Гомотопный класс отображения

Определение (Гомотопный класс отображения)**.** Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное
Гомотопным классом отображения f называется

$$[f] \coloneqq \{g : \ X \to Y \text{ непр-на. } f \simeq g\}$$

Пример X - любое топологическое пространство
$f : X \to \mathbb{R}^n$ - непр
$\forall g : X \to \mathbb{R}^n$ - непр. $f \simeq g$
Доказательство

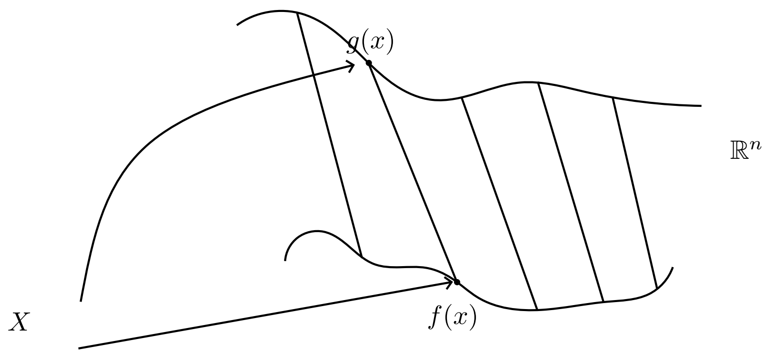


Рис. 1: линейная гомотопия

$$h_t(x) \coloneqq (1-t)f(x) + tg(x) \text{ - линейная гомотопия}$$

Пример $Y \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклое множество.
Любое топологическое пространство $X \quad \forall f, g : \ X \to Y$ непр. $f \simeq g$

Пусть $X = \{p\}$ - 1-элементное множество $\implies$ гомотопия $h_t : X \to Y$ - путь в Y

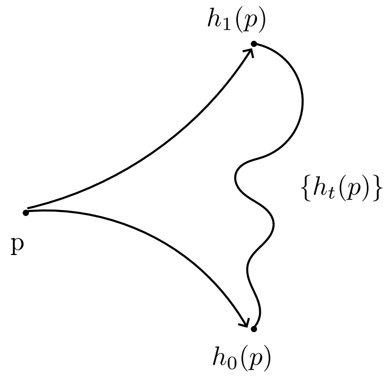


Рис. 2: гомотопия-путь

Связная гомотопия

Определение (Связная гомотопия)**.** Пусть $f, g : X \to Y$ - непр. $A \subset X \quad f|_A = g|_A$
Гомотопия h_t отображений f, g называется связной на множестве A, если

$$\forall t \quad h_t|_A = f|_A = g|_A$$

т.е.

$$\forall x \in A \quad h_t(x) = f(x) = g(x)$$

Гомотопия путей

Пусть $f, g : \ I \to Y$ - пути. $f(0) = g(0), \ f(1) = g(1)$.
Под гомотопией путей всегда понимаем гомотопию, связанную на $\{0, 1\}$

Свободная гомотопия

Замечание. $A = \varnothing$, то гомотопия называется свободной

§2. Определение фундаментальной группы

Определение. Топологическим пространством с отмеченной точкой называется пара $(X, x_0), \ x_0 \in X$
Петлёй с началом в точке x_0 называется непрерывное отображение $f : \ I \to X, \ f(0) = f(1) = x_0$

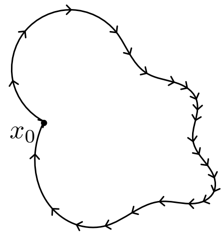


Рис. 3: петля

Гомотопия петель связана на $\{0, 1\}$
$F(X, x_0)$ - множество всех петель с началом в точке x_0
$\pi_1(X, x_0)$ - множество гомотопических классов петель
Пример $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ - одноэлементное множество, т.к. линейная гомотопия путей связана на $\{0, 1\}$

$$h_t(x) = (1-t)h_0(x) + th_1(x)$$

$$h_t(0) = (1-t)h_0(0) + th_1(0) = (1-t+t)h_0(0) = h_0(0)$$

аналогично $h_t(1) = h_0(1)$

Умножение петель

$$u, v \in F(X, x_0) \quad (uv)(t) \coloneqq \begin{cases} u(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ v(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

