ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO DEL IPN

TERCERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a): Grupo: _______ 14 de diciembre de 2016

Profesor: ________________________________ *examen tipo "XXX"*

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
POR FAVOR APAGUE SU … CELULAR.

RESOLVER SOLO TRES PROBLEMAS, DIJE 3.

1.- Encuentre la serie de Fourier compleja de la función $f(t) = sen^3(t)$ definida en el intervalo $(0, \pi)$ tal que $f(t) = f(t+\pi)$

2.-

a) Demuestre la siguiente ecuación de la función delta

$$2\pi\delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy}\,dx$$

b) Determine la Transformada de Fourier de la función $f(t) = \cos(w_0 t)$.

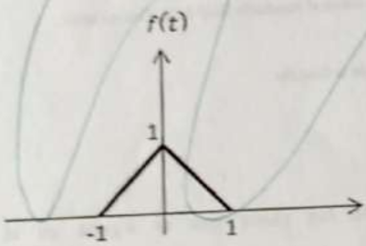
c) Enuncie y demuestre el Teorema de Convolución en el tiempo.

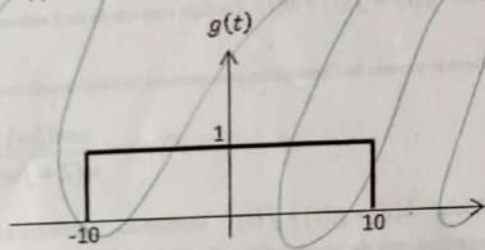
3.- Probar que

a) $F\{H(t)\} = \pi\delta(w) + \dfrac{1}{iw}$

b) Explique porqué la transformada de Fourier de la función de Heaviside $F\{H(t)\} = \dfrac{1}{iw}$ es incorrecta.

4.- Calcule $h(t) = g(t) * f(t)$, ilustrando geométricamente los pasos que se siguen en el procedimiento de convolución. Grafique $h(t)$.





5.- a) si $f_d(t) = \begin{cases} 1; & si \quad |t| < \dfrac{d}{2} \\ 0; & si \quad |t| > \dfrac{d}{2} \end{cases}$ muestre que $F\{f_d(t)\} = F(w) = d\,\dfrac{sen(wd/2)}{wd/2}$

b) Aplique el teorema de Convolución para encontrar la transformada inversa de la función

$$F(w) = \frac{sen(2w)}{5w(4+jw)}$$

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO DEL IPN
TERCERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a): Grupo: _______ 15 de diciembre de 2016

examen tipo "XXX"

Profesor: ______________________________

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
POR FAVOR APAGUE SU ... CELULAR.

RESOLVER SOLO CUATRO PROBLEMAS, DIJE 4.

1.- Encuentre la serie de Fourier de la función $f(t) = t[sen(t)]$ definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$

2.-

a) Demuestre la siguiente ecuación de la función delta

$$2\pi\delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy}\, dx$$

b) Determine la Transformada de Fourier de la función $f(t) = sen^2(w_0 t)$.

c) Enuncie y demuestre el Teorema de Convolución en el tiempo.

3.- Dadas las funciones,

$$f(t) = sen(\pi t)H(t)$$
$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-4)$$

calcular $g(t) = f(t) * h(t)$. Grafique cada una de las funciones, así como el resultado final de la Convolución.

4.- Aplique el teorema de Convolución para encontrar la transformada inversa de la función

$$F(w) = \frac{sen(5w)}{w(2 + jw)}$$

5.- Calcule $h(t) = g(t) * f(t)$, ilustrando geométricamente los pasos que se siguen en el procedimiento de convolución. Grafique $h(t)$.

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO DEL IPN

TERCERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

15 de diciembre de 2016

Grupo: ________ *examen tipo "XXX"*

Alumno(a): ______________________________

Profesor: ______________________________

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.

POR FAVOR APAGUE SU ... CELULAR.

RESOLVER SOLO CUATRO PROBLEMAS, DIJE 4.

1.- Encuentre la serie de Fourier compleja de la función $f(t) = sen^4(t)$ definida en el intervalo $(0, \pi)$ tal que $f(t) = f(t+\pi)$

2.- a) Demuestre la siguiente ecuación de la función delta

$$2\pi\delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy}dx$$

b) Determine la Transformada de Fourier de la función $f(t) = \cos^2(w_0 t)$.

c) Enuncie y demuestre el Teorema de Convolución en el tiempo.

3.- Probar que

a) $F\{H(t)\} = \pi\delta(w) + \dfrac{1}{iw}$

b) Explique porqué la transformada de Fourier de la función de Heaviside $F\{H(t)\} = \dfrac{1}{iw}$ es incorrecta.

4.- Calcule $h(t) = g(t) * f(t)$, ilustrando geométricamente los pasos que se siguen en el procedimiento de convolución. Grafique $h(t)$.

5.- Aplique el teorema de Convolución para encontrar la transformada inversa de la función

$$F(w) = \frac{sen(w)}{2w(5 + jw)}$$

Guía de problemas para el examen extraordinario de Métodos Matemáticos

1. Encuentre la serie de Fourier compleja de las siguientes funciones:

   (a) $f(t) = t^2$, para $0 \leq t < 2$; tal que $f(t+2) = f(t)$.

   (b) $f(t) = 1 - t$, para $0 \leq t < 6$; tal que $f(t+6) = f(t)$.

   (c) $f(t) = e^{-t}$, para $0 < t < 5$; tal que $f(t+5) = f(t)$.

2. Encontrar los coeficientes complejos Z_n de Fourier y dibujar los espectros de frecuencia para la función diente de sierra definida por:

$$f(t) = -\frac{1}{T}t + \frac{1}{2},$$

para $0 < t < T$ y $f(t+T) = f(t)$.

3. Pruebe que la serie de Fourier que representa la función periódica $f(t)$ definida por,

$$f(t) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ (t-\pi)^2 & \text{si } 0 < t < \pi, \end{cases}$$

tal que $f(t) = f(t + 2\pi)$ es:

$$f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2}\cos(nt) + \frac{(-1)^n}{n}\pi\sin(nt)\right] - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)^3}.$$

Utilice este resultado para probar que:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

4. Una función periódica $f(t)$ de periodo 2π está definida dentro del dominio $0 \leq t < \pi$ por,

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de $f(t)$ para $-2\pi < t < 4\pi$ en ambos casos donde

(a) $f(t)$ es una función par

(b) $f(t)$ es una función impar.

Encuentre la expansión en serie de Fourier que representa la función **par** para todo valor de t, y úsela para probar que,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. Una cuerda uniforme y flexible está firmemente estirada y tiene sus extremos fijos en los puntos $x = 0$ y $x = L$. El punto medio de la cuerda está desplazado a una distancia a como se muestra en la figura. Si $f(t)$ denota el perfil de desplazamiento de la cuerda, exprese $f(t)$ como una expansión en la serie de Fourier que solamente está formada por términos **senos**.

6. Una cuerda uniforme y flexible está firmemente estirada y tiene sus extremos fijos en los puntos $x = 0$ y $x = L$. El punto medio de la cuerda está desplazado a una distancia a como se muestra en la figura. Si $f(t)$ denota el perfil de desplazamiento de la cuerda, exprese $f(t)$ como una expansión en la serie de Fourier que solamente está formada por términos **senos**.

7. Pruebe que la forma compleja de la expansión de serie de Fourier de la función periódica $f(t) = t^2$, $(-\pi < t < \pi)$, tal que $f(t) = f(t + 2\pi)$, está dada por,

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2}(-1)^n e^{jnt}$$

De la serie anterior, obtenga la serie trigonométrica correspondiente.

8. (a) Obenga la forma compleja de la expansión en serie de Fourier de la onda cuadrada,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < t < 0 \\ \pi & \text{si } 0 < t < 2. \end{cases}$$

tal que $f(t) = f(t + 4)$. Obtenga también la serie de Fourier trigonométrica correspondiente.

(b) Usando los coeficientes de Fourier de $f(t)$ y el Teorema de Parselval que establece:

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4}(a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n)^2 + (b_n)^2\right]$$

pruebe que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

9. Pruebe que la expansión es serie de Fourier de la función periódica $f(t) = 500\pi t$ para $0 < t < \frac{1}{50}$ y $f(t) = f\left(t + \frac{1}{50}\right)$, puede expresarse como,

$$f(t) = 5\pi - 10\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(100n\pi t)$$

10. Una función periódica $f(t)$ de periodo 2π está definida en $-\pi \le t \le \pi$ por,

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{si } -\pi \le t \le 0 \\ t & \text{si } 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Obtener la expansión en serie de Fourier para $f(t)$ y, a partir de ella y usando el teorema de Parserval que establece

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4}(a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n)^2 + (b_n)^2\right]$$

pruebe que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1)^4} = \frac{\pi^2}{96}$$

11. Una función periódica $f(t)$ de periodo 2π está definida en el rango $-\pi < t < \pi$ por,

$$f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Pruebe que la forma compleja de la expansión en serie de Fourier para $f(t)$ es,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j4n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} e^{jnt}$$

12. Dada la función $f(t) = t$ para $0 < t < 2$, encuentre la expansión en serie de Fourier,

(a) Con solamente términos **senos**

(b) Con solamente términos **cosenos**

Dibuje en casa caso la extensión par e impar de la función en el intevalo $-6 < t < 6$.

13. Evalúe las siguientes integrales,

(a)

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z-\pi} dz$$

(b)

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z(z+1)} dz$$

donde γ está dado por $|z-1| = 3$.

14. Evalúe la siguiente integral,

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$$

donde γ está dado por:

(a) $|z| = 3/2$

(b) $|z| = 10$

15. Evalúe las siguientes integrales,

(a)

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos \pi z}{z-1} dz$$

(b)

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z + z}{(z-1)^4} dz$$

donde γ es cualquier contorne cerrado simple que comprende $z = 1$.

16. (a) Calcule la siguiente integral

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n}$$

donde γ es un contorne cerrado simple que encierra al punto z_0 y n es un número entero.

(b) Aplique el resultado del inciso anterior para calcular las siguientes integrales:

i.

$$\oint_C \frac{dz}{(z-2-j)}$$

donde C está dado por $|z| = 5$

ii.

$$\oint_C \frac{zdz}{(z-1)(z+2j)}$$

donde C es cualquier contorno cerrado simple que contenga a ambos puntos $z = 1$ y $z = -2j$.

17. Evalúe las siguientes integrales de contorno

(a)

$$\oint_C \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}dz$$

donde C está dado por $|z| = 1$

(b)

$$\oint_C \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2}dz$$

donde C está dado por $|z| = 3$

18. Calcule la siguiente integral

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^3-z^4}$$

donde γ esta definida por $|z| = \frac{1}{2}$.

(a) Aplicando el Teorema del Residuo, y

(b) Aplicando el Teorema de Cauchy.

19. Calcule la siguiente integral

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^4},$$

donde γ, es el círculo $|z| = 2$ en sentido positivo.

(a) Aplicando el Teorema del Residuo, y

(b) Aplicando el Teorema de Cauchy.

20. Calcule la siguiente integral

$$\oint_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+i)^4},$$

donde γ es cualquier contorno cerrado que encierra a $-i$.

(a) Aplicando el Teorema del Residuo, y

(b) Aplicando el Teorema de Cauchy.

21. Calcule la siguiente integral

$$\oint_\gamma \frac{e^{2z}}{(z-1)^3},$$

donde γ, es cualquier contorno cerrado simple que encierra a 1.

(a) Aplicando el Teorema del Residuo, y

(b) Aplicando el Teorema de Cauchy.

22. Calcule la siguiente integral

$$\oint_\gamma \frac{e^{z}}{(z^2+\pi^2)^2},$$

donde γ, es el círculo $|z|=4$ en sentido positivo.

23. Calcule la integral

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3+z},$$

donde γ, está dada por:

(a)

$$|z|=2$$

(b)

$$|z|=\frac{1}{2}$$

(c)

$$\left|z-\frac{i}{2}\right|=1$$

24. Evalúe la integral

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)},$$

donde γ, es cualquier contorno cerrado simple, talque

(a) Si a y b están en el interior de γ

(b) Si a está en el interior de γ y b en el exterior

(c) Si b está en el interior de γ y a en el exterior.

Justifique claramente sus respuestas en todos los casos.

25. Determinar la validez del siguiente par de transformadas

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & \text{para } |t| < \tau \\ 0 & \text{para } |t| > \tau, \end{cases}$$

(b)

$$F(w) = \tau \left[\frac{\sin(\frac{w\tau}{2})}{\frac{w\tau}{2}} \right]^2$$

26. Hallar la convolución de las siguientes funciones,

27. Determinar la transformada de Fourier de la función que se muestra en la siguiente figura,

28. Para las funciones que se muestran en la figura, Calcular

(a) $f_1(t) * f_1(t)$.
(b) $f_2(t) * f_2(t)$.
(c) $f_3(t) * f_3(t)$.
(d) $f_1(t) * f_2(t)$.
(e) $f_1(t) * f_3(t)$.
(f) $f_2(t) * f_3(t)$.

29. Evalúe las siguientes integrales de convolución, (claro que puede aplicar el teorema de convolución).

(a) $H(t) * e^{-t}H(t)$.
(b) $e^{-at}H(t) * e^{-bt}H(t)$.

Atentamente: Profesor Marco A. Barranco-Jiménez

a) $$\sum_{j=1}^{n} \cos(j\theta) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{sen[(n+1/2)\theta]}{sen(\theta/2)}\right\}$$

b) $$\sum_{j=1}^{n} sen(j\theta) = \frac{sen(n\theta/2)sen[(n+1/2)\theta]}{sen(\theta/2)}$$

5.- Demostrar que la ecuación de una circunferencia o recta en el plano z, se puede escribir de la forma $\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$, donde α y γ son constantes reales, mientras que β puede ser una constante compleja.

6.- Si n=2, 3, 4, ... , probar que:

a) $Cos(2\pi/n) + Cos(4\pi/n) + Cos(6\pi/n) + \cdots + Cos(2(n-1)\pi/n) = -1$

b) $Sen(2\pi/n) + Sen(4\pi/n) + Sen(6\pi/n) + \cdots + Sen(2(n-1)\pi/n) = 0$

Sugerencia: Considere el siguiente resultado, " La suma y producto de todas las raíces de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-2}z^2 + a_{n-1}z + a_n = 0$, donde $a_0 \neq 0$, son $-a_1/a_0$ y $(-1)^n a_n/a_0$ respectivamente", es decir;

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -a_1/a_0 \quad y \quad z_1 z_2 \cdots z_n = (-)^n a_n/a_0$$

Encuentre las raíces n-ésimas de la unidad y aplique el resultado anterior.

7.- a) La función $w = iz + 4 - 3i$ es una combinación de translación y rotación. Encuentre la imagen de la recta $6x + y = 22$ en el plano w bajo este mapeo.

b) Bajo el mapeo $w = iz + i$, demuestra que el semiplano $x > 0$ del plano z se mapea en el semiplano $v > 1$ del plano w.

c) Encuentre las imágenes de las siguientes curvas bajo el mapeo $w = (i + \sqrt{3})z + i - 1\sqrt{3}$: i) $x = 0$, ii) $x^2 + y^2 = 1$ y iii) $x^2 + y^2 + 2y = 1$.

d) Bajo el mapeo $w = (z+i)/(z-3)$, encuentre la imagen correspondiente de $3x + y = 4$ del plano z en el plano w.

e) Si $w = (z-i)/(z+i)$, encuentre y dibuje la imagen en el plano w correspondiente al círculo $|z| = 2$ en el plano z.

f) Si $w = (z+1)/(z-1)$ encuentre la imagen de los ejes coordenados (x=0 e y=0).

7

Lista 1 de problemas de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

(grupos: 2CV4 & 2CV5)

Profesor: Marco A. Barranco-Jiménez

1.- a) Demuestre el teorema de De Moivre que establece que $(\cos\theta + isen\theta)^n = \cos(n\theta) + isen(n\theta)$ donde $n \in Z$.

b) Encuentre las partes real e imaginaria de los complejos,

i).- $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}}\right)^{60}$, ii).- $(1+i)^{1050}$, iii).- $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{2000}$ iiii).- $(\sqrt{3}+i)^4$

c) Encuentre el valor de x e y que satisfacen las siguientes ecuaciones:

i) $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(2+2i) = 5+6i$

ii) $\frac{1}{z-i} + \frac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}$

d) Demostrar que $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2|\cdots|z_n|$.

2.- Represente el lugar geométrico del conjunto de valores de z que satisfacen:

a).- $|z-2i| = |z+1-3i|$ b).- $|z-1| = 2|z+i|$ c).- $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$

d).- $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$ e).- $\left|\frac{z-i}{z+3-2i}\right| = 3$ f).- $\left|\frac{z+1}{1-z}\right| = k \quad talque \quad k \in R.$

g).- $|z+3| + |z-3| = 10$ h).- $|z+2| + |z-2| = 6$

3.- a) Encontrar todos los valores de z, y localizarlos en el plano complejo si

i) $z^3 + 1 = 0$ cuaderno viejo ii) $z^4 = -16$ iii) $z^5 + 1 = 0$ iv) $z^5 - i = 0$

v) $z^8 - i = 0$ vi) $z^8 = 1$ vii) $z^6 + i = 0$ viii) $z^6 + 1 = 0$

4.- Probar las siguientes identidades trigonométricas (Identidades de Lagrange),

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
PRIMERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a): 07/03/2017

Número de Boleta:_________ Grupo (consentido): _____ Calificación: ______

Profesor:____

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA. RESOLVER SÓLO TRES PROBLEMAS, DIJE TRES. Por favor apague su ... celular.

1.- a) Encontrar todos los valores de z, y localizarlos en el plano complejo si
i) **(Fila izquierda)** $z^3 + 8i = 0$ ii) **(Fila derecha)** $z^4 + 4 = 0$.

b) i) **(Fila izquierda)** Dada $u(x,y) = e^{-y}(x \cdot \cos x - y \cdot senx)$, encuentre una función $v(x,y)$ tal que la función $f(z) = u + iv$ sea analítica.

ii) **(Fila derecha)** Dada $v(x,y) = e^{-y}(y \cdot \cos x + x \cdot senx)$, encuentre una función $u(x,y)$ tal que la función $f(z) = u + iv$ sea analítica.

c) Para la función encontrada en el inciso b), calcule la $f'(z) = \dfrac{df}{dz}$ y exprese la función $f(z)$ y la derivada en términos de la variable z (**ambas filas**).

2.- $(x^2 + a$

i) **(Fila izquierda)** Muestre bajo qué condiciones, el mapeo de inversión $w = \dfrac{1}{z}$ mapea círculos del plano z en rectas o círculos en el plano w.

ii) **(Fila derecha)** Muestre bajo qué condiciones, el mapeo de inversión $w = \dfrac{1}{z}$ mapea rectas del plano z en rectas o círculos en el plano w.

3.- Para el mapeo $w = \dfrac{z+i}{z+1}$ encuentre las imágenes en el plano w de,

i) **(Fila izquierda)** $y = x + 1$ &

ii) **(Fila derecha)** $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

4.- Muestre que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares están dadas por (**ambas filas**):

$$u_r = \frac{v_\theta}{r} \quad \& \quad v_r = -\frac{u_\theta}{r}$$

1er EXAMEN DEPARTAMENTAL MATEMÁTICAS AVANZADAS (6)

ALUMNO: TIPO: 5

INSTRUCCIONES: NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA Y/O DISPOSITIVO MÓVIL Y/O FORMULARIO. CADA PROBLEMA TIENE UN PESO DE DOS PUNTOS.

1. Resolver la ecuación

$$\frac{z^4}{3} + z^3 + z^2 + z = 0$$

2. Resolver las ecuaciones siguientes

a): $a^{2z} + 2a^{z} - 3 = 0$

b): $\ln(z^2 + 2z + 1) = 0$

3. Expresar los siguientes números complejos en la forma trigonométrica

a): $1 - \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

b): $\dfrac{1 + \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha}$

4. Utilizando la definición del límite, mostrar que

a): $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{2z+1}{z+2} = 1$; b) $\lim\limits_{z \to -\frac{\pi}{2} i} \dfrac{e^{2z}+1}{e^{z}+i}$

5. Utilizando Cauchy-Riemann, indique si es analítica por lo menos en un punto

a): $w = |z| \operatorname{Im} z$ b): $w = \operatorname{ch} z$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
2da Evaluación de MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno (a):

Número de Boleta:____________________ Grupo:______________ Calificación__________

Profesor:____ EXAMEN "XXX"

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA NI COSA PARECIDA. El problema 3 es OBLIGATORIO, resolver solamente 3 problemas.

~~1.-~~ a) Demostrar que $v(x,y)=3x^2y-y^3$ es armónica. Encuentre una función $u(x,y)$ tal que $f(z)=u+iv$ sea analítica.

b) Calcule la $f'(z)=\dfrac{df}{dz}$ y exprese la función $f(z)$ y la derivada en términos de la variable z.

R 2.- Encuentre los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie de Taylor de la siguiente función alrededor del punto indicado.

$$f(z)=\frac{3}{(z+1)(z-i)},\ \text{en } z_0=2i.$$

3.- Calcule la siguiente integral

$$\int_\gamma \frac{z^2+z}{(z-i)^4(z+i)^4}dz$$

Siendo γ cualquier contorno cerrado que encierre a una singularidad.

<u>NO USAR LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY</u>, *<u>APLIQUE EL TEOREMA DEL RESIDUO, CALCULANDO EL RESIDUO HACIENDO EL DESARROLLO EN SERIES LAURENT RESPECTIVO.</u>*

4.- a) Calcule la integral $\int_\gamma f(z)dz$, donde $f(z)=\dfrac{e^z+z}{z^2(z-4)^4}$ y γ está dado por:

a) $|z-j|\le 1/2$.

b) $|z|<2$.

