Комплан. Лекция

aaahhh

19 ноября 2024 г.

Интеграл типа Коши

C - спрямляем. кривая $f(t)$ - непрерывна $\forall t \in C$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

<u>Th5</u> $F(z)$ - регулярна во всякой области G несодержащей точек кривой C и $\forall z \in G$ имеет производные любого порядка причем эти производные находятся

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt, \quad n = 0, 1, 2 \dots \tag{2}$$

<u>Proof</u>

$$z \in G, \; h \neq 0$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{2\pi ih}\int_C \left(\frac{1}{t-(z+h)} - \frac{1}{t-z}\right) f(t)dt = \frac{1}{2\pi ih}\int_C \frac{hf(t)dt}{(t-(z+h))(t-z)} \tag{3}$$

2d - наименьшее расстояние от z до точек C

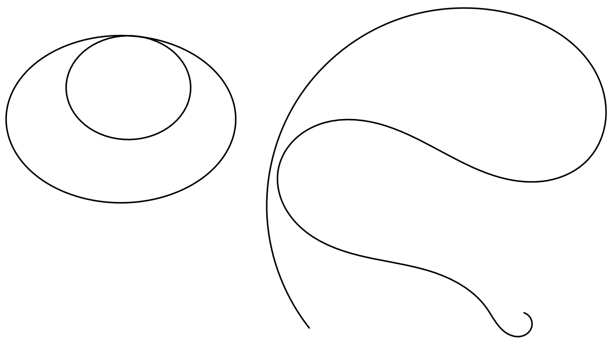

Рис. 1: picproof

$$|t-z| > 2d > d,\ |h| < d$$

$f(z)$ непр на C $\implies |f(z)| \le M = const$

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{1}{t-(z+h)(t-z)} - \frac{1}{(t-z)^2} f(t)dt\right| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(t)\cdot h}{(t-z)^2(t-(z+h))}dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M\cdot|h|}{d^2\cdot d}\cdot \mu C \to 0$$

$$\implies \exists \lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = F'(z)$$

$$F'(z) = \frac{1!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2} \tag{4}$$

$\forall z \in G \implies F(z)$ регулярна в G
Аналогично

$$\exists F''(z) = (F'(z))' = \lim_{h\to 0}\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h} = \dots = \lim_{h\to 0}\frac{1!}{2\pi i h}\int_C \frac{h(2(t-z)-)}{(t-z)^2(t-(z+h))^2}f(t)dt = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2}$$

Метод полной мат индукции $\exists F^{(n)}(z)\ \forall n$ и (2)

Th5* Пусть $f(z)$ регулярна в области D. Тогда
1) $f(z)$ имеет в D производные любого порядка
2) $\forall z \in Int(L),\ L$ - произвольный замкнутый контур, такой что $\overline{Int(L)} \subset D$ справедливы интегральные представления:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$$

Proof

$$\forall z \in D \implies \exists\ L,\ \overline{I(L)} \subset D$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)dt}{t-z} \text{ - инт-л типа Коши} \implies \text{Th.5}$$

След Любая производная аналитической в области D функции $f(z)$ является функцией непрерывной

Th.6 Действительная и мнимая части функции $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ аналитической в области D имеют в этой области непрерывные частные производные любого порядка
Proof

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y \text{ - непр в D} \implies u, v \text{ имеют непрерывные частные производные 1-го порядка}$$

$$f''(z) \text{ непр, то } u, v \text{ имеют непр част произв 2-го порядка}$$

След Ф-ия $u(x,y)$ - гармоническая в D имеет в этой области непрерывные частные производные любого порядка

Th Морера (обратная т-ме Коши)
Let 1) $f(z)$ непр в D
2) $\forall$ замкнутого контура L $\oint_L f(z)dz = 0,\ \overline{I(L)} \subset D$
Тогда $f(z) \in H(D)$
Note Односвязность D не требуется

Неравенства Коши для производный аналитический функций

$$f(z) \in H(D), \quad z_0 \in D$$

$$\gamma_r:\ |z-z_0| = r \quad \overline{I(\gamma_r)} \subset D$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$M(r) = \max_{z \in \gamma_r} |f(t)|$$

$$\forall z \in \gamma_r \quad |f(z)| \leq M(r)$$

Оценим интеграл по модулю:

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \frac{M(r)}{|z-z_0|^{n+1}} dz = \frac{n! M(r)}{2\pi r^{n+1}} \text{ дл } \gamma_r$$

Неравенство Коши для производных аналит. ф-ий

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M(r)}{r^n},\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Th(Луивилля) Если функция $f(z)$ - целая и ограниченная, то $f(z) \equiv const$
След.1 Если $f(z)$ - целая и не является постоянной, то она неограниченная
След.2 Если $f(z)$ - целая и $|f(z)| \leq M \cdot |z|^{\mu} \quad \mu \geq 0 \quad \forall |z| > r_0 \implies f(z)$ - многочлен степени $m \leq [\mu]$

Основая теорема высшей алгебры

$$P(z) = a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n,\ a_0 \neq 0,\ n \geq 1 \text{ - имеет по крайней мере 1 комплексный корень}$$

След Всякий многочлен P(z) степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учётом кратности