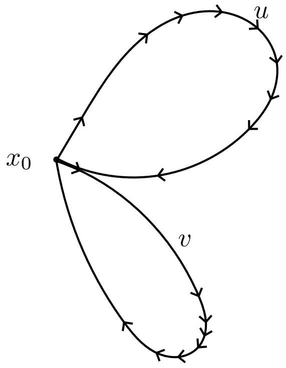


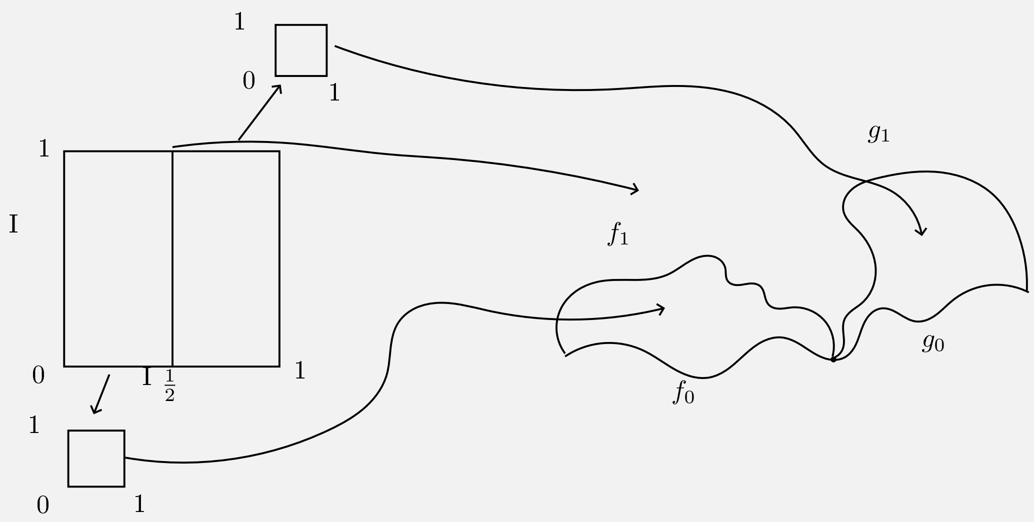
Рис. 4: умножение петель

Утверждение. f_0, g_0 *- пути в* X*.* $f(1) = g(0)$

$$(f_0 g_0)(t) = \begin{cases} f_0(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g_0(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0 \simeq f_1 \\ g_0 \simeq g_1 \end{cases} \implies f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$$

Доказательство.



f_t - гомотопия, соединяющая f_0 с f_1
g_t - гомотопия, соединяющая g_0 с g_1
$\forall t \quad f_t g_t$ соединяет $f_0 g_0$ с $f_1 g_1$
По лемме о фундаментальном покрытии $\{f_t g_t\}$ непрерывное отображение ■

Следствие. $u, v \in F(X, x_0)$

$[u][v] \coloneqq [uv]$ *корректно определено*

Теорема о фундаментальной группе

Теорема (о фундаментальной группе)**.**

$$(\pi_1(X, x_0), \text{ умножение}) \text{ - группа}$$

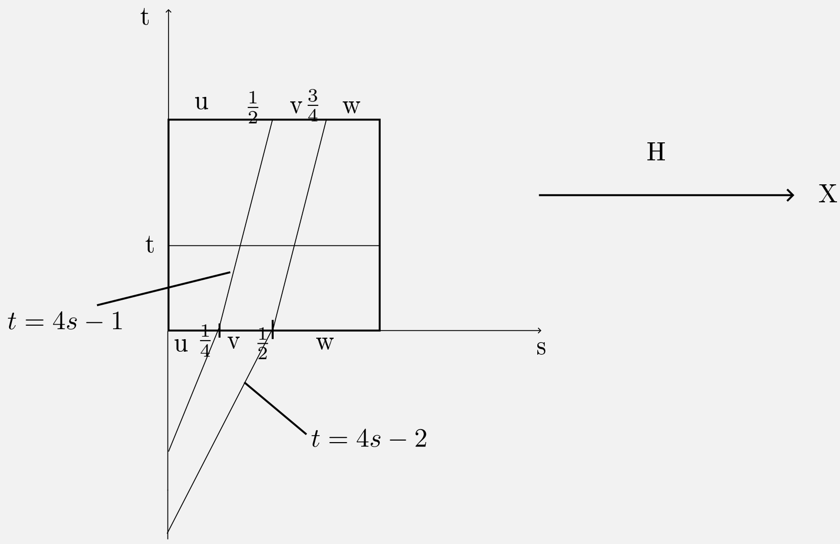
Доказательство. 1) ассоциативность

$$([u][v])[w] = [u]([v][w]) - ?$$

$$[uv][w] = [u][vw] - ?$$

$$[(uv)w] = [u(vw)] - ?$$

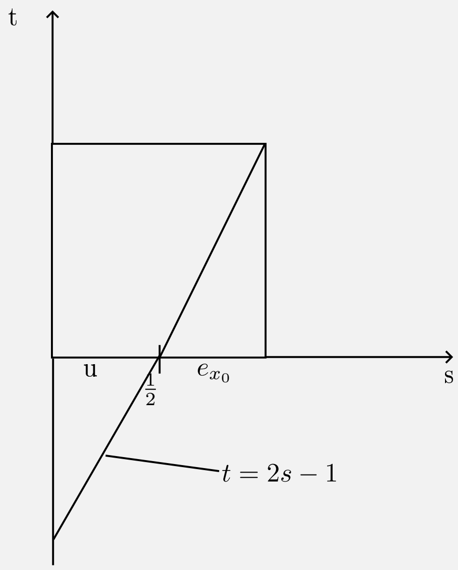
$$(uv)w \simeq u(vw) - ?$$



$$H(s,t) = \begin{cases} u\left(\frac{4s}{t+1}\right), & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ v\left(4s - t - 1\right), & \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ w\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right), & \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

2) $\exists \epsilon_{x_0} = [e_{x_0}]: \ [u]\epsilon_{x_0} = \epsilon_{x_0}[u] = [u]$?
e_{x_0} - постоянная петля: $e_{x_0}(I) = x_0$

$$ue_{x_0} \simeq u-?$$



$$H(s,t) \coloneqq \begin{cases} u\left(\frac{2s}{t+1}\right), & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ e_{x_0}(s), & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

■