# ОСА. Лекция

17 декабря 2024 г.

<u>Утв 1</u> M - max лнз система в A $\iff < M > \leq_e A$
Если $B \leq_e A$, то $\forall$ max система в B - max лнх в A
<u>Proof</u> $\implies$: Против: $< M > \not\leq_e A \implies \exists a \in A \mid \; < M > \cap < a >= 0 \implies M \cup \{a\}$ - лнз
$(n_1 m_{i_1} + \dots + n_k m_{i_k} + ta = 0$ если $\{m_{i_1}, \dots m_{i_k}, a\}$ - лз, то $ta = -n_1 m_{i_1} - \dots - n_k m_{i_k} \in M)$
$\impliedby$: против: M - не max лнз, т.е. $\exists a \in A \mid M \cup \{a\}$ - лнз $\implies < M > \cap < a >= 0$

<u>Def</u> D - делимая группа, если $nD = D \; \forall n \in \mathbb{Z}$. те $\forall a \in D \; \forall n \in \mathbb{Z} \; nx = a$ - разрешима

<u>Факт</u> 1) Делимые группы tf - это $\bigoplus Q$
2) Если D - делимая и $D \leq A \implies A = D \oplus B$

<u>Утв 2</u> $\forall$ абелеву группу можно вложить в делимую группу в качестве подгруппы
<u>Proof</u> $Z \hookrightarrow Q \implies F = \bigoplus Z \hookrightarrow \bigoplus Q$. F - свободная
$\forall$ группы A $\exists$ эпи $F \xrightarrow{\phi} A \implies A \cong {}^F/_{\ker\phi = N}$ - подгруппа в ${}^D/_N$
${}^D/_N$ - делимая
$p : D \to D : d \mapsto d + N$ - эпи
$nx = d$ - разрешима в D

$$\forall \overline{d} \in {}^D/_N \implies \overline{d} = p(d)$$

$$p(nx) = p(d) \quad np(x) = \overline{d}$$

min делимая группа, содержащая гр. A называется делимая оболочка E ($\exists!$ с точностью до изм)

<u>Утв 3</u> E - делимая оболочка для A $\iff A \leq_e E$
<u>Proof</u> $\implies$: Против $\exists \langle a \rangle \leq E \mid A \cap \langle a \rangle = 0, \; \langle a \rangle \hookrightarrow Q \leq E \implies E = Q \oplus D$
$\impliedby$: E - не делимая оболочка, то $\exists D \leq E \mid A \leq D \implies E = D \oplus X \quad A \cap X = 0 \implies X = 0$

<u>Утв 4</u> $\forall$ группа ранга 1 - подгруппа в Q
<u>Proof</u>

$$r(A) = 1 \implies A \hookrightarrow E \text{ - делимая оболочка } \iff A \leq_e E \implies \forall \text{ max лнз сист в A - max лнз в E по утв 1}$$

$$r(E) = 1, \text{ но } r(Q) = 1 \implies E = Q$$

Th Бэра (1904-1979)
Группы A и B ранга 1 изоморфмы $\iff t(A) = t(B)$
Proof $\implies$: ясно
$\impliedby$:

$$\forall a \in A,\ B \in B \implies \chi(a) = (k_1, \dots, k_n, \dots) \sim (l_1, \dots, l_n, \dots)$$
$$\iff \sum_i |k_i - l_i| < \infty.$$

Пусть отличаются на местах $k_{i_1}, \dots, k_{i_s}$. Тогда поделим a на $p_{i_1}^{k_{i_1}}, , \dots, p_{is}^{k_{is}} \to c \in A,\ b$ на $p_{i_1}^{l_{i_1}}, , \dots, p_{is}^{l_{is}} \to d \in B$. и $\chi(c) = \chi(d) \iff nx = c$ разр в A $\iff nx = d$ разрешима в B

$$\forall a \in A\ \exists m \in \mathbb{Z} \mid na = mc$$

$$\forall b \in B\ \exists m \in \mathbb{Z} \mid nb = md$$

$$\phi : A \to B : a \mapsto b \quad a \to na = mb,\ b \to nb = md$$

$\phi$ - гомо

$$\phi(a_1 + a_2) = \phi(a_1) + \phi(a_2) \quad \forall a_1, a_2 \in A$$
$$na_1 = m_1 c \quad na_2 = m_2 c$$
$$\implies n\phi(a_1 + a_2) = (m_1 + m_2)d$$

Нужно доказать, что $n[\phi(a_1) + \phi(a_2)] = (m_1 + m_2)d$

$$n\phi(a_1) = m_1 d + n\phi(a_2) = m_2 d$$

Моно

$$a \in \ker\phi \implies \phi(a) = 0$$
$$na = mc \to n\phi(a) = md \implies d = 0$$

Эпи

$$\forall b \in B \implies nb = md \implies \phi(a) = b, \text{ где } na = mc$$