X - векторное поле на многообразии M

$$p \in M \mapsto X_p = X(p) \in T_pM$$

U - коорд. окрестность точки p. $x_1, \dots, x_n$ - координаты

$$\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\} \text{ - б. } T_pM$$

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p, \quad f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

Если f_i - гладкие функции в U, то поле X называется гладким

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad f_i = X(x_i)$$

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1(p), \dots, x_n(p)) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p,$$

$X: \ O(U) \to O(U)$. $O(U)$ - алгебра гладких функций на U

$$X(g) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$X(g \cdot h) = X(g)h + gX(h)$$

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X \text{ - коммутатор операторов}$$

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad h_i = [X, Y](x_i) = XY(x_i) - YX(x_i) = X(g_i) - Y(f_i) =$$

$$= \sum_j \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$h_i = \sum_j \left(f_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

Утверждение. *Пусть A - алгебра над полем K. D_1, D_2 - дифференцирование алгебры A. (т.е., D_1, D_2 - лин. операторы на A, такие что $D_i(ab) = D_i(a)b + aD_i(b)$) $\implies [D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ - диф. A*

Φ - связанные векторные поля

Φ - связанные векторные поля

Определение (Φ - связанные векторные поля)**.** M, N - многообразия

$$\Phi : M \to N \text{ - гладкое отображение}$$

X в. поле на M, Y - в. поле на N
Поля X, Y называются Φ - связанными, если

$$d\Phi_p(X(p)) = Y(\Phi(p))$$

Φ - связанность коммутаторов

Предложение. *Пусть* $\Phi : M \to N$ *- гл. отображение*
$X_i,\ i = 1, 2$ *- в. поля на* M
$Y_i,\ i = 1, 2$ *- в. поля на* N
X_i, Y_i *-* Φ *- связанны*
Тогда $[X_1, X_2], [Y_1, Y_2]$ *-* Φ *- связанны*

Доказательство.

$$g \in O(V),\ V \subset N$$

$$g \circ \Phi \in O(\Phi^{-1}(v))$$

$$U \subset \Phi^{-1}(v) \subset M$$

$$d\Phi_p(X_p)(Y) = X(g \circ \Phi)$$

$$Y = d\Phi(X)$$

$$d\Phi(X)(g) = X(g \circ \Phi)$$

$$Y_1Y_2(g) = Y_1(Y_2(g)) = X_1(Y_2(g) \circ \Phi) \stackrel{\star}{=}$$

$$p \in M \quad Y_2(g) \circ \Phi(p) = Y_2(\Phi(p))(g) = X_2(p)(g \circ \Phi)$$

$$Y_2(\Phi(p))(g) = (d\Phi_p X_2(p))(g)$$

$$\stackrel{\star}{=} X_1(X_2(g \circ \Phi))$$

$$(Y_1Y_2 - Y_2Y_1)(g)|_{\Phi(p)} = (X_1X_2 - X_2X_1)_p(g \circ \Phi)$$

$$[Y_1Y_2]|_{\Phi(p)}(g) = [X_1X_2]_p(g \circ \Phi) \iff d\Phi_p([X_1, X_2]_p) = [Y_1, Y_2]_{\Phi(p)}$$

$$[Y_1, Y_2] = d\Phi([X_1, X_2])$$

■

Если Φ - диффеоморфизм, то $d\Phi$ - отображение. $d\Phi : W(M) \to W(N)$, W - множество гладких векторных полей

$$(d\Phi_p^{-1}) = (d\Phi^{-1})_{\Phi(p)}$$

Алгебра Ли

Определение (Алгебра Ли)**.** Пусть U - векторное пространство над полем K.
L называется алгеброй Ли, если на L задана билинейная операция $(l_1, l_2) \to [l_1, l_2]$, удовлетворяющая условиям:
1) $[l, l] = 0 \quad \forall l \in L$
2) $[l_1, [l_2, l_3]] + [l_2, [l_3, l_1]] + [l_3, [l_1, l_2]] = 0 \quad \forall\, l_1, l_2, l_3$
1) - антикоммутативность. 2) - тождество Якоби