Justifique correctamente sus resultados.

b) Calcular la siguiente integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(\lambda+sen\theta)^2}$

5.- calcule la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n}$, donde γ está dado por $|z-a|=b$.

a) Si n es cualquier entero distinto de 1.

b) Si $n=1$.

c) Resolver la siguiente integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

NOMBRE:[redacted]. CALIF:________
INSTRUCCIONES: RESOLVER LO CINCO PROBLEMAS.

USAR TABLAS QUE SÓLO CONTENGAN TRANSFORMADA DE FOURIER.
FAVOR DE APAGAR SU TELEFONO CELULAR.

1.- Calcular las transformadas de Fourier de:

1 . $4H(t-2)e^{-3t}\cos(t-2)$

2 .. $k[H(t-a)-H(t-b)]$

3 ... $\dfrac{\sin(3t)}{4+t^2}$

2.- Calcular las transformadas inversas de Fourier de:

. $\dfrac{4e^{(2\omega-6)i}}{5-(3-\omega)i}$

.. $\dfrac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}$

... $e^{-3|\omega+4|}\cos(2\omega+8)$

3.-Encontrar la serie de Fourier para la funcion $f(t)$ definida por

$$f(t)=\left\{\begin{array}{c} -1, \text{ si } -\frac{T}{2}<t<0 \\ \\ 1, \text{ si } 0<t<\frac{T}{2} \end{array}\right\}$$

y $f(t+T)=f(t)$.

4.- Resolver la Ecuación Diferencial parcial usando transformada de Fuorier:

$$u_{tt}(x,t)=16u_{xx}(x,t) \qquad (-\infty<x<\infty, t>0); u(x,0)=8e^{-3x^2}, u_t(x,0)=0$$

5.- Resuelva la Ecuación Diferencial Parcial

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

con las siguientes condiciones $(0<x<L, t>0)$
$\psi(0,t)=\psi(L,t)=0$ & $\psi(x,0)=x$.

moa

14 de Nov

2do Examen Departamental de

Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Nombre del Alumno ______________________________ Grupo______

1.- a) Evalue la sig. integral $\int y\,dz$, a lo largo del círculo $|z|<1$

b) Dado $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2+1}$, encuentre los residuos

c) Dado $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z}}$, encuentre el residuo

2.- a) Si $f(z) = \dfrac{z}{z^2+z-2}$, encuentre su serie de Laurent para

i) $0<|z-1|<3$, ii) $0<|z+2|<3$

b) Aplicando el Teorema del Residuo, calcular

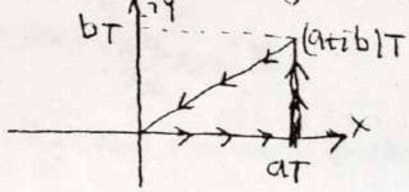
$$\int_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{\operatorname{Sen} z}{z^3+z}\,dz$$

3.- Muestre que

$$\int_0^T \operatorname{Sen}(at)\operatorname{Cosh}(bt)\,dt = \frac{b\operatorname{Sen}(aT)\operatorname{Senh}(bT) - a\operatorname{Cos}(aT)\operatorname{Cosh}(bT) + a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^T \operatorname{Cos}(at)\operatorname{Senh}(bt)\,dt = \frac{b\operatorname{Cos}(aT)\operatorname{Cosh}(bT) + a\operatorname{Sen}(aT)\operatorname{Senh}(bT) - b}{a^2+b^2}$$

si integra $f(z) = \operatorname{Sen}(z)$ a lo largo de la trayectoria



4.- Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{Cos}(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}+1}$; $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{Sen}(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}-1}$

cuando integra $f(z) = e^{-z^2}$ a lo largo de la frontera del Sector

$0 \le |z| \le R$ y $0 \le \operatorname{Arg}(z) \le \frac{\pi}{8}$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
PRIMER EXAMEN DEPARTAMENTAL

INSTRUCCIONES:

RESOLVER LOS 5 PROBLEMAS.
SE PROHIBE EL USO DE CALCULADORA,
NOTAS Y/O FORMULARIOS.
FAVOR DE APAGAR SU TELEFONO CELULAR.
NOMBRE:______________________________________. CALIF:________

1.- a)Demuestre las sigueinte identidad trigonometrica usando la identidad de Euler.

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

b) Encuentre las raíces cúbicas de $(1 - i)$

2.- Escriba a la función como un numero complejo de la forma $a + ib$ donde a y b son numeros reales

$$1.- \tan(2i)$$
$$2.- \sin(e^i)$$
$$3.- (1+i)^{(1+i)}$$

3.- Determine el lugar geométrico de los puntos que satisface

$$|z + 2i| = |z + 1 - 3i|$$

4.- Demuestre que

$$\sum_{j=1}^{n} z^j = \frac{1 - \cos((n+1)\theta) - i\sin((n+1)\theta)}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$$

5.-Utilize la defición de límite para la derivada, para evaluar $f'(z_0)$ o para probar que $f'(z_0)$ no existe

$$f(z) = \frac{z}{1+z}; z_0 = 2$$
$$f(z) = i + \mathrm{Re}(z) z_0 = 4 + 7i$$

MOA

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
SEGUNDO DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA
INSTRUCCIONES: SE PROHÍBE EL USO DE CALCULADORA, NOTAS Y/O APUNTES.
FAVOR DE APAGAR SU CELULAR.

NOMBRE:____________________________________. CALIF:________

1.-a.- Evalúe $\int_C f(z)dz$ para la función la trayectoria indicada,en este problema puede involucrar el teorema de Cauchy, las fórmulas integrales de Cauchy, y/o los teoremas de deformación.
$f(z) = \mathrm{Re}(z+4); C$: es el segmento de recta de $3+i$ a $2-5i$.

b.-Evalúe $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$.
Sugerencia: Considere $\int_C \frac{e^z dz}{z}$, con C el círculo unitario alrededor del origen. Evalúe esta integral una vez usando la fórmula de la integral de Cauchy, después otra vez directamente usando las funciones coordenadas para C.

2.- Desarrolle $\frac{1}{(1+z)^2}$ en una serie de Taylor alrededor de $-i$.

3.- Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2-25}dx$$

4.- Calcular

$$\int_o^{2\pi} \frac{d\theta}{6+\cos(\theta)}$$

5.- Considere la función $(z^2-3z+2)^{-1}$. Es analítica en todas partes, excepto en $z = 1, 2$. Encuentre su serie de Laurent en las regiones $(a)\ 1 < |z| < 2, (b)\ |z| < 1,\ (c)\ |z-1| < 1$.

MOA.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

NOMBRE:____________________________________. CALIF:________
INSTRUCCIONES: RESOLVER LO CINCO PROBLEMAS.

USAR TABLAS QUE SÓLO CONTENGAN TRANSFORMADA DE FOURIER.
FAVOR DE APAGAR SU TELEFONO CELULAR.

1.- Calcular las transformadas de Fourier de:

$$.4H(t-2)e^{-3t}\cos(t-2)$$
$$..k[H(t-a)-H(t-b)]$$
$$...\frac{\sin(3t)}{4+t^2}$$

2.- Calcular las transformadas inversas de Fourier de:

$$.\frac{4e^{(2\omega-6)i}}{5-(3-\omega)i}$$
$$..\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}$$
$$...e^{-3|\omega+4|}\cos(2\omega+8)$$

3.-Encontrar la serie de Fourier para la funcion $f(t)$ definida por

$$f(t)=\left\{\begin{array}{c} -1,\ \text{si } -\frac{T}{2}<t<0 \\ \\ 1,\ \text{si } 0<t<\frac{T}{2} \end{array}\right\}$$

y $f(t+T)=f(t)$.

4.- Resolver la Ecuación Diferencial parcial usando transformada de Fuorier:

$$u_{tt}(x,t)=16u_{xx}(x,t)\qquad(-\infty<x<\infty,t>0);u(x,0)=8e^{-3x^2},u_t(x,0)=0$$

5.- Resuelva la Ecuación Diferencial Parcial

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

con las siguientes condiciones $(0<x<L,t>0)$
$\psi(0,t)=\psi(L,t)=0$ & $\psi(x,0)=x$.

moa

Ciudad de México, 19 de septiembre 20

Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Cómputo.

Academia de Ciencias Básicas.

Primer Examen Departamental de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería.

Grupo 2CM6.

$$v(x,y) = Imf(z)$$

Nombre.__________________________________.

1.- Si $z_1 = \frac{5}{2}(-1-i)$, $z_2 = \frac{2}{5}(-1+i)$. Escriba la parte real y la parte imaginaria del número complejo $w = z_1^5 z_2^5$.

2.- Determine todas las soluciones de la ecuación $4w^2 + 4w + i = 0$. Exprese la respuesta en la forma $a + ib$.

3.- Describa con sus propias palabras y en forma geométrica la región del plano complejo que corresponde a la desigualdad

$$Re\left(\frac{1}{z-1}\right) > 1$$

4.-(a) Encuentre la derivada de la función $f(z) = (y+1)^2 + i(x+1)^2$. (b) ¿En que región del plano complejo es $f(z)$ analítica? (C) ¿Es $f(z)$ una función entera? Justifique sus respuestas.

5.- Evalúe la integral $\int_C \bar{z} dz$, donde C es la trayectoria que va del punto $z_1 = 1$ al punto $z_2 = i$, sobre la parábola $y = (1-x)^2$

Ciudad de México, 19 septiembre 2016.

Instituto Politécnico Nacional Escuela Superior de Cómputo.

Academia de Ciencias Básicas.

Primer Examen Departamental de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería.

Grupo 2CM6.

$$u(x,y) = Ref(z)$$

Nombre.________________________________.

1.- Si $z_1 = \frac{5}{2}(1+i)$, $z_2 = \frac{2}{5}(1-i)$. Escriba la parte real y la parte imaginaria del número complejo $w = z_1^5 z_2^5$.

2.- Determine todas las soluciones de la ecuación $w^4 - 2\sqrt{3}w^2 + 4 = 0$. Exprese la respuesta en la forma $a + ib$.

3.- Describa con sus propias palabras y en forma geométrica la región del plano complejo que corresponde a la desigualdad

$$Re\left(\frac{1}{z-1}\right) \leq 1$$

4.-(a) Encuentre la derivada de la función $f(z) = y + (x-1)^2 + i[(y-1)^3 - x]$. (b) ¿En que región del plano complejo es $f(z)$ analítica? (C) ¿Es $f(z)$ una función entera? Justifique sus respuestas.

5.- Evalúe la integral $\int_C \bar{z}dz$, donde C es la trayectoria que va del punto $z_1 = i$ al punto $z_2 = 1$, sobre la parábola $y = (1-x)^2$

Ciudad de México, 27 octubre

INSTTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

Academia de Ciencias Básicas.

Segundo Examen Ordinario de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería.

Grupo 2CM6.

Nombre.____.

1. Calcular la integral

$$\oint_C \frac{Lnz}{z^2 - z + 1/2}dz,$$

donde C es el círculo $|z - z_0| = 1$ en sentido positivo, $z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

2. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor de $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ alrededor de $z = 1$

3. Sea $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$. Desarrolle $f(z)$ en potencias de $(z - 1)$ que sea válida en un dominio anular que contenga el punto $w = 2 + 2i$. Determine el dominio de validez y proporciones una fórmula explícita para el n-ésimo término de la serie.

4. Hallar el valor de la integral

$$\oint_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)}dz,$$

En sentido positivo a lo largo del círculo $|z - 2| = 2$

5. Evaluar la siguiente integral.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta}.$$

Considere $|a| < 1$

Ciudad de México, 27 octubre 2016.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

Academia de Ciencias Básicas.

Segundo Examen Ordinario de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería.

Grupo 2CM5.

Nombre.____________________________________.

1. Calcular la integral

$$\oint_C \frac{Lnz}{z^2 - z + 1/2} dz,$$

donde C es el círculo $|z - z_0| = 1$ en sentido positivo, $z_0 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

2. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor de $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$ alrededor de $z = -1$

3. Desarrolle la función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+3)}$ en el dominio $1 < |z| < 3$.

4. Hallar el valor de la integral

$$\oint_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz,$$

En sentido positivo a lo largo del círculo $|z|=4$.

5. Evaluar la siguiente integral.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a sen\theta}.$$

Considere $|a| < 1$

Ciudad de México, 12 diciem

\ }

Instituto Politécnico Nacional Escuela Superior de Cómputo

Academia de Ciencias Básicas

Tercer Examen Ordinario de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Grupo 2CM6

$$x(t) * y(t)$$

Nombre.______________________________.

Resuelva cinco problemas.

1.- Dibuje las siguientes señales:

$$(a) \quad x(t) = \begin{cases} t + 10, & -10 < t < 0 \\ -t + 10, & 0 < t < 10 \end{cases}$$

$$(b) \qquad x_1(t) = x(t-5).$$

2.- Determine si la siguiente señal es periódica o no lo es. Si la señal es periódica determine su periodo fundamental.

$$x(t) = e^{j(\frac{\pi}{4}t-1)}.$$

3.- Calcule y dibuje la suma de convolución $y[n] = x[n] * h[n]$, para $n \geq 0$, donde

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] \text{ y } h[n] = u[n+2].$$

4.- Sean $\quad x(t) = u(t-2) - u(t-7) \quad y \quad h(t) = 2\{u(t+1) - u(t+2)\}.$

Calcule $\quad y(t) = x(t) * h(t).$

5.- Una señal periódica discreta $x[n]$ es de valor real y tiene un periodo fundamental $N = 5$. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero son

$$a_0 = a_{-1} = 2, \quad a_3 = a_{-3}^* = 4j.$$

Expese $x[n]$ en la forma

$$x[n] = \sum_{k=-2}^{k=2} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

6.- Use la ecuación de análisis de la transformada de Fourier para calcular las transformadas de Fourier de

a) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$

b) $y(t) = \frac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\}$

Ciudad de México, 12 diciembre 2016.

Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Cómputo

Academia de Ciencias Básicas

Tercer Examen Ordinario de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería.

Grupo 2CM6

$x[n] * y[n]$

Nombre.______________________________________.

Resuelva cinco problemas

1.- Dibuje las siguientes señales:

(a) $$x(t) = \begin{cases} t-5, & 5 < t < 15 \\ -t+25, & 15 < t < 25 \end{cases}$$

(b) $$x_1(t) = x(-t).$$

2.- Determine si la siguiente señal es periódica o no lo es. Si la señal es periódica determine su periodo fundamental.

$$x(t) = e^{j(\pi t - 3)}.$$

3.- Calcule y dibuje la suma de convolución $y[n] = x[n] * h[n]$, para $n \geq 0$, donde

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \quad y \quad h[n] = u[n+5].$$

4.- Sea $x(t) = \frac{1}{2}\{u(t-1) - u(t-5)\}$ y $h(t) = 2\{u(t+1) - u(t+2)\}$.

Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$.

5.- Para la señal periódica continua

$$x(t) = 2 + cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4sen\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

Determine los coeficientes de la serie de Fourier a_k tales que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

6.- Use la ecuación de análisis de la transformada de Fourier de señales digitales para encontrar la representación en el espacio de las frecuencias $X\left(e^{j\omega}\right)$, de las secuencias:

a) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$.
b) $y[n] = \delta[n+2] - \delta[n-2]$.

IGNACIO RÍOS DE LA TORRE

ESCOM

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO.

SEGUNDO EXAMEN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA.

A'

1. EVALUAR LA INTEGRAL $I = \int_C \bar{z}\, dz$, EN DONDE C ES LA TRAYECTORIA QUE VA DEL PUNTO $z_1 = i$ AL PUNTO $z_2 = 1$, SOBRE LA PARÁBOLA $y = (1-x)^2$.

2. PROBAR ¿QUÉ LA FUNCIÓN $f(z)$ ES ANALÍTICA?

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

3. a) HALLAR LA FUNCIÓN ARMÓNICA CONJUGADA $V = V(x,y)$ PARA:

$$u = u(x,y) = e^x \cos y.$$

b) CALCULE LA DERIVADA $f'(z)$.

4. EVALUAR LA INTEGRAL:

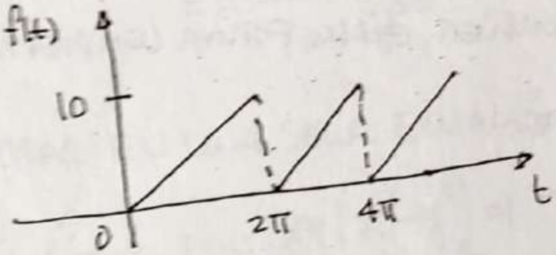
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux}{(1+x^2)^2}\, dx \text{ TAL QUE } u > 0.$$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO.

TERCER EXAMEN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA.

(1) HALLAR LA SERIE DE FOURIER EN COSENOS, PARA LA ONDA, REPRESENTADA EN LA FÍGURA SIGUIENTE:



(2) a) DEL PROBLEMA (1) DETERMINAR LA SERIE DE FOURIER COMPLEJA.

b) REDUCIR EL RESULTADO ANTERIOR A LA FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LA SERIE DE FOURIER.

(3) ENCONTRAR LA SERIE DE LAURENT, CENTRADA EN EL ORIGEN, PARA:

$$f(z) = \frac{z+i}{z^2-2iz} \quad \text{si } 0<|z|<2.$$

(4) DETERMINAR LA SERIE DE MACLAURIN PARA:

$$f(z) = e^{\operatorname{sen} z}.$$

Ignacio Ríos de la Torre.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

ESCOM

EXTRA DE MATEMÁTICAS AVANZADAS

1 Calcule la serie de Fourier de la señal f definida por:

$f(t)=t$ si $-\pi<t<\pi$ y $f(t+2\pi)=f(t)$. Graficar la señal $f(t)$.

2 a) Calcúlese la serie de Fourier, en su forma compleja, de la señal señal $f(t)=t$ si $-\pi<t<\pi$.

b) Graficar su espectro.

3 Sea la función $(z^2-3z+2)^{-1}$, determine su serie de Laurent en la región $1<|z|<2$.

4 Graficar $|z-i| = \mathrm{Im}(z)+1$.

5 Evaluar: $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{3+2\cos\theta}\,d\theta$.

IGNACIO RÍOS MC-CORM

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

PRIMER EXAMEN DE MATÉMATICAS AVANZADAS. (A)

1) EVALUAR Y REDUCIRLO A SU FORMA $x+iy$:

$$z=\frac{(2+i)^{60}}{(3+4i)^{50}}.$$

2) TRANSFORMAR EN UNA SOLA ECUACIÓN PARA $x+iy$ Y RESOLVERLA.

$x^4-6x^2y^2+y^4=4$ CON $xy(x^2-y^2)=1$ TAL QUE $x,y\in\mathbb{R}$.

3) IDENTIFIQUE TODOS LOS PUNTOS EN EL PLANO COMPLEJO LA CUAL ESTA REPRESENTADO POR:

$$|z-1|\leq|z-i|.$$

4) PROBAR QUE:

$$w=\operatorname{sen}^{-1}z=-i\ln\left[iz\pm\sqrt{1-z^2}\right].$$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

ESCOM

PRIMER EXAMEN DE MATÉMATICAS AVANZADAS. (B)

1) EVALUAR Y REDUCIRLO A SU FORMA $x+iy$:

$$z=\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{3}{2}\right)^{6}}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{3}}.$$

2) TRANSFORMAR EN UNA SOLA ECUACIÓN PARA $x+iy$ Y RESOLVERLA

$$x^4-6x^2y^2+y^4=4 \text{ CON } xy\left(x^2-y^2\right)=1 \text{ TAL QUE } x,y\in\mathbb{R}.$$

3) IDENTIFIQUE TODOS LOS PUNTOS EN EL PLANO COMPLEJO LA CUAL ESTA REPRESENTADO POR:

$$|z+1|\leq 4|z-1|.$$

4) DEMOSTRAR QUE:

$$w=\operatorname{sen}^{-1}z=-i\ln\left[iz\pm\sqrt{1-z^2}\right].$$

2do Examen Departamental de [illegible] a 14 de Nov del 2016

Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Nombre del Alumno ______________________________ Grupo______

1.- a) Evalue la sig. integral $\int y\,dz$, a lo largo del circulo $|z|<1$

b) Dado $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2+1}$, encuentre los residuos

c) Dado $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z}}$, encuentre el residuo

2.- a) Si $f(z) = \dfrac{z}{z^2+z-2}$, encuentre su serie de Laurent para

i) $0<|z-1|<3$, ii) $0<|z+2|<3$

b) Aplicando el Teorema del Residuo, calcular

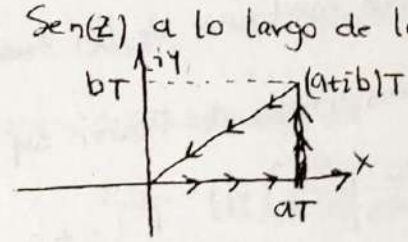
$$\int_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{\operatorname{Sen} z}{z^3+z}\,dz$$

3.- Muestre que

$$\int_0^T \operatorname{Sen}(at)\operatorname{Cosh}(bt)\,dt = \frac{b\operatorname{Sen}(aT)\operatorname{Senh}(bT) - a\operatorname{Cos}(aT)\operatorname{Cosh}(bT) + a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^T \operatorname{Cos}(at)\operatorname{Senh}(bt)\,dt = \frac{b\operatorname{Cos}(aT)\operatorname{Cosh}(bT) + a\operatorname{Sen}(aT)\operatorname{Senh}(bT) - b}{a^2+b^2}$$

si integra $f(z) = \operatorname{Sen}(z)$ a lo largo de la trayectoria



4.- Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{Cos}(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}+1}$; $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{Sen}(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}-1}$

cuando integra $f(z)= e^{-z^2}$ a lo largo de la frontera del Sector

$0\leq |z| \leq R$ y $0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{8}$

Examen extraordinario de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Nombre del Alumno ______________________ Grupo ______

1.- Expresar el sig. número complejo, en la forma $x+iy$

a).- $\left(\dfrac{1+\operatorname{Sen}\phi + i\cos\phi}{1+\operatorname{Sen}\phi - i\cos\phi}\right)^n$

b) $\left[1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})\right]^n$

2.- Demostrar que $\epsilon_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, $\epsilon_2 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ y $\epsilon_3 = 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

son raices de la ecuación cúbica $y^3+y^2-2y-1=0$

Sug: Las raices septimas de la unidad satisfacen la ecuación

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

divídase por x^3 y hágase el cambio $x+\frac{1}{x}=y$

3.- Aplicando el Teorema de Cauchy, demuestre que

i).- $\displaystyle\int_0^T \operatorname{Sen}(at)\cosh(bt)\,dt = \frac{b\operatorname{Sen}(aT)\operatorname{Senh}(bT) - a\cos(aT)\cosh(bT) + a}{a^2+b^2}$

ii).- $\displaystyle\int_0^T \cos(aT)\operatorname{Senh}(bT)\,dt = \frac{b\cos(aT)\cosh(bT) + a\operatorname{Sen}(aT)\operatorname{Senh}(bT) - b}{a^2+b^2}$

4.-a) Calcular el desarrollo en fourier de la función $f(x) = 1-x^3$, $-3 \le x \le 3$

b) Calcular las transformadas de Fourier sig.

i) $\mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{t^2+6t+13}\right\}$, ii) $\mathcal{F}\left\{4t\cos(t-2)H(t-2)e^{-3t}\right\}$

5.- Si u y v se expresan en términos de las coordenadas polares (r,θ), muestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se pueden escribir en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \neq 0$$

ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO IPN

2^{do} Examen de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Alumno:____

Instrucciones:

Resolver detalladamente cada uno de los problemas. *"No se permite el uso de Formulario ni calculadora"*, no se permite salir del salón antes de entregar su examen.

