# ТВиМС. Лекция

who?

8 ноября 2024 г.

$$E((Y-(g(x))^2) = E((Y-M(x))^2) + E((M(x)-g(x))^2) \tag{1}$$

$$M(x) = E(Y|X)$$

$$E(Y|X=x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} yf(y,x)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y,x)dy}$$

$$E(Y|X=x) = \frac{\sum_k y_k P(Y=y_k, X=x)}{\sum_k P(Y=y_k, X=x}$$

На пр лекции(???)
1) $g(X) = E(Y)$
2) $g(X) = b_0 + b_1 X$

$$E((Y-b_0-b_1X)^2) = E((Y-E(Y|X))^2 + E((E(Y|X)-b_0-b_1X)^2) \tag{2}$$

$$E((Y-a_2)^2) = E((Y-E(Y|X))^2 + E((E(Y|X)-a_2)^2)\ |\sigma_2^2 \tag{3}$$

$$E((Y-a_2)^2) = \sigma_2^2$$

$$1 = \frac{E((Y-E(Y|X))^2)}{\sigma_2^2} + \frac{E((E(Y|X)-a_2)^2)}{\sigma_2^2}$$

$$\eta^2_{Y,X} = \frac{E((E(Y|X)-a_2))^2)}{\sigma_2^2} = \frac{D(E(Y|X))}{\sigma_2^2}$$

$$\eta^2 = \eta^2_{Y,X} \text{ - корр. отношение Пирсона}$$

1) $\eta^2 \geq 0$
2) $1-\eta^2 = \frac{E((Y-E(Y|X))^2)}{\sigma_2^2} \geq 0 \implies \eta^2 \leq 1$

$$1-\rho^2 = 1-\eta^2 + \frac{E((E(Y|X)-\hat{b_0}-\hat{b_1}X)^2}{\sigma_2^2}$$

$$\eta^2 = \rho^2 + \frac{E((E(Y|X)-\hat{b_0}-\hat{b_1}X)^2}{\sigma_2^2}$$

$$\eta^2 = 1 \implies \rho^2 = 1\ (\rho = \pm 1)$$

$$E((Y|X)) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X$$

$$\eta^2 = \rho^2 \implies E(Y|X) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X$$

## Оценка регрессии по МНК

$$E((Y-M(X))^2) = \min_g E((Y-g(X))^2)$$

1) g(x) - измеримая функция = непр. ф. + их пределы
2) $g(x),\ a \leq x \leq b$ можно приблизить полиномом

$$b_0 + b_1 X + \cdots + b_m x^m \approx g(x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = 1$$

Сост. выборочный аналог

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i - \dots - b_m x_i^m)^2 \to \min_{b_0, b_1, \dots, b_m} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sum_i y_i = \sum_{i=1}^n (y_i + b_0 + b_1 x_i + \dots + b_m x_i^m) \\ \sum_i y_i x_i = \sum_{i=1}^n (y_i + b_0 + b_1 x_i + \dots + b_m x_i^m) x_i \\ \dots\dots\dots \\ \sum_i y_i x_i^m = \sum_{i=1}^n (y_i + b_0 + b_1 x_i + \dots + b_m x_i^m) x_i^m \end{cases} \tag{5}$$

$$C_x : \ GM : X \text{ - с.в.}$$

**Прочитать**: 1) проверка гипотезы на степень полинома
2) Оценка корр-ого отношения и проверка гипотезы о лин регрессии

## Частная и множественная корреляция. Фильтр Калмана

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & -0.4 \\ 0.8 & 1 & -0.56 \\ -0.4 & -0.56 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1$ - урожайность
$x_2$ - весеннее кол-во осадков
$x_3$ - сумма температур

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$$

$$X \in N(\mu, \Sigma) \quad \Sigma \text{ - м. ковариации}$$

$$(X_1, X_2, \dots, X_m)^T, (X_{m+1}, \dots, X_p)^T$$

$$\mu = 0$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$X = (X_1, X_2)^T$$

$$\Sigma_{11} = E(X_1 \cdot X_1^T)$$

$$\Sigma_{22} = E(X_2 \cdot X_2^T)$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T = E(X_1 \cdot X_2^T)$$

Лин. пребразование

$$Y_1 = X_1 + AX_2, \quad Y_2 = X_2$$

Подберём A:

$$E(Y_1 \cdot Y_2^T) = 0 \tag{6}$$

$\implies$ некор. $\implies$ независимость $Y_1 \wedge Y_2$

$$E(Y_1 \cdot Y_2^T) = E((X_1 + AX_2)X_2^T) = E(X_1 X_2^T) + AE((X_2 \cdot X_2^T) = \Sigma_{12} + A\Sigma_{22} = 0 \ (?) \mid \cdot \Sigma_{22}^{-1}$$

$$A = -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$$

$Y_1 \wedge Y_2$ независимы

$$E(Y_1|Y_2) = E(X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2|X_2) = E(X_1|X_2) - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2 = E(Y_1) = 0$$

$$E(X_1|X_2) = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$E(X_1|X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2 \cdot \frac{1}{\sigma_2^2}x_2 = \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_2$$

Если $E(\hat{x}_1) = \mu_1$ $E(\hat{x}_2) = \mu_2$

$$E(\hat{X}_1, \hat{X}_2) = \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2) + \mu_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{12} = (\rho_{12}, \rho_{13})$$

$$\Sigma_{22}^{-1} = \frac{1}{1-\rho_{23}^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho_{23} \\ -\rho_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} = \left( \frac{\rho_{12} - \rho_{13} - \rho_{23}}{1-\rho_{23}^2}, \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{1-\rho_{23}^2} \right)$$

$$E(X_1|X_2) = \frac{\rho_{12} - \rho_{13} - \rho_{23}}{1-\rho_{23}^2} x_2 + \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{1-\rho_{23}^2} x_3 \tag{7}$$

$\mathbb{R}_{ij}$ - алг дополнение

$$\Sigma = \mathbb{R}$$

$$E(X_1|X_2) = -\frac{\mathbb{R}_{12}}{\mathbb{R}_{11}} x_2 - \frac{\mathbb{R}_{13}}{\mathbb{R}_{11}} x_3$$

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}$$