Задача Коши для уравнения теплопроводности

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ t \geq 0$$
$$u_t(x,y,z,t) - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = 0 \tag{1}$$
$$u|_{t=0} = \phi(x,y,z), \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \tag{2}$$
$$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (O,T))$$
$$u \in C(\mathbb{R}^3 \times [O,T])$$
$$\phi \in C(\mathbb{R}^3) \text{ и ограничена}$$

Рассмотрим:

$$F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \tag{3}$$

Эта функция как функция от переменных (x,y,z,t) является решением уравнения теплопроводности

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta,t)dxdydz = 1 \tag{4}$$

Если $(\xi,\eta,\zeta) \neq (x,y,z)$, то

$$\lim_{t \to +0} F(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = 0$$

Если $(\xi,\eta,\zeta) \equiv (x,y,z)$, то

$$\lim_{t \to +0} F(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \infty$$

$$u(x,y,z,t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta,t)\phi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \tag{5}$$

(5) Является решением задачи Коши

$$F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta,t)\phi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \xrightarrow{t \to +0} \phi(x,y,z)$$

$\mathbb{R}^2$:

$$u_t(x,y,t) - a^2 \Delta_{x,y} u(x,y,t) = 0$$
$$F(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}$$

$\mathbb{R}^1$:

$$F(x,\xi,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$
$$u_t - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

F называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности

Теорема о максимуме и минимуме для уравнения теплопроводности

$$(x,y,z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \Omega \text{ - открытое и ограниченное}$$
$$t \in (0;T)$$
$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$$
$$Q_T = \Omega \times (O;T)$$
$$\overline{Q_T} = \overline{\Omega} \times [O;T]$$

Нижнее основание $\Sigma_0 = \overline{\Omega} \times \{0\}$, верхнее основание $\Sigma_T = \overline{\Omega} \times \{T\}$.
Боковая поверхность $\Gamma_{\text{бок}} = \Gamma \times [0,T]$
Классическим решением для уравнения теплопроводности будем называть функцию

$$u \in C^2(\Omega \times (0;T)) \cap C^1(\overline{Q}_T)$$

Теорема. *Пусть u - классическое решение уравнения теплопроводности. Тогда u принимает свои наибольшие и наименьшие значения либо на нижнем основании цилиндра, либо на боковой поверхности*

Доказательство. Предположим, что u своё наибольшее значение M на $\overline{Q}_T$ принимает в некоторой точке $(x_0, y_0, z_0, t_0),\ 0 < t_0 \le T,\ (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$.
Пусть

$$m = \max_{\Sigma_0 \cup \Gamma_{\text{бок}}} u$$

Тогда $m < M$
Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$v(x,y,z,t) = u(x,y,z,t) + \frac{M-m}{6d^2}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]$$

Заметим, что если $(x,y,z,t) \in \Sigma_0 \cup \Gamma_{\text{бок}}$:

$$v(x,y,z,t) \le m + \frac{M-m}{6d^2} \cdot d^2 = \frac{M+5m}{6} < \frac{M+5M}{6} < M$$

Также заметим, что

$$v(x_0, y_0, z_0, t_0) = u(x_0, y_0, z_0, t_0) = M$$

Построенная функция v так же не может принимать своё наибольшее значение на нижнем основании или боковой поверхности.
Тогда v принимает наибольшее значение в точке $(x_1, y_1, z_1, t_1),\ 0 < t_1 \le T,\ (x_1, y_1, z_1) \in \Omega$
В точке (x_1, y_1, z_1, t_1)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \le 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \le 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \le 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0,\ \text{если } t_1 < T$$

Если $t_1 = T$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \ge 0$$

Получаем, что в точке (x_1, y_1, z_1, t_1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v \ge 0$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u}_{=0} - \frac{M-m}{d^2} < 0$$

Получили противоречие ■

Замечание. Док-во теоремы о наименьшем значении получается при замене u на $-u$

Теорема о единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u^i_t(x,y,z,t) - a^2 \Delta u^i(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) \tag{6}$$

$$u^i(x,y,z,t)|_{t=0} = \phi(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

$$u^i,\ i = 1,2$$

$$u = u^1 - u^2$$

$$u_t(x,y,z,t) - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = 0 \tag{8}$$

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = 0 \tag{9}$$

Докажем:

$$u(x,y,z,t) \equiv 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$$