# Присоединение корня многочлена к полю

$\mathbb{R},\ f = x^2+1$ - неприводим над $\mathbb{R}$, корни $\pm i$
$\mathbb{C} = (\mathbb{R}, i)$ - векторное пространство с базисом $\{1, i\}$

Th.1 Пусть K - поле, $f(x) \in K[x]$ - неприводим, $\deg f > 1$
Тогда $\exists L \supset K$, в котором $f(x)$ имеет корень
Proof p(x) - неприводим в $K[x]$ - ОГИ
$(p(x))$ - простой идеал в $K[x]$
Действительно, пусть $fg \in (p(x)) \implies f\cdot g = p(x)h(x)$ для некоторого $h(x) \in K[x] \implies p \mid f \vee p \mid g$
В ОГИ любой ненулевой простой идеал является максимальным $\iff {}^{K[x]}/_{(p(x))}$ - поле
Рассмотрим

$$\rho : K[x] \to {}^{K[x]}/_{(p(x))} : f(x) \mapsto \overline{f}(x) \text{ - канонический эпиморфизм}$$

Рассмотрим

$$\rho|_K : K \to {}^{K[x]}/_{(p(x))} = L \text{ - гомоморфизм полей}$$

$$\implies \rho|_K = 0 \vee \rho|_K - \text{ вложение}$$

$$\rho|_K : K \to \rho|_K(x) \text{ - изоморфимз } \implies K \cong \text{ подмножество в L, отождествляем: } K \subset L$$

Проверим, что $\overline{x} \in L$ - корень p(x)

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$$

$$p(\overline{x}) = a_n\overline{x}^n + \dots + a_1\overline{x} + a_0 = \overline{a_n}\overline{x}^n + \dots + \overline{a_1}\overline{x} + \overline{a_0} = \overline{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0} = \overline{p(x)} = 0$$

Th.2 В условиях теоремы 1, $L =< 1, \overline{x}, \dots, \overline{x}^{n-1} >_K$, где $n = \deg p(x)$, т.е. $\{1, \overline{x}, \dots, \overline{x}^{n-1}\}$ - базис L над K
$L = \{a_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \dots + a_1\overline{x} + a_0 \mid a_i \in K\}$
В частности $[L : K] = n$
Proof
1) $L =< 1, \overline{x}, \dots, \overline{x}^{n-1} >_K \quad L = {}^{K[x]}/_{(p(x))}$

$$\forall \underbrace{f(x) + (p(x))}_{\overline{f}(x)} \in L$$

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x),\ r(x) = 0 \vee \deg r(x) < \deg p(x) = n$$

$$\implies \overline{f}(x) = \underbrace{\overline{p}(x)}_{=\overline{0}}\overline{q}(x) + \overline{r}(x) = \overline{r}(x) = \overline{b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = b_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \dots + b_1\overline{x} + b_0$$

2) лнз

$$\lambda_0 + \lambda_1\overline{x} + \dots + \lambda_{n-1}\overline{x}^{n-1} = \overline{0},\ \lambda \in K$$

$$\overline{\lambda_0} + \overline{\lambda_1}\overline{x} + \dots + \overline{\lambda_{n-1}}\overline{x}^{n-1} = \overline{0} \implies (\lambda_0 + \lambda_1 x \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1}) + (p(x)) = (p(x)) \implies \lambda_0 + \lambda_1 x \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1} \in (p(x))$$

$$= p(x)\cdot K[x] \implies p(x) \mid \lambda_0 + \lambda_1 x \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1} \implies \lambda_0 + \lambda_1 x \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1} = 0 \iff \lambda_i = 0,\ i = \overline{1, n-1}$$

Example Постороение $\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$ - поле, $f = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x] \implies \exists$ поле L $\mid \overline{x} \in L$ - корень $f = x^2+1$
Th.2 $\implies [L : \mathbb{R}] = 2$ с базисом $\{1, \overline{x}\} \implies \forall z \in L :\ z = a\cdot 1 + b\cdot\overline{x},\ a, b \in \mathbb{R}$