Линейное пространство

Определение. $A \subset X$ - лин. пр-во.
A - линейное подпространство, если

$$\forall\, x, y \in A \implies x + y \in A \quad \lambda \cdot x \in A$$

Определение. X, Y - лин. пр-во. $A : X \to Y$.
A - линейный оператор, если

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

Рассмотрим операции

$$(A+B)x \coloneqq Ax + Bx$$

$$(\lambda A)x \coloneqq \lambda Ax$$

$$0x \coloneqq 0$$

Таким образом, множество линейных операторов является линейным пространством
Введем в рассмотрение

$$(AB)x \coloneqq A(Bx) \quad \forall\, x$$

$$A(B - C) = AB - AC$$

Рассмотрим

$$A: \ X \to X$$

$$Ix \equiv x \ (\forall x) \text{ тождественный оператор}$$

$$A^0 = I \quad A^1 = A \quad A^2 = AA \quad \dots \ A^n = AA^{n-1}$$

$$A: \ X \to Y$$

Рассмотрим

$$A(X) \subseteq Y$$

Определение (Обратный оператор)**.** X, Y - лин. пр-ва, $A: \ X \to Y$ - сюрьект.
Если $\forall y \in Y \ \exists! x \in X: \ y = Ax$, то A - биекция
Тогда существует обратный оператор

$$A^{-1}: \ Y \to X$$

$$Ax = y \sim x = A^{-1}y$$

Пример
X - гладкие функции $x(t) \quad x \in [a, b], \ x(a) = 0, \ Y = C[a, b]$

$$y = Ax, \ y = x'(t), \ y = \frac{d}{dt}(x(t))$$

$$x = A^{-1}y \quad x(t) = \int_a^t y(\tau) d\tau$$

Утверждение. *A - линейный, то A^{-1} - линейный*

Утверждение. *A - линейный обратимый, то $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - лнз $\iff$ $\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$ - лнз*

Линейное нормированное пространство

Определение. X - ЛП, называется ЛНП, если

$$\forall\, x \in X,\ \exists\ ||x||$$

1) $||x|| \geq 0, \quad ||x|| = 0 \iff x = 0$
2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Свойства

$||-x|| = ||x||$
$||0|| = 0$
$||x - y|| \leq ||x|| + ||y||$
$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||$

Утверждение. *ЛНП является МП*

Определение. Подпространством Y в ЛНП X будем называть линейное подпространство линейного пространства замкнутое (относительно предельного перехода)

$$\forall y_n \in Y,\ y_n \to y \text{ в ЛНП } X \implies y \in Y$$