Нуль в $^R/I$ есть I Единица в $^R/I$ R - кольцо, $I \lhd R$ $^R/I = \{r+I \mid r \in R\}$ - \overline{r} - факторколько с оп: $\forall r,s \in R(r+I) + (s+I) = (r+s) + I$ (r+I)(s+I) = rs+I

2) F - поле, F[x] - Кги, I = f(x)F[x] = (f(x))

F[x]/(f(x)) - Поле $\Leftrightarrow f(x)$ неприводим над F

 $(2) \Leftarrow : \forall g + (f) \neq (f)$ f - неприводим $\Rightarrow g \nmid f \Rightarrow \exists u, v \in F[x] \mid uf + gv = 1 \Rightarrow uf + gv + (f) = 1 + (f) \Rightarrow (uf + (f)) + (gv + (f)) = 1 + (f) \Rightarrow (u + (f))(f + (f)) + (g + (f))(v + (f)) = 1 + (f) \Rightarrow (g + (f))(v + (f)) = 1 + (f) \Rightarrow v + (f) = (g + (f))^{-1}$ $(uf + gv = 1 \Rightarrow \overline{uf} + \overline{gv} = \overline{1}$

Например,

$$\mathbb{R}^{[x]}/(x^2+1)\cong\mathbb{C}$$

$$\frac{F=\mathbb{Z}_2}{x^2+x+\overline{1}}=\{\overline{0},\overline{1}\}$$
 $\overline{x}=\frac{x+(x^2+x+1)}{x^5+x^3+1}=(x^2+x+1)(\overline{x}^3-x^2+x)+\overline{1-x}$

Гомоморфизмы колец

R, S - кольца

 $\underline{\mathbf{Def.}}\ f:R o S$ - гомо-зм, если

- 1) f(a + b) = f(a) + f(b)
- 2) f(ab) = f(a)f(b)
- 3) f(1) = 1

 $\ker f = \{ r \in R \mid f(r) = 0 \} \triangleleft R$

 $Imf = \{s \in S \mid s = f(r) \text{ для нек-го } r \in R\}$ — подколько в S

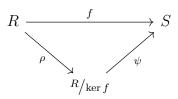
Если f - биекция $\Rightarrow f$ - изоморфизм

 $ho:R o {}^R\!/_{\!I}$ -канонический гомоморфизм с $\ker
ho=I$

Th.(об изоморфизме)

Пусть $f:R\to S$ - сюрьективный гомоморфизм(эпиморфизм) $\Rightarrow S\cong {}^R/\ker f$

Proof



 $f = \psi \rho$

Строим $\psi: R/\ker f \to S, \psi(r + \ker f) = f(r)$

Корр-ть Если $r+\ker f=r'+\ker f$, then $\psi(r'+\ker f)=f(r')\stackrel{?}{=}f(r)$ r'=r+x, где $x\in\ker f$

$$\psi(r' + \ker f) = f(r') = f(r + x) = f(r) + f(x) = f(r)$$

 ψ гомо-зм :

$$\psi((r+\ker f)+(r'+\ker f))=\psi(r+r'+\ker f)=f(r+r')=f(r)+f(r')=\psi(r+\ker f)+(r'+\ker f)$$

<u>Иньективность</u> ψ - иньективен $\Leftrightarrow \ker \psi = 0$ $r + \ker \psi \in \ker \psi \Rightarrow \psi(r + \ker f) = f(r) = 0 \Rightarrow r \in \ker f \Rightarrow r + \ker f = \ker f = \overline{0}$

Сюрьективность

 $\forall s \in S \stackrel{\mathrm{f-}\,\mathrm{эпи}}{\Rightarrow} s = f(r) = \psi(r + \ker f) \Rightarrow \psi$ -эпи

<u>Th.</u>(о соответствии)

Пусть $f:R\to S$ - эпи $\Rightarrow \exists$ вз/одноз соотв-е между идеалами в S и идеалами в R, содержащими kerf

 $\underline{\mathbf{Proof}}$ Th об изо $\Rightarrow S \cong R/\ker f$, поэтому рассмотрим $\rho: R \to R/I$, где $I = \ker f$

 $\Omega(R,I)$ - все идеалы в R, содержащие I

 $\Omega(R/I)$ - все идеалы в $_{\mathrm{R}^{\mathrm{I}}}$

 $\psi:\Omega(R,I)\to\Omega(R/I)$

 $I \subseteq J \mapsto \rho(J) = \{j+I \mid j \in J\} \triangleleft R/I$

1) $j_1 + I, j_2 + I \in \rho(J)$

 $(j_1 + I) + (j_2 + I) = (j_1 + j_2) + I \in \rho(J)$

2) $j+I \in \rho(J), r+I \in {}^R/{}_I \Rightarrow (j+I)(r+I) = jr+I \in \rho(J)$

Иньективность $\psi(J_1) = \psi(J_2) \Rightarrow J_1 + I = J_2 + I \Rightarrow \Rightarrow J_1 = J_2 + I = J_2$

Сюрьективость $\forall \overline{K} \in \Omega(R/I)$, где $\overline{K} = \{k+I \mid k \in K\}$

Then $\psi(K) = \overline{K}$

 $\forall k_1, k_2 \in K : (k_1 + I) + (k_2 + I) = (k_1 + k_2) + I \in \overline{K} \Rightarrow k_1 + k_2 \in K$

 $\forall k \in K, r \in R : (k+I)(r+I) = kr + I \in \overline{K} \Rightarrow kr \in K$

Then $K \triangleleft R$