Топология. Лекция(21.09.24)

Th. 6 (X, τ) - т.п. $A \subset X$ $F \subset A$
F - замкнуто в $\tau_A \iff \exists G$ - замкнутое подмн-во в $\tau \mid F = G \cap A$
Proof

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap C(A \cap B) = A \cap CB \tag{1}$$

1) $\overset{?}{\implies}$

$$\exists U \in \tau_A \mid F = A \setminus U$$

$$\exists U_1 \in \tau \mid U = U_1 \cap A$$

$$F = A \setminus U = A \setminus (U_1 \cap A) \overset{(1)}{=} A \cap CU_1 \text{ - замкнуто в A}$$

2) $\overset{?}{\impliedby}$ $F = G \cap A$ $G -$ замкнуто в τ

$$A \setminus F = A \setminus (G \cap A) = A \cap CG \in \tau \implies A \cap CG \in \tau_A$$

Def. Точка x наз-ся точкой прикосновения множества A, если $\forall U \implies U_x \cap A \neq \varnothing$
$\overline{A} = ClA$

Th.7 Замыкание любого множества замкнуто

Proof $A \subset X$ $\overline{A}$ - замкнуто?
$C\overline{A} \in \tau$

$$\forall x \in CA \implies x \notin \overline{A} \implies \exists U_x \mid U_x \cap A = \varnothing$$
$$\forall y \in U_x \implies U_x \text{ является иакде окр-тью т.y}$$
$$U_x \cap A = \varnothing \implies y \notin \overline{A} \implies y \in C\overline{A} \implies U_x \subset C\overline{A}, \text{т.е } C\overline{A} - \text{ - замкнуто}$$

Th.8 замыкание мн-ва A является пересечением всех замкнутых мн-в, содержащих множество A, т.е. замыкание A является самым маленьким замкнутым мн-ом содержащим A
$\overline{A} = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$
A_i - замкнуто $A_i \supset A$ $\forall i \in I$
Proof 1. $\overline{A} \supset \bigcap\limits_{i \in I} A_i$

$$\exists A_{i_0} = \overline{A} \implies \text{ 1. выполнено из св-й}$$

2. $\overline{A} \subset \bigcap\limits_{i \in I} A_i$

$$\forall x \in \overline{A} \implies \forall U_x \cap A \neq \varnothing \implies U_x \cap A_i \neq \varnothing\ \forall i \implies X \in \overline{A}_i\ \forall i \overset{Th.7.5}{\implies} \overline{A}_i = A_i \implies X \in A_i\ \forall i \implies$$

Th.7.5 Замыкание замкнуто мн-во совпадает с этим мн-вом

Proof F замнуто $\implies \overline{F} = F$
1. $\overline{F} \supset F$ из опр-я
2. $\overline{F} \subset F$ для замкнутого F.
От противного:

$$\text{Let } \exists x \in \overline{F} \text{ и } x \notin F$$

$$CF \in \tau \text{ и } x \in CF \implies \exists U_x \mid U_x \subset CF \implies x \notin \overline{F} \text{ противоречие}$$

Следствие $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$
Proof $\overline{A}$ замкнуто $\implies$ по Теореме 7.5

Th.9 (Св-ва замыкания)
1. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Proof 1. из определения
2. $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$
От противного:

$$\text{Пусть } x \in \overline{A \cap B} \text{ и } x \notin \overline{A} \cup \overline{B} \implies \begin{cases} x \notin \overline{A} \implies \exists U_x \mid U_x \cap A = \varnothing \\ x \notin \overline{B} \implies \exists V_x \mid V_x \cap A = \varnothing \end{cases}$$

$$\text{Пусть } W_x = U_x \cap V_x \implies W_x \cap (A \cup B) = \varnothing \implies x \notin \overline{A \cup B}$$

$\overline{A \cup B} \overset{?}{\supset} \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\forall x \in \overline{A} \cup \overline{B} \implies \begin{cases} x \in \overline{A} \implies \forall U - x \cap A \neq \varnothing \\ x \in \overline{B} \implies \forall U_x \cap B \neq \varnothing \end{cases}$$

Пр $\overline{A \cap B} \overset{?}{=} \overline{A} \cap \overline{B}$

$$A = (0,1) \subset (\mathbb{R}, \tau_0)$$
$$B = (1,2) \subset (\mathbb{R}, \tau_0)$$
$$A \cap B = \varnothing \implies \overline{A \cap B} = \varnothing$$
$$\begin{matrix} \overline{A} = [0,1] \\ \overline{B} = [1,2] \end{matrix} \implies \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$$

Def точка a наз-ся граничной точкой A, если её любая окр-ть пересекается с самим мно-ом, а также с его дополнением FrA

Th.10 $FrA = \overline{A} \setminus IntA$

Proof 1. $FrA \overset{?}{\subset} A \setminus IntA$

$$\forall x \in FrA \implies \forall U_x \cap A \neq \varnothing \implies x \in \overline{A}$$

Докажем, что $x \notin IntA$
От противного:

$$x \in IntA \implies \exists U_x \mid U_x \subset A \implies \text{ противоречие с определением граничной точки}$$

1. $FrA \overset{?}{\supset} A \setminus IntA$

$$\forall x \in \overline{A} \setminus IntA$$

Те же рассуждения в обратном порядке

Def x называется предельной точкой мн-ва A, если любая проколотая окр-ть имеет непустое пересечение со мн-вом A, т.е. $\forall (U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$. обозн.$A'$

Def $a : \mathbb{N} \to X$ наз последовательностью в X

Def Точка b называется пределом посл-ти a_n, если $\forall U_b \, \exists n_0 \mid \forall n > n_0 \implies a_n \in U_b \; b = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$
Def Точка a наз-ся изолировнной точкой множества A, если $\exists U_a \mid U_a \cap A = \{a\} \; IsoA$

§2. Непрерывные отображения в топологических пространствах

Def Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$ называется непрерывным в т. x_0, если $\forall U_{f(x_0)} \exists U_{x_0} \mid f(U_{x_0}) \subset U_{f(x_0)}$

Th.1 Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$ непрерывно $\iff$ Прообраз каждого открытого мн-ва открыт
Th.2 Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$ непрерывно $\iff$ Прообраз каждого замкнутого мн-ва замкнут

Ex. $c : (X, \tau) \to (Y, \omega : c(x) = c \in T$