\}$ Sust. en el lugar geométrico

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+2\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)+\left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left(u^2+v^2\right)+\frac{2u}{u^2+v^2}=0 \Rightarrow \frac{1}{u^2+v^2}[1+2u]=0 \Rightarrow u=-\frac{1}{2}$$

Obsérvese que x^2+2x+y^2 es eq. a $|z+1|=1$ (Completando cuadrados); así, en forma análoga: $\left|\frac{1}{w}+1\right|=1$; $\left|\frac{w+1}{w}\right|=1$ y finalmente obtenemos $|w+1|=|w+0|$

e) $|z+1|=|z-1|=$



ii) $w=\frac{z}{1-z}$

de ii) $w-wz=z \Rightarrow z=\frac{w}{1+w}$

sust. en $|z+1|=|z-1|$

$$\Rightarrow \left|\frac{w}{w+1}+1\right|=\left|\frac{w}{1+w}-1\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2w+1}{w+1}\right|=\left|\frac{-1}{w+1}\right| \Rightarrow \left|2\left(w+\frac{1}{2}\right)\right|=1$$

$$\Rightarrow \left|w+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

f) $\left|\frac{z}{z-i}\right|=\lambda$; $\lambda\in\mathbb{R}$ i) $=w=iz+2$ $\quad |z|=\lambda|z-i|$

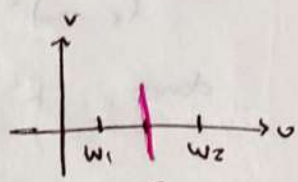
$z=\frac{1}{i}(w-2)$

Sust. en el lugar geom.

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{i}(w-2)\right|=\lambda\left|\frac{1}{i}(w-2)-i\right|$$

$$|w-2|=\lambda|w-1|$$

Si $\lambda=0$ $\quad |w-2|=0$ i.e. $w=2$ $\qquad \lambda=1$;



$u=\frac{3}{2}$

Si $\lambda\neq1$ Como $w=u+iv \Rightarrow |(u-2)+iv|^2=\lambda^2|(u-1)^2+iv|^2$

$(1-\lambda^2)u^2-4u+2u\lambda^2-2u\lambda$

$(1-\lambda^2)u^2+2(\lambda^2-2)u+(1-\lambda^2)v^2=\lambda^2-4$

Si $\lambda^2-1\neq0 \Rightarrow u^2+2\frac{\lambda^2-2}{\lambda^2-1}u+v^2=\frac{\lambda^2-4}{\lambda^2-1}$

Completando cuadrados...

$$\left(u-\frac{\lambda^2-2}{\lambda^2-1}\right)^2+(v-0)^2=R^2$$

donde $R^2=\frac{\lambda^2-4}{\lambda^2-1}+\frac{(\lambda^2-2)^2}{(\lambda^2-1)^2}=\frac{(\lambda^2-4)(\lambda^2-1)+(\lambda^2-2)^2}{(\lambda^2-1)^2}$

$$\left|\frac{z-2}{z+i}\right| = \lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Observese que si

$\lambda = 0 \Rightarrow z = 2$

$\lambda = 1 \Rightarrow |z-2| = |z+i|$

(i.e. una recta)

Bajo los mapeos dados

i) $w = iz + 3$

ii) $w = \frac{1}{z}$

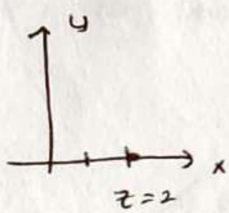
iii) $w = \frac{iz+1}{z-1}$ } Observe que $\mu \neq 0$, i.e es bilineal

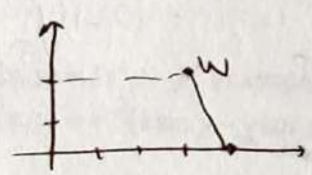
Para i) $z = \frac{w-3}{i}$ Sust. en $\longrightarrow z = i(3-w)$

$(*)$ $\left|\frac{i(3-w)-2}{i(3-w)+i}\right| = \lambda$

$$\left|\frac{i\left[3-w-\frac{2}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right)\right]}{i(3-w+1)}\right| = \lambda \Rightarrow \left|\frac{3-w+2i}{4-w}\right| \Rightarrow |3-w+2i| = \lambda|w-4|$$

(Pero como es $|| = w-4$)





$v = \alpha u + \beta$

también, si $\lambda = 1 \Rightarrow |w-(3+2i)| = |w-4|$

TAREA.

