УМФ. Лекция

Roddyk

13 декабря 2024 г.

Задача Дирихле

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \Gamma = \partial\Omega$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = 0 \tag{1}$$

$$u(x,y,z,t)|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \phi(x,y,z) \tag{3}$$

$$u_t(x,y,z,t)|_{t=0} = \psi(x,y,z) \tag{4}$$

$$u(x,y,z,t) = T(t)v(x,y,z) \tag{5}$$

$$T''(t)v(x,y,z) - a^2T(t)\Delta v(x,y,z) = 0 \mid \ : a^2T(t)v(x,y,z)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\Delta v(x,y,z)}{v(x,y,z)} = -\lambda$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{6}$$

$$\Delta v(x,y,z) + \lambda v(x,y,z) = 0 \tag{7}$$

$$v(x,y,z)|_\Gamma = 0 \tag{8}$$

Если $A = -\Delta$, $Av = \lambda v$

Свойства решения:

1) Все собственные значения вещественные

$$\lambda = Re\lambda + iIm\lambda$$

$$v = Rev + iImv$$

$$(7) \cdot \overline{v}$$

$$\Delta\overline{v} + \lambda\overline{v} = 0 \tag{9}$$

$$\overline{v}|_\Gamma = 0 \tag{10}$$

$$(9) \cdot v$$

$$\begin{cases} \Delta v \cdot \overline{v} + \lambda v\overline{v} = 0 \\ \Delta\overline{v} \cdot v + \overline{\lambda}\overline{v}v = 0 \end{cases}$$

$$\Delta v \cdot \overline{v} - \Delta\overline{v} \cdot v + (\lambda - \overline{\lambda})|v|^2$$

$$\int_\Omega (\Delta v \cdot \overline{v} - \Delta\overline{v} \cdot v)dxdydz + (\lambda - \overline{\lambda}) \int_\Omega |v|^2 dxdydz = 0$$

$$\Delta v \cdot \overline{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\overline{v}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\overline{v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\overline{v}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)$$

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \int_\Gamma (P\cos nx + Q\cos ny + R\cos nz)d\Gamma$$

$$\int_\Omega \Delta v \cdot \overline{v} dxdydz = \underbrace{\int_\Gamma \overline{v}\frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma}_{=0} - \int_\Omega (v_x\overline{v}_x + v_y\overline{v}_y + v_z\overline{v}_z) dxdydz$$

$$\int_\Omega \Delta \overline{v} \cdot v dxdydz = -\int_\Omega (v_x\overline{v}_x + v_y\overline{v}_y + v_z\overline{v}_z) dxdydz$$

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_\Omega |v|^2 dxdydz = 0$$

$$\lambda - \overline{\lambda} = 0$$

$$\lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

В задаче (7)-(8) все собственные значения собственные

$$(7) \cdot v, \ \int_\Omega$$

$$\int_\Omega \Delta v \cdot v dxdydz + \lambda \int_\Omega v^2 dxdydz = 0$$

$$\int_\Gamma v\frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma - \int_\Omega (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dxdydz = 0$$

$$\underbrace{\int_\Omega (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dxdydz}_{\geq 0} = \underbrace{\lambda \int_\Omega v^2 dxdydz}_{>0}$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda = 0 \implies \begin{cases} v_x \equiv 0 \\ v_y \equiv 0 \\ v_z \equiv 0 \end{cases}$$

Тогда $\lambda > 0$

В то время как в задаче Неймана $\lambda = 0$ собственное значение, а собственная ф-я $= const$

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Можно док-ть, что каждому собст. зн-ю соответствует конечный набор собственных ф-ий

Th Собственные ф-ии соответсвующие различным собственным значениям ортогональны

План действий

$$\lambda_1 \to v_1^1, \dots, v_{k_1}^1$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_n \to v_1^n, \dots, v_{k_n}^n$$

$$\Delta v_i^n(x,y,z) + \lambda v_i^n(x,y,z) = 0$$

$$v_i^n(x,y,z)|_\Gamma = 0$$

$$T_n(t) v_i^n(x,y,z) = 0$$

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sum_{i=1}^{k_n} C_i^n v_i^n(x,y,z)$$

$$C_i^n, \quad n = 1, \dots, \infty, \quad i = 1, \dots, k_n$$

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

$$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n}$$

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \left(A_n^i \cos \omega_n t + B_n^i \sin \omega_n t\right) v_i^n(x,y,z)$$

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} A_n^i v_n^i(x,y,z) = \phi(x,y,z) \mid v_j^m, \ \int_\Omega$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sum_{i=1}^{k_n} B_n^i v_n^i(x,y,z) = \psi(x,y,z) \mid v_j^m, \ \int_\Omega$$

$$\int_\Omega v_i^n \cdot v_j^m dxdydz = 0 \quad \text{если } n \neq m \text{, а если } n = m \text{ то } i \neq j$$

$$A_m^j \int_\Omega (v_j^m)^2 dxdydz = \int_\Omega \phi(x,y,z) v_j^m(x,y,z) dxdydz$$

$$\omega_m B_m^j \int_\Omega (v_j^m)^2 dxdydz = \int_\Omega \psi(x,y,z) v_j^m(x,y,z) dxdydz$$