$$u_t(x,y,z,t) - a^2\Delta u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x,y,z) \tag{2}$$

Теорема о единственности решения задачи Коши

Теорема (Единственность решения задачи Коши)**.** *Задача Коши имеет не больлее одного ограниченного решения.*
$\exists M > 0\ |u(x,y,z,t)| < M,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t \leq 0$

Доказательство. Предположим, что есть два решения задачи (1) − (2)
Рассмотрим $u = u^1 - u^2$
Получим

$$u_t(x,y,z,t) - a^2\Delta u(x,y,z,t) = 0 \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

$$|u| < 2M$$

Определим в $\mathbb{R}^3$ $\quad B_L(0)$ - шар радиуса L с центром в нуле

$$B_L(0) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 < L^2\right\}$$

$$\Gamma_L(0) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = L^2\right\}$$

$$Q_T = B_L(0) \times (0;T) \subset \mathbb{R}^4$$

$$\overline{Q_T} = \overline{B_L(0)} \times [0;T]$$

$$\Sigma = \Gamma_L(0) \times [0;T]$$

$$\Sigma_0 = \overline{B_L(0)}$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,y,z,t) = \frac{12M}{L^2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6} + a^2 t\right) \tag{5}$$

Легко убедиться в том, что

$$v_t - a^2\Delta v = 0$$

Также $v - u$ и $v + u$ тоже удовлетворяют уравнению теплопроводности
Тогда можем применить к этим функция теорему о максимуме и минимуме уравнения теплопроводности
На нижнем основании Σ_0

$$v - u \geq 0, \quad v + u \geq 0$$

На Σ:

$$v = \frac{12M}{L^2}\left(\frac{L^2}{6} + a^2 t\right) \geq \frac{12M}{6} \cdot \frac{L^2}{6} = 2M$$

Т.е. $v \geq 2M$
Т.к. $|u| < 2M$, то на Σ

$$v - u \geq 0, \quad v + u \geq 0$$

По теореме о макс и мин ур-я теплопроводности функции $v - u,\ v + u$ достигают наименьшего значения либо на основании, либо на боковой поверхности, а это наименьшее значение не отрицательно. А значит и во всем цилиндре $\overline{Q_T}$:

$$v - u \geq 0, \quad v + u \geq 0$$

Из этого следует, что в $\overline{Q_T}$

$$|u| \leq v$$

Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0, z_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times (0;T)$
Можно выбрать достаточно большие T, L, чтобы точка попала в цилиндр Q_T
Тогда

$$|u(x_0,y_0,z_0,t_0)| \leq v(x_0,y_0,z_0,t_0)$$

Рассмотрим

$$v(x_0,y_0,z_0,t_0) = \frac{12M}{L^2}\left(\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{6} + a^2 t_0\right)$$

v в этой точке может быть сколь угодно малым, в зависимости от L
Тогда $u(x_0,y_0,z_0,t_0) = 0$.
Значит, что $u^1 = u^2$

∎

Теорема о единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности

Решения будем искать в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3,\ \Gamma = \partial\Omega$
Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,\ \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing,\ \text{if } i \neq j$
Начальные и граничные условия:

$$u|_{t=0} = u_0(x,y,z),\ (x,y,z) \in \Omega$$

$$u|_{\Gamma_1} = u_\Gamma(x,y,z,t),\ (x,y,z) \in \Gamma_1,\ t \geq 0 \tag{6a}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial v} = -q_\Gamma(x,y,z,t) \tag{6b}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial v} + hu = h_t... \tag{6c}$$

Теорема. *Решение смешанной задачи единственно*

Доказательство. Предположим, что есть два решения. $u = u^1 - u^2$. Получим

$$u_t(x,y,z,t) - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = 0 \tag{7}$$

$$u|_{t=0} = 0\ (x,y,z) \in \Omega \tag{8}$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0\ (x,y,z) \in \Gamma_1,\ t \geq 0 \tag{9a}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \tag{9b}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial v} + hu = 0 \tag{9c}$$

$$(7) \cdot u,\ \int_\Omega dxdydz$$

Получим следующее

$$\int_\Omega u u_t dxdydz - a^2 \int_\Omega u \Delta u dxdydz = 0 \tag{10}$$

$$u u_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(u^2)$$

$$\int_\Omega u u_t dxdydz = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u^2 dxdydz$$

$$u \Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\int_\Omega u \Delta u dxdydz = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdydz + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dxdydz$$

Применим теорему Гаусса-Остроградского

$$\int_\Omega u \Delta u dxdydz = \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial v} d\Gamma - \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dxdydz \tag{11}$$

Подставим в (10)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u^2 dxdydz - a^2 \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + a^2 \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dxdydz = 0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u^2 dxdydz + a^2 \int_\Gamma \frac{h}{\lambda} u^2 d\Gamma + a^2 \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dxdydz = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u^2 dxdydz = -a^2 \int_\Gamma \frac{h}{\lambda} u^2 d\Gamma - a^2 \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dxdydz$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = \int_\Omega u^2(x, y, z, t) dx dy dz$$

Из последнего равенства следует

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi(t)}{dt} \leq 0$$

$$\Phi(0) = 0,\ \Phi(t) \geq 0$$

$$\Phi(t) \equiv 0$$

Отсюда

$$u^2(x, y, z, t) \equiv 0$$

$$u \equiv 0$$

■

Применение метода разделения переменных для уравнения теплопроводности стержня

$$u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad x \in (0,l),\ t > 0 \tag{13}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{14}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{15}$$

Рассматриваем

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0$$

Ищем решение вида

$$u = T(t)X(x)$$

$$T'(t)X(x) - a^2 T(t)X''(x) = 0$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}$$

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$$

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l}$$