1. Usando una parametrización para γ, evalue

$$\int_\gamma z^* dz$$

donde γ es el semicirculo que une los puntos $z_0 = -2i$ y $z_1 = 2i$.

2. Verifique si $f(z) = \sqrt{(z)}$ es analítica, si lo es, encuentre la antiderivada y evalue

$$\int_C f(z)dz$$

Donde C se obseva en la figura 1.

3. Utilice el teorema de Cauchy para mostrar:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2} \quad (b > 0)$$

Sugerencia: Integre a $f(z) = e^{-z^2}$ utilizando la trayectoria presentada en la figura 2.

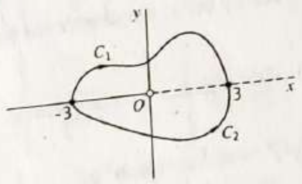


Figura 1: Contorno

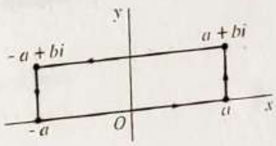


Figura 2: Contorno

4. Usando la formula integral de Cauchy muestre que

$$P_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n dz}{2^n(z-z_0)^{n+1}}.$$

Donde $P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$ son conocidos como los polinomios de Legendre.

Prof. Miguel A. González T.

28 de octubre de 2016.

ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO IPN

1^{er} Examen de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Calificación: ______________________

Alumno: ____

Instrucciones:

Resolver detalladamente cada uno de los problemas. "*No se permite el uso de Formulario ni calculadora*", no se permite salir del salón antes de entregar su examen.

1. Encuentre las raíces de la siguiente ecuación

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

Sugerencia: Las raíces séptimas de la unidad satisfacen la ecuación $x^6 + +x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. dividase por x^3 y hágase $y = x + \frac{1}{x}$.

2. a) Exprese la ecuación de la elipse con focos en 1 e i que pasa por el origen. Cual es la formula correspondiente en geometría analítica?

   b) Muestre que

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2ReZ_1z_2^*$$

3. Utilizando la definición compleja para $\sin z$ y $\cos z$, demuestre las siguientes identidades:

   a)

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

   b)

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

4. La función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica. Muestre que $f^*(z^*)$ es también analítica.

Prof. Miguel A. González T.

27 de septiembre de 2016.

* Escribir los sig. #'s complejos de la forma $a + bj$

a) $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4-\sqrt{3}\,i}\right)^2$ b) $\frac{1}{(a+bi)^2} + \frac{1}{(a-bi)^2}$

c) $3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$ $\sqrt{-1} = i$

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

2* Hallar sol. reales de las ecs.

a) $2x - 3iy + 4ix - 2y - 1 - 10i = (x+y+2) - (y-x+3)i$

b) $(3x-i)(2+i) + (x-iy)(2+2i) = 5+6i$

c) $\frac{1}{z-i} + \frac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}$

3) Represente el lugar geom. del conjunto de valores de z q' satisfacen:

a) $|z-2i| = |z+1-3i|$

b) $|z-1| = 2|z+i|$ *

c) $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$

d) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$

e) $\left|\frac{z-i}{z+3-2i}\right| = 3$

f) $\left|\frac{z+1}{1-z}\right| = k \quad | \quad k \in R$

g) $|z+3| + |z-3| = 10$

4) a) Encontrar todos los valores de z, y localizarlos en el plano complejo si

i) $z^5+32=0$ ii) $z^5=-8i$ iii) $z^5+1=0$

iv) $z^5-i=0$

5) Probar las sigts. identidades trigon. (Ident. de Lagrange),

a) $\sum_{j=1}^{n}\cos(j\theta)=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{\operatorname{sen}[(n+\frac{1}{2})\theta]}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}\right\}$

b) $\sum_{j=1}^{n}\operatorname{sen}(j\theta)=\frac{\operatorname{sen}(n\frac{\theta}{2})\operatorname{sen}[(n+\frac{1}{2})\theta]}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$

6) Demostrar q' la ec de una circ. o recta en el plano z, se puede escribir de la forma
$\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ donde α y γ son cts $\mathbb{R}$/s mientras q' β puede ser una cte compleja

7) Si $n=2,3,4,\dots$, probar q'

a) $\cos(\frac{2\pi}{n})+\cos(\frac{4\pi}{n})+\cos(\frac{6\pi}{n})+\dots+\cos(\frac{2(n-1)\pi}{n})=-1$

b) $\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{n})+\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{n})+\operatorname{sen}(\frac{6\pi}{n})+\dots+\operatorname{sen}(\frac{2(n-1)\pi}{n})=0$

Sugerencia: Considere el sig. resultado, "La suma y producto de todas las raices de

$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-2}z^2+a_{n-1}z+a_n=0$

donde $a_0\neq0$, son $-a_1/a_0$ y $(-1)^na_n/a_0$ respectivamente", es decir;

$z_1+z_2+\dots+z_n=-a_1/a_0$ y $z_1z_2\cdots z_n=(-1)^na_n/a_0$ 2

Encuentre las raices n-ésimas de la unidad y aplicue

8) a) La función $w(z) = iz + 4 - 3i$ es una combinación de traslación y rotación. Encuentre la imagen de la recta $6x + y = 22$ en el plano w bajo este mapeo.

b) Bajo el mapeo $w(z) = iz + i$, demuestra que el semiplano $x > 0$ del plano z se mapea en el semiplano $v > 1$ del plano w

c) Encuentre las imágenes de las siguientes curvas bajo el mapeo $w(z) = (i + \sqrt{3})z + i - 1\sqrt{3}$:

i) $x = 0$ ii) $x^2 + y^2 = 1$ iii) $x^2 + y^2 + 2y = 1$

d) Bajo el mapeo $w(z) = (z + i)/(z - 3)$, encuentre la imagen correspondiente de $3x + y = 4$ del plano z en el plano w

e) Si $w(z) = (z - i)/(z + i)$, encuentre y dibuje la imagen en el plano w correspondiente al circulo $|z| = 2$ en el plano z

9. Muestre q' el mapeo de inversión $w = \frac{1}{z}$ mapea circulos y rectas del plano z en rectas o circulos en el plano w, respectivamente.

10) a) Encuentre la transformación bilineal q' mapea los tres puntos $z = 0, -i, -1$, en los 3 puntos $w = i, 1, 0$ en el plano w respectivamente.

b) Para el mapeo encontrado en el inciso a) encuentre las imágenes en el plano w de las rectas $Re(z) = cte = k_1$ y $Im(z) = cte = k_2$

11. a) Determine las constantes α y β para q' la sig. función se analítica

$$w(z) = x^2 + ay^2 - 2xy + i(bx^2 - y^2 + 2xy)$$

c) Para estos valores de α y β encontrados en a), encuentre la derivada de w, y exprese ambas w y dw/dz en fns. de $z = x + iy$

» Escribir los siguientes números complejos de la forma $a + bj$

a) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4-\sqrt{3}i}\right)^2 = \left[\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4-\sqrt{3}i}\left(\dfrac{4+\sqrt{3}i}{4+\sqrt{3}i}\right)\right]^2 = \left[\dfrac{4+\sqrt{3}i+4\sqrt{3}i+3i^2}{16+3}\right]$

$$= \left[\frac{1+5\sqrt{3}i}{19}\right]^2 = \left[\frac{1+10\sqrt{3}i-75}{19^2}\right] = -\frac{74}{19^2} + \frac{10\sqrt{3}}{19^2}i$$

$$= \frac{1}{19^2}\left(-74+10\sqrt{3}i\right)$$

b) $\dfrac{1}{(a+bi)^2} + \dfrac{1}{(a-bi)^2} = \dfrac{1}{a^2+2abi+b^2i^2} + \dfrac{1}{a^2-2abi+b^2i^2}$

$$= \frac{1}{(a^2-b^2)+2abi} + \frac{1}{(a^2-b^2)-2abi}$$

$$= \frac{a^2-b^2-2abi}{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2} + \frac{(a^2-b^2)+2abi}{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2-2abi}{a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2} + \frac{(a^2-b^2)+2abi}{a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2-2abi}{a^4+2a^2b^2+b^4} + \frac{(a^2-b^2)+2abi}{a^4+2a^2b^2+b^4}$$

$$= \frac{a^2-b^2-2abi}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^2-b^2+2abi}{(a^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{2a^2-2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$$

c) $3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$

$$3\left[\frac{1+i}{1-i}\left(\frac{1+i}{1+i}\right)\right]^2 - 2\left[\frac{1-i}{1+i}\left(\frac{1-i}{1-i}\right)\right]^2$$

$$3\left[\frac{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}{2}\right]^2 - 2\left[\frac{\cancel{1}-2i\cancel{-1}}{2}\right]^2$$

$$3(-1) - 2(1) = -3 - 2 = -5$$

2. Hallar las soluciones reales de las siguientes ecuaciones.

a) $\underline{2x} - 3iy + \underline{4ix} - \underline{2y} - 1 - 10i = (x+y+2) - (y-x+3)i$

$(2x-2y-1) + (4x-3y-10)i = (x+y+2) - (y-x+3)i$

$\Rightarrow 2x - 2y - 1 = x + y + 2 \quad \& \quad 4x - 3y - 10 = -y + x - 3$

$x - 3y = 3$ — ① $\quad 3x - 2y = 7$ — ②

De ① y ②

$x - 3y = 3 \longrightarrow x = 3 + 3y \Rightarrow x = 3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)$

$3x - 2y = 7 \quad 3(3+3y) - 2y = 7 \quad x = 3 - 1$

$9 + 9y - 2y = 7 \quad \underline{x = 2}$

$6y = -2$

$\underline{y = -\frac{1}{3}}$

b) $(3x-i)(2+i) + (x-iy)(2+2i) = 5+6i$

$\cancel{6x} + \cancel{3xi} - 2i - \cancel{i^2} + \cancel{2x} + \cancel{2xi} - 2yi - \cancel{2yi^2} = 5 + 6i$

$(8x + 2y + 1) + (5x - 2y - 2)i = 5 + 6i$

$8x + 2y + 1 = 5 \quad \& \quad 5x - 2y - 2 = 6$

$8x + 2y = 4 \rightarrow$ ① $\quad 5x - 2y = 8$ — ②

De ①

$4x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 4x$

$y = 2 - 4x \quad y = 2 - 4\left(\frac{12}{13}\right)$

$5x - 2(2-4x) = 8 \quad y = 2 - \frac{48}{13}$

$5x - 4 + 8x = 8 \quad \underline{y = -\frac{22}{13}}$

$13x = 12$

$\underline{x = \frac{12}{13}}$

c) $\frac{1}{z-i} + \frac{2+i}{1+i} = \sqrt{2} \quad z = x + iy$

$\Rightarrow \frac{1}{(x+iy)-i} + \left(\frac{2+i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = \left(\frac{1}{x+i(y-1)}\right) + \left(\frac{2-2i+i-i^2}{1-i^2}\right)$

$= \left(\frac{1}{x+i(y-1)}\right)\left(\frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}\right) + \frac{3-i}{2} = \left(\frac{x-i(y-1)}{x^2+(y-1)^2}\right) + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

$= \left(\frac{x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} + \frac{1}{2}\right)i$

$\Rightarrow \frac{2x + 3x^2 + 3(y-1)^2}{2x^2 + 2(y-1)^2} = \sqrt{2}$ — ①

$$\frac{2y-2+x^2+(y-1)^2}{2x^2+2(y-1)^2}=0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ De (2)

$$2y-2+x^2+(y-1)^2=0$$
$$\cancel{2y}-2+x^2+y^2-\cancel{2y}+1=0$$
$$x^2+y^2-1=0$$
$$x=\sqrt{1-y^2}$$

De (1)

$$2x+3x^2+3(y^2-2y+1)=2\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}(y^2-2y+1)$$

Sol. 2 en 1

$$2(\sqrt{1-y^2}+3(\sqrt{1-y^2})+3y^2-6y+3=$$

3. Represente el lugar geometrico del conjunto de valores de z que satisfacen:

a) $|z-2i|=|z+1-3i|$

$$|x+iy-2i|=|x+iy+1-3i|$$
$$|x+(y-2)i|^2=|(x+1)+(y-3)i|^2$$
$$x^2+y^2-4y+4=x^2+2x+1+y^2-6y+9$$
$$2x-2y=-6$$
$$x-y=-3$$
$$f(x)=x+3$$

Recta

b) $|z-1|=2|z+i|$

$$|x+iy-1|=2|x+iy+i|$$
$$|(x-1)+iy|=2|x+(y+1)i|$$
$$x^2-2x+1+y^2=4[x^2+y^2+2y+1]$$
$$x^2-2x+1+y^2=4x^2+4y^2+8y+4$$
$$3x^2+2x+3+3y^2+8y=0$$
$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2+\frac{8}{3}y=-1$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$
$$\left[x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2+\left[x-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]^2=\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2$$

Circunferencia con centro en $\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ y $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $Re\left\{\frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{4}$

$$Re\left\{\frac{1}{x+iy}\right\} = \frac{1}{4} \quad Re\left\{\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right\} = \frac{1}{4} \quad Re\left\{\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i\right\} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4} \qquad 4x = x^2+y^2$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$(x-2)^2 + (y+0)^2 = 2^2$$

Circulo en $(2,0)$ y radio 2

d) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$

$$\left|\frac{x+iy-3}{x+iy+3}\right| = 2 \Rightarrow \left|\frac{(x-3)+iy}{(x+3)+iy}\right| = 2 \Rightarrow \left|\frac{(x-3)+iy}{(x+3)+iy}\left[\frac{(x+3)-iy}{(x+3)-iy}\right]\right| = 2$$

$$\left|\frac{(x-3)(x+3)-(x-3)iy+(x+3)iy+y^2}{(x+3)^2+y^2}\right| = 2$$

$$\left|\frac{x^2-9-iy(x-3+x+3)+y^2}{(x+3)^2+y^2}\right| = 2$$

$$\left|\frac{x^2-9-2xyi+y^2}{(x+3)^2+y^2}\right| = 2$$

$$\left|\frac{x^2-9+y^2}{(x+3)^2+y^2} - \frac{2xy}{(x+3)^2+y^2}i\right| = 2$$

$$\frac{(x^2-9+y^2)^2}{[(x+3)^2+y^2]^2} + \frac{(2xy)^2}{[(x+3)^2+y^2]^2} = 4$$

$$\frac{1}{[(x+3)^2+y^2]^2}(x^2-9+y^2)^2 + 4x^2y^2 = 4$$

e) $\left|\dfrac{z-i}{z+3-2i}\right| = 3$

$$\left|\frac{x+iy-i}{x+iy+3-2i}\right| = 3 \qquad \left|\frac{x+i(y-1)}{(x+3)+i(y-2)}\right| = 3 \qquad \left|\frac{x+i(y-1)}{(x+3)+i(y-2)}\left(\frac{(x+3)-i(y-2)}{(x+3)-i(y-2)}\right)\right| = 3$$

$$\left|\frac{x(x+3)-ix(y-2)+i(y-1)(x+3)-(y-1)(y-2)i^2}{(x+3)^2+(y-2)^2}\right| = 3$$

$$\left|\frac{x^2+3x-ixy+i2x+i(yx+3y-x-3)+(y^2-2y-y+2)}{(x+3)^2+(y-2)^2}\right| = 3$$

$$\left|\frac{x^2+3x+y^2-2y-y+2}{(x+3)^2+(y-2)^2}+\frac{(yx+3y-x-3+2x-xy)}{(x+3)^2+(y-2)^2}i\right| = 3$$

|

$$|z+3| + |z-3| = 10$$

$$|z+3| = 10 - |z-3|$$

$$|z+3|^2 = 100 - 20|z-3| + |z-3|^2$$

$$|x+iy+3|^2 = 100 - 20|x+iy-3| + |x+iy-3|^2$$

$$|(x+3)+iy|^2 = 100 - 20|(x-3)+iy| + |(x-3)+iy|^2$$

$$(x+3)^2 + \cancel{y^2} = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2+y^2} + (x-3)^2 + \cancel{y^2}$$

$$\cancel{x^2} + 6x + \cancel{9} = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 6x + \cancel{9}$$

$$20\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 100 - 12x$$

$$(x-3)^2 + y^2 = \left(\frac{100-12x}{20}\right)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = \left(5 - \frac{3}{5}x\right)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 25 - 6x + \frac{9}{25}x^2$$

$$\left(\frac{16}{25}x^2 + y^2 = 16\right)\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

//

$$\therefore\ f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \frac{2}{n}\cos(nt) + \left[\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right]\operatorname{sen}(nt) \right\}$$

$$= \frac{2}{3}\pi^3 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2}\cos(nt) + \frac{\pi}{n}(-1)^n\operatorname{sen}(nt)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\operatorname{sen}(nt)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{3}\pi^3 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2}\cos(nt) + \frac{(-1)^n}{n}\pi\operatorname{sen}(nt)\right]$$

$$- \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n-1)t]}{(2n-1)^3}$$

$n = 2n-1$ impar

(c) en $[-\pi,\pi]$

S. Compleja , $f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$, $c_n=\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(\tau)e^{-in\omega_0 \tau}\,d\tau$

$\frac{2\pi}{T}=\omega_0=1$ $a=-\pi$

i.e $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)e^{-in\tau}=\frac{1}{2\pi}\left\{\pi^2\int_{-\pi}^{0} e^{-in\tau}\,dt+\int_0^{\pi}(\tau-\pi)^2 e^{-in\tau}\,d\tau\right\}$

c_n

$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi^2}{in}(\overset{(-1)^n}{e^{in\pi}}-1)+\frac{\pi^2}{}\right.$

$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{(-1)^n\pi}{in}-\frac{\pi^2}{in}+\pi^2\right.$

$c_n=\frac{1}{n^2}-\left\{\frac{\pi(-1)^n}{2n}+\frac{1}{\pi n^3}[(-1)^n-1]\,i\right\}$

$c_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{n^2}-\left[\frac{\pi}{n}(-1)^n+\frac{2}{\pi n^3}((-1)^n-1)\right]i\right\}$

i.e, $a_n=\frac{2}{n^2}$ $b_n=\frac{\pi}{n}(-1)^n+\frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n-1\right]$

Valido para $n\neq 0$

Cuando en 0 no esté definido $c_0=a_0$

$\Rightarrow a_0=c_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi^2\,dt+\int_0^{\pi}(\tau-\pi)^2\,dt\right]$

$=\frac{2}{3}\pi^2$ X

Rodriguez Aguilar Katha

—Teorema del Residuo—

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k+\operatorname{sen}\theta}$ $\quad 1<k$ $\qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{k+\operatorname{sen}\theta} = \int_{\gamma:|z|=1}\frac{1}{k+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z\left[k+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\right]} = \frac{1}{\cancel{i}}\int \frac{dz}{\cancel{z}\,\frac{1}{\cancel{z}2\cancel{i}}[kz2i+z^2-1]}$$

$$=2\int_\gamma\frac{dz}{z^2+2kiz-1} = 2\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\left[2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)\right]$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2ki\pm\sqrt{(2ki)^2-4(-1)}}{2} = \frac{-2ki\pm\sqrt{-4k^2+4}}{2} = -ki\pm\sqrt{1-k^2}$$

$$z_1 = -ki-\sqrt{1-k^2} \qquad z_2 = -ki+\sqrt{1-k^2}$$

Para $k>1$, z_2 está dentro de γ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{(z-z_2)}\left\{a_0 + a_1(z-z_2)+\dots\right\}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \left.\frac{1}{(z-z_1)}\right|_{z_2} = \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}$$

$$z_2-z_1 = \cancel{-ki}+\sqrt{1-k^2}+\cancel{ki}+\sqrt{1-k^2}$$
$$= 2\sqrt{1-k^2}$$

i.e $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{k+\operatorname{sen}\theta} = 2\left[\cancel{2}\pi i\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-k^2}}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}}\,i$ //

