УМФ. Лекция

Does not matter

4 октября 2024 г.

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0 \tag{1}$$

Корректность по Адамару:
Задача математической физики называется корректно поставленной по Адамару, если решение этой задачи существует в некотором классе ф-й M, определяется в M ед. образом и непрерывно зависит от данных задачи

$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x) \tag{2}$$

$$u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x) \tag{3}$$

$$x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

Вопрос с экза: Формула Даламбера для решения Задачи Коши

$$(\theta_t)^2 - a^2(\theta_x)^2 = 0 \quad \theta = \theta(x,t)$$

$$\begin{cases} \theta_t - a\theta_x &= 0 \\ \theta_t + a\theta_x &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{-a} \\ \frac{dt}{1} &= \frac{dx}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + at &= C_1 \\ x - at &= C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi &= x - at \\ \eta &= x + at \end{cases}$$

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{u}_\eta(\xi,\eta)) = 0$$

$$\tilde{u}_\eta(\xi,\eta) = C(\eta)$$

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \int C(\eta)d\eta + f(\xi) \qquad \int C(\eta)d\eta = g(\eta)$$

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) \tag{4}$$

Общее решения ур-я (1):

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at) \tag{5}$$

$$f(x) + g(x) = \phi(x) \tag{6}$$

$$-f'(x) + g'(x) = \frac{1}{a}\psi(x)$$

$$u_t = f'(x-at)\cdot(x-at)_t + g'(x+at)(x+at)_t \quad (x+at) = a$$

$$-\int_{x_0}^{x} f'(\chi)d\chi + \int_{x_0}^{x} g'(\chi)d\chi = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\chi)d\chi$$

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\chi)d\chi + C \tag{7}$$

