$$f(x) = 0 \ \forall x \in M \implies f(x) = 0 \text{ п.в.}$$
$$f(x) = 0 \text{ п.в.}, \ f(x) \text{ непрерывная} \implies f(x) = 0 \text{ п.в.}$$

Ступенчатые функции

$[a, b]$ разобьём точками $x_i \quad i = \overline{0, n}, \ x_0 = a, \ x_n = b$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad x_{i-1} < x_i$$
$$\phi(x) = c_i \quad (x_{i-1} < x < x_i)$$

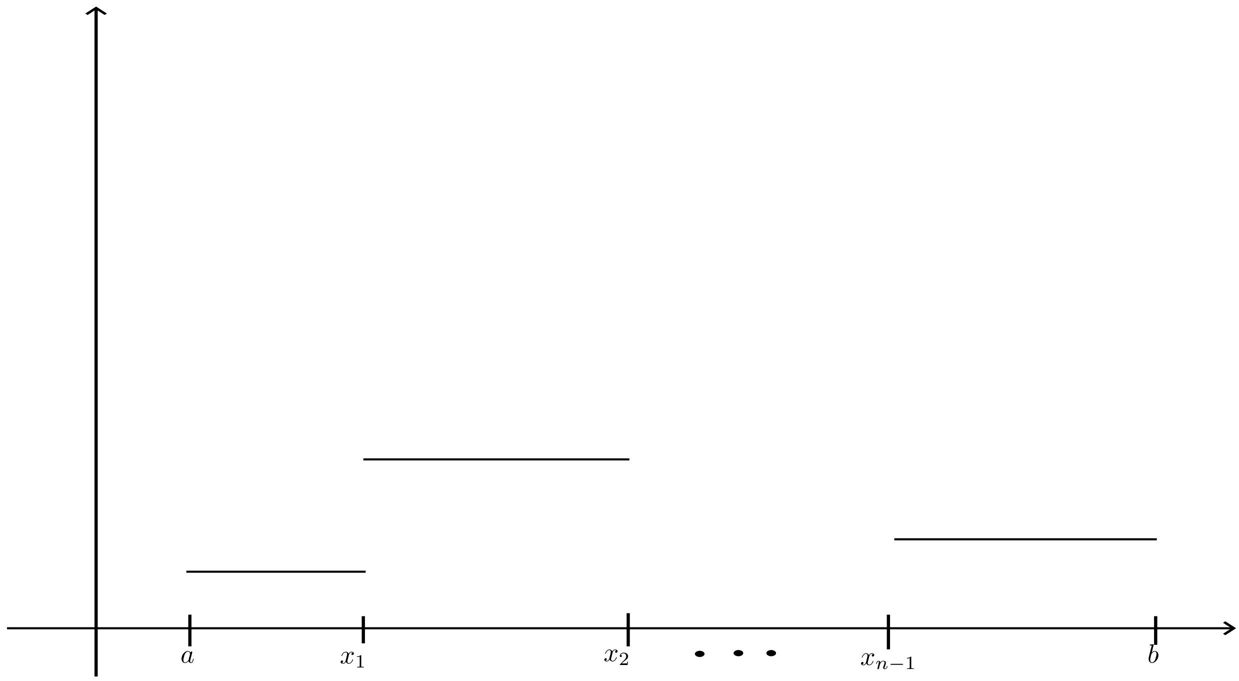

Рис. 1: ступенчатая функция

ϕ, ψ - ступенчатые функции
$\phi \le \psi$, если $\phi(x) \le \psi(x)$ п.в. (во всех точках, кроме узлов)

Понятие интеграла Лебега

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i$$

Пусть $f(x) \le 0 \quad x \in [a, b]$
Если $\phi_n(x) \to f(x)$ п.в. и $0 \le \phi_n(x) \le \phi_{n+1}(x)$, то говорят, что ϕ_n сходится к f снизу (обозначение $\phi_n \uparrow f$)

Интеграл Лебега

Определение (Интеграл Лебега)**.**

$$\phi_n \uparrow f, \ \exists \lim_{n \to \infty} \int_a^b \phi_n(x) dx = I \text{ - интеграл Лебега}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Замечание. Известно, что если несобственный интеграл от неограниченной функции сходится абсолютно, то существует интеграл Лебега с тем же значением

$$f(x) \gtrless 0 \quad x \in [a,b]$$

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0 \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f = f_+ - f_-$$

$$|f| = f_+ + f_-$$

$$\begin{cases} \exists \int_a^b f_+(x)dx \\ \exists \int_a^b f_-(x)dx \end{cases} \implies \exists \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$$

Зафиксируем отрезок $[a,b]$ и рассмотрим множество функций, для которых существует интеграл Лебега. Такое множество называется пространством Лебега $L[a,b]$

Свойства

$$1) \int_a^b cdx = c(b-a)$$

$$2) \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$3) f \in L,\ g(x) = f(x) \text{ п.в} \implies g(x) \in L \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

$$4) f(x) \geq g(x) \text{ п.в.} \implies \int_a^b fdx \geq \int_a^b gdx$$

$$5) \int_a^b |f(x)|dx = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п.в.}$$

$$6) f, g \in L,\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \pm g \in L \quad \int_a^b (\lambda f \pm g)dx = \lambda \int_a^b fdx \pm \int_a^b gdx$$

$$7) \int_a^b |f \pm g| \leq \int_a^b |f|dx + \int_a^b |g|dx$$

Теорема Лебега

Теорема (Лебега)**.** *Пусть* $\{f_n(x)\},\ f_n(x) \in L$. $f_n(x) \to f(x)$ *п.в.*
$|f_n(x)| \leq \phi(x)$ *п.в., при достаточно больших* $n \geq n_0$. $\phi(x) \in L$
Тогда

$$f \in L \quad \int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

Сходимость в среднем

Определение (Сходимость в среднем)**.** $f_n,\ f \in L. \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Будем говорить f_n сходится в среднем (сходимость в среднем 1-го порядка) к f, если

$$\int_a^b |f_n - f|dx \to 0 \quad (f_n \xrightarrow{L} f)$$

Свойства

Теорема о непрерывности интеграла относительно сходимости

Теорема (о непрерывности интеграла относительно сходимости)**.**

$$f_n \xrightarrow{L} f \implies \int_a^b f_n dx \to \int_a^b f dx$$

Доказательство.

$$\left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b f dx \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) dx \right| \le \int_a^b |f_n - f| dx \to 0$$

■

Теорема.

$$f_n \rightrightarrows f \;\; x \in [a, b] \implies f_n \xrightarrow{L} f$$

Доказательство.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N(\epsilon) : \; \forall n > N \; \forall x \in [a, b] \implies |f_n - f| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

$$\int_a^b |f_n - f| dx < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

■