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta$ $\qquad \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right) \qquad \cos n\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z^n+z^{-n})$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$

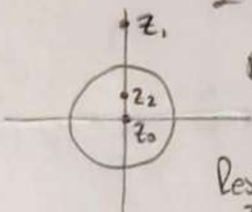
$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{5-4\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta = \int_{\gamma:|z|=1} \frac{\frac12\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}{5-4\left[\frac{1}{2iz}(z^2-1)\right]}\,\frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{\frac{1}{2z^2}(z^4+1)}{5-\frac{2}{iz}(z^2-1)}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= \int_\gamma \frac{\frac{1}{2z^2}(z^4+1)}{-\frac{2}{\cancel{iz}}\left(-\frac52 iz + z^2-1\right)}\,\frac{dz}{\cancel{iz}} = -\frac14\int_\gamma \frac{(z^4+1)}{z^2\left(z^2-\frac52 iz-1\right)}\,dz$$

$$= -\frac14\int_\gamma\frac{z^4+1}{(z-0)^2(z-z_1)(z-z_2)}\,dz = -\frac14\left(\operatorname*{Res}_{z=z_k\in|z|=1} f(z)\right)2\pi i$$

$$z_{1,2} = \frac{\frac52 i \pm\sqrt{\left(-\frac52 i\right)^2-4(-1)}}{2} = \frac{\frac52 i\pm\sqrt{-\frac{25}{4}+4}}{2} = \frac{\frac52 i \pm\sqrt{-\frac94}}{2}$$

$$= \frac{\frac52 i \pm \frac32 i}{2} = \frac{5i+3i}{4} \qquad z_1 = \frac{5i+3i}{4}=\frac{8i}{4}=2i\ ;\quad z_2 = \frac{5i-3i}{4}=\frac{2i}{4}=\frac12 i$$



$$R_0 = \frac{1}{(z-0)^2}\left\{[a_0+a_1(z-0)+\dots][b_0+b_1(z-0)+\dots][c_0+c_1(z-0)+\dots]\right\}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = [a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0]/1!$$

$a_0 = z^4+1 \qquad b_0=\frac{1}{z-2i} \qquad c_0 = \frac{1}{z-\frac12 i}$

$a_1 = 4z^3 \qquad b_1 = -\frac{1}{(z-2i)^2} \qquad c_1 = -\frac{1}{(z-\frac12 i)^2}$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = (1)\left(\frac{1}{-2i}\right)\overset{4}{\left[-\frac{1}{(-\frac12 i)^2}\right]} + (1)\overset{\frac14}{\left[-\frac{1}{(-2i)^2}\right]}\overset{2i}{\left(\frac{1}{-\frac12 i}\right)} +$$

$$= 2i + \frac12 i = \frac52 i$$

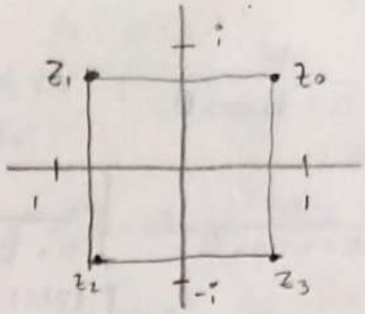
$$R_2 = \frac{1}{(z-\frac12 i)}\left\{\left[a_0+a_1(z-\tfrac12 i)+\dots\right]\left[b_0+b_1(z-\tfrac12 i)+\dots\right]\left[d_0+d_1(z-\tfrac12 i)+\dots\right]\right\}$$

$d_0=\frac{1}{z^2} \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = [a_0b_0d_0]\Big|_{\frac12 i}/0! = \left[\left(\frac12 i\right)^4+1\right]\left[\frac{1}{\frac12 i-2i}\right]\left[\frac{1}{(\frac12 i)^2}\right]$

$$= \left(\frac{1}{16}+1\right)\left(\frac{2}{3}i\right)(-4) = -\frac{17}{6}i$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\,\text{sen}\,\theta} = -\frac14\left\{2\pi i\left[\frac52 i - \frac{17}{6}i\right]\right\} = -\frac14\left\{2\pi i\left(-\frac13 i\right)\right\} = -\frac{\pi}{6}$$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \oint_c \frac{z^2}{z^4+1}\,dz$



$z^4 = -1$

$z = (-1)^{1/4}$; $n=4$; $K=0,1,2,3$ $\quad \theta = \pi \quad r = 1$

$z_K = \cos\left(\frac{\pi + 2K\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2K\pi}{n}\right)$

$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$z_1 = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

$z_2 = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$

$z_3 = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$$\oint_c \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left[\sum_{K=1}^{n} \underset{z = z_K \in sps}{\text{Res}} f(z)\right]$$

$$R_1 = \left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}i}}\right]\left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i}\right]\left[\frac{1}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\right]\left[\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)}\right]\left[\frac{1}{i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]\left[\cancel{\frac{1}{2}} + i\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{1}{2}}\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}i\right)(i)$$

$$= \underline{\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i}$$

$$R_2 = \left[\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}i} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}i}}\right]\left[\frac{1}{\cancel{-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i}\right]\left[\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i}\right]\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{-\frac{2}{\sqrt{2}}}\right]\left[\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}i}\right]\left[\frac{1}{-\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i}\right]\left[\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}i - \cancel{\frac{1}{2}}\right] = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i\right)(-i)$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \oint_c \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i - \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i\right] = 2\pi i\left[\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8}i\right]$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\pi = \frac{4}{4}\sqrt{2}\,\pi = \underline{\pi\sqrt{2}}$$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$; $a>b\geq 0 \quad a,b \in \mathbb{R}$ $\qquad \cos = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \int_{\gamma:|z|=1} \frac{1}{a+b\left[\frac{1}{2z}(z^2+1)\right]}\frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{1}{\frac{b}{2\cancel{z}}\left(\frac{2az}{b}+z^2+1\right)}\frac{dz}{i\cancel{z}}$$

$$= \frac{2}{ib}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+\frac{2a}{b}z+1} = \frac{2}{ib}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{2}{ib}\left\{2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k\in\gamma} f(z)\right\}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-\frac{2a}{b}\pm\sqrt{\frac{4a^2}{b^2}-4}}{2} = \frac{-\frac{2a}{b}\pm\sqrt{4\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)}}{2} = \frac{-\frac{2a}{b}\pm\frac{2}{b}\sqrt{a^2-b^2}}{2}$$

// $a>b$ implica una raiz real

$$= \frac{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad ; \quad z_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad z_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

z_2 está dentro de $|z|=1$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2}{ib}\left\{2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\right\}$$

$$\frac{1}{z-z_2}\left\{a_0 + a_1(z-z_2)+\dots\right\}$$

$$a_0 = \left.\frac{1}{z-z_1}\right|_{z_2} = \frac{1}{z_2-z_1} \quad , \quad z_2-z_1 = \cancel{\frac{a}{b}} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} - \cancel{\frac{a}{b}} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

$$= -\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

$$a_0 = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = -\frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2}{\cancel{i}\cancel{b}}\left\{\cancel{2}\pi\cancel{i}\left[-\frac{\cancel{b}}{\cancel{2}\sqrt{a^2-b^2}}\right]\right\} = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad a>b\geq 0$$

Rodriguez Aguilar Kathia

① Encuentre la serie de Fourier de $f(T) = T\,sen(T)$ definida en $(-\pi, \pi)$

$$f(T) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}T\right) + b_n\,sen\left(\frac{n\pi}{L}T\right)\right] \quad en\ [-L, L]$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(T)\,dT \;;\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(T)\cos\left(\frac{n\pi}{L}T\right)dT \qquad b_n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} T\,sen(T)\,dT \qquad u = T \quad du = dT \qquad dv = sen(T)\,dT \quad v = -\cos(T)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-T\cos(T)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(T)\,dT\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{(-\pi)(-1) + \cancel{sen(T)\Big|_0^{\pi}}^{\,0}\right\}$$

$$= 1$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} T\,sen(T)\cos(nT)\,dT \;,$$

$+$ $sen(A+B) = senA\cos B + \cos A\,senB$

$sen(A-B) = senA\cos B - \cos A\,senB$

$senA\cos B = \frac{1}{2}\left[sen(A+B) + sen(A-B)\right]$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} T\left[sen(T+nT) + sen(T-nT)\right]dT = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} T\,sen(nT+T)\,dT + \int_0^{\pi} T\,sen(T-nT)\,dT\right\}$$

$$u = T \;;\; du = dT \;;\; dv = sen(T \pm nT)\,dT \;;\quad v = -\frac{1}{(1 \pm n)}\cos(T \pm nT)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{T}{(1+n)}\cos(T+nT)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{(1+n)}\int_0^{\pi}\cos(T+nT)\,dT - \frac{T}{(1-n)}\cos(T-nT)\Big|_0^{\pi}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-n)}\int_0^{\pi}\cos(T-nT)\,dT\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{(1+n)}\cos[(1+n)\pi] + \cancel{\frac{1}{(1+n)^2}sen(T+nT)\Big|_0^{\pi}}^{\,0} - \frac{\pi}{(1-n)}\cos[(1-n)\pi]\right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{1}{(1-n)^2}sen(T-nT)\Big|_0^{\pi}}^{\,0}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{(n+1)}(-1)^{n+1} - \frac{\pi}{(n-1)}(-1)^{n+1}\right\}$$

$$= (-1)(-1)^{n+1}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right\} = (-1)^n\left\{\frac{n-1+n+1}{n^2-1}\right\} = \frac{2n(-1)^n}{n^2-1}$$

$\forall\ n \neq 1$

$$\Rightarrow f(T) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{2n(-1)^n}{n^2-1} \cos(nT) \right\}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} T \,\text{sen}\, T \cos T \, dT = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} T \cdot 2 \,\text{sen}\, T \cos T \, dT$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} T \,\text{sen}(2T) \, dT \qquad u = T;\ du = dT;\ dv = \text{sen}(2T)\, dT \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2T)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{T}{2} \cos(2T) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2T) \, dT \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{1}{4} \,\text{sen}(2T) \Big|_0^{\pi}}^{\,0} \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

2.b) Dadas $f(t) = \text{sen}(\pi t) H(t)$ y $h(t) = \delta(t-4) - \delta(t-8)$ Calcular $g(t) = f(t) * h(t)$

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\pi\tau) H(\tau)\, \delta(-\tau + T - 4) - \delta(-\tau + T - 8) \, d\tau$$

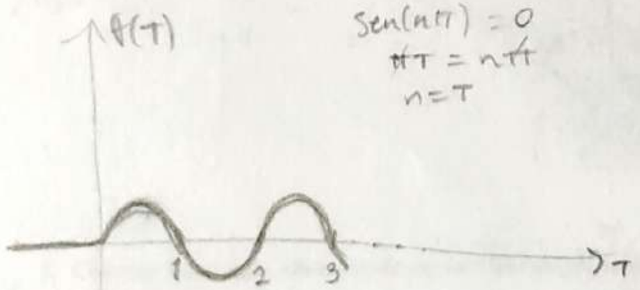
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\pi\tau) H(\tau)\, \delta[\tau - (T-4)] - \delta[\tau - (T-8)] \, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\pi\tau) H(\tau)\, \delta[\tau - (T-4)] - \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\pi\tau) H(\tau)\, \delta[\tau - (T-8)] \, d\tau$$

$$= \text{sen}(\pi\tau) H(\tau) \Big|_{\tau = T-4} - \text{sen}(\pi\tau) H(\tau) \Big|_{\tau = T-8}$$

$$= \text{sen}(\pi T - 4\pi)\, H(T-4) - \text{sen}(\pi T - 8\pi)\, H(T-8)$$

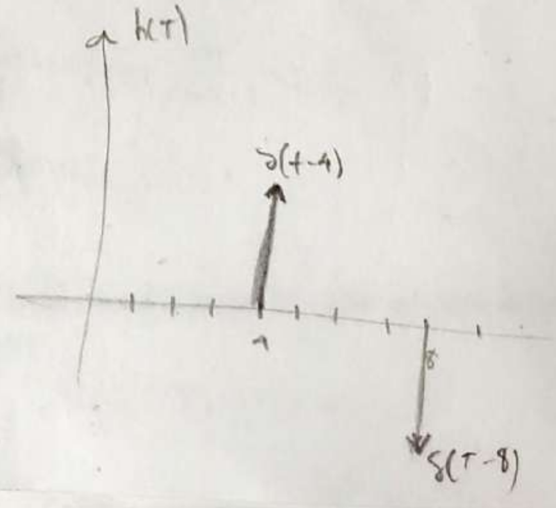
$\text{sen}(\pi T) H(T)$



$\text{sen}(n\pi) = 0$

$\pi T = n\pi$

$n = T$



3a) Calcular la Transformada de F. de $f(t) = \text{sen}^2(t+2)$

$$\mathcal{F}\{\text{sen}^2(t+2)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left[1-\cos(2t+4)\right]\right\} \qquad \left|\ \text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}\{1-\cos 2\theta\}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[e^{i(2t+4)} + e^{-i(2t+4)}\right]\right\} \qquad \left|\ \cos n\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{1\} - \frac{1}{4}\mathcal{F}\left\{e^{i(2t+4)} + e^{-i(2t+4)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,dt - \frac{1}{4}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(2t+4)}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(2t+4)}e^{-i\omega t}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta(\omega)\right] - \frac{1}{4}\left\{e^{4i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2t}e^{-i\omega t}\,dt + e^{-4i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2it}e^{-i\omega t}\,dt\right\}$$

$$= \pi\,\delta(\omega) - \frac{1}{4}\left\{e^{4i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(2-\omega)t}\,dt + e^{-4i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(2+\omega)t}\,dt\right\}$$

Aplicando $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\,dx = 2\pi\,\delta(y)$ y $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

$$= \pi\,\delta(\omega) - \frac{1}{4}\left\{e^{4i}\,2\pi\,\delta(2-\omega) + e^{-4i}\,2\pi\,\delta(2+\omega)\right\}$$

$$= \pi\,\delta(\omega) - \frac{\pi}{2}\left\{e^{4i}\,\delta(\omega-2) + e^{-4i}\,\delta(\omega+2)\right\}$$

Duda

Para R_4

$$\frac{1}{z-z_4}\left\{[a_0+a_1(z-z_4)+\cdots][d_0+d_1(z-z_4)+\cdots][c_0+c_1(z-z_4)+\cdots]\right\}$$

$$R_4=\left\{a_0 d_0 c_1 + a_0 d_1 c_0 + a_1 d_0 c_0\right\}\Big|_{z_4=2i}$$

$$a_0=\frac{1}{(z+i)^2}\Big|_{z=2i}=\frac{1}{(3i)^2}=-\frac{1}{9}$$

$$a_1=-\frac{2}{(z+i)^3}\Big|_{z=2i}=-\frac{2}{(3i)^3}=-\frac{2}{27}i$$

$$d_0=\frac{1}{(z-i)^2}\Big|_{z=2i}=\frac{1}{(i)^2}=-1 \quad ; \quad d_1=-\frac{2}{(z-i)^3}\Big|_{z=2i}=-\frac{2}{(i)^3}=-2i$$

$$c_0=\frac{1}{(z+2i)^2}\Big|_{z=2i}=\frac{1}{(4i)^2}=-\frac{1}{16} \quad ; \quad c_1=-\frac{2}{(z+2i)^3}\Big|_{z=2i}=-\frac{2}{(4i)^3}=-\frac{1}{32}i$$

$$R_4=\left(-\frac{1}{9}\right)(-1)\left(-\frac{1}{32}i\right)+\left(-\frac{1}{9}\right)(-2i)\left(-\frac{1}{16}\right)+\left(-\frac{2}{27}i\right)(-1)\left(-\frac{1}{16}\right)$$

$$=-\frac{1}{288}i-\frac{1}{72}i-\frac{1}{216}i=-\frac{19}{864}i$$

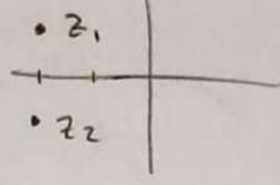
$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}=2\pi i\left(\frac{1}{108}i-\frac{19}{864}i\right)=2\pi i\left(-\frac{11}{864}i\right)=\frac{11}{432}\pi$$

e) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \oint_c \frac{dz}{(z^2+4z+5)^2} = \oint_c \frac{dz}{[(z-z_1)(z-z_2)]^2} = \oint_c \frac{dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$

$z_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-4(5)}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{-4\pm 2i}{2} = -2\pm i$

$z_1 = -2+i$

$z_2 = -2-i$



$\oint_c \frac{dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} = 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k\in sps} f(z)\right\}$

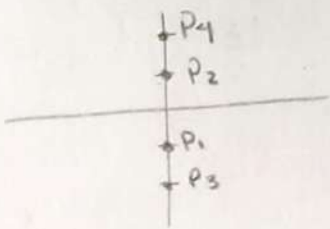
$\Rightarrow \frac{1}{[z-(-2+i)]^2}\left\{a_0 + \boxed{a_1(z-z_1)} + a_2(z-z_2)^2+\dots\right\}$

$a_1 = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{[z-(-2-i)]^2}\right\}\Big|_{z_1} / 1! = -\frac{2}{[z+2+i]^3}\Big|_{z_1=-2+i} = -\frac{2}{(-\cancel{2}+i+\cancel{2}+i)}$

$= -\frac{2}{2i} = -\frac{1}{i} = i$

$\Rightarrow \oint_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \oint\frac{dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} = 2\pi i(i) = \underline{-2\pi}$

f) $\int_c^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2} = \oint_c\frac{dz}{(z^2-1)^2(z^2+4)^2} = \oint_c \frac{dz}{\underbrace{(z+i)^2}_{P_1}\underbrace{(z-i)^2}_{P_2}\underbrace{(z+2i)^2}_{P_3}\underbrace{(z-2i)^2}_{P_4}}$



Para R_2

$\frac{1}{(z-i)^2}\left\{[a_0+a_1(z-z_2)+\dots][b_0+b_1(z-z_2)+\dots][c_0+c_1(z-z_2)+\dots]\right\}$

$R_2 = [a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0]\Big|_{z=i}$

$a_0 = \frac{1}{(z+i)^2}$ $a_1 = -\frac{2}{(z+i)^3}$ $b_0 = \frac{1}{(z+2i)^2}$ $b_1 = -\frac{2}{(z+2i)^3}$ $c_0 = \frac{1}{(z-2i)^2}$ $c_1 = -\frac{2}{(z-2i)^3}$

$R_2 = \left[\frac{1}{(2i)^2}\right]\left[\frac{1}{(3i)^2}\right]\left[-\frac{2}{(-i)^3}\right] + \left[\frac{1}{(2i)^2}\right]\left[-\frac{2}{(3i)^3}\right]\left[\frac{1}{(-i)^2}\right] + \left[-\frac{2}{(2i)^3}\right]\left[\frac{1}{(3i)^2}\right]\left[\frac{1}{(-i)^2}\right]$

$= \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)(2i) + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{2}{27}i\right)(-1) + \left(-\frac{i}{4}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)(-1)$

$= \left(\frac{1}{18}i\right) + \frac{1}{54}i - \frac{1}{36}i = \underline{\frac{1}{108}i}$

FORMULARIO

$z_1 = (a+b)$ $z_2 = (c+d)$

$(a+b) * (c+d)$
$= (ac - bd, ad + bc)$

$ZZ^* = a^2 + b^2$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{ZZ^*}$

$\text{sen}(\theta + \alpha) = (\text{sen}\,\theta \cos\alpha + \cos\theta\, \text{sen}\,\alpha)$

$\cos(\theta + \alpha) = (\cos\theta \cos\alpha - \text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\alpha)$

$z = a + ib = \rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$ Forma polar

Fórmula de De Moivre

$z^n = \rho^n [\cos n(\theta + \cancel{2k\pi}) + i\,\text{sen}\, n(\theta + \cancel{2k\pi})]$

$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\,\text{sen} \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right)$

$r = \sqrt{(a+b)^2 + (c+b)^2}$ Distancia ÷ z_0 y z_1

$z - z_0 = m(z_1 - z_0)$ Recta en el plano complejo

Serie McLawren
" Taylor

$e^{i\theta} = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)$
$= (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n$

$\varphi = i\theta$, $\varphi \in \mathbb{C}$

$\cos\varphi = \frac{e^{ii\theta} + e^{-ii\theta}}{2} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$ $\text{sen}\,\varphi = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2i}$

FORMULARIO

3

$f(z)$ analítica ! $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$

$\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 ; & n \neq 1 \\ 2\pi i ; & n = 1 \end{cases}$

FIC

$$\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{n}(z_0)} = 2\pi i\, a_n$$

$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \; ; \; |q| < 1$$

Serie Geom.