Para el caso (iii) $wz + wi = z - i$; $wz - z = -i - wi$

$\Rightarrow z = \frac{i(1+w)}{1-w}$, sust. en $(*)$: $\left|\frac{\frac{1+w}{1-w}i - 2}{\frac{1+w}{1-w}i + i}\right| = \lambda$

$$= \left|\frac{(1+w)i - 2(1-w)}{i[1+w+1-w]}\right| = \lambda \Rightarrow |w(2+i) - 2 + i| = 2\lambda$$

$|(2+i)\left[w - \frac{2-i}{2+i}\right]| = 2\lambda \Rightarrow |w - w_0| = r$ Donde $w_0 = \frac{3-4i}{5}$ & $r = \frac{2\lambda}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$U_x = V_y \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$V_x = -U_y$$

PROBLEMAS Y EXAMENES

8.- Muestre que el mapeo de inversión $w = \frac{1}{z}$ mapea círculos y rectas del plano z en rectas o círculos en el plano w, respectivamente.

9.- a) Dado el mapeo $w = \frac{z-i}{z+i}$, encuentre las imágenes en el plano w de $x + y = k$.

b) Encuentre la imagen del lugar geométrico de $|z-i| = \lambda|z+i|$ para $w = \frac{z}{z+2}$

10.- a) Encuentre la transformación bilineal que mapea los tres puntos $z = 0, -i, -1$ en los tres puntos $w = i, 1, 0$ en el plano w respectivamente.

b) Para el mapeo encontrado en el inciso a) encuentre las imágenes en el plano w de las rectas $\mathrm{Re}(z) = cte = k_1$ y $\mathrm{Im}(z) = cte = k_2$.

11.- a) Determine las constantes α y β para que la siguiente función sea analítica:

$$w = x^2 + \alpha y^2 - 2xy + i(\beta x^2 - y^2 + 2xy)$$

b) Para estos valores de α y β encontrados en a), encuentre la derivada de w, y exprese ambas w y dw/dz en funciones de $z = x + iy$.

12.- Muestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares están dadas por:

$$u_r = \frac{v_\theta}{r} \ \& \ v_r = -\frac{u_\theta}{r}$$

13.- Demostrar que,

i) $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ es armónica.
ii) $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ es armónica.

a) Encuentre una función $u(x,y)$ (o $v(x,y)$) tal que $f(z) = u + jv$ sea analítica.

b) Calcule la $f'(z) = \frac{df}{dz}$ y exprese la función y la derivada en términos de la variable z.

14.- a) Encuentre una función $v = v(x,y)$ tal que, $f(z) = u + iv$ sea analítica en z.

i) $u(x,y) = 2x(1-y)$ ii) $u(x,y) = 2e^x \cos y$

b) Encuentre las partes real e imaginaria de las funciones

i) $f(z) = z^2 e^{2z}$ ii) $f(z) = sen(2z)$ iii) $f(z) = ize^{iz}$

15.- Verifique que $u(r,\theta) = r^2\cos(\theta)$ es una función armónica. Encuentre $v(r,\theta)$ tal que $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ sea analítica.

Lista2 de problemas de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería
Grupos (2CV4 & 2CV5)

1.- Encuentre los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie de Taylor de la siguiente función alrededor del punto indicado.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-4i)}, \text{ en } z_0=2i.$$

2.- Dada la función $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$. Escriba el desarrollo en series de potencia alrededor de $z_0=1$.

3.- i) Encuentre la serie de potencia de $f(z)=\dfrac{z^3+z}{(2z+1)^3}$ alrededor de $z_0=1/2$ indicando el dominio de validez.

ii) Calcule la siguiente integral $\displaystyle\int_C \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}dz$, donde el contorno C, es cualquier contorno que encierra al polo de la función. ***NO USAR LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY.***

4.- Resolver las siguientes integrales,

a).- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{k+sen(\theta)}$ donde $k>1$, b).- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\sqrt{2}+sen\theta\right)^2}$, c).- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{5-4sen(\theta)}d\theta$

d).- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos(\theta)}$; $a>b\geq 0 \quad a,b\in\Re$, e).- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta)}{1+\frac{sen(\theta)}{4}}d\theta$, f).- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}$,

g).- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$, h).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$, i).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)^3}$, j).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)^2}$

k).- $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2}$, l).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}$, m).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ n).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4+2x^4}$

o).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$.

