$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au(x) = f(x) \tag{1}$$

Замена:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}x_i, \quad k = \overline{1,n} \tag{2}$$

$$\tilde{u}(\xi_1, \ldots \xi_n) = u(x_1, \ldots x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_k} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki}c_{lj}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_k \partial \xi_l}$$

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1} a_{ij}c_{ki}c_{lj} \tag{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_i t_j = \sum_{k,l} \tilde{a}_{kl}\tau_k\tau_l$$

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\tau_k \tag{4}$$

$$t_j = \sum_{l=1}^{n} c_{lj}\tau_l$$

$a_{kk} \in \{1; -1; 0\} \quad \tilde{a}_{kl} = 0, \ k \neq l$ - Канонический вид
Если $\tilde{a}_{kk} = 1$ $(a_{kk} = -1), \ k = 1, \ldots, n$ - Уравнение эллиптического вида
$n-1$ коэф $+1$
$1 - -1$
$n-1$ коэф -1
$1 - +1$
Def
Если есть 1 и -1 и их не менее двух - уравнение ультрагиперболичекского типа
Def
Уравнение имеет параболический тип, если среди a_{kk} есть хотя бы один 0, а все ненулевые коэф-ты одного знака

Если все собственные числа одного знака и нулей нет - уравнение эл.типа
Есть разного знака ??? - гипер тип
Если есть ноль остальные одного знака - параб тип

Уравнения гиперболического типа

Вопрос с билета: Вывод ур-я малых поперечных колебаний струны
u - отклонение точки струны x в момент времени t от поперечного сечения?
$|u_x| << 1$
Струна не оказывает сопротивление изгибу и ёё взаимодейтсвие с соседними участками опр-ся только силами натяжения, касательными к профилю струны

$l = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u^2} = x_1 - x_2$
Силы натяжения не зависят от времени(Закон Гука)
Задана $f(x,t)$ - проекция на ось u линейной плотности сил

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx = \vec{F}(t)$$

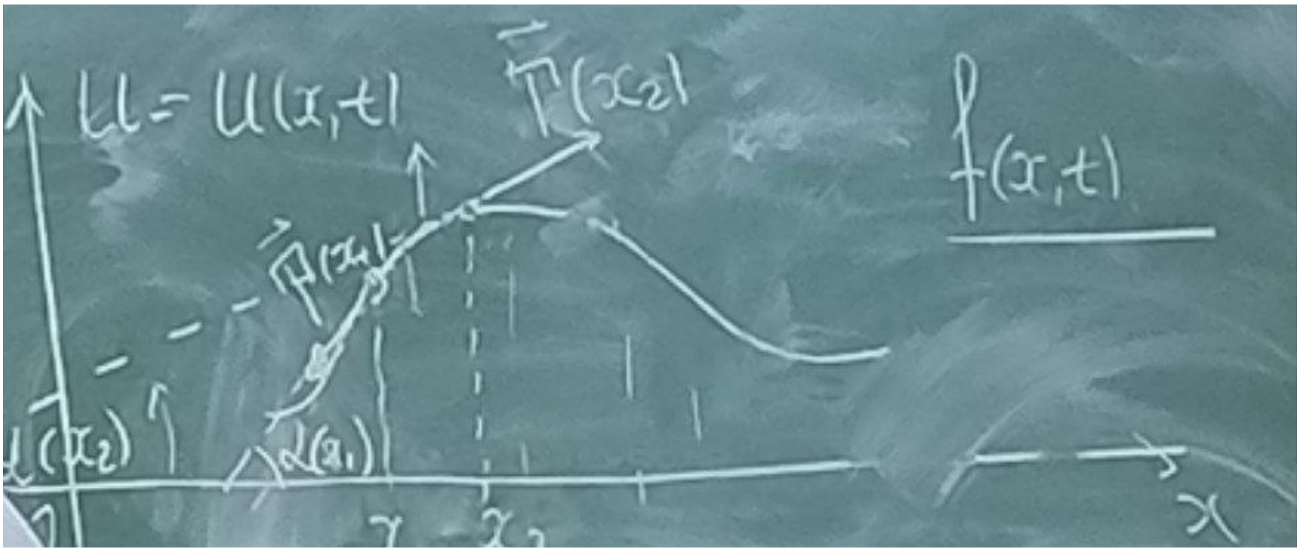

Рис. 1: Поперечное изображение струны

Закон Ньютона в проекциях:

$$T(x_2)\cos\alpha(x_2) - T(x_1)\cos\alpha(x_1) = 0$$

$\cos\alpha \approx 1$, T независит от x

$\rho(x)$ - линейная плотность струны

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx = m_{[x_1;x_2]}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\Delta x = T(\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x}) + f(x,t)dx\Delta x$$

$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{5}$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = F(x,t) \tag{6}$$

$$a^2 = \frac{T}{\rho} \quad F = \frac{f}{\rho}$$

Если $F \equiv 0$ - невынужденные колебания
Если $F \neq 0$ - вынужденные колебания

Тоже уравнение задает малые продольные колебания стержня