$f(z)$ analítica en $z_0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad |z-z_0| < R$

$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_i} f(z)$ S. Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

Binomio de Newton: $(1+q)^n = 1 + nq + \frac{n(n-1)q^2}{2!} + \frac{n(n-2)(n-1)q^3}{3!} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} q^k$

$\rightarrow$ Para resolver $\int \frac{d\theta}{a + b\operatorname{sen}\theta}$ ó $\int \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$

$\int_{\gamma : |z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=z_{1,2}} f(z)\right]$

$\hookrightarrow$ el q está dentro de $|z|=1 : \gamma$

5

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{sps} k(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$

$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\cos(\alpha x)\,dx$ & $\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\operatorname{sen}(\alpha x)\,dx$; $k(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

$\hookrightarrow \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k \in sps} f(z)\right\}$

$\longrightarrow \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k \in sps} f(z)\right\}$

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}\, p(z)}{q(z)}$$

$z = e^{i\theta}$

$dz = i e^{i\theta} d\theta$

$\frac{dz}{i e^{i\theta}} = d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$

$\operatorname{sen}(n\theta) = \frac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta})$

7

Para $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\,\text{sen}\,\theta}$

⓪ Pasar a términos de z

① Factorizar a ó b

② Manipuleo para que quede de la forma $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$

③ Encontrar z_1 y z_2

④ Ver cuál está dentro.

⑤ Encontrar el Residuo.

$\parallel$

$k\left[2\pi i \, \text{Res}_{z=z_1} f(z)\right]$

Dentro de $|z|=1$

6

7

$e^{+i n\theta} = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(\theta n)$

$e^{-i n\theta} = \cos(n\theta) - i\,\text{sen}(\theta n)$

$\cos(n\pi \pm \pi) = (-1)^{n+1}$ $\quad \cos(n\pi) = (-1)^n$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$ $\quad$ ~~$\cos(2n\pi) = 1$~~

en $(-L, L)$

8

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \overbrace{f(x)\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{PAR}}}^{g(x)}\,dx$

$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x) \text{ impar} \\ 2\int_0^a g(x)\,dx & \text{si } g(x) \text{ es PAR} \end{cases}$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \overbrace{f(x)\underbrace{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{IMPAR}}}^{g(x)}\,dx$

I x P = IMPAR

P x P = PAR

I x I = PAR

$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ;\ g(x) \text{ IMPAR} \\ 2\int_0^a g(x)\,dx & \text{PAR} \end{cases}$

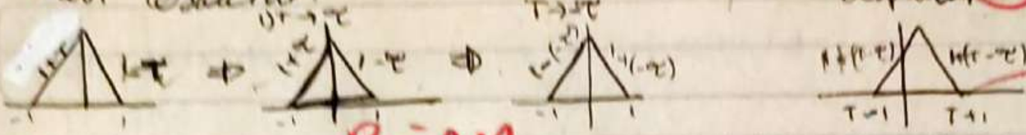
Si la función es par $\qquad$ si es impar

Tiene a_0 & a_n ? ✓ $\qquad$ tiene b_n

$a_0 = 0$ & $a_n = 0$

5

Para el 21/8.
Movi' considerar:



Desplazar **OJITO**

Ejercicio Bien

$A = \frac{bh}{2} = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$

$h(T) =$

$0; \quad \infty < T+1 < -10 \quad$ i.e $\boxed{\infty < T < -11}$

$\int_{-10}^{T+1} (1+T-\tau)\,d\tau = -\frac{(1+T-\tau)^2}{2}\Big|_{-10}^{T+1} = \frac{(11+T)^2}{2} \quad -10 < T+1 < -9$ i.e $\boxed{-11 < T < -10}$

// en -10 es $\frac{1}{2}$

$\int_{-10}^{T} (1-T+\tau)\,d\tau + \int_{T}^{T+1} (1+T-\tau)\,d\tau = \frac{(1-T+\tau)^2}{2}\Big|_{-10}^{T} - \frac{(1+T-\tau)^2}{2}\Big|_{T}^{T+1}$

$= \frac{1}{2} - \frac{(-9-T)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{(-9-T)^2}{2}$ en $-9 < T+1 < -8$ i.e $\boxed{-10 < T < -9}$

// en -9 es 1

$\int_{T-1}^{T} (1-T+\tau)\,d\tau + \int_{T}^{T+1} (1+T-\tau)\,d\tau = \frac{(1-T+\tau)^2}{2}\Big|_{T-1}^{T} - \frac{(1+T-\tau)^2}{2}\Big|_{T}^{T+1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ en $-8 < T+1 < 10$ i.e $\boxed{-9 < T < 9}$

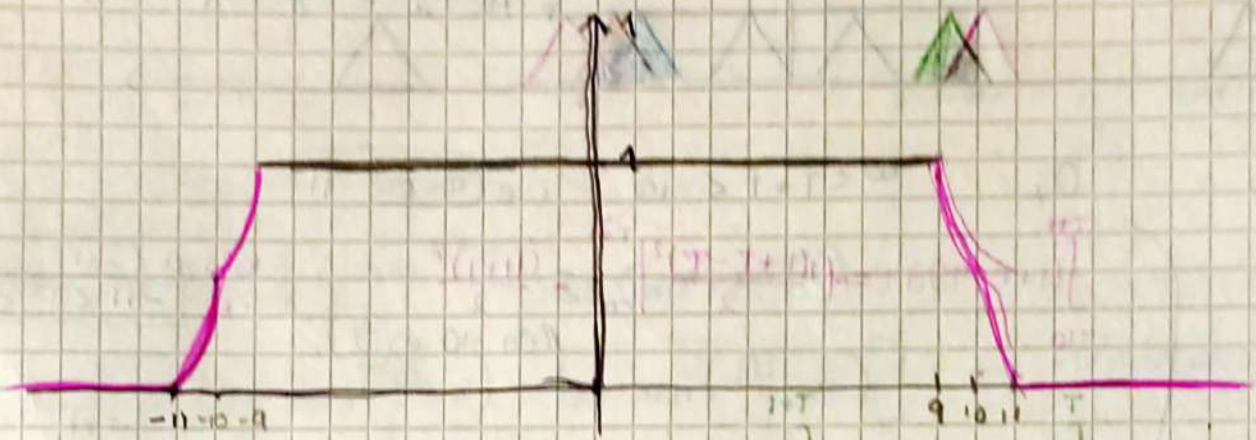
$\int_{T-1}^{T} (1-T+\tau)\,d\tau + \int_{T}^{10} (1+T-\tau)\,d\tau = (1-T+\tau)\Big|_{T-1}^{T} - \frac{(1+T-\tau)^2}{2}\Big|_{T}^{10}$

$= \frac{1}{2} - \frac{(T-9)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{(T-9)^2}{2}$ en $\boxed{9 < T < 10}$

// en 10 es $\frac{1}{2}$

$\int_{T-1}^{10} (1-T+\tau)\,d\tau = \frac{(1-T+\tau)^2}{2}\Big|_{T-1}^{10} = \frac{(11-T)^2}{2}$ para $9 < T-1 < 10$, $10 < T < 11$

$0; \quad 10 < T-1 < \infty \quad$ i.e; $\boxed{11 < T < \infty}$



$$\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\omega = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\left[\cancel{2\pi}\,\delta(\tau)\right]$$

$$= \delta(\tau)$$

S. Fourier de $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$$

en $[-L, L]$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

// Si la función es par
// calcular a_0 y a_n

// Si la función es IMPAR
// calcular b_n

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 T} \qquad C_n = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} f(\ ) e^{-in\omega_0 T} dT$$

// Periodica

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n)$$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\cos(2n\pi) = 1$

$e^{\pm in\pi} = (-1)^n$

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega T} dT \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega T} dT = 2\pi i \delta(\omega)$$

$$f(T) * g(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(T-\tau)\, d\tau$$

① $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(T) f(T)\, dT = \phi(0) \qquad \phi(T \to \pm\infty)$

② $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - T_0)\, \phi(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\phi(\tau + T_0)\, d\tau = \phi(T_0)$

③ $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

$\delta(T - T_1) * \delta(T - T_2) = \delta[T - (T_1 + T_2)]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx = 2\pi \delta(y)$$

$e^{\pm in\pi} = \cos(n\pi) \pm i\,\text{sen}(n\pi i) = (-1)^n$

~~$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$ $\quad \text{sen}\, n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$~~

A

$\text{sen}(n\pi) = 0$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\cos(2n\pi) = 1$

$z = a \pm ib; \; |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(1) Forma polar $\quad z = re^{i\theta}$

T. de DM

$$z^n = (e^{i\theta})^n = e^{\pm in\theta} = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)$$

para $z^{\frac{1}{n}}$; $\quad w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

MAPEOS...

Para que la recta pase por el origen $|z_1|$ y $|z_2|$ deben ser iguales.

$|z - z_1| = |z - z_2| \rightarrow$ Ec. de la recta q' bisecta $\perp$ a la recta q' va de z_1 a z_2

$|z - z_0| = r \rightarrow$ Circulo con centro en z_0 y radio r

mapeo lineal, inverso, bilineal

$w = \alpha z + \beta \qquad w = \frac{1}{z} \qquad w = \frac{az + b}{cz + d}$

---

(2) Cond. de C-R.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-2)\delta(t+3-\tau)\,d\tau = \tau-2\Big|_{\tau=t+5} = \delta(t+3)$$

$$\delta(\tau-t_1) * \delta(\tau-t_2) = \delta[\tau-(t_1+t_2)]$$

2) $$H(\tau) * H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)H(t-\tau)\,d\tau = tH(T)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\,d\tau = 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$H(\tau) = \begin{cases} 0; & \tau<0 \\ 1; & \tau>0 \end{cases} \qquad H(T-\tau) = \begin{cases} 0\ ; & t-\tau<0\ ;\ t<\tau \\ 1\ ; & t-\tau>0\ ;\ t>\tau \end{cases}$$

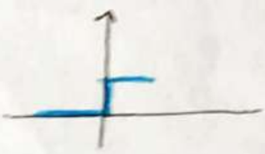
3) $$H(T) * e^{-T}H(T) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)\,e^{-(T-\tau)}\,H(T-\tau)\,d\tau$$

$$= \begin{cases} 0; & \tau<0 \ \& \ \tau>T \\ e^{-T}\int_{\tau=0}^{T} e^{\tau}\,d\tau\ H(T) \end{cases}$$

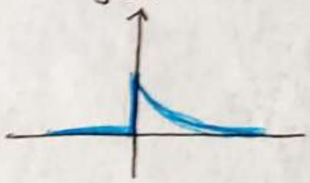
$$= e^{-T}\left[e^{\tau}\Big|_0^{T}\right]H(T) = (1-e^{-T})H(T)$$

Geometricamente.

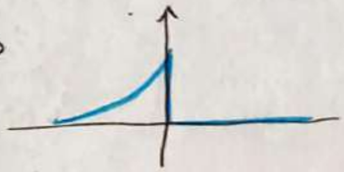
$F(\tau)$ // $H(t)$

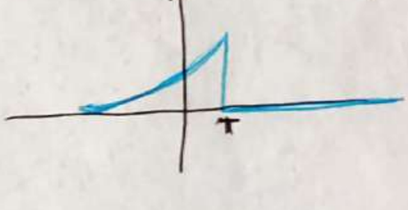


$g(\tau)$

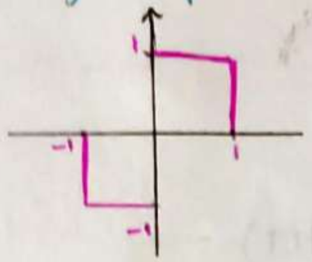


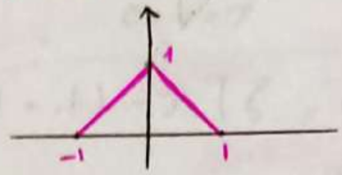
$\Rightarrow$ $g(-\tau)$

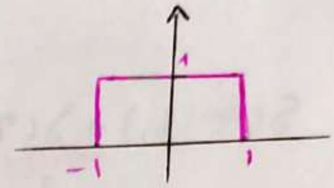




★ figuras problemas, lista 3.







↳ ¿Pulso triángular o la samplin al cuadrado

$$\boxed{f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(T-\tau)\, d\tau}$$

pero la trans. de F. de $f_2(t)$ y de $f_3(t)$ respec. son:

$$\mathcal{F}\, f_2(t) = F_2(\omega) \quad , \quad \mathcal{F}\{f_3(t)\} = F_3(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = f(\omega)$$

↳ $f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{f_1(\omega) f_2(\omega)\}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) f_2(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\delta(t-2) * \delta(t+5)$$

$$\delta(T-2) * f(T) = f(T) * \delta(T-2)$$

δ Definida en un punto y fuera del 0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(T-2)\, f(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(T)\, \delta\underbrace{(T-\tau-2)}_{[(T-2)-\tau]}\, d\tau$$

y usando $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \phi(t-T_0)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(T+T_0)\, \phi(T)\, dT = \phi(T_0)$

$$f(t-\tau)\Big|_{\tau=2} = f(\tau)\Big|_{\tau=t-2}$$

$$f(T-2) = f(T-2)$$

LISTA 1 MATES AVANZADAS.

1. Demuestre el teorema de DeMoivre $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$

Sea $z = a + ib$ y $z_2 = c + ib$; $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = R_{12}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = R_n\, e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)}$ donde $R_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n$

Ahora si $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$

$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n\, e^{i\underbrace{(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)}_{n \text{ veces}}}$

$= R\, e^{i(n\theta)}$

$R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdots r_n$ Donde todas son iguales $\therefore R = r^n = |z|^n$

$\Rightarrow z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)]$

b) Encuentre parte real e imaginaria de los complejos

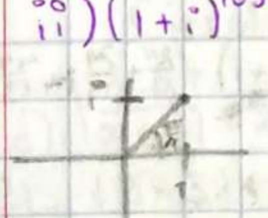
i) $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}}\right)^{60} = r^n(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}}\right)^{60}(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)^{60}$

$= \left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}}\right)^{60}(\cos 60\pi + \cancel{i\,\mathrm{sen}\,60\pi})$

$\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}}\right)^{60}\right\} = \left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}}\right)^{60}$

$\mathrm{Im}\left\{\left(-\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{60}\right\} = 0$

ii) $(1+i)^{1050} = r^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)]$ $r = \sqrt{2}$ $n = 1050$ $\theta = \frac{\pi}{4}$



$\Rightarrow (\sqrt{2})^{1050}[\cos(1050\tfrac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(1050\tfrac{\pi}{4})]$

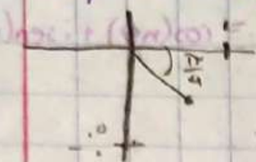
$= 2^{\frac{1050}{2}}[\cos(\tfrac{525}{2}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\tfrac{525}{2}\pi)]$

$= 2^{525}[0 + i] = i\,2^{525}$

$\mathrm{Re}\{(1+i)^{1050}\} = 0$

$\mathrm{Im}\{(1+i)^{1050}\} = 2^{525}$

$iii)\ \left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right)^{2000} = r^n[\cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta)]$ $\quad r=\left|\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2}$



$\Rightarrow 1\left(\cos\left(-2000\frac{\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-2000\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt1=1$

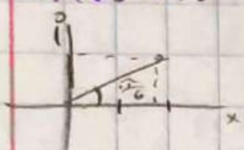
$= \cos(-500\pi)+i\,\mathrm{sen}(-500\pi) \quad n=2000 \quad r^n=1^{2000}=1$

$= 1+i0 \quad \theta=-\frac{\pi}{4}$

$Re=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right)^{2000}\right\}=1$

$Im=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right)^{2000}\right\}=0$

$iv)\ (\sqrt3+i)^4 = r^n[\cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta)] \quad r=\sqrt{(\sqrt3)^2+1^2}=\sqrt4=2$



$\Rightarrow 2^4\left[\cos\left(4\frac{\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(4\frac{\pi}{6}\right)\right] \quad n=4 \quad \theta=\frac{\pi}{6}$

$=16\left(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)=-8+i8\sqrt3$

$Re\{(\sqrt3+i)^4\}=-8$

$Im\{(\sqrt3+i)^4\}=8\sqrt3$

c) Encuentre el valor de x & y que satisfacen las sig. ec.

$i)\ (3x-i)(2+i)+(x-iy)(2+2i)=5+6i$

$6x+3xi-2i+1+2x+2xi-2yi+2y=5+6i$

$8x+2y+1+i(5x-2y-2)=5+6i$

$$+\ \begin{array}{l} 8x+2y+1=5 \\ 5x-2y-2=6 \\ \hline 13x\quad -1=11 \end{array} \Rightarrow 13x=12 \quad \boxed{x=\frac{12}{13}} \Rightarrow 5\left(\frac{12}{13}\right)-2y=8$$

$\frac{60}{13}-2y=8$

$\boxed{y=-\frac{22}{13}}$

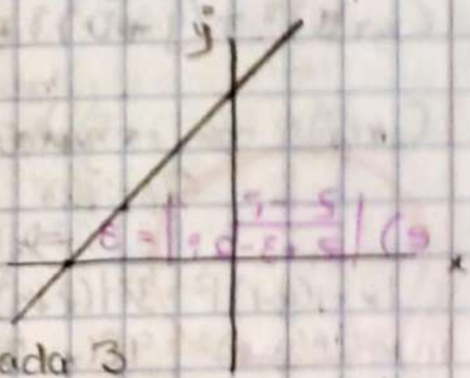
Comprobación

$\left[3\left(\frac{12}{13}\right)-i\right][2+i]+\left[\frac{12}{13}-i\left(-\frac{22}{13}\right)\right](2+2i)$

$=\left(\frac{36}{13}-i\right)(2+i)+\left(\frac{12}{13}+\frac{22}{13}i\right)(2+2i)=\left(\frac{72}{13}+\frac{36}{13}i-2i+1\right)+\left(\frac{24}{13}+\frac{24}{13}i+\frac{44}{13}i-\frac{44}{13}\right)$

$=5+6i$ ✗

Representa el lugar geometrico del conjunto de valores de z q' satisfacen:



a) $|z-2i| = |z+1-3i|$

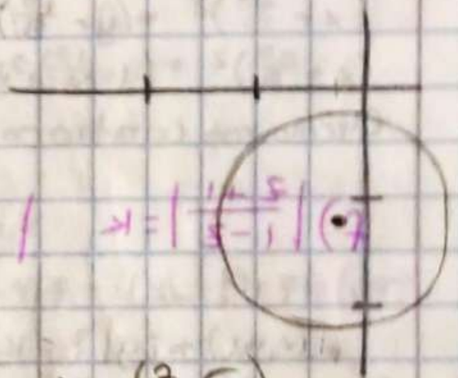
$|x+i(y-2)|^2 = |(x+1)+i(y-3)|^2$

$x^2+y^2-4y+4 = x^2+2x+1+y^2-6y+9$

$2y-2x=6$

$y-x=3$

$y=3+x$ Recta de 45° desplazada 3 unidades a la izquierda sobre el eje x



b) $|z-1| = 2|z+i|$

$|(x-1)+iy|^2 = 2^2|x+i(y+1)|^2$

$x^2-2x+1+y^2 = 4x^2+4y^2+8y+4$

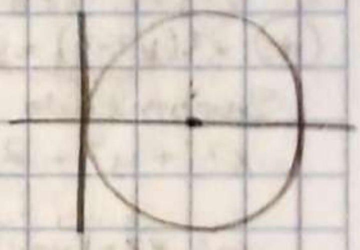
$3x^2+3y^2+8y+2x+3=0$

$x^2+y^2+\frac{8}{3}y+\frac{2}{3}y+1=0$

$(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{8}{6})^2 = -1+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}$

$(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{8}{6})^2 = (\frac{2}{3}\sqrt{2})^2$

Circulo con centro en $(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{6})$ y radio $(\frac{2}{3}\sqrt{2})$



c) $Re\{\frac{1}{z}\} = \frac{1}{4}$

$Re\{\frac{1}{x+iy}\} = \frac{1}{4}$

$Re\{\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}\} = \frac{1}{4}$

$Re\{\frac{x-iy}{x^2+y^2}\} = \frac{1}{4}$

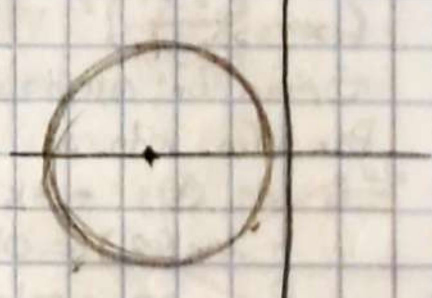
$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4x = x^2+y^2$

$x^2-4x+y^2=0$

$(x^2-2)^2+(y+0)^2 = 2^2$

Circulo con $C(2,0)$ y radio 2



d) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$ $\qquad \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = \frac{|z-3|}{|z+3|}$

$\Rightarrow |z-3| = 2|z+3|$

$|(x-3)+iy|^2 = 4|(x+3)+iy|^2$

$(x-3)^2+y^2 = 4[(x+3)^2+y^2]$

$3x^2+30x+3y^2 = -27$

$x^2+10x+y^2 = -9$

$(x+5)^2+(y+0)^2$

$(x+5)^2+(y+0)^2=4^2$

Circulo con centro en $(-5,0)$ y $r=4$

e) $\left|\dfrac{z-i}{z+3-2i}\right|=3 \Rightarrow |z-i|=3|z+3-2i|$

$|x+i(y-1)|^2=3^2|(x+3)+i(y-2)|^2$

$x^2+(y-1)^2=9[(x+3)^2+(y-2)^2]$

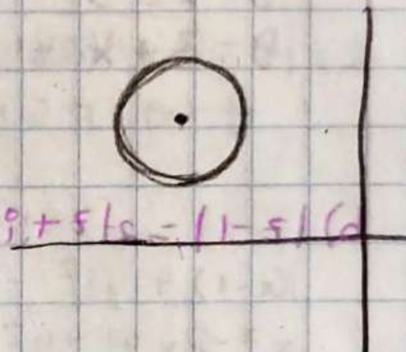
$8x^2+54x+8y^2-34y=-116$

$x^2+\frac{27}{4}x+y^2-\frac{17}{4}y=-\frac{29}{2}$

$(x+\frac{27}{8})^2+(y-\frac{17}{8})^2=-\frac{29}{2}+(\frac{27}{8})^2+(\frac{17}{8})^2$

