ТФКП. Лекция

i dont need this

17 декабря 2024 г.

В основу классификации изолированных точек однозначного характера ложится разложения ф-ии в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

1. Ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями.
z_0 - устранимая особая точка (правильная)
2. Ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями
z_0 - полюс
3. Ряд Лорана содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями
z_0 - существенно особая точка

$$1.\ f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

$$|z - z_0| < R$$

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$$

<u>Вывод.</u> Если z_0 - устранимая, то $\lim_{z \to z_0} f(z) = const$

$$2.\ f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n \ \Big| \ \cdot (z - z_0)^n$$

z_0 - полюс порядка m. При $m = 1$ z_0 - простой полюс

$$\psi(z) \equiv (z - z_0)^n \cdot f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + c_0(z - z_0)^n + \dots$$

$$\psi(z_0) = \lim_{z \to z_0 a} \psi(z) = c_{-m} \neq 0 \implies |f(z)| = \frac{|\psi(z)|}{|z - z_0|^m} > \frac{q}{|z - z_0|^m} \xrightarrow[z \to z_0]{} \infty$$

<u>Вывод.</u> Если z_0 - полюс, то $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$
Если z_0 - полюс порядка m

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m},\ \psi(z) \in H(z_0),\ \psi(z_0) \neq 0 \text{ - критерий полюса}$$

$$f(z) = \frac{(z - 1)(z^2 - 5)}{z - 3} \quad z_0 = 3,\ \psi(z) = (z - 1)(z^2 - 5)$$

$$\psi(z) \in H(z_0 = 3),\ \psi(3) \neq 0$$

$$\lim_{z \to 3} f(z) = \infty \implies z_0 = 3 \text{ - полюс 1-го порядка}$$

3. z_0 - существенно особая точка

<u>Th Сохоцкого</u> Если z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$, то для любога числа A, включая $A = \infty$
$\exists\, z_n = z_n(A),\ z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z_0$, по которой $\lim_{z_n \to z_0} f(z_n) = A$

<u>Вывод</u> z_0 - существенно особая точка функии $f(z)$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \nexists$$

$z = z_0$ - нуль $f(z)$

$$f(z) = 0 \quad f(z_0) \equiv 0$$

$$f(z) = c_m \cdot (z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots \quad c_m \neq 0$$

m - кратность корня $z = z_0$

$$f(z) = (z - z_0) \cdot \underbrace{(c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots)}_{\psi(z)}$$

$$\psi(z) \in H(z_0),\ \psi(z_0) \neq 0 \quad f(z) = (z - z_0)^m \cdot \psi(z)$$

$$c_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Признак кратности нуля

z_0 - корень кратности m

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Th.1 (О связи полюса и нуля)

Если z_0 - нуль ф-ции $f(z)$ кратности m (полюсом пор m), то для $\frac{1}{f(z)}$ точка z_0 является полюсом порядка m (нулем кратности m, если положить $\frac{1}{f(z)} = 0$)

Proof

1) z_0 - ноль кратности m для f(z)

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \psi(z),\ \psi(z) \in H(z_0),\ \psi(z_0) \neq 0$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{\psi(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m},\ \phi(z_0) \neq 0,\ \phi(z) \in H(z_0)$$

2) z_0 - полюс порядка m для f(z)

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m},\ \phi(z) \in H(z_0),\ \phi(z_0) \neq 0$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\phi(z)} \cdot (z - z_0)^m = (z - z_0)^m \cdot \psi(z),\ \psi(z_0) \neq 0,\ \psi(z) \in H(z_0)$$

Ряд Лорана в окрестности $z = \infty$

Def Точка $z = \infty$ - изолированная особая точка однозначного характера для $f(z)$, если эта функция является однозначной аналитической функцией в некоторой окрестности этой точки $R < |z| < \infty$

$z = \frac{1}{t} \implies$ характер $z = \infty$ для $f(z)$ определяется по характеру $t = 0$ для $\phi(t) \equiv f\left(\frac{1}{t}\right) = f(z)$

$$f(z) = \underbrace{\dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{c_1 \cdot z + \dots + c_n \cdot z^n + \dots}_{\text{главная часть}}$$

1. $z = \infty$ - устранимая особая точка $f(z)$, ряд Лорана не содержит положительных степеней

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = const \neq \infty$$

2. $z = \infty$ - полюс порядка m для $f(z)$, если ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-n}}{z} + \dots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots + c_m \cdot z^m$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty,\ f(\infty) = \infty$$

3. $z = \infty$ - существенно особая точка, если ряд Лорана содержит бесконечно много положительных степеней

$$\nexists \lim_{z \to \infty} f(z)$$

Теория вычетов

Def Вычет (residu) ф-ии $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 однозначного характера - число:

$$\mathrm{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz,$$

где $C: \ |z - z_0| = \rho,$ окружность достаточно малого радиуса,

т.е. на самой окр-ти и внутри неё нет других особых точек

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n, \ 0 < |z - z_0| < R, \ \rho < R$$

$$\oint_C f(z)dz = c_{-1} \cdot 2\pi i$$

Вывод Вычет ф-и равен c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в Лорановском разложении $f(z)$ в окр-ти z_0