КиМ. Лекция

17 декабря 2024 г.

<u>Lemma 4</u>
<u>Упр</u> M - простой R - модуль $\iff \forall\, 0 \neq m_1, m_2 \in M,\ \exists r \in R \mid m_2 = rm_1$

$$0 \neq A = (a_{ij}) \in I,\ B \in I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{i1} \dots & a_{ij} \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \dots & 0 \dots & 0 \\ a_{ij}^{-1} b_{i1} \dots & \dots & a_{ij}^{-1} b_{in} \\ 0 \dots & 0 & \dots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Th (Веддерберн-Артин, 1950)</u>
1) R - артиново справа, если R_R - артинов модуль, т.е. $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n = I_{n+1} = \dots$
2) R- полупервичное $\nexists 0 \neq I \lhd R \mid I^n = 0$
3) R - кл/пр справа, если R - полупервичное и артиново справа
R - кл/пр справа $\iff R \cong \bigoplus_{k=1}^n M_{n_K}(D_k)$, D_k - тело
При этом кольцо R имеет ровно m простых модулей (с точностью до изом-ма)
<u>Следствие</u> R - простое артиново справа кольцо $\iff R \cong M_n(D)$
<u>Proof</u> $\implies$: R - кл/пр $\iff$ R_R - вполне приводим $\iff$ R_R - прямая сумма простых модулей (т.к. R_R - артинов справа - сумма конечна). Пусть $U_1, \dots, U_m$ - классы изоморфных модулей в этой сумме. $\implies R_R = U_1 \oplus \dots \oplus U_m,\ U_k = N_{k_1} \oplus \dots \oplus N_{k_t};\ N_{k_i} \cong N_{k_j} \cong N\ \forall i, j$

$$End_R(R_R) \cong R = \hom_R(R_R, R_R) = \hom_R(U_1 \oplus \dots \oplus U_m, U_1 \oplus \dots \oplus U_m)$$

$$\cong \bigoplus_{i,j} \hom(U_i, U_j)$$

<u>$i \neq j$</u>

$$\hom_R(U_i, U_j) = \hom_R\left(\bigoplus_{p=1}^{n_i} N_{i_p}, \bigoplus_{q=1}^{n_j} N_{j_q}\right) \cong \bigoplus_{p,q} \hom_R(N_{i_p}, N_{j_q}) = 0 \text{ по лемме Шура}$$

<u>$i = j$</u>

$$\hom_R(U_i, U_i) = End_R(U_i) \cong End_R(N \oplus \dots \oplus N) = M_n(End_R N)$$

$$End_R N = D \text{ - тело по лемма Шура}$$

$$R \cong \bigoplus_{k=1}^m \hom_R(U_k, U_k) \cong \bigoplus_{k=1}^m M_{n_K}(D_k)$$

$\impliedby$:

$$R \cong \begin{pmatrix} M_{n_1}(D_1) & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & M_{n_k}(D_k) \end{pmatrix}$$

e_{ij}^k - матричная еденица в $M_{n_k}(D_k)$, дополним нулями до большой матрицы

$$e_{ii}^k \cdot R = N_i^k \text{ - i - ая строка в R}$$

$$\implies R = \bigoplus_{k=1}^{m} \bigoplus_{i=1}^{n_k} N_i^k \text{ - прямая сумма простых подмодулей} \implies R_R \text{ вп. приводим } \iff R \text{ - кл/пр}$$

$$N_i^k \text{ - простой R - модуль}$$

Пусть M - простой R - модуль

$$\hom_R(R_R, M) \cong M \overset{\star}{=} \ \forall R \text{ - модуля M}$$

<u>Упр</u> Указание: $\phi : M \to \hom_R(R_R, M) : m \mapsto \phi_m$, где $\phi_m(r) = mr \ \forall r \in R$

$$\overset{\star}{=} \hom_R\left(\bigoplus_{k,i} N_i^k, M\right) = \bigoplus_{k,i} \hom_R(N_i^k, M) \neq 0 \implies \exists\, N_s^k \mid N_s^k \cong M$$

<u>Proof</u> (Следствия) $\implies$: R - кл/пр $\implies R \cong \bigoplus_{k=1}^m M_{n_k}(D_k) \overset{\text{R - простое}}{\implies} R \cong M_n(D)$

$$R \cong \begin{pmatrix} M_{n_1}(D_1) & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n_1}(D_k) & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{n_k}(D_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n_1}(D_k) & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$