$(x+\frac{27}{8})^2+(y-\frac{17}{8})^2=\frac{45}{32}$ ó $(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{2}})^2$

Circulo con centro en $(-\frac{27}{8},\frac{17}{8})$ y $r=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}$



f) $\left|\dfrac{z+1}{1-z}\right|=k \quad | \; k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow |z+1|=k|1-z|$

$|(x+1)+iy|^2=k^2|(1-x)-iy|^2$

$(x+1)^2+y^2=k^2[(1-x)^2+y^2]$

$x^2+2x+1+y^2=k^2-2k^2x+k^2x^2+k^2y^2$

(*) $x^2(k^2-1)+y^2(k^2-1)-2x(k^2+1)=1-k^2$

Suponiendo $k^2-1\neq 0$, Dividimos entre (k^2-1)

$x^2+y^2-\dfrac{2(k^2+1)}{(k^2-1)}x=\dfrac{1-k^2}{k^2-1}$

$\left(x-\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+(y^2+0)^2=\frac{1-k^2}{k^2-1}+\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2$

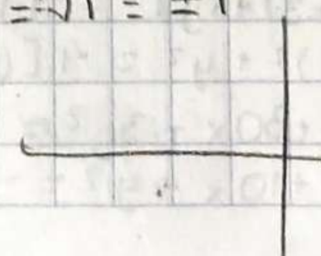
$\left(x-\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+(y^2+0)^2=\left(\frac{2k}{k^2-1}\right)^2$

Seria un circulo con centro en $(\frac{k^2+1}{k^2-1},0)$ y $r=\frac{2k}{k^2-1}$ $\quad k\neq\pm$

Por otro lado si $k^2-1=0$; i.e; $k=\pm\sqrt{1}=\pm1$

$\Rightarrow$ de (*) $-2x(k^2+1)=0$

$-2x(2)=0 \Rightarrow -4x=0$



Es una recta

g) $|z+3|+|z-3|=10$

$(|z+3| = 10 - |z-3|)^2$

$(x+3)^2+y^2 = 10^2 - 20|(x-3)+iy| + (x+3)^2+y^2$

$\cancel{x^2}+6x+\cancel{9}+\cancel{y^2} = 10^2 - 20\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2}$

$(20\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 100 - 12x)\,\frac{1}{10}$

$(2\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 10 - \frac{12}{10}x)^2$

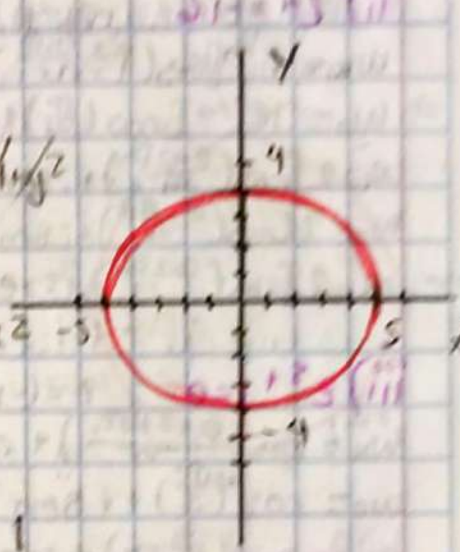
$4(x^2-6x+9+y^2) = 10^2 - 2(\frac{12}{10})(10)x + (\frac{12}{10})^2x^2$

$4x^2 - \cancel{24x} + 36 + 4y^2 = 100 - \cancel{24x} + \frac{36}{25}x^2$

$(\frac{64}{25}x^2 + 4y^2 = 64)\,\frac{1}{4}$

$(\frac{16}{25}x^2 + y^2 = 16)\,\frac{1}{16}$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow$ Elipse $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$



h) $|z+2|+|z-2|=6$

$(|z+2| = 6 - |z-2|)^2$

$(x+2)^2+y^2 = 36 - 12\sqrt{(x-2)^2+y^2} + (x-2)^2+y^2$

$x^2+4x+4 = 36 - 12\sqrt{(x-2)^2+y^2} + x^2 - 4x + 4$

$12\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 36 - 8x$

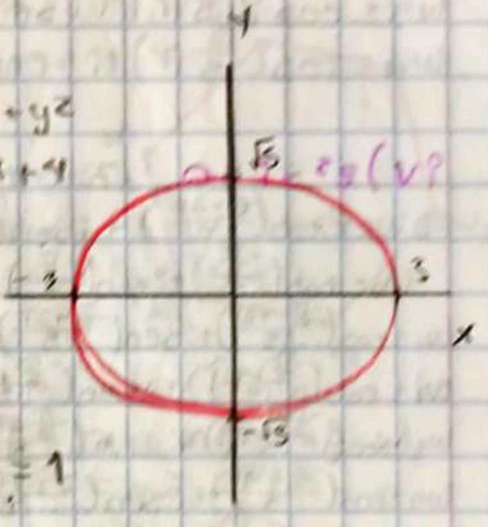
$(\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 3 - \frac{2}{3}x)^2$

$(x-2)^2 + y^2 = 9 - 2(2x) + \frac{4}{9}x$

$x^2 - \cancel{4x} + 4 + y^2 = 9 - \cancel{4x} + \frac{4}{9}x$

$(\frac{5}{9}x^2 + y^2 = 5)\,\frac{1}{5}$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ Elipse $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(\sqrt5)^2}=1$



Encontrar todos los valores de z, y localizarlos en el plano complejo:

i) $z^3+1=0$ $\quad z^3=-1$; $z=(-1)^{1/3}$ $\quad n=3$; $\theta=\pi$; $k=0,1,2$; $|z|=1$

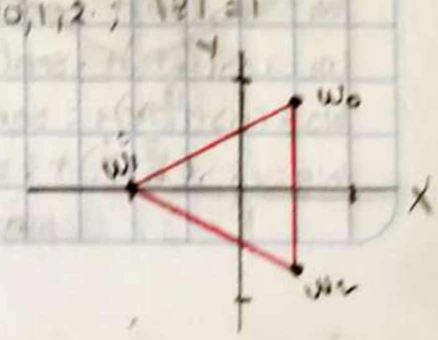
$\Rightarrow w_k = \cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\,\text{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{n})$

$w_0 = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}$

$w_1 = \cos(\frac{\pi+2\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi+2\pi}{3}) = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$

$w_2 = \cos(\frac{\pi+4\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi+4\pi}{3})$

$\cos(\frac53\pi)+i\,\text{sen}(\frac53\pi) = \frac12 - i\frac{\sqrt3}{2}$



$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$

ii) $z^4 = -16$; $n = 4$; $\theta = \pi$; $k = 0, 1, 2, 3$; $|z| = 16 = r$

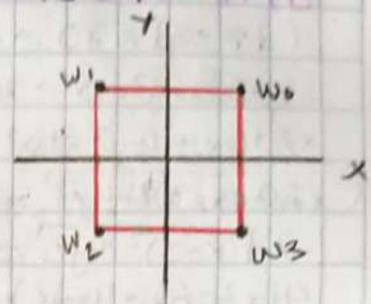
$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

$\Rightarrow w_0 = 16^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{2}{\sqrt{2}}$

$w_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right)\right] = -\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{2}{\sqrt{2}}$

$w_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right)\right] = -\frac{2}{\sqrt{2}} - i\frac{2}{\sqrt{2}}$

$w_3 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{2}} - i\frac{2}{\sqrt{2}}$



iii) $z^5 + 1 = 0$; $z = (-1)^{1/5}$; $n = 5$; $\theta = \pi$; $|z| = r = 1$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$w_k = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

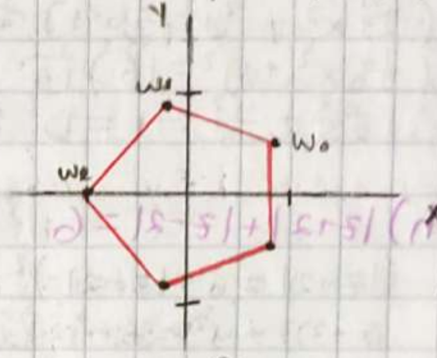
$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$w_1 = \cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{5}\pi\right)$

$w_2 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi^{\,\to 0} = -1$

$w_3 = \cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{5}\pi\right) =$

$w_4 = \cos\left(\frac{9}{5}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{9}{5}\pi\right)$



iv) $z^5 - i = 0$; $z = (-i)^{1/5}$; $n = 5$; $r = |z| = 1$; $\theta = -\frac{\pi}{2}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$\Rightarrow w_k = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

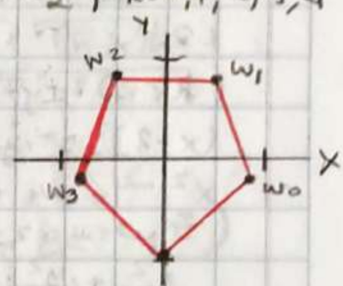
$w_0 = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right)$

$w_1 = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3}{10}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{10}\pi\right)$

$w_2 = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{7}{10}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{10}\pi\right)$

$w_3 = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 6\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{11}{10}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11}{10}\pi\right)$

$w_4 = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 8\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$



v) $z^8 - i = 0$; $z = i^{1/8}$; $n = 8$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; $r = |z| = 1$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

$w_k = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right)$

$w_1 = \cos\left(\frac{5}{16}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{16}\pi\right)$

$w_2 = \cos\left(\frac{9}{16}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{9}{16}\pi\right)$

$w_3 = \cos\left(\frac{13}{16}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13}{16}\pi\right)$

$w_4 = \cos\left(\frac{17}{16}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{17}{16}\pi\right)$

$w_5 = \cos\left(\frac{21}{16}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{21}{16}\pi\right)$

$w_6 = \cos\left(\frac{25}{16}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{25}{16}\pi\right)$

$w_7 = \cos\left(\frac{29}{16}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{29}{16}\pi\right)$

Scribe

vi) $z^8 = 1$; $z = 1^{1/8}$; $n = 8$; $\theta = 0$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; $r = |z| = 1$

$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$w_0 = \cos(0) + i\,\text{sen}(0) = 1$

$w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i$

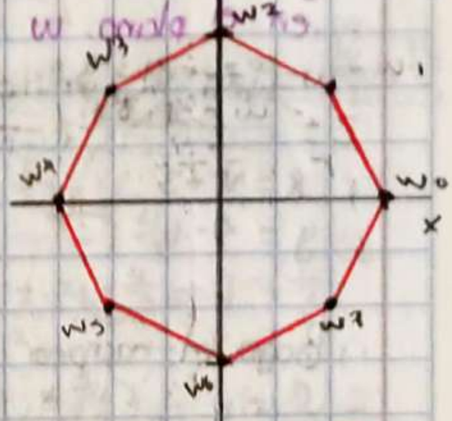
$w_3 = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$w_4 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$

$w_5 = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$w_6 = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$

$w_7 = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$



vii) $z^6 + i = 0$; $z = (-i)^{1/6}$; $n = 6$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $\theta = -\frac{\pi}{2}$; $r = |z| = 1$

$w_k = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

$w_0 = \cos\left(\frac{-\pi/2}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{-\pi/2}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

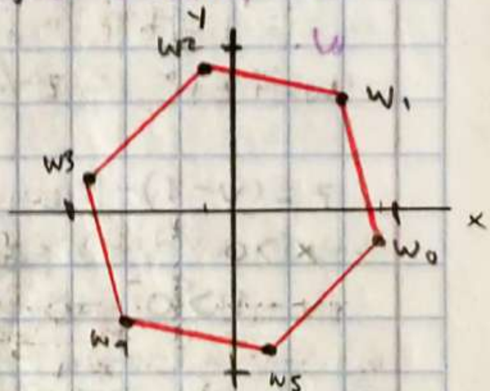
$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$w_2 = \cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{12}\pi\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$w_3 = \cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11}{12}\pi\right)$

$w_4 = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)$

$w_5 = \cos\left(\frac{19}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{19}{12}\pi\right)$



vii) $z^6 + 1 = 0$; $z = (-1)^{1/6}$; $n = 6$; $\theta = \pi$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $r = |z| = 1$

$w_k = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

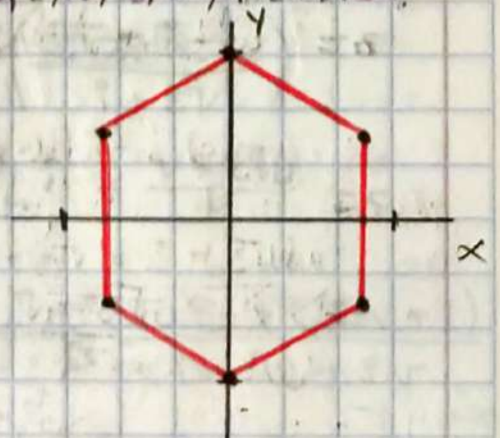
$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$w_2 = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$w_3 = \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$w_4 = \cos\left(\frac{9}{6}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{9}{6}\pi\right) = -i$

$w_5 = \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$



7a) La función $w = iz + 4 - 3i$ es una combinación de translación y rotación. Encuentre la imagen de la recta $6x + y = 22$ en el plano w bajo este mapeo.

$w = iz + 4 - 3i$

$$z = \frac{w - 4 + 3i}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = [(u-4) + i(v+3)](-i) = (v+3) + i(4-u)$$

$x = v + 3$ $\Rightarrow$ $6(v+3) + 4 - u = 22$

$y = 4 - u$ $\quad 6v + \cancel{18} + \cancel{4} - u = \cancel{22}$

$6v = u$

Bajo el mapeo dado la imagen es una recta.

b) Bajo el mapeo $w = iz + i$, demuestra que el semiplano $x > 0$ del plano z se mapea en el semiplano $v > 1$ del plano w.

$w = iz + i \qquad z = \left(\frac{w - i}{i}\right)\left(\frac{-i}{-i}\right) = [u + i(v-1)][-i]$

$(u + iv) - i$

$z = (v-1) - iu \quad ; \quad x = v - 1 \quad ; \quad y = -u \qquad [u + (v-1)i]$

$(v-1) - iu$

$x > 0$

$v - 1 > 0 \Rightarrow v > 1$

$x = v - 1$

$y = -u$

c) Encuentre las imágenes de las sig. curvas bajo el mapeo.

$w = (i + \sqrt{3})z + i - \sqrt{3}$

$$z = \left(\frac{w - i + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + i}\right)\left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i}\right) = \frac{u\sqrt{3} + 1 + v - 1 + i\left(v\sqrt{3} - \sqrt{3} - u - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{4}$$

$$z = \frac{u\sqrt{3} + v}{4} + i\,\frac{v\sqrt{3} - \left(u + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{u\sqrt{3} + v}{4} \qquad y = \frac{v\sqrt{3} - u - \frac{4}{\sqrt{3}}}{4}$$

i) $x=0$

$$\frac{u\sqrt{3}+v}{4}=0$$

$$u\sqrt{3}+v=0$$

$$v=-u\sqrt{3}$$

Recta

ii) $x^2+y^2=1$

$$\left(\frac{u\sqrt{3}+v}{4}\right)^2+\left[\frac{v\sqrt{3}-\left(u-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}{4}\right]^2=1$$

$$\frac{3u^2+2uv\sqrt{3}+v^2+3v^2-2uv\sqrt{3}-8v+u^2+\frac{8u}{\sqrt{3}}+\frac{16}{3}}{16}$$

$$4u^2+4v^2-8v+\frac{8u}{\sqrt{3}}+\frac{16}{3}=16$$

$$u^2+v^2-2v+\frac{2}{\sqrt{3}}u=4-\frac{4}{3}$$

$$(v-1)^2+\left(u+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=4-\frac{4}{3}+1+\frac{1}{3}$$

$$(v-1)^2+\left(u+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2^2$$

Circulo con centro en $\left(1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $r=2$

iii) $x^2+y^2+2y=1$

$$\frac{4u^2+4v^2-8v+\frac{8u}{\sqrt{3}}+\frac{16}{3}}{16}+2\left(\frac{v\sqrt{3}-u-\frac{4}{\sqrt{3}}}{4}\right)=1$$

$$\frac{u^2+v^2-2v+\frac{2u}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3}}{4}+\frac{2v\sqrt{3}-2u-\frac{8}{\sqrt{3}}}{4}=1$$

$$v^2+v(2\sqrt{3}-2)+u^2+u\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-2\right)=4+\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{4}{3}$$

$$\left[v+(\sqrt{3}-1)\right]^2+\left[u+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)\right]^2=4+\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{4}{3}+4-2\sqrt{3}+\frac{1}{3}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\left[v+(\sqrt{3}-1)\right]^2+\left[u+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)\right]^2=(2\sqrt{2})^2$$

Circulo con $C\left(1-\sqrt{3},\ 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $r=2\sqrt{2}$

d) Bajo el mapeo $w=\frac{(z+i)}{(z-3)}$ Encuentre la imagen de $3x+y=4$

$$wz-3w=z+i$$

$$wz-z=i+3w$$

$$z(w-1)=i+3w$$

$$z=\frac{i+3w}{w-1}\implies$$

$$z=\frac{3(u+iv)+i}{(u+iv)-1}=\frac{3u+i(3v+1)}{(u-1)+iv}$$

$$z=\frac{3u+i(3v+1)}{(u-1)+iv}\cdot\frac{(u-1)-iv}{(u-1)-iv}$$

$$z = \frac{3u(u-1) - i3uv + i(3v+1)(u-1) + v(3v+1)}{(u-1)^2 + v^2}$$

$$z = \frac{3u^2 - 3u + 3v^2 + v + i(\cancel{3vu} - 3v + u - 1 - \cancel{3uv})}{(u-1)^2 + v^2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3u^2 - 3u + 3v^2 + v}{(u-1)^2 + v^2} \quad \& \quad y = \frac{u - 1 - 3v}{(u-1)^2 + v^2}$$

$$3\left[\frac{3u^2 - 3u + 3v^2 + v}{(u-1)^2 + v^2}\right] + \frac{u - 1 - 3v}{(u-1)^2 + v^2} = 4$$

$$9u^2 - 9u + 9v^2 + \cancel{3v} + u - 1 - \cancel{3v} = 4(u^2 - 2u + 1 + v^2)$$

$$9u^2 - \cancel{8u} + 9v^2 - 1 = 4u^2 - \cancel{8u} + 4 + 4v^2$$

$$5u^2 + 5v^2 = 5$$

$u^2 + v^2 = 1$ Circulo con centro en el origen y radio 1

$$(u+0)^2 + (v+0)^2 = 1^2$$

e) Si $w = \frac{z-i}{z+i}$, encuentre y dibuje la img en el plano w correspondiente al circulo $|z| = 2$ en el plano z

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

$$wz + wi = z - i$$

$$z - wz = wi + i$$

$$z(1-w) = wi + i$$

$$z = \frac{wi + i}{(1-w)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{wi + i}{(1-w)}\right| = 2$$

$$|(u+iv)i + i| = 2|1-(u+iv)|$$

$$|ui - v + i| = 2|1 - u - iv|$$

$$|-v + i(u+1)|^2 = 2^2|(1-u) - iv|^2$$

$$v^2 + (u+1)^2 = 4[(1-u)^2 + v^2]$$

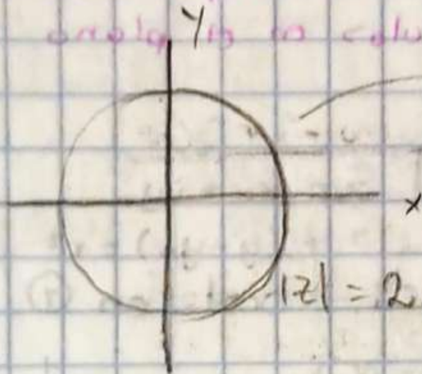
$$v^2 + u^2 + 2u + 1 = 4 - 8u + 4u^2 + 4v^2$$

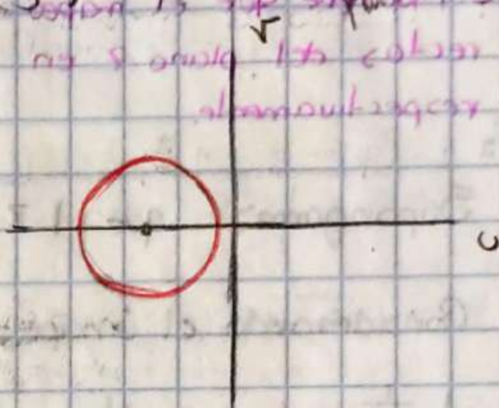
$$3u^2 + 3v^2 - 10u = -3$$

$$u^2 + v^2 - \frac{10}{3}u = -1$$

$$\left(u + \frac{5}{3}\right)^2 + (v+0)^2 = -1 + \frac{25}{9}$$

$$\left(u+\frac{5}{3}\right)^2 + (v+0)^2 = \frac{16}{9} \text{ ó } \left(\frac{4}{3}\right)^2$$





f) Si $\frac{z+1}{z-1} = w$ Encuentre la img de los ejes cordenados $x=0$ & $y=0$

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$
$$wz - w = z + 1$$
$$wz - z = 1 + w$$
$$z(w-1) = 1 + w$$
$$z = \frac{1+w}{w-1}$$

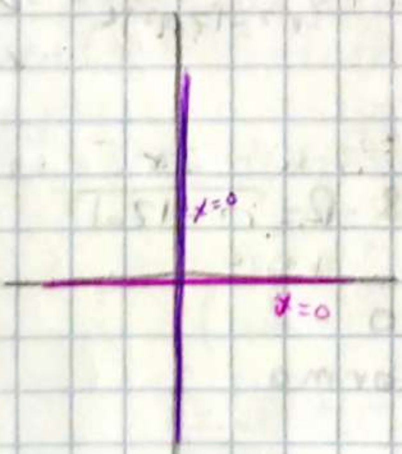
$$\Rightarrow \quad z = \frac{(1+u)+iv}{(u-1)+iv} \cdot \frac{(u-1)-iv}{(u-1)-iv}$$

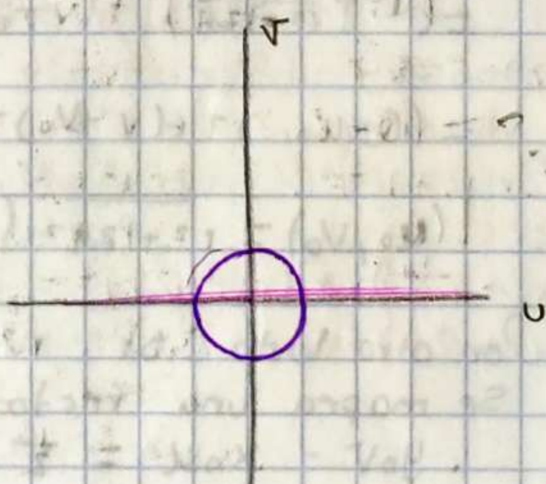
$$z = \frac{\cancel{u} - 1 + u^2 - \cancel{u} - i(\cancel{v} + \cancel{uv} - \cancel{uv} + \cancel{v}) + v^2}{(u-1)^2 + v^2}$$

$$z = \frac{u^2 + v^2 - 1 - i\,2v}{(u-1)^2 + v^2}$$

$$x = \frac{u^2+v^2-1}{(u-1)^2+v^2} \quad \& \quad y = \frac{-2v}{(u-1)^2+v^2}$$

$$u^2 + v^2 = 1 \qquad -2v = 0 \Rightarrow v = 0$$





8. Muestre que el mapeo de inversión $w=\frac{1}{z}$ mapea círculos y rectas del plano z en rectas o círculos en el plano w, respectivamente.

