КиМ. Лекция

Dead guy

21 ноября 2024 г.

<u>def</u> Кольцо R наз-ся полупервичным, если оно не содержит ненулевых нильпотентных идеалов ($\nexists\ 0 \neq I \lhd R \mid I^n = 0$)

<u>Note</u> В полупервичном кольцо нет ненулевых нильпотентных правых идеалов
если $J^n = 0$ для нек-го $0 \neq J$ - правый идеал, то $0 \neq RJR \lhd R$
$RJR = I,\ I^{n+1} = RJR \cdot RJR \cdot \dots \cdot RJR \subset J^n = 0$

<u>Def</u> Кольцо R называется классически полупростым справа, если оно полупервично и артиново справа

<u>Th</u> Для кольца R эквивалентно:
1) $\forall\ R$ - модуль вполне приводим
2) R_R - вп. пирводим
3) R - классически п/пр
<u>Proof</u> 1) $\implies$ 2) Ясно
2) $\implies$ 1) R_R - вп. приводим $\iff$ $R_R =$ прямая сумма простых модулей
любой свободный R - модуль $F \cong \bigoplus R_R \implies F =$ прямая сумма простых R - модулей $\implies F$ - вп. приводим. Если M - R - модуль, то M - эпиморфный образ некоторого свободного R - модуля F (доказывали)
Ранее доказывали, что гомо образ вполне пирводимого модуля вполне приводим $\implies M$ - вп. приводим
2) $\implies$ 3) R_R - вполне приводим $\implies R_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$, где M_i - простые $\implies 1 \in M_1 \oplus \dots \oplus M_n \implies 1 \cdot R \subset (M_1 \oplus \dots \oplus M_n)R \subset M_1 \oplus \dots \oplus M_n \implies R = M_1 \oplus \dots \oplus M_n \implies R_R$ - артинов $\implies R$ - артиново справа
Пусть $J \neq 0,\ J \lhd R \land J^n = 0$. Т.к. R_R - вп. приводим, то $R = J \oplus J' \iff J = eR\ e^2 = e \implies (eR)^n = 0 \implies e^n = e = 0$
3) $\implies$ 2) Покажем, что любой правый идеал кольца R вполне приводим $\iff \forall$ правый идеал = прямая сумма $\underbrace{\text{минимальных правых идеалов}}_{\text{простые подмодули в} R_R}$
Против: существует правые идеалы $\neq \bigoplus$ min правых идеалов
$\implies\ \exists$ min правый идеал J с этим св-вом R - артиново справа $\implies J$ содержит мин идеал I $\implies I^2 = 0 \lor I = eR \implies R = I \oplus I'$
$J = J \cap R \implies J \cap (I \oplus I') \overset{I \subseteq J}{=} I \oplus (J \cap I')$
$J \cap I' \subsetneqq J \overset{\text{J - min}}{\implies} J \cap I' = \oplus \min$ правых идеалов $\implies J = \oplus \min$ правых идеалов. Противоречие $\implies \forall$ правый идеал - вп. приводим

<u>Th</u> M, N - R - модули
1) если $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, то $\hom_R(\bigoplus M_i, N) \cong \bigoplus \hom_R(M_i, N)$
2) если $N = \bigoplus_{j=1}^m N_j \implies \hom_R(M, \bigoplus N_j) \cong \bigoplus \hom_R(M, N_j)$
<u>Proof</u> 1) $\forall \alpha \in \hom_R(\bigoplus M_i, N)$ определяет послед-ть $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = \alpha|_{M_i}$
Обратно, $\forall$ посл-ть определяет α

$$\forall m = m_1 + \dots + m_n \in M$$

$$\alpha(m) = \alpha(m_1 + \dots + m_n) = \alpha(m_1) + \dots + \alpha(m_n) = \alpha_1(m_1) + \dots + \alpha_n(m_n)$$

Значит, $f : \hom_R(\bigoplus M_i, N) \to \bigoplus \hom_R(M_i, N) : \alpha \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - биекция

$$f(\alpha + \beta) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots \alpha_n + \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = f(\alpha) + f(\beta)$$

Т.о. f - изо-зм абелевых групп