Компактное множество

Утверждение. *Если множество предкомпактно, то оно ограничено*

Доказательство. Допустим, что это не так

$$x_1 \in M \quad \exists x_2: \ \rho(x_1, x_2) > 1, \quad \exists x_3: \ \rho(x_1, x_3) > \rho(x_1, x_2) + 1 \ldots \exists x_{n+1}: \ \rho(x_1, x_{n+1}) > \rho(x_1, x_n) + 1$$

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \geq \rho(x_{n+1}, x_1) - \rho(x_n, x_1) = 1$$

■

Замечание. Обратное верно только для конечномерных пространств

Критерий Хаусдорфа предкомпактности множества

Определение (ϵ - сеть множества K)**.** Множество M называется ϵ - сетью множества K, если

$$\forall x \in K \ \exists y \in M: \ \rho(x, y) < \epsilon$$

M - конечное множество, конечная ϵ - сеть

Теорема (Критерий Хаусдорфа предкомпактности множества)**.** *Для предкомпактности множества необходимо, а в полном метрическом пространстве и достаточно, чтобы*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \text{ конечная } \epsilon \text{ - сеть для этого множества}$$

Доказательство. 1. $\Longrightarrow$:
Пусть дан $\epsilon > 0$
Возьмём $x_1 \in K$. Рассмотрим $S(x_1, \epsilon)$
1) $K \subseteq S(x_1, \epsilon)$
2) $K \not\subseteq S(x_1, \epsilon)$
Рассмотрим $x_2 \notin S(x_1, \epsilon) \quad \rho(x_2, x_1) > \epsilon$
1) $K \subseteq S(x_1, \epsilon) \cup S(x_2, \epsilon)$
2) $K \not\subseteq S(x_1, \epsilon) \cup S(x_2, \epsilon)$
Возьмём $x_3, \ \rho(x_3, x_1) > \epsilon, \rho(x_3, x_2) > \epsilon$
Пусть $x_n \in \bigcup_{k=\overline{1,n-1}} S(x_k, \epsilon)$. Получаем последовательность $\{x_n\}$

$$\rho(x_m, x_n) > \epsilon \quad m > n$$

Противоречие с предкомпактностью. Значит процесс не бесконечный. Тогда существует конечная ϵ - сеть
2. $\Longleftarrow$: предкомпактность?
Пусть $\{x_n\}, \ x_n \in K$. Зададим $\epsilon_n \to 0$
$\forall \epsilon_m \ \exists$ конечная ϵ - сеть $a_{p,m}$
Рассмотрим шары $S(a_{p,m}, \epsilon_1)$

$$\bigcup S(a_{p,m}, \epsilon_1) \ni x_n$$

$$S_1 = \bigcup S(a_{p,1}, \epsilon_1) \ni x_n$$

$$T_1 \text{ - последовательность попавшая в } S_1$$

$$S_2 = \bigcup S(a_{p,2}, \epsilon_2) \ni x_n$$

$$T_2 \text{ - последовательность попавшая в } S_2$$

$$T_{k+1} \subseteq T_k \subset S_k$$

Выберем из T_1 элемент x_{n_1}.
Выберем из T_2 элемент $x_{n_2}, \ n_2 > n_1$.
Выберем из T_k элемент x_{n_k}.

Возьмём $k > m$. Тогда $x_{n_m} \in T_m \subset S_m$, $x_{n_k} \in T_k \subset T_m \subset S_m$

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_m}) < 2\epsilon_m \to 0 \quad \forall k > m \to +\infty$$

$$\{x_{n_k}\} \text{ сходится в себе}$$

Полное МП $\implies \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ ■

Критерии предкомпактности в пространствах C, L_2

$C[a, b]$
K - предкомпактно $\iff$
1) $\exists c: \ |x(t)| \leq c \ (\forall x \in K, \ \forall t \in [a, b])$
2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon): \ \forall h: \ |h| < \delta(\epsilon), \ \forall x \in K, \ \forall t \in [a, b] \implies |x(t+h) - x(t)| < \epsilon$ - равностепенная непрерывность

$L_2[a, b]$
K - предкомпактно $\iff$
1) $\exists c: \ \int_a^b x^2(t)dt \leq c \ \forall x \in K$
2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon): \ \forall h: \ |h| < \delta(\epsilon), \ \forall x \in K \implies \int_a^b (x(t+h) - x(t))^2 dt < \epsilon$

Определение (Компактное множество)**.** Замкнутое предкомпактное множество называется компактным

Отсюда следует, что в любой последовательности точек компакта есть сходящаяся подпоследовательность, причём её предел тоже принадлежит компакту

Непрерывные операции в метрических пространствах

Пусть X, Y - метрические пространства. $A: \ X \to Y$ - операция

Определение. Если $(x_n \to x) \implies (A(x_n) \to A(x))$, то A непрерывная в точке x

$$A: \ X \to Y = \mathbb{R} \text{ - функционал}$$

Теорема. *Если функционал f непрерывный на компакте K, то $f(K)$ ограниченно и на компакте существуют оба экстремума этого функционала*