Пуассоновские процессы

$$X_t,\ t > 0 \quad X_t \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

1) X_t - процесс с независимыми приращениями

2) $\underbrace{P(X_{t+h} - X_t \geq 2)}_{\text{не зависит от } t} = o(h) \implies P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h) \quad P(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - h\lambda + o(h)$

Задание Выписать конечномерные распределения

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Перенос занятий 12.05.2025 и 16.05.2025 19:00 zoom

Кр к экзамену

1) временные ряды, метод сезонной декомпозиции
2) числовые характеристики случайных процессов
3) SDE (стохастические дифференциальные уравнения). Формула замены переменных Ито

Успешно решённая кр - 3 за экзамен

$$X_t \quad E(X_t^2) < \infty$$

$$||X|| = (E(X_t^2))^{\frac{1}{2}}$$

Определение. С.п. X_t называется непрерывным в средне квадратичным, если $||X_t - X_s|| \xrightarrow{t-s\to 0} 0$

Теорема 1. *X_t непр. в ср. кв., если $m(t) = E(X_t)$ - непр и корреляционная ф-я непрерывна по (t, s)*

Пусть X_t - стационарный. $K(t, s) = R(t - s)$
R(t) = K(t,0)
$K(t, 0) = E(X_t \cdot X_0)$

Теорема 2. *$R(t)$ - непр в нуле (необходимо и достатчно для непр в ср.кв)*

Доказательство. 1) Необходимость

$$K(t, s) = E(X_t X_s)$$

$$|K(t, 0) - K(0, 0)| = R(t) - R(0)| = |E(X_t X_0 - X_0^2)| = |E((X_t - X_0)X_0)| \leq E(|X_t - X_0|^2)^{\frac{1}{2}} (E(X_0^2))^{\frac{1}{2}}$$

2) Достаточность

$$t > s,\ t = s + h$$

$$||X_t - X_s||^2 = ||X_{s+h} - X_s||^2 = ||X_h - X_0||^2 = E((X_h - X_0)^2) = E(X_h^2) - 2E(X_h X_0) + E(X_0^2) =$$

$$R(0) - 2R(h) + R(0) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

■

Теорема 3 (Колмогоров А.Н.)**.**

$$E(|X_t - X_s|^a) \leq C|t - s|^{1+r} \quad a \geq 0,\ r > 0$$

Тогда X_t имеет непрерывные траектории

Теорема 4 (Ченцов Н.Н.)**.** $t_1 < t_2 < t_3$

$$E(|X_{t_1} - X_{t_2}|^a \cdot |X_{t_2} - X_{t_3}|^b) \leq C|t_1 - t_3|^{1+r}$$

Пример Броун. движение

$$E((W_t - W_s)^2) = |t - s|$$

$$E((W_t - W_s)^4) = 3|t-s|^2$$

W_t - имеет непрерывные траектории

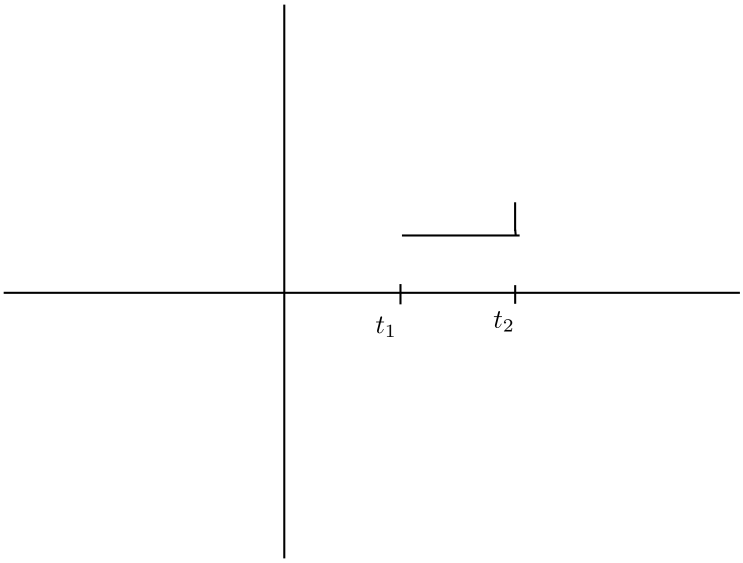

Рис. 1: пуассоновский процесс

$$m(t) = \lambda t$$

$$K(t,s) = \min(t,s)$$

Определение. $E(X_t^2) < \infty$

$$\left|\left|\frac{X_{t+h} - X_t}{h} - X_t'\right|\right| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

X_t' - производная в среднеквадратичном

Теорема 5. *Необходимо и достаточно (для существования производной в ср.кв?)*

$$\left|\frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t \partial s} \leq c < \infty\right|$$

диф $m(t)$

Винеровский процесс

$$K(t,s) = \begin{cases} s, & s < t \\ t, & s \geq s \end{cases}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \begin{cases} 1, & s < t \\ 0, & s \geq t \end{cases}$$

<u>Пример</u>

$$K = K(t,s) = 2e^{-\alpha(t-s)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 4\alpha(t-s)e^{-\alpha(t-s)^2}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial t} = 4\alpha(1-2\alpha(t-s))^2 e^{-\alpha(t-s)^2}$$

Пример

$$z(t) = a(t)X(t) + b(t)\frac{dx(t)}{dt}$$

$$m(t) = E(X(t) \quad E(z(t)) = a(t)m(t) + b(t)\frac{dm(t)}{dt} = m_z(t)$$

$$K_z(t_1,t_2) = E\left(\left(ax(t_1) + \frac{dx(t_1)}{dt} - m_z(t_1)\right)\cdot\left(ax(t_2) + \frac{dx(t_2)}{dt} - m_z(t_2)\right)\right) = \dots$$

$$z(t) = X(t) + \frac{d^2X(t)}{dt^2}$$

$$D_z(t) = E\left(\left(X(t) + \frac{d^2X(t)}{dt^2}\right)^2\right) = D_x(t) + 2\frac{\partial^2 D_x(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 D_x(t)}{\partial t^4}$$

$$X_t = (-1)^{N_t} - \text{ телеграфный процесс}$$

$$N_t\text{- паусcоновский процесс}$$

$$\langle X\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt \tag{1}$$

траектория $x(t)$

$$\langle x\rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$E(\langle X\rangle_T) = E\left(\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt\right) = \frac{1}{T}\int_0^T E(X(t))dt = \frac{1}{T}\int_0^T m(t)dt \xrightarrow{T\to\infty} m$$

Назовём процесс эргодическим, если

$$\langle x\rangle_t \text{ - сх в ср.кв к } m$$

Теорема 6. *X_t - эргодичен*

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K(t_1,t_2)dt_1dt_2 \xrightarrow{T\to\infty} 0$$

Теорема 7 (Слуцкий)**.** *X_t - стационарен 1)*

$$J_t = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)R(\tau)d\tau$$

2) $J_t \xrightarrow{T\to\infty} 0$, то X_t - эргодичен