5.- i) Encuentre las series de potencia de $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ alrededor de $z_0=0$ y $z_0=1$ indicando los dominios en cada desarrollo.

ii) Calcule la siguiente integral $\displaystyle\int_C\frac{5z-2}{z(z-1)}dz$, donde el contorno C, es cualquier contorno que encierra los polos de la función. Obsérvese que el resultado es inmediato si identifica los residuos de los desarrollos en series de potencia en el inciso i).

6.- Calcule la siguiente integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$$

Siendo γ cualquier contorno cerrado que encierre a una singularidad.

7.- Evaluar la siguiente integral compleja.

$$\int_{C} \frac{dz}{z^4 - z^5},$$

donde el contorno C, está dado por $|z| = 1/2$. No use la fórmula integral de Cauchy, aplique el teorema del residuo, calculando el residuo haciendo explícitamente el desarrollo en serie de Laurent de la función.

8.- Evaluar la siguiente integral

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)(z+4)^2} dz$$

donde γ es cualquier trayectoria cerrada que encierra los polos de la función.

9.- Dada las funciones

i) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$. ii) $f(z) = \dfrac{2}{z(z-2)}$.

Analice los dominios de validez y encuentre sus series de potencia en tales dominios.

10.- Dada la función $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z-2}$. Analice los dominios de validez y encuentre sus series de potencia en tales dominios.

11.- Utilice el Teorema del Residuo para evaluar la siguiente integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$$

donde $\gamma : |z| = 2$.

12.- i).- Utilice el Teorema del Residuo para evaluar la siguiente integral:

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)(z+4)^2} dz$$

Siendo γ un contorno cerrado que encierra a ambas singularidades de $f(z)$.

ii).- Calcule la integral $\int_{\gamma} f(z)dz$, donde $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ γ es el círculo de radio 1 y con centro en los puntos:

a) $z = 1$, b) $z = 3/2$, c) $z = -1 + i/2$, d) $z = i$.

Justifique correctamente sus resultados.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
PRIMERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

13 de septiembre de 2016

Alumno(a): Calificación__________

Número de Boleta:____________________ Grupo:____________ EXAMEN "XX"

Profesor:____

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
RESOLVER SÓLO TRES PROBLEMAS, DIJE TRES.

1.- a) Encontrar todos los valores de z, y localizarlos en el plano complejo si

$$z^6 - 1 = 0$$

b) Dada $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$, encuentre una función $v(x,y)$ tal que la función $f(z) = u + iv$ sea analítica.

2 a) Muestre bajo qué condiciones, el mapeo de inversión $w = \frac{1}{z}$ mapea rectas del plano z en rectas o círculos en el plano w.

b) Para el mapeo $w = \frac{z+1}{z-i}$ encuentre las imágenes en el plano w de $\mathrm{Re}(z) = 0$ y $\mathrm{Im}(z) = 0$.

3.- a) Demostrar que la ecuación de una circunferencia o recta en el plano z, se puede escribir de la forma $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$, donde α y γ son constantes reales, mientras que β puede ser una constante compleja.

b) Dibuje el lugar geométrico del conjunto de valores de z que satisfacen:

$$\left|\frac{z}{1-z}\right| = k, \text{ donde } k = cte.$$

4.- Muestre que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares están dadas por:

$$u_r = \frac{v_\theta}{r} \quad \& \quad v_r = -\frac{u_\theta}{r}$$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
PRIMERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a): 13 de septiembre de 2016
Número de Boleta:______________ Grupo:__________ Calificación________
Profesor:____________________________________ EXAMEN "XXX"

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA. RESOLVER SÓLO TRES PROBLEMAS, DIJE TRES.

1.- a) Encontrar todos los valores de z, y localizarlos en el plano complejo si

$$z^6 - i = 0$$

b) Si $v(x,y) = e^{-x}(y\sin y + x\cos y)$, encuentre una función $u(x,y)$ tal que la función $f(z) = u + jv$ sea analítica.

2.- a) Muestre bajo qué condiciones, el mapeo de inversión $w = \dfrac{1}{z}$ mapea círculos del plano z en rectas o círculos en el plano w.

b) Para el mapeo $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ encuentre las imágenes en el plano w de $\operatorname{Re}(z) = 0$ y $\operatorname{Im}(z) = 0$.

