Подгруппа Ли

Определение (Подгруппа Ли)**.** G - группа Ли, $H \subset G$ - подгруппа и подмногообразие (т.е. для любого $h \in H,\ \exists$ окрестность $h \in U \subset H$ и координатная окрестность V точки h в G, такие что U - координатная плоскость в V)

$H \overset{i}{\hookrightarrow} G$. i - гладкое отображение

$$v \in T_e(H)$$

$\widetilde{X}$ - векторное поле на G.

$$\widetilde{X}(g) = (dL_g)_e(v),\ g \in G$$

$$h \in H,\ X(h) \text{ - значение поля на } H$$

$$L(H) \to L(G)$$

$$\text{левое инвариантоное } X \to X(e) = v \to \widetilde{X}(g) = (dL_g)_e(v)$$

$$\widetilde{X}(h) = X(h),\ \forall h \in H$$

$$L(H) \overset{di}{\hookrightarrow} L(G)$$

$$X, Y \in L(H) \quad [X, Y] \in L(H)$$

$$\widetilde{[X, Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$$

X и $\widetilde{X}$ - i - связаны. $(di)_h(X(h)) = \widetilde{X}(i(h)) = \widetilde{X}(h)$

$$di:\ X \to \widetilde{X} \text{ - гомооморфизм алгебр Ли}$$

$$di([X, Y]) = [di(X), di(Y)]$$

$$L(H) \equiv di(L(H)) \subset L(G)$$

A алгебра Ли ортогональной группы

$$O(h) \subset GL(n)$$

$$\mathbb{R}^n,\ (X, Y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = (x)^t(y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$A(x) \text{ - действие } A \in GL(n) \text{ i } x \in \mathbb{R}^n$$

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad (Ax)^t \cdot (Ay) = (x)^t(y)$$

$$(x)^t A^t A(y) = (x)^t(y) \implies A^t \cdot A = E$$

$$O(n) = \{A \in GL(n) \mid A^t \cdot A = E\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki}x_{kj} = s_{ij}$$

$$A(s) \in O(n) \quad A(0) = E$$

$$A(s)^t \cdot A(s) = E$$

$$\frac{d}{ds}(A(s)^t \cdot A(s)) = 0$$

$$\frac{dA(s)^t}{ds} * A(s) + (A(s))^t \cdot \frac{dA(s)}{ds} = 0\Big|_{s=0}$$

$$\frac{dA(s)^t}{ds}\Big|_{s=0} + \frac{dA(s)}{ds}\Big|_{s=0} = 0$$

$$\frac{dA(s)}{ds}\Big|_{s=0} = B \in gl(n) \implies B^t + B = 0$$

$$\boxed{B^t = -B}$$

$$T_e(0(n)) = \{B \in gl(n) \mid B^t = -B\}$$

G - группа Ли, H - подгруппа Ли

$$L(H) \subset L(G) \quad \mathfrak{h} = T_e(H) \quad \mathfrak{g} = (T_e(G), [,])$$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g},\ h \text{ - подалгебра Ли в } g$$