Supongamos que $|z-z_0|=r$ ① $\quad | \; z_0 = x_0 + iy_0$

$\hookrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)=r^2$

Considerando el mapeo $w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w}$. Sust. en ①

$$\left|\frac{1}{u+iv}-(x_0+iy_0)\right|=r \Rightarrow \left|\frac{1}{u+iv}\left(\frac{u-iv}{u-iv}\right)-(x_0+iy_0)\right|=r$$

$$\left|\left(\frac{u}{u^2+v^2}-x_0\right)-i\left(\frac{v}{u^2+v^2}+y_0\right)\right|^2=r^2$$

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}-2x_0\frac{u}{u^2+v^2}+x_0^2+\frac{v^2}{u^2+v^2}+2y_0\frac{v}{u+v^2}+y_0^2=r^2$$

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left\{\frac{u^2+v^2}{u^2+v^2}+2y_0v-2x_0u\right\}=r^2-|z_0|^2$$

$$\Rightarrow (r^2-|z_0|^2)(u^2+v^2)+2x_0u-2y_0v=1$$

Si $r^2-|z_0|^2 \neq 0 \quad r\neq|z_0|^2$

$$\Rightarrow \left(u^2+\frac{x_0}{r^2-|z_0|^2}\right)^2+\left(v-\frac{y_0}{r^2-|z_0|^2}\right)^2=\frac{1}{r^2-|z_0|^2}+\frac{x_0^2}{(r^2-|z_0|^2)^2}+\frac{y_0^2}{(r^2-|z_0|^2)^2}$$

$$=\left(u^2+\frac{x_0}{r^2-|z_0|^2}\right)^2+\left(v-\frac{y_0}{r^2-|z_0|^2}\right)^2=\frac{r^2-\cancel{|z_0|^2}+\cancel{|z_0|^2}}{(r^2-|z_0|^2)^2}$$

$$=(u-u_0)^2+(v-v_0)^2=R^2$$

$$\Big|\,(u_0,v_0)=\frac{1}{r^2+|z_0|^2}(x_0,-y_0) \quad \& \quad R=\frac{r}{r^2-|z_0|^2}$$

Por otro lado si $r^2-|z_0|^2=0$

se mapea una recta de la forma

$$y_0v-x_0u=\frac{1}{2}.$$

9. a) Dado el mapeo $w=\frac{z-i}{z+i}$, encuentre las imágenes en el plano w de $x+y=k$

$$z=\frac{wi+i}{1-w}=\frac{ui-v+i}{1-u-iv}=\frac{-v+i(u+1)}{(1-u)-iv}\cdot\frac{(1-u)+iv}{(1-u)+iv}$$

$$z=\frac{-v+uv-iv^2+i(u+1)(1-u)-v(u+1)}{(1-u)^2+v^2}$$

$$z=\frac{-2v-iv^2+i(\cancel{u}-u^2+1-\cancel{u})}{(1-u)^2+v^2}=\frac{-2v+i(1-u^2-v^2)}{(1-u)^2+v^2}$$

$$x=\frac{-2v}{(1-u)^2+v^2} \quad \& \quad y=\frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}$$

$$\frac{-2v+1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}=k$$

$$-2v+1-u^2-v^2=k-2ku+ku^2+kv^2$$

$$u^2(k+1)+v^2(k+1)-2ku+2v=1-k \rightarrow 1$$

Si $k+1=0 \Rightarrow$ Se mapea en una recta de la forma:

$$-2ku+2v=1-k \qquad k+1=0 \Rightarrow k=-1$$

$$2u+2v=0$$

$$\boxed{u=-v}$$

Si $k+1\neq 0 \Rightarrow 1 = u^2+v^2-\frac{2k}{(k+1)}u+\frac{2}{k+1}v=\frac{1-k}{k+1}$

$$\left(u+\frac{k}{k+1}\right)^2+\left(v+\frac{1}{k+1}\right)^2=\frac{1-k}{k+1}+\frac{k^2}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\left(u+\frac{k}{k+1}\right)^2+\left(v+\frac{1}{k+1}\right)^2=\frac{1}{k+1}\left(1-k+\frac{k^2}{k+1}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k^2+k}{k+1}+\frac{k^2}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{k}{k+1}\right)$$

Circulo con $C\left(-\frac{K}{K+1}, -\frac{1}{K+1}\right)$ y radio

$\sqrt{\frac{1}{K+1}\left(1+\frac{K}{K+1}\right)}$

* b) Encuentre la imagen del lugar geom. de $|z-i| = \lambda|z+i|$ para $w = \frac{z}{z+2}$

$$wz + 2w = z$$
$$z - wz = 2w$$
$$z(1-w) = 2w$$
$$z = \frac{2w}{1-w}$$

$$|z - i| = \lambda\,|z + i|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2(u+iv)}{(1-u)-iv} - i\right| = \lambda\left|\frac{2(u+iv)}{(1-u)-iv} + i\right|$$

$$\left|\frac{2u+2iv}{(1-u)-iv}\cdot\frac{(1-u)+iv}{(1-u)+iv} - i\right| = \lambda\left|\frac{2u+2iv}{(1-u)-iv}\cdot\frac{(1-u)+iv}{(1-u)+iv} + i\right|$$

$$\left|\frac{2u(1-u)+i2uv+i2v(1-u)-2v^2}{(1-u)^2+v^2} - i\right| = \lambda\left|\frac{2u(1-u)+i2uv+i2v(1-u)-2v^2}{(1-u)^2+v^2} + i\right|$$

$$\left|\frac{2u-2u^2-2v^2+\cancel{i2uv}+i2v-\cancel{i2vu}}{(1-u)^2+v^2} - i\right| = \lambda\left|\frac{2u-2u^2-2v^2+\cancel{i2uv}+i2v-\cancel{i2vu}}{(1-u)^2+v^2} + i\right|$$

$$\left|\frac{2u-2u^2-2v^2}{(1-u)^2+v^2} + i\,\frac{2v-(1-u)^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}\right|^2 = \lambda^2\left|\frac{2u-2u^2-2v^2}{(1-u)^2+v^2} + i\left(\frac{2v+(1-u)^2+v^2}{(1-u)^2+v^2}\right)\right|^2$$

$$\left(\frac{2u-2u^2-2v^2}{(1-u)^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{2v-(1-u)^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}\right)^2 = \lambda^2\left[\left(\frac{2u-2u^2-2v^2}{(1-u)^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{2v+(1-u)^2+v^2}{(1-u)^2+v^2}\right)^2\right]$$

$$(2u-2u^2-2v^2)^2 + [2v-(1-u)^2-v^2]^2 = \lambda^2[(2u-2u^2-2v^2)^2 + (2v+(1-u)^2+v^2)^2$$

10) Encuentre la transformación bilineal que mapea los tres (11) puntos $z = 0, -i, -1$ en los puntos $w = i, 1, 0$ en el plano w respectivamente.

Mapeo bilineal: $w = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad w_i = f(z_i)$

$z = 0, -i, -1 \longrightarrow w = i, 1, 0$

$\Rightarrow i = \frac{a(0)+b}{c(0)+d} \rightarrow (1)$ $\quad i = \frac{b}{a} \Rightarrow b - id = 0$

$1 = \frac{a(-i)+b}{c(i)+d} \rightarrow (2)$ $\quad -ai + b + ci - d = 0$

$a - b = 0$

$0 = \frac{a(-1)+b}{c(-1)+d} \rightarrow (3)$

$$\begin{matrix} b & & -id = 0 \\ -ai + b + ci - d = 0 \\ a - b & & = 0 \end{matrix}$$

Aplicando matrices $=$

$$\begin{matrix} a - b \\ b - id = 0 \\ c + d = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c = -d \\ b = id \\ a = id \end{matrix}$$

$\therefore$ el mapeo pedido es $w = \frac{idz + id}{-dz + d} \Rightarrow w = \frac{iz + i}{-z + 1}$

b) Para el mapeo encontrado, encuentre las imágenes en el plano w de las recta $Re(z) = c_1 = k_1$ y $Im(z) = c_2 = k_2$

$w = \frac{iz+i}{-z+1} \Rightarrow z = \frac{w-i}{w+i}$

$\left| \frac{w-i}{w+i} - 1 \right| = \left| \frac{w-i}{w+i} + 1 \right|$

$\left| \frac{w-i-w-i}{w+i} \right| = \left| \frac{w-i+w+i}{w+i} \right|$

$|-2i| = |2w|$

$\cancel{2}|-i| = \cancel{2}|w|$

$|w| = 1$

(11) a) Determine las constantes α y β para que la función sea analítica

$$w = x^2 + \alpha y^2 - 2xy + i(\beta x^2 - y^2 + 2xy)$$

* Para ser una función analítica de cumplir las ec. de C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2\beta x + 2y \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = -(2\alpha y - 2x)$$

$$2\beta x + 2y = 2x - 2\alpha y$$

$$\beta = 1 \quad \alpha = -1$$

b) Para los valores de α & β encuentre la derivada de w, y exprese ambas w y $\frac{dw}{dz}$ en funciones de $z = x + iy$

$$w = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$$

$$f'(w) = 2x - 2y + i(2x + 2y)$$

(13) Demostrar que

i) $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ es armónica

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \boxed{6y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \boxed{-6y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6y - 6y = \underline{0} \quad \text{Es armónica}$$

55705 cd.

ii) $u(x,y) = e^{-x}(x\,\mathrm{sen}\,y + y\cos y)$ es armónica

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\left[e^{-x}x\,\mathrm{sen}\,y - e^{-x}y\cos y\right]$$
$$= e^{-x}\mathrm{sen}\,y - e^{-x}x\,\mathrm{sen}\,y + e^{-x}y\cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-x}\mathrm{sen}\,y - e^{-x}\mathrm{sen}\,y + e^{-x}x\,\mathrm{sen}\,y - e^{-x}y\cos y$$
$$= -2e^{-x}\mathrm{sen}\,y + e^{-x}x\,\mathrm{sen}\,y - e^{-x}y\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}x\cos y - e^{-x}\cos y + e^{-x}y\,\mathrm{sen}\,y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y} = -e^{-x}x\,\mathrm{sen}\,y + e^{-x}\mathrm{sen}\,y + e^{-x}y\cos y + e^{-x}\mathrm{sen}\,y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cancel{-2e^{-x}\mathrm{sen}\,y} + \cancel{e^{-x}x\,\mathrm{sen}\,y} - \cancel{e^{-x}y\cos y} + \cancel{2e^{-x}\mathrm{sen}\,y} + \cancel{e^{-x}y\cos y} - \cancel{e^{-x}x\,\mathrm{sen}\,y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0$$ ∴ es armónica.

a) Encuentre una función $u(x,y)$ (ó $v(x,y)$) tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica.

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2)\,dy$$

$$u = \int (3x^2 - 3y^2)\,dx = x^3 - 3xy^2 + F(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6x + F'(x) \qquad u = x^3 - 3xy^2 + cte$$

$$-6xy + F'(x) = -6y \qquad z = x^3 - 3xy^2 + i\,3x^2y - y^3$$
$$F'(x) = 0 \rightarrow F(x) = cte$$

b) Calcule $f'(z) = \frac{df}{dz}$ y exprese la función f (ya derivada) en términos de la variable z

$$F'(x) = (3x^2 - 3y^2) + i(6xy)$$
$$= 3[x^2 - y^2 + 2ixy]$$
$$= 3[x^2 + ixy - y^2 + ixy] =$$
$$= 3[x(x+iy) + i^2y^2 + ixy]$$
$$= 3[x(x+iy) + iy(x+iy)]$$
$$= 3[(x+iy)(x+iy)]$$
$$= 3(x+iy)^2$$
$$\Rightarrow \underline{f'(z) = 3z^2}$$

(14) a) Encuentre una función $v = v(x,y)$ tal que, $f(z) = u + iv$ sea analítica en z.

$u(x,y) = 2x(1-y)$ [illegible]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1-y) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

$$v_1 = \int 2(1-y)\,dy = 2\left(y - \frac{y^2}{2}\right) = 2y - y^2 + F(x)$$

$$v_2 = -\int -2x\,dx = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

$$v = 2y - y^2 + x^2 + C$$

b) $u(x,y) = 2e^x \cos y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x(0) + 2e^x \cos y = 2e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \cos y$$

$$v = \int 2e^x \cos y \, dy = 2e^x \operatorname{sen} y + F(x)$$

No existe $v(x,y)$

$$+ \int 2e^x \cos y \, dx = 2e^x \cos y + C$$

15	24	23	22	21
10	9	8	7	20
11	2	1	6	19
12	3	4	5	18
13	14	15	16	17

1. a) Encuentre los primeros 4 términos distintos de 0 de la serie de Taylor de la sig. función alrededor del punto indicado.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-4i)} \quad ; \text{ en } z_0=2i$$

Serie de Taylor: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}z_0}{n!}(z-z_0)^n$

$$f(z)=\left[\frac{A}{z}+\frac{B}{(z-4i)}=\frac{1}{z(z-4i)}\right]z(z-4i)$$

Aplicando fracciones parciales $A=-\frac{1}{4i}$ & $B=\frac{1}{4i}$

$$f(z)=\frac{1}{4i}\left[\frac{1}{z-4i}-\frac{1}{z}\right]=\frac{1}{4i}\left[\frac{1}{z-2i-2i}-\frac{1}{z-2i+2i}\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{4i}\left\{\frac{1}{-2i}\left[\frac{1}{1-\frac{z-2i}{2i}}+\frac{1}{1-\frac{-(z-2i)}{2i}}\right]\right.$$

$$f(z)=\frac{1}{8}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2i)^n}{(2i)^n}\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{8}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^n}\left[1+(-1)^n\right](z-2i)^n\right\}$$

$$f(z)=\frac{1}{8}\left\{2-\frac{1}{2}(z-2i)^2+\frac{1}{8}(z-2i)^4-\frac{1}{32}(z-2i)^6+\dots\right\}$$

b) Dada $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-4)}$ escriba un desarrollo de Laurent en la región $2<|z|<4$

$$\left[\frac{1}{(z-2)(z-4)}=\frac{A}{(z-2)}+\frac{B}{(z-4)}\right](z-2)(z-4)$$

$1=A(z-4)+B(z-2)$

$1=Az+Bz+(-4A-2B)$

$-4A-2B=1$

$-2B=4A+1$

$B=-\frac{4A+1}{2}$

$A+B=0$

$A-\frac{4A+1}{2}=0$

$\frac{2A-4A+1}{2}=0$

$-2A+1=0$

$A=\frac{1}{2}$

$B=-\frac{1}{2}$

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-2}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{4}}\right) - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}\right\} \quad \left|\frac{z}{4}\right|<1 \;\&\; \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$|z|<4 \qquad 2<|z|$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\right\} \qquad \text{i.e } 2<|z|<4$$

ii) Escriba un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto en donde la función sea analítica. $z_0 = 3$

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-2}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z-3-1} - \frac{1}{z-3+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{1-(z-3)} - \frac{1}{1-[-(z-3)]}\right\} \qquad |z-3|<1$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{-\sum_{n=0}^{\infty}(z-3)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-3)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n](z-3)^n\right\}$$

c) Dadas las funciones

i) $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$ ii) $f(z) = \frac{2}{z(z-2)}$ Analice los dominios de validez y encuentre sus series de pot. en tales dom.

i) $f(z) = -1\left[\frac{1}{1-z}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right]$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{en } |z|<1 \;\&\; \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

i. e. $|z| < 2$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n \qquad \text{i.e } |z|<1$$

ii) $f(z) = \dfrac{2}{z(z-2)} \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z} \quad z_0 = 1$

$$\left[\frac{2}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z-2)}\right] z(z-2)$$

$$2 = Az - 2A + Bz$$
$$2 = z(A+B) - 2A$$
$$-2A = 2 \qquad A+B = 0$$
$$A = -1 \; ; \; B = 1$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{z-1+1}$$
$$= -1\,\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{1-[-(z-1)]}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{en } |z-1|<1$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \left[1 + (-1)^n\right]$$

9i i) Para $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ escriba el desarrollo en series de pot. alrededor de $z_0 = 1$

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z-2)} \Rightarrow 1 = Az - 2A + Bz$$
$$z(A+B) - 2A = 1 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}\right\}$$
$$A = -\frac{1}{2} \;,\; B = \frac{1}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{(z-1)+1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{-1\,\frac{1}{[1-(z-1)]} - \frac{1}{1-[-(z-1)]}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n\right\} \quad \text{en } |z-1|<1$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1 + (-1)^n\right](z-1)^n$$

2) Serie de $f(z) = \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}$ alrededor de $z_0 = \frac{1}{2}$

$$\frac{z^3+z}{(2z+1)^3} = \frac{A}{(2z+1)} + \frac{B}{(2z+1)^2} = A(2z+1)^2 + B(2z+1)$$

$$z^3+z = A(4z^2+4z+1) + B(2z+1)$$

$$z^3+z = 4Az^2 + A4z + A + Bz + B$$

$$z^3+z = z^2$$

$f'(3z^2+1)$

$f''(6z+0)$

Calcular $\int_c \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}\,dz =$ Sin usar las T. 1 2 6

$$\int_C \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

$$\Rightarrow \int_c \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}\,dz = \int_c \frac{z^3+z}{[2(z+\frac{1}{2})]^3}\,dz = \int_C \frac{1}{2^3}\frac{z^3+z}{[z-(-\frac{1}{2})]^3}\,dz$$

$$= \frac{1}{8}\int_c \frac{z^3+z}{[z-(-\frac{1}{2})]^3}\,dz \;;\; \frac{1}{[z-(-\frac{1}{2})]^3}\left\{a_0+a_1[z-(-\tfrac{1}{2})]+a_2[z-(-\tfrac{1}{2})]^2+\dots\right\}$$

$$f'(z)=3z^2+1 \quad f''(z)=6z/2 \therefore f''(z_0)=6(-\tfrac{1}{2})/2=-\tfrac{3}{2}$$

$$\int_c \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}\,dz = 2\pi i\left[\frac{1}{8}\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = -\frac{3}{8}\pi i$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2iz}(z^2-1)$$

Resolver:

$$z=e^{i\theta} \quad dz = ie^{i\theta}\,d\theta \quad d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{k+\operatorname{sen}\theta} \quad 1<k$$

$$\int_{\gamma:|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{k+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z\left[k+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\right]} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{\cancel{z}\frac{1}{\cancel{z}}\frac{1}{2i}[kz2i+z^2-1]}$$

$$=2\int_\gamma \frac{dz}{z^2+k2iz-1} = 2\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

$$z_{1,2} = \frac{-2ki\pm\sqrt{(2ki)^2+4}}{2} = \frac{-2ki\pm\sqrt{-4k^2+4}}{2} = \frac{-2ki\pm\sqrt{4(1-k^2)}}{2} = -ki\pm\sqrt{1-k^2}$$

$$\Rightarrow z_1 = -ki-\sqrt{1-k^2} \quad \& \quad z_2 = -ki+\sqrt{1-k^2}$$

$\cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta$

$(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2$

$(e^{i\theta})^2$

Para $k>1$ Se observa que los que están dentro del círculo son los $z_2 \Rightarrow$ para calcular el residuo

$$\frac{1}{(z-z_2)}\left\{a_0 + a_1(z-z_2) + \cdots\right\} \qquad z_2 - z_1 = 2\sqrt{1-k^2}$$

$$\left.\frac{1}{(z-z_1)}\right|_{z_2} = \frac{1}{(z_2-z_1)} = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}$$

$$\text{i.e. } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k+\operatorname{sen}\theta} = \left[2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}\right)\right]2 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}}\, i$$

b) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\sqrt{2}+\operatorname{sen}\theta)^2} = \int_{\gamma:|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k \in |z|=1} f(z)$$

$$\int_{\gamma:|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\left[\sqrt{2}+\frac{1}{2iz}(z^2-1)\right]^2} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{\left[\frac{1}{2iz}(\sqrt{2}\,2iz + z^2-1)\right]^2 z}$$

$$= \frac{1}{i}\int_\gamma 4i^2 z \frac{dz}{(z^2+2i\sqrt{2}z-1)^2} = 4i\int_\gamma \frac{z\,dz}{[(z-z_1)(z-z_2)]^2} = 4i\int_\gamma \frac{z\,dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

$$z_{1,2} = \frac{-2i\sqrt{2} \pm \sqrt{-8+4}}{2} = \frac{-2i\sqrt{2} \pm 2i}{2} = i\sqrt{2} \pm i$$