3.- a) Demostrar que la ecuación de una circunferencia o recta en el plano z, se puede escribir de la forma $\alpha z\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma = 0$, donde α y γ son constantes reales, mientras que β puede ser una constante compleja.

b) Encuentre la imagen del lugar geométrico de $|z - i| = \lambda|z + i|$ para $w = \dfrac{z}{z+2}$

4.- Si n=2, 3, 4, … , probar que:

a) $Cos(2\pi/n) + Cos(4\pi/n) + Cos(6\pi/n) + \cdots + Cos(2(n-1)\pi/n) = -1$

b) $Sen(2\pi/n) + Sen(4\pi/n) + Sen(6\pi/n) + \cdots + Sen(2(n-1)\pi/n) = 0$

Sugerencia: Considere el siguiente resultado, " La suma y producto de todas las raíces de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-2}z^2 + a_{n-1}z + a_n = 0$, donde $a_0 \neq 0$, son $-a_1/a_0$ y $(-1)^n a_n/a_0$ respectivamente", es decir;

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -a_1/a_0 \quad y \quad z_1 z_2 \cdots z_n = (-)^n a_n/a_0$$

Encuentre las raíces n-ésimas de la unidad y aplique el resultado anterior.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
2da EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

17 de octubre de 2016

Alumno(a): calificación: ________

Número de boleta: ________________ grupo: ____________ Examen tipo "XXX".

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
Por favor apague su … celular!

4.- Dada la función $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)}$

a) Escriba un desarrollo en serie de Laurent en la región $2<|z|<4$.

b) Escriba un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto donde la función sea analítica.

5.- Resolver una, **dije SOLO una** de las siguientes integrales,

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$ ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta)}{2+\cos\theta}d\theta$.

6.- Calcule la siguiente integral

$$\int_\gamma \frac{e^t}{(z^2+\sqrt{2})^2}dz$$

Siendo γ cualquier contorno cerrado que encierre a una singularidad.

NO USAR LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY, APLIQUE EL TEOREMA DEL RESIDUO, CALCULANDO EL RESIDUO HACIENDO EL DESARROLLO EN SERIES LAURENT RESPECTIVO.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
2da EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a): 17 de octubre de 2016

Número de boleta: ____________ grupo: __________ calificación: ______

Examen tipo "XX".

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
Por favor apague su ... celular!

1.- Dada la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$

a) Escriba un desarrollo en serie de Laurent en la región $1 < |z| < 3$.

b) Escriba un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto donde la función sea analítica.

2.- Resolver una, **dije SOLO una** de las siguientes integrales,

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)^2}$ ii) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{sen(\theta)}{4+sen(\theta)} d\theta$.

3.- Calcule la siguiente integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{\left(z^2+3\right)^2} dz$$

Siendo γ cualquier contorno cerrado que encierre a una singularidad.

NO USAR LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY, APLIQUE EL TEOREMA DEL RESIDUO, CALCULANDO EL RESIDUO HACIENDO EL DESARROLLO EN SERIES LAURENT RESPECTIVO.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
2da EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

18 de octubre de 2016

Alumno(a):
Número de boleta: ____________ grupo: **2CV5** calificación: ________

Examen tipo "XXX".

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
Por favor apague su ... celular!

4.- Dada la función $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z-4)}$

a) Escriba un desarrollo en serie de potencias en la región $4<|z|$.

b) Escriba un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto donde la función sea analítica.

5.- Resolver una, **dije SOLO una** de las siguientes integrales,

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+2)^3}dx$ ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta)}{2+\cos\theta}d\theta$.

6.- Calcule la siguiente integral

$$\int_\gamma \frac{sen(\pi z)}{(z-i)^6}dz$$

Siendo γ cualquier contorno cerrado que encierre a la singularidad.

NO USAR LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY, APLIQUE EL TEOREMA DEL RESIDUO, CALCULANDO EL RESIDUO HACIENDO EL DESARROLLO EN SERIES LAURENT RESPECTIVO.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
2da EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a):

Número de boleta: ____________ 18 de octubre de 2016

Examen tipo "XX". grupo: 2CV5 calificación: ________

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
Por favor apague su ... celular!

1.- Dada la función $f(z)=\dfrac{1}{(z+2i)(z-3)}$

a) Escriba un desarrollo en serie de Laurent en la región $3<|z|$.

b) Escriba un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto donde la función sea analítica.

2.- Resolver una, **dije SOLO una** de las siguientes integrales,

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)^2}$ ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{sen(\theta)}{2+sen(\theta)}d\theta$.

3.- Calcule la siguiente integral

$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z-i)^6}dz$$

Siendo γ cualquier contorno cerrado que encierre a la singularidad.

