

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in M \implies f(x) = 0 \text{ п.в.}$$

$$f(x) = 0 \text{ п.в., } f(x) \text{ непрерывная} \implies f(x) = 0 \text{ п.в.}$$

Ступенчатые функции

$[a, b]$ разобьём точками $x_i \quad i = \overline{0, n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad x_{i-1} < x_i$$

$$\phi(x) = c_i \quad (x_{i-1} < x < x_i)$$

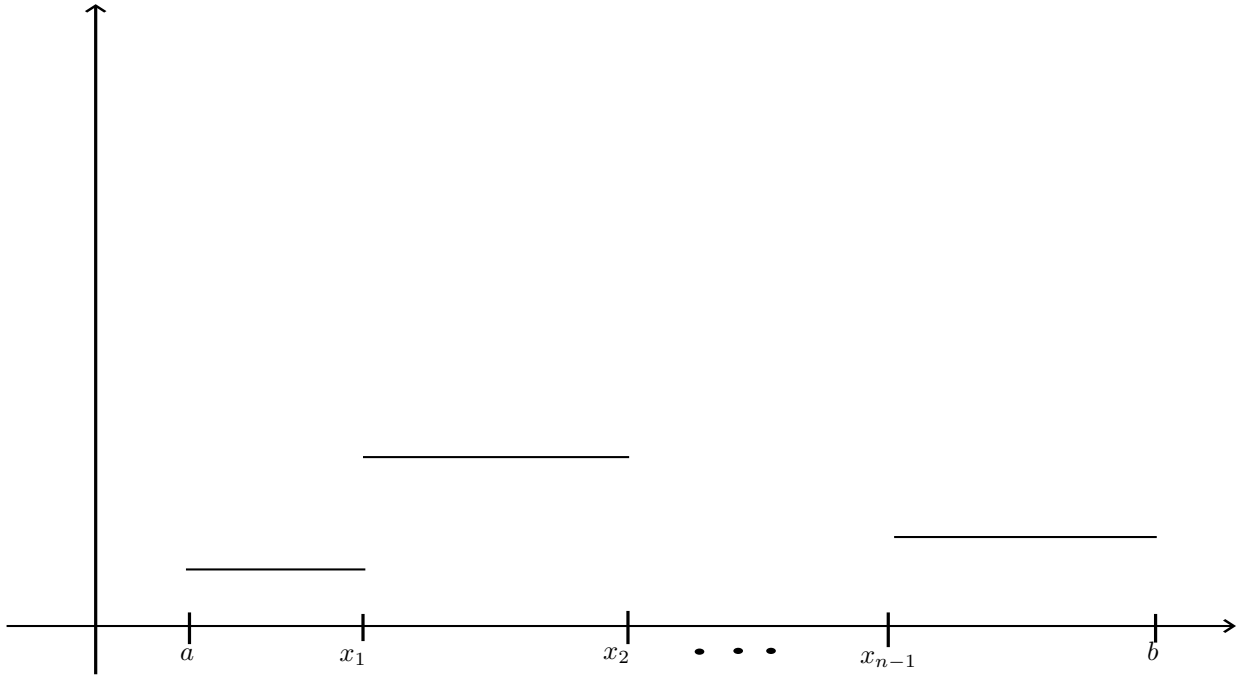


Рис. 1: ступенчатая функция

ϕ, ψ - ступенчатые функции

$\phi \leq \psi$, если $\phi(x) \leq \psi(x)$ п.в. (во всех точках, кроме узлов)

Понятие интеграла Лебега

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i$$

Пусть $f(x) \geq 0 \quad x \in [a, b]$

Если $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ п.в. и $0 \leq \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$, то говорят, что ϕ_n сходится к f снизу (обозначение $\phi_n \uparrow f$)

Интеграл Лебега

Определение (Интеграл Лебега).

$$\phi_n \uparrow f, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n(x) dx = I \text{ - интеграл Лебега}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Замечание. Известно, что если несобственный интеграл от неограниченной функции сходится абсолютно, то существует интеграл Лебега с тем же значением

$$\begin{aligned}
 f(x) &\geq 0 \quad x \in [a, b] \\
 f_+(x) &= \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} \\
 f_-(x) &= \begin{cases} 0, & f(x) > 0 \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases} \\
 f &= f_+ - f_- \\
 |f| &= f_+ + f_- \\
 \begin{cases} \exists \int_a^b f_+(x) dx \\ \exists \int_a^b f_-(x) dx \end{cases} &\implies \exists \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_+(x) dx - \int_a^b f_-(x) dx
 \end{aligned}$$

Зафиксируем отрезок $[a, b]$ и рассмотрим множество функций, для которых существует интеграл Лебега. Такое множество называется пространством Лебега $L[a, b]$

Свойства

$$\begin{aligned}
 1) \quad &\int_a^b c dx = c(b-a) \\
 2) \quad &\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \\
 3) \quad &f \in L, \quad g(x) = f(x) \text{ п.в.} \implies g(x) \in L \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx \\
 4) \quad &f(x) \geq g(x) \text{ п.в.} \implies \int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx \\
 5) \quad &\int_a^b |f(x)| dx = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п.в.} \\
 6) \quad &f, g \in L, \quad \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \pm g \in L \quad \int_a^b (\lambda f \pm g) dx = \lambda \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx \\
 7) \quad &\int_a^b |f \pm g| \leq \int_a^b |f| dx + \int_a^b |g| dx
 \end{aligned}$$

Теорема Лебега

Теорема (Лебега). Пусть $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) \in L$. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ п.в.
 $|f_n(x)| \leq \phi(x)$ п.в., при достаточно больших $n \geq n_0$. $\phi(x) \in L$
 Тогда

$$f \in L \quad \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Сходимость в среднем

Определение (Сходимость в среднем). $f_n, f \in L$. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
 Будем говорить f_n сходится в среднем (сходимость в среднем 1-го порядка) к f , если

$$\int_a^b |f_n - f| dx \rightarrow 0 \quad (f_n \xrightarrow{L} f)$$

Свойства

Теорема о непрерывности интеграла относительно сходимости

Теорема (о непрерывности интеграла относительно сходимости).

$$f_n \xrightarrow{L} f \implies \int_a^b f_n dx \rightarrow \int_a^b f dx$$

Доказательство.

$$\left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b f dx \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) dx \right| \leq \int_a^b |f_n - f| dx \rightarrow 0$$

■

Теорема.

$$f_n \Rightarrow f \text{ } x \in [a, b] \implies f_n \xrightarrow{L} f$$

Доказательство.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall n > N \forall x \in [a, b] \implies |f_n - f| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

$$\int_a^b |f_n - f| dx < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

■