$z_1 = i\sqrt{2}+i \quad z_2 = i\sqrt{2}-i$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z-z_2)^2}\left\{[a_0 + a_1(z-z_2)+\cdots][b_0 + b_1(z-z_2)+\cdots]\right\}$$

$c_0 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$i\sqrt{2} - i$

$= \quad C_0 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$$\Rightarrow f_1(z) = z \,/\, f_1'(z) = 1 \,/\, f_2(z) = \frac{1}{[z - i(\sqrt{2}+1)]^2} \,/\, f_2'(z) = -\frac{2}{[z - i(\sqrt{2}+1)]^3}$$

a_0 $\quad a_1 \quad b_0 \quad b_1$

$f_1(z_2) = i\sqrt{2} - i$

$f_1'(z_2) = 1$

$$f_2(z_2) = \frac{1}{i\sqrt{2} - i - i\sqrt{2} - i} \,/\, 1! = -\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}i$$

$$f_2'(z_2) = -\frac{2}{(-2i)^3} = -\frac{2}{2i} = -\frac{1}{i} = i$$

$$\Rightarrow C_0 = (i\sqrt{2} - i)i + \frac{1}{2}i$$

$$= i^2\sqrt{2} - i^2 + \frac{1}{2}i = -\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}i$$

$$= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\sqrt{2} + \operatorname{sen}\theta)^2} = 4i\left[2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\right]$$

$$= 4i\left[2\pi i\left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}i\right)\right]$$

$$= -8\pi\left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

//

$d\theta = \frac{dz}{iz}$ $\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left[z^n + \frac{1}{z^n}\right]$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left[z - \frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{z^2-1}{z}\right]$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 - 4\operatorname{sen}(\theta)}\, d\theta = \int_{\gamma: |z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - 4\left[\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\right]} \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_\gamma \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}{5 - \frac{2}{iz}(z^2-1)} \frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{\frac{1}{2z^2}(z^4+1)}{-\frac{2}{iz}\left[z^2 - 1 - \frac{5}{2}iz\right]} \frac{dz}{iz} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{z^4+1}{z^2\left[z^2 - \frac{5}{2}iz - 1\right]} dz = -\frac{1}{4}\int \frac{z^4+1}{(z-0)^2(z-z_1)(z-z_2)} dz$$

$$z_{1,2} = \frac{\frac{5}{2}i \pm \sqrt{-\frac{25}{4} + 4}}{2} = \frac{\frac{5}{2}i \pm \sqrt{-\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{5}{2}i \pm \frac{3}{2}i}{2} = \frac{5i \pm 3i}{4}$$

$$z_1 = \frac{5i + 3i}{4} = \frac{8}{4}i = 2i \qquad z_2 = \frac{5i - 3i}{4} = \frac{2}{4}i = \frac{1}{2}i$$

$$R_1 \Rightarrow \frac{1}{(z-0)^2}\left\{[a_0 + a_1(z-0)^1 + \dots][b_0 + b_1(z-0) + \dots][c_0 + c_1(z-0) + \dots]\right\}$$

$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = d = a_0 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_0$

$0 \leq d < 10$ $\left[\frac{\theta b}{\theta \cos d + 10}\right]$ (b

$a_0 = z^4 + 1$ | $b_0 = \frac{1}{z - 2i}$ | c_0 $f_3(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}i}$

$a_1 = 4z^3 + 1$ | $b_1 = -\frac{1}{(z-2i)^2}$ | c_1 $f'_3(z) = -\frac{1}{(z - \frac{1}{2}i)^2}$

Evaluados en 0

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = (1)\left(\frac{1}{-2i}\right)\left[-\frac{1}{(-\frac{1}{2}i)^2}\right] + (1)\left[-\frac{1}{(-2i)^2}\right]\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}i}\right) + (1)\left(\frac{1}{-2i}\right)\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}i}\right)$$

$$= \frac{i}{2}(4) + \left(-\frac{1}{4}\right)(2i) + \left(\frac{1}{2}i\right)(2i) = 2i - \frac{1}{2}i - 1$$

$$= \frac{3}{2}i - 1$$

Ahora $c_0 = z^2$ $c_1 = 2z$

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\left(\tfrac{1}{2}i\right)^4 + 1\right]\left[\frac{1}{\frac{1}{2}i - 2i}\right] 2\left[\tfrac{1}{2}i\right] + \left[\left(\tfrac{1}{2}i\right)^4 + 1\right]\left[-\frac{1}{(\frac{1}{2}i - 2i)^2}\right]\left[\tfrac{1}{2}i\right]^2 + \left[4\left(\tfrac{1}{2}i\right)^3 + 1\right]\left[\frac{1}{\frac{1}{2}i - 2i}\right]\left[\tfrac{1}{2}i\right]^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \left(\frac{17}{16}\right)\left(\frac{2}{3}i\right)i + \frac{17}{16}\left(\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}i+1\right)\left(\frac{2}{3}i\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{17}{24} - \frac{17}{144} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6}i\right) = -\frac{131}{144} - \frac{1}{6}i$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+4\operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{4}\left\{2\pi i\left[\left(\frac{3}{2}i-1\right) - \left(\frac{131}{144} + \frac{1}{6}i\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\pi i\left[-\frac{275}{144} - \frac{4}{3}i\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\pi\left[\frac{4}{3} - \frac{275}{144}i\right]$$

$$= -\left[\frac{2}{3} - \frac{275}{288}i\right]\pi \quad ✗$$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$; $a > b \geq 0$

$$\int_{\gamma:|z|=1} \frac{1}{a + b\,\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\,\frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{1}{\frac{b}{2\cancel{z}}\left(\frac{2az}{b} + z^2+1\right)}\,\frac{dz}{i\cancel{z}}$$

$$= \frac{2}{ib}\int_\gamma \frac{1}{z^2 + \frac{2a}{b}z + 1}\,dz = \frac{2}{ib}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{2a}{b} \pm \sqrt{\frac{4a^2}{b^2} - 4}}{2} = \frac{-\frac{2a}{b} \pm \sqrt{4\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{2a}{b} \pm \frac{2}{b}\sqrt{a^2-b^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

$z_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ $\quad z_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ $\quad$ sea $a > b \geq 0$

los z que caen dentro de $|z|=1$ son z_2

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2}{ib}\oint \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{2}{ib}\left[2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z)\right]$$

$$\frac{1}{z-z_2}\left[a_0 + a_1(z-z_2)+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{1}{z-z_1}\right|_{z_2} = \frac{1}{z_2-z_1} \Rightarrow \frac{1}{-\frac{2}{b}\sqrt{a^2-b^2}} = -\frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

Pero

$$z_2 - z_1 = -\frac{2}{b}\sqrt{a^2-b^2}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2}{\cancel{ib}}\left[\cancel{2}\pi \cancel{i}\left(-\frac{\cancel{b}}{\cancel{2}\sqrt{a^2-b^2}}\right)\right]$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

e) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1+\frac{\operatorname{sen}\theta}{4}}\,d\theta = \int_{\gamma:|z|=1} \frac{\cos\theta}{\frac{1}{4}(4+\operatorname{sen}\theta)}\,d\theta = 4\int_\gamma \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}{4+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}\,\frac{dz}{iz}$$

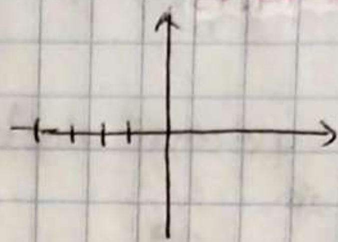
$$= 2\int_\gamma \frac{\frac{z^2+1}{z}}{\frac{1}{2iz}\left[8iz+z^2-1\right]}\,\frac{dz}{iz} = 4\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+8iz-1)}\,dz$$

$$= 4\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$$

$\sqrt{-60} = -15$

$$z_{1,2} = \frac{-8i \pm \sqrt{-64+4}}{2} = \frac{-8i \pm 2\sqrt{15}}{2} = -4i \pm i\sqrt{15}$$

$z_1 = -4i + i\sqrt{15}$ $\quad z_2 = -4i - i\sqrt{15}$



z_1 está dentro de $|z|=1$

$$4\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z-z_1)(z-z_2)}\,dz = 4\left[2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k \in |z|=1} f(z)\right]$$

$$R_1 = \frac{1}{z-a}\left\{[a_0 + a_1(z-0)+\dots][b_0+b_1(z-0)+\dots][c_0+c_1(z-0)+\dots]\right\}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = a_0 b_0 c_0\Big|_0 = \frac{1}{(4i-i\sqrt{15})(4i+i\sqrt{15})} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$R_2 = \frac{1}{z-(-4i+i\sqrt{15})}\left\{[a_0+a_1(z-z_1)+\dots][b_0+b_1(z-z_1)+\dots][c_0+c_1(z-z_1)+\dots]\right\}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i(\sqrt{15}-4)} f(z) = a_0b_0c_0\Big|_{z_1} = \frac{(-4i+i\sqrt{15})^2+1}{(-4i+i\sqrt{15})(-\cancel{4i}+i\sqrt{15}+\cancel{4i}+i\sqrt{15})}$$

$$\frac{[i(\sqrt{15}-4)]^2+1}{(-4i+i\sqrt{15})(2i\sqrt{15})} = \frac{-(\sqrt{15}-4)^2+1}{-8i^2\sqrt{15}+2i^2\cdot 15} = \frac{\cancel{-30+8\sqrt{15}}}{\cancel{8\sqrt{15}-30}} = 1$$

$d\theta \quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{4}+1 \quad d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1+\frac{\operatorname{sen}\theta}{4}}\,d\theta = 4\int_\gamma \frac{dz}{z(z-z_1)(z-z_2)} = 4\{2\pi i[1+(-1)]\} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z^2+1}{z}\right]$$

f) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \int_{\gamma:|z|=1} \frac{1}{2 - \frac{1}{2z}(z^2+1)} \frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{1}{-\frac{1}{2\cancel{z}}\left[-4z + z^2 + 1\right]} \frac{dz}{i\cancel{z}}$$

$$= -\frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4z + 1} \qquad z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$z_1 = 2+\sqrt{3} \qquad \boxed{z_2 = 2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-(2-\sqrt{3})}\left[a_0 + a_1[z-(2-\sqrt{3})] + \dots\right]$$

$$\left.\frac{1}{z-2-\sqrt{3}}\right|_{z_2} = \frac{1}{\cancel{2}-\sqrt{3}-\cancel{2}-\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = -\frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = -\frac{2}{\cancel{i}}\left[\cancel{2}\pi \cancel{i}\left(-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \;\times\!\!\!\times$$

g) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \int_{\gamma:|z|=1} \frac{1}{\left[2 + \frac{1}{2z}(z^2+1)\right]^2} \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_\gamma \frac{1}{\left[\frac{1}{2z}(4z + z^2 + 1)\right]^2} \frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{1}{\frac{1}{4z^2}(z^2+4z+1)^2} \frac{dz}{iz}$$

$$= 4\int_\gamma \frac{z\,dz}{[(z-z_1)(z-z_2)]^2} \qquad z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} \qquad z_1 = -2+\sqrt{3} \qquad z_2 = -2-\sqrt{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = 4\oint_\gamma \frac{z\,dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

$$\frac{1}{(z-z_1)^2}\Big\{[a_0+a_1(z-z_1)+a_2(z-z_1)^2+\cdots][b_0+b_1(z-z_1)+b_1(z-z_1)^2+\cdots$$

$$(a_0b_1+a_1b_0)(z-z_1)$$

$$a_0 = f_1(z) = z\Big|_{-2+\sqrt{3}} = -2+\sqrt{3}$$

$$a_1 = 1$$

$$b_0 = f_2(z) = \frac{1}{(z+2+\sqrt{3})^2}\Big|_{-2+\sqrt{3}} = \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{1}{12}$$

$$b_1 = f_2'(z) = -\frac{1}{(z+2+\sqrt{3})^3}\Big|_{-2+\sqrt{3}} = -\frac{1}{(2\sqrt{3})^3} = -\frac{1}{24\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = (-2+\sqrt{3})\left(-\frac{1}{24\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{12} =$$

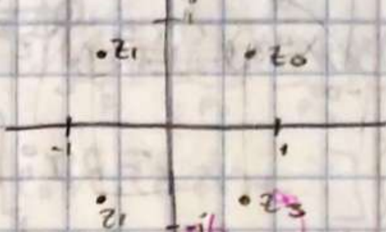
$$= \frac{-3+2\sqrt{3}}{72} + \frac{1}{12} = \frac{3+2\sqrt{3}}{72}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = 4\oint_\gamma \frac{z\,dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)} = 4\left\{2\pi i\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{72}\right)\right\}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}}{9}\pi i \quad //$$

¿Evaluar aquí?

h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx = \oint_c \frac{z^2}{z^4+1}dz = \oint_c$



$z^4 = -1$

$z = (-1)^{1/4} \quad n = 4 \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad \theta = \pi \quad r = 1$

$z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{n}$

$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

$z_1 = \cos \frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$

$z_2 = \cos \frac{5}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i)$

$z_3 = \cos \frac{7}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx = \oint_c \frac{z^2}{z^4+1}dz = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z = z_k \in sps} f(z) \right]$

$R_1 = \left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}}} \right] \left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} \right] \left[\frac{1}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} \right]$

$\left[\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} \right] \left[\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)} \right] \left[\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}} i} \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} i \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} i \right]$

$= \frac{1}{2} i \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} i \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} i + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1 + i)$

$R_2 = \left[\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}}} \right] \left[\frac{1}{\cancel{-\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} \right] \left[\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} \right]$

$= \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} i \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{-2 + 2i} \right] = -\frac{i}{2} \left[\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} i}{4} \right] [i]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{8} i - \frac{\sqrt{2}}{8} \right] i = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1 - i)$

$\left[\frac{\sqrt{2}}{8}(-1 + i) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right]^2$

$\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} i - \cancel{\frac{1}{2}}$

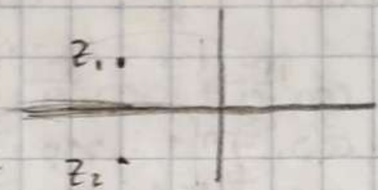
Schoo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \oint_c \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left[-\frac{\sqrt{2}}{8} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{8} i} - \frac{\sqrt{2}}{8} \cancel{- \frac{\sqrt{2}}{8} i}\right]$$

$$= 2\pi i\left[-\frac{2\sqrt{2}}{8}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^3} = \oint_c \frac{dz}{(z+2)^3} = \begin{cases} 0; & n \neq 0 \\ 2\pi i; & n=1 \end{cases} \Rightarrow = 0$$

j) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \oint_c \frac{dz}{(z^2+4z+5)^2}$$



$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$z_1 = -2+i \quad z_2 = -2-i$

$$\Rightarrow \oint_c \frac{dz}{[z-(-2+i)]^2[z-(-2-i)]^2} = 2\pi i\left[\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k \in \langle p \rangle} f(z)\right]$$

$$= 2\pi i\,[$$

$$\frac{1}{[z-(-2+i)]^2}\left[a_0 + a_1(z-z_1) + a_2(z-z_1)^2 + \dots\right]$$

$$a_1 = -\frac{2}{[z-(-2-i)]^3}\Big|_{z_1} \Big/ 1! = -\frac{2}{(\cancel{-2}+i\cancel{+2}+i)^3} = -\frac{2}{2i} = -\frac{1}{i} = i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \oint_c \frac{dz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} = 2\pi i\,(i) = -2\pi$$

k) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2} = \oint_c \frac{dz}{(z^2-1)^2(z^2+4)^2} = \oint \frac{dz}{\underbrace{(z+i)^2}_{P_1}\underbrace{(z-i)^2}_{P_2}\underbrace{(z+2i)^2}_{P_3}\underbrace{(z-\ldots}_{P_4}}$

$$\frac{1}{(z-z_2)^2}\left\{\left[a_0+a_1(z-z_2)+\ldots\right]\left[b_0+b_1(z-z_2)+\ldots\right]\left[c_0+c_1(z-z_2)+\ldots\right]\right\}$$

$$\underset{z=z_2}{\operatorname{Res}_1} f(z) = a_0b_0c_1 + a_1b_0c_0 + b_1a_0c_0$$

$$a_0 = \frac{1}{(z+i)^2}\Big|_i = \frac{1}{(2i)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_1 = -\frac{2}{(z+i)^3}\Big|_i = -\frac{2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

$$b_0 = \frac{1}{(z+2i)^2}\Big|_i = \frac{1}{(3i)^2} = -\frac{1}{9}$$

$$b_1 = -\frac{2}{(z+2i)^3}\Big|_i = -\frac{2}{(3i)^3} = \frac{2}{27i} = -\frac{2}{27}i$$

$$c_0 = \frac{1}{(z-2i)^2}\Big|_i = \frac{1}{(-i)^2} = -1$$

$$c_1 = -\frac{2}{(z-2i)^3}\Big|_i = -\frac{2}{(-i)^3} = -\frac{2}{i} = 2i$$

$$\underset{z=z_2}{\operatorname{Res}_1} f(z) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)(2i) + \left(-\frac{i}{4}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)(-1) + \left(-\frac{2}{27}i\right)\left(-\frac{1}{4}\right)(-1)$$

$$= \frac{1}{18}i - \frac{1}{36}i - \frac{1}{54}i = \frac{1}{108}i$$

$$\underset{z=z_4}{\operatorname{Res}_2} f(z) = a_0b_0c_1 + a_1b_0c_0 + b_1a_0c_0$$

$$a_0 = \frac{1}{(z+i)^2}\Big|_{2i} = \frac{1}{(3i)^2} = -\frac{1}{9}$$

$$a_1 = -\frac{2}{(z+i)^3}\Big|_{2i} = -\frac{2}{(3i)^3} = -\frac{2}{27}i$$

$$b_0 = \frac{1}{(z-i)^2}\Big|_{2i} = \frac{1}{(i)^2} = -1 \qquad b_1 = -\frac{2}{(z-i)^3}\Big|_{2i} = -\frac{2}{(i)^3} = -2i$$

Ahora c_0 y c_1 son

$$c_0 = \frac{1}{(z+2i)^2}\Big|_{2i} = \frac{1}{(4i)^2} = -\frac{1}{16}$$

$$c_1 = -\frac{2}{(z+2i)^3}\Big|_{2i} = -\frac{2}{(4i)^3} = \frac{2}{64i} = -\frac{1}{32}i$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \left(-\frac{1}{9}\right)(-1)\left(\frac{1}{32}i\right) + \left(-\frac{2}{27}i\right)(-1)\left(-\frac{1}{16}\right) + (-2i)\left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{288}i - \frac{1}{216}i - \frac{1}{72}i = -\frac{13}{864}i$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2} = 2\pi i\left(-\frac{13}{864}i - \frac{1}{108}i\right) = \frac{7}{144}\pi$$

l) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+2)^2} = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-i\sqrt{2})^2(z+i\sqrt{2})^2} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k\in SPS} f(z)$$

$$\frac{1}{(z-i\sqrt{2})^2}\left\{a_0 + a_1(z-i\sqrt{2}) + \dots\right\}$$

$$a_1 = -\frac{2}{(z+i\sqrt{2})^3}\Big|_{i\sqrt{2}} = -\frac{2}{(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3} = -\frac{2}{(2i\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{16}i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-i\sqrt{2})^2(z+i\sqrt{2})} = 2\pi i\left[-\frac{\sqrt{2}}{16}i\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \oint_c \frac{dz}{z^4+1} = \oint_c \frac{dz}{\underbrace{(z-z_0)}_{P_0}\underbrace{(z-z_1)}_{P_1}\underbrace{(z-z_2)}_{P_2}\underbrace{(z-z_3)}_{P_3}} = 2\pi i\left[\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \text{ esps}\right]$$

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P_0 \Rightarrow \frac{1}{(z-z_0)}\left\{\left[a_0+a_1(z-z_0)+\dots\right]\left[b_0+a_1(z-z_0)+\dots\right]\left[c_0+c_1(z-z_0)+\dots\right]\right\}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_0 b_0 c_0$$

$$a_0 = \left.\frac{1}{z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right|_{z_0} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_0 = \left.\frac{1}{z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right|_{z_0} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$$

$$c_0 = \left.\frac{1}{z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right|_{z_0} = \frac{1}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{i\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1-i}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)$$

$$\operatorname{Res} P_1 = \frac{1}{z-z_1}\left\{\left[a_0+a_1(z-z_1)+\dots\right]\left[b_0+b_1(z-z_1)+\dots\right]\left[c_0+c_1(z-z_1)+\dots\right]\right\}$$

$$a_0 b_0 c_0$$

$$a_0 = \left.\frac{1}{z-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|_{z_1} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_0 = \left.\frac{1}{z+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|_{z_1} = \frac{1}{-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$c_0 = \left.z-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right|_{z_1} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{-\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{-1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)$$