NO USAR LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY, APLIQUE EL TEOREMA DEL RESIDUO, CALCULANDO EL RESIDUO HACIENDO EL DESARROLLO EN SERIES LAURENT RESPECTIVO.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
3era EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

junio de 2016

Alumno(a):

Grupo: ___________ Calificación: ___________

Profesor: ______________________________ EXAMEN "XX"

No se permite el uso de calculadora ni de ningún tipo de formulario.
Resolver sólo cuatro problemas. Por favor apague su … celular.

Problema 1:

Encuentre las series de Fourier compleja y trigonométrica de la función:

$$f(t) = sen(t/2) \quad en \quad -\pi \le t \le \pi\,,$$

tal que $f(t+2\pi) = f(t)$.

Problema 2:

Si $x = x(t)$ y $h = h(t)$ como se muestran en las figuras. Calcule $g(t) = x(t) * h(t)$, ilustrando geométricamente los pasos que se siguen en el procedimiento de Convolución.

Problema 3:

a) Calcule la Transformada de Fourier de la función signo definida por:

$$Sg(t) = \frac{|t|}{t}$$

Sugerencia: Obsérvese que esta función no es absolutamente integrable.

b) Aplique el resultado obtenido en el inciso a) para encontrar la transformada de Fourier de la función de Heaviside.

Problema 4:

a) Muestra la siguiente propiedad de la función delta de Dirac

$$\delta(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(xy)dx$$

b) Determine la Transformada de Fourier de la función $sen^3(w_0 t)$.

Problema 5:

Si $f(t) = 3sen(\pi t)H(t)$ y $g(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$ calcule la convolución $g(t) = f(t) * g(t)$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
3era EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a):

junio de 2016

Grupo: ___________ Calificación: ___________

Profesor: ___________________________________ EXAMEN "XXX"

No se permite el uso de calculadora ni de ningún tipo de formulario
Resolver solo cuatro problemas. Por favor apague su ... celular.

Problema 1:

Encuentre las series de Fourier compleja y trigonométrica de la función:

$$f(t) = e^{-t} \quad si \quad 0 < t < 5,$$

tal que $f(t+5) = f(t)$, (grafique la función).

Problema 2:

Si $x = x(t)$ y $h = h(t)$ como se muestran en las figuras. Calcule $g(t) = x(t) * h(t)$, ilustrando geométricamente los pasos que se siguen en el procedimiento de Convolución.

Problema 3:

a) Calcule la Transformada de Fourier de la función signo definida por:

$$Sg(t) = \frac{|t|}{t}$$

Sugerencia: Obsérvese que esta función no es absolutamente integrable.

b) Aplique el resultado obtenido en el inciso a) para encontrar la transformada de Fourier de la función de Heaviside.

Problema 4:

a) Muestra la siguiente propiedad de la función delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(xy)dx = 2\pi\delta(y)$$

b) Determine la Transformada de Fourier de la función $\cos^3(w_0 t)$.

Problema 5:

Si $f(t) = 3sen(\pi t)H(t)$ y $g(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$ calcule la convolución $g(t) = f(t) * g(t)$

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO DEL IPN

TERCERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a):

Grupo: _______ 14 de diciembre de 2016

Profesor: ____ *examen tipo "XXX"*

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
POR FAVOR APAGUE SU … CELULAR.

RESOLVER SOLO TRES PROBLEMAS, DIJE 3.

1.- Encuentre la serie de Fourier de la función $f(t) = t[sen(t)]$ definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$

2.-

a) Demuestre la siguiente ecuación de la función delta

$$2\pi\delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} dx$$

b) Determine la Transformada de Fourier de la función $f(t) = sen(w_0 t)$.

c) Enuncie y demuestre el Teorema de Convolución en el tiempo.

3.- Dadas las funciones,

$$f(t) = Asen(\pi t)H(t)$$
$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$$

calcular $g(t) = f(t) * h(t)$. Grafique cada una de las funciones, así como el resultado final de la Convolución.

4.- a) si $f_d(t) = \begin{cases} 1; & si \quad |t| < \dfrac{d}{2} \\ 0; & si \quad |t| > \dfrac{d}{2} \end{cases}$ muestre que $F\{f_d(t)\} = F(w) = d\,\dfrac{sen(wd/2)}{wd/2}$

b) Aplique el teorema de Convolución para encontrar la transformada inversa de la función

$$F(w) = \frac{sen(5w)}{w(2+jw)}$$

5.- Calcule $h(t) = g(t) * f(t)$, ilustrando geométricamente los pasos que se siguen en el procedimiento de convolución. Grafique $h(t)$.