Нуль в ${}^{R}/_{I}$ есть I
Единица в ${}^{R}/_{I}$ R - кольцо, $I \lhd R$
${}^{R}/_{I} = \{r + I \mid r \in R\}$ - $\overline{r}$- факторколько с оп: $\forall r, s \in R (r + I) + (s + I) = (r + s) + I$
$(r + I)(s + I) = rs + I$

2) F - поле, $F[x]$ - Кги, $I = f(x)F[x] = (f(x))$
${}^{F[x]}/_{(f(x))}$ - Поле $\Leftrightarrow f(x)$ неприводим над F

Proof 1) $\Rightarrow$: Против: $f = gh$, где $\deg g, h < \deg f \Rightarrow g + (f) \neq (f) \quad (f) = f \cdot F[x],\ h + (f) \neq (f)$
$(g + (f))(h + (f)) = gh + (f) = f + (f) = (f) \Rightarrow g + f$ и $h + (f)$ - делители нуля в ${}^{F[x]}/_{(f)}$ - поле.
Противоречие $\Rightarrow f$ неприводим в $F[x]$
2) $\Leftarrow$: $\forall g + (f) \neq (f)$ f - неприводим $\Rightarrow g \nmid f \Rightarrow \exists u, v \in F[x] \mid uf + gv = 1 \Rightarrow uf + gv + (f) = 1 + (f) \Rightarrow (uf + (f)) + (gv + (f)) = 1 + (f) \Rightarrow (u + (f))(f + (f)) + (g + (f))(v + (f)) = 1 + (f) \Rightarrow$
$(g + (f))(v + (f)) = 1 + (f) \Rightarrow v + (f) = (g + (f))^{-1}$
$uf + gv = 1 \Rightarrow \overline{u}\overline{f} + \overline{gv} = \overline{1}$
Например,

$$ {}^{\mathbb{R}[x]}/_{(x^2 + 1)} \cong \mathbb{C} $$

$\underline{F = \mathbb{Z}_2} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$
$x^2 + x + \overline{1}$ - неприводим над $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 1)$ - поле из 4 элементов: $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x + 1}\} \quad \overline{x} = x + (x^2 + x + 1)$
$\overline{x^5 + x^3 + 1} = (\overline{x^2 + x + 1})(\overline{x^3 - x^2 + x}) + \overline{1 - x}$

Гомоморфизмы колец

R, S - кольца

Def. $f : R \to S$ - гомо-зм, если
1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$
2) $f(ab) = f(a)f(b)$
3) $f(1) = 1$
$\ker f = \{r \in R \mid f(r) = 0\} \lhd R$
$Imf = \{s \in S \mid s = f(r)$ для нек-го $r \in R\}$ – подколько в S
Если f - биекция $\Rightarrow$ f - изоморфизм

$\rho : R \to {}^{R}/_{I}$ -каноническйи гомоморфизм с $\ker \rho = I$

Th.(об изоморфизме)
Пусть $f : R \to S$ - сюрьективный гомоморфизм(эпиморфизм) $\Rightarrow S \cong {}^{R}/_{\ker f}$

Proof

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & S \\ & {}^{R}/_{\ker f} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$f = \psi\rho$
Строим $\psi : R/\ker f \to S, \psi(r + \ker f) = f(r)$
Корр-ть Если $r + \ker f = r' + \ker f$, then $\psi(r' + \ker f) = f(r') \stackrel{?}{=} f(r)$ $r' = r + x$, где $x \in \ker f$

$$\psi(r' + \ker f) = f(r') = f(r + x) = f(r) + f(x) = f(r)$$

ψ гомо-зм :

$$\psi((r + \ker f) + (r' + \ker f)) = \psi(r + r' + \ker f) = f(r + r') = f(r) + f(r') = \psi(r + \ker f) + (r' + \ker f)$$

Иньективность ψ - иньективен $\Leftrightarrow \ker\psi = 0$
$r + \ker\psi \in \ker\psi \Rightarrow \psi(r + \ker f) = f(r) = 0 \Rightarrow r \in \ker f \Rightarrow r + \ker f = \ker f = \overline{0}$
Сюрьективность
$\forall s \in S \overset{\text{f - эпи}}{\Rightarrow} s = f(r) = \psi(r + \ker f) \Rightarrow \psi$-эпи

Th.(о соответствии)
Пусть $f : R \to S$ - эпи $\Rightarrow \exists$ вз/одноз соотв-е между идеалами в S и идеалами в R, содержащими kerf

Proof Th об изо $\Rightarrow S \cong {}^{R}/_{\ker f}$, поэтому рассмотрим $\rho : R \to {}^{R}/_{I}$, где $I = \ker f$
$\Omega(R, I)$ - все идеалы в R, содержащие I
$\Omega({}^{R}/_{I})$ - все идеалы в R/I
$\psi : \Omega(R, I) \to \Omega({}^{R}/_{I})$
$I \subseteq J \mapsto \rho(J) = \{j + I \mid j \in J\} \lhd {}^{R}/_{I}$
1) $j_1 + I, j_2 + I \in \rho(J)$
$(j_1 + I) + (j_2 + I) = (j_1 + j_2) + I \in \rho(J)$
2) $j + I \in \rho(J), r + I \in {}^{R}/_{I} \Rightarrow (j + I)(r + I) = jr + I \in \rho(J)$

Иньективность $\psi(J_1) = \psi(J_2) \Rightarrow J_1 + I = J_2 + I \Rightarrow\Rightarrow J_1 = J_2 + I = J_2$

Сюрьективость $\forall \overline{K} \in \Omega({}^{R}/_{I})$, где $\overline{K} = \{k + I \mid k \in K\}$
Then $\psi(K) = \overline{K}$
$\forall k_1, k_2 \in K : (k_1 + I) + (k_2 + I) = (k_1 + k_2) + I \in \overline{K} \Rightarrow k_1 + k_2 \in K$
$\forall k \in K, r \in R : (k + I)(r + I) = kr + I \in \overline{K} \Rightarrow kr \in K$
Then $K \lhd R$