ТФКП. Лекция(17.09.24)

Def Ф-я $f(z)$ - непрерывная в $z=a$, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)=f(a)$
$\forall \epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall z:\ |z-a|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(a)|<\epsilon$

Def Производной ф-и $w=f(z)$ в точке $z=a$ называется конечный $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)$
$\Delta f(z)=A\cdot\Delta z+o(|\Delta z|)\quad A\cdot\Delta z=df\quad A=f'(z)$

Note. Теоремы о производных ф-ий комлексного переменного аналогичны теоремам о производных функций действительного переменного

$$(cf(z))'=c\cdot f'(z)$$
$$(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z)$$
$$\dots$$

Дифференцируемость и условия Коши-Римана

Th(критерий дифференцируемости) Для диф-сти ф-ии $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в точке $z=x+iy$ необходимо и достаточно:
1) $u(x,y),\ v(x,y)$ дифференцируемы
2) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial v}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ - Условия Коши-Римана(Даламбера-Эйлера)

Proof

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$
$$\Delta f(z)=\Delta u(x,y)+i\Delta v(x,y)$$
$$\Delta u,\ \Delta v \text{ - полные приращения ф-ий}$$

$$g(x,y)- \text{ - дифф в } (x,y)$$
$$\Delta g=A^\star\Delta x+B^\star\Delta y+o(|\Delta z|)$$
$$A^\star=\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y}\quad |\Delta z|=\sqrt{\Delta x^2}\Delta y^2$$

1) Необходимость

$$\exists f'(z)=A+iB$$
$$\Delta f(z)=f'(z)\Delta z+o(|\Delta z|)$$
$$\Delta u+i\Delta v=(A+iB)\cdot(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)$$

$$A=\frac{\partial u}{\partial x}\quad -B=\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$B=\frac{\partial v}{\partial x}\quad A=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial y}$$

2) Достаточность
$u(x,y),\ v(x,y)$ - диф + Условия Коши-Римана: $u'_x=v'_y=A\ v'_x=B=-u'_y$
$\Delta u=A\Delta x-B\Delta y+o(|\Delta z|)$
$\Delta v=B\Delta x+A\Delta y+o(|\Delta z|)$
$\Delta f(z)=\Delta u+i\Delta v=A\Delta x-B\Delta y+i(B\Delta x+A\Delta y)+o(|\Delta z|)=(A+iB)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)$

$f'(z) = A + iB$ чтд

Note. Условия Коши-Римана $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ являются лишь необходимыми

Аналитические функции

Def. Ф-ия $f(z)$ дифференцируемая в каждой точке области D называется регулярной(голоморфной, правильной, аналитической) в D
H(D) - класс аналитичекий в D ф-ий

Def. $f(z)$ - аналитическая в точке z, если она является аналитической в некоторой окрестности точки z.

Def. Ф-ия, регулярная в $\mathbb{C}$ - целая

Def. Ф-ия $\phi(x, y)$ гармоническая в D, если в D $\phi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно и является решением уравнений Лапласа $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$

Note. $\phi(x, y), \psi(x, y)$ - гарм. $\Rightarrow A\phi + B\psi$ - гарм

TH. Дейст и мнимая часть ф-и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $f(z) \in H(D)$ являются ф-ими гармоническими

Proof $\begin{cases} u'_x &= v'_v \text{ - по x} \\ u'_y &= -v'_x \text{ - по y} \end{cases}$

$\begin{cases} u''_{xx} &= v''_{xy} \\ u''_{yy} &= -v''_{xy} \end{cases} \quad v''_{xy} = v''_{yx}$

$u''_{xx} + u''_{xy} = 0$

Аналогично, $v''_{xx} + v''_{xy} = 0$

Def. Две ф-ии $u(x, y), v(x, y)$ гармоничекие в D, называются сопряжёнными гармоническими функциями, если они связваны условиями Коши-Римана

Т.о. Ф-ия $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической в области D, если её действительная и мнимая части сопряженные гармнонические ф-ии.

Th Для всякой гармонической в односвязной области D ф-ии $u(x, y)$ $\exists$ сопряженная с ней гармоническая ф-ия $v(x, y) \Rightarrow \exists$ аналитическая ф-ия $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ с заданной действительной частью в виде гарм. ф-ии $u(x, y)$