B-пространство линейных ограниченных операторов

Пусть X, Y - ЛНП
$A_n:\ X \to Y$ - лин. огр.

$$\forall m > n \to +\infty \quad ||A_m - A_n|| \to 0$$

Теорема. *Если Y - Банахово пространство, то $(X \to Y)$ - Банахово пространство*

Доказательство. Рассмотрим:

$$||A_m x - A_n x|| \leq ||(A_m - A_n)(x)|| \leq \underbrace{||A_m - A_n||}_{\to 0} \cdot ||x|| \implies \{A_n x\} \text{ - сходится в себе}$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} A_n x = y \in Y$$

Обозначим $y \coloneqq A(x)$

$$A(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n \to \infty} A_n(x) = \lambda A(x)$$

$$A(x + z) = \dots = A(x) + A(z)$$

Дано $\{A_m\}$ - сходится в себе $\implies$ $\{A_n\}$ - огр. т.е. $\exists c \mid ||A_n|| \leq c,\ \forall n$

$$||A_n x|| \leq ||A_n|| \cdot ||x|| \leq c \cdot ||x||$$

$$||A_n x|| \leq c \cdot ||x||,\ n \to \infty$$

$$||Ax|| \leq c||x||$$

Следовательно A - линейный ограниченный
Пусть $||x|| = 1$. Рассмотрим:

$$||A_m x - A_n x|| \leq ||A_m - A_n|| \cdot ||x|| = ||A_m - A_n|| < \varepsilon$$

Фиксируем n. $m \to +\infty$. Рассмотрим:

$$A_m x \to Ax$$

$$\alpha_n = ||Ax - A_n x|| \leq \varepsilon$$

$$||A - A_n|| = \sup_{||x||=1} \alpha_n \leq \varepsilon$$

Получаем, что

$$A_n \to A$$

■

Положительно определённые операторы в линейных нормированных пространствах

Определение. Пусть X, Y - ЛНП. $A:\ X \to Y$ - линейный оператор
Будем говорить, что этот оператор положительно определён $A > 0$, с нижней границей $m > 0$, если

$$\forall x \quad ||Ax|| \geq m \cdot ||x||$$

Пример
1) $A = I$

$$||Ix|| = 1 \cdot ||x||$$

2) $C: X \to X,\ ||C|| \leq q < 1$
$A \coloneqq I - C$

$$||Ax|| = ||(I - C)x|| = ||Ix - Cx|| = ||x - Cx|| \geq ||x|| - ||Cx|| \geq$$

$$||Cx|| \leq ||C|| \cdot ||x|| \leq q \cdot ||x||$$

$$\geq ||x|| - q \cdot ||x|| = (1 - q) \cdot ||x|| = m \cdot ||x||$$

Условия существования и ограниченности обратного оператора

Теорема (1)**.** *Пусть* X, Y *- ЛНП, линейный оператор* $A: \ X \to Y$*.*
Для того, чтобы $A: \ X \to Y$ *- сюрьекция и* $A > 0, \ m > 0$ *необходимо и достаточно:*

$$\exists A^{-1} \text{ - сюрьективный линейный ограниченный,}$$

причём

$$||A^{-1}|| \leq \frac{1}{m}, \ ||A^{-1}y|| \leq \frac{1}{m}||y||$$

Доказательство. $\Longrightarrow$:

$$A(X) = Y \quad \exists A^{-1} \quad A^{-1}(Y) = ?$$

от противного. Рассмотрим $x, y \in X$. $Ax = y, \ Az = y$.

$$\underbrace{Ax - Az}_{=y-y=0} = A(x-z)$$

$$0 = ||0|| = ||A(x-z)|| \geq m \cdot ||x-z||$$

$$||x-z|| \leq 0 \quad x - z = 0 \quad x = z$$

Рассмотрим:

$$||y|| = ||Ax|| \geq m \cdot ||x|| = m \cdot ||A^{-1}y||$$

$$||y|| \geq m \cdot ||A^{-1}y||$$

$$||A^{-1}y|| \leq \frac{1}{m}||y||$$

$\Longleftarrow$:

$$A^{-1}(Y) = X \quad ||x|| = ||A^{-1}y|| \leq \frac{1}{m}||y|| = \frac{1}{m}||Ax||$$

$$||Ax|| \geq m \cdot ||x|| \quad \forall x$$

■

$$Ax = y \quad x = A^{-1}y$$

$$||\Delta x|| = ||\Delta A^{-1}y|| = ||A^{-1}\Delta y|| \leq \frac{1}{m}||\Delta y||$$

Теорема (2)**.** *Пусть* A *- лин.огр.* : $X \to X$*.* X *- B-пр-во.*
$||A^n|| \leq a_n \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$*.*
Тогда

$$\exists S = (I-A)^{-1} \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \ ||S|| \leq \sigma$$

Доказательство. Существование оператора S следует из теоремы с прошлой лекции.
Докажем, что $S = (I-A)^{-1}$

$$(I-A) \cdot S = (I-A) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty}(A^n - A^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{m=1}^{\infty} A^m = A^0 = I$$

■

Рассмотрим:

$$x = Ax + y$$

$$Ix - Ax = y$$

$$(I-A)x = y$$

$$x = (I-A)^{-1}y = \sum_{n=0}^{\infty} A^n y$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} A^k y = y + Ay + A^2 y + \dots + A^n y = y + A(y + Ay + \dots + A^{n-1} y)$$

$$x_n = y + Ax_{n-1}, \quad x_0 = y, \quad x_n \to x$$

Теорема (3). *В условиях теоремы 2 уравнение*

$$x = Ax + y$$

имеет единственно решение и итерационный процесс

$$x_n = y + Ax_{n-1}, \quad x_0 = y, \quad x_n \to x$$

сходится к этому решению