Def M, N - R - модули. Отображение $f : M \to N$ - гомоморфизм модулей
1) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad \forall m_1, m_2 \in M$
2) $f(r, m) = r \cdot f(m) \quad \forall r \in R \, \forall m \in M$

Упр. 1) $\ker f\{m \in M \mid f(m) = 0\}$ - подмодуль в M
2) $Imf\{n \in N \mid n = f(m)$ для нек-го $m \in M\}$ подмодуль в N
3) Гомоморфизм $f : M \to N$ иньективен $\iff \ker f = \{0\}$

Lemma Пусть $f : {}_RM \to {}_RN$ - R - гомоморфизм K - подмодуль в M, $K \subseteq \ker f$
Тогда $\exists$ R - гомоморфизм $\psi : {}^{M}/_{K} \to N \mid$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & N \\ & {}^{M}/_{K} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$f = \rho\psi$

Proof Положим $\psi(m + k) = f(m)$

Корр-ть $m + K = m' + K \iff m' - m \in K \implies m' = m + k$
$\psi(m' + K) = f(m') = f(m + K) = f(m) + f(K) = f(m)$

ψ - R - гомоморфизм

$$\psi\left((m + K) + (\tilde{m} + K)\right) = \psi((m + \tilde{m}) + K) = f(m + \tilde{m}) = f(m) + f(\tilde{m}) = \psi(m + K) + \psi(\tilde{m} + K)$$

$$\psi(r(m + K)) = \psi(rm + K) = f(rm) = rf(m) = r\psi(m + K)$$

$$\forall m \in M : \ \psi\rho(m) = \psi(m + K) = f(m) \implies \psi\rho = f$$

1-я Th об изоморфизмах Пусть $f : {}_RM \to {}_RN$ - эпиморфизм $\implies {}^{M}/_{\ker f} \cong N$
Proof По лемме существует R - гомо-зм $\psi : {}^{M}/_{\ker f} \to N$ - эпиморфизм : $\psi(m + \ker f) = f(m)$

$$\forall\, m + \ker f \in \ker \psi \implies \psi(m + \ker f) = 0 \implies m \in \ker f \implies m + \ker f = \ker f \implies \psi \text{ - иньект}$$

2-я Th об изоморфизмах Пусть K, N - подмодули R - модуля M
Тогда ${}^{N+K}/_{N} = {}^{K}/_{N \cap K}$
Proof Рассмотрим $f : K \to {}^{K+N}/_{N} : f(k) = k + 0 + N$

$$\forall (k + n) + N \in {}^{K+N}/_{N} \implies (k + n) + N = k + (n + N) = k + N = f(k) \implies k = f^{-1}((k + n) + N)$$

$$\forall k \in \ker f \implies f(k) = k + N = N \implies k \in N \cap K \implies \ker f \subseteq N \cap K$$

$$\forall x \in N \cap K \implies f(x) = x + N = N \implies x \in kerf \implies N \cap K \subseteq \ker f$$

$$\ker f = N \cap K$$

По первой теореме об изо ${}^{K}/_{\ker f} = {}^{K}/_{K \cap N} \cong {}^{K+N}/_{N}$
3-я Th об изоморфизмах Пусть K, N - подмодули R - модуля M, причём $K \subseteq N$
Тогда ${}^{M}/_{N} = {}^{M/K}/_{N/K}$
Proof рассмотрим $f : {}^{M}/_{K} \to {}^{M}/_{N} : m + K \mapsto m + N$ - сюр гомо-зм

$$\forall m + K \in \ker f \implies f(m + k) = n + N = N \implies n + K \in \ker f \implies {}^{N}/_{K} \subseteq \ker f$$

$$\implies \ker f = {}^{N}/_{K} \overset{\text{По 1 th}}{\implies} {}^{M/K}/_{\ker f} = {}^{M/K}/_{N/K} \cong {}^{M}/_{N}$$

Th (Модулярный закон)
Пусть A,B,C - подмодули в M и $B \subseteq A \implies$

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$$

Proof

$$\forall x \in A \cap (B + C) \implies x \in A \wedge x = b + c \implies c = x - b \implies c \in A \cap C \implies x \in B + (A + C) \implies$$
$$A \cap (B + C) \subseteq B + (A \cap C)$$

$$\forall y \in B + (A \cap C) \implies y = b + z \in A \cap (B + C) \implies B + (A + C) \subseteq A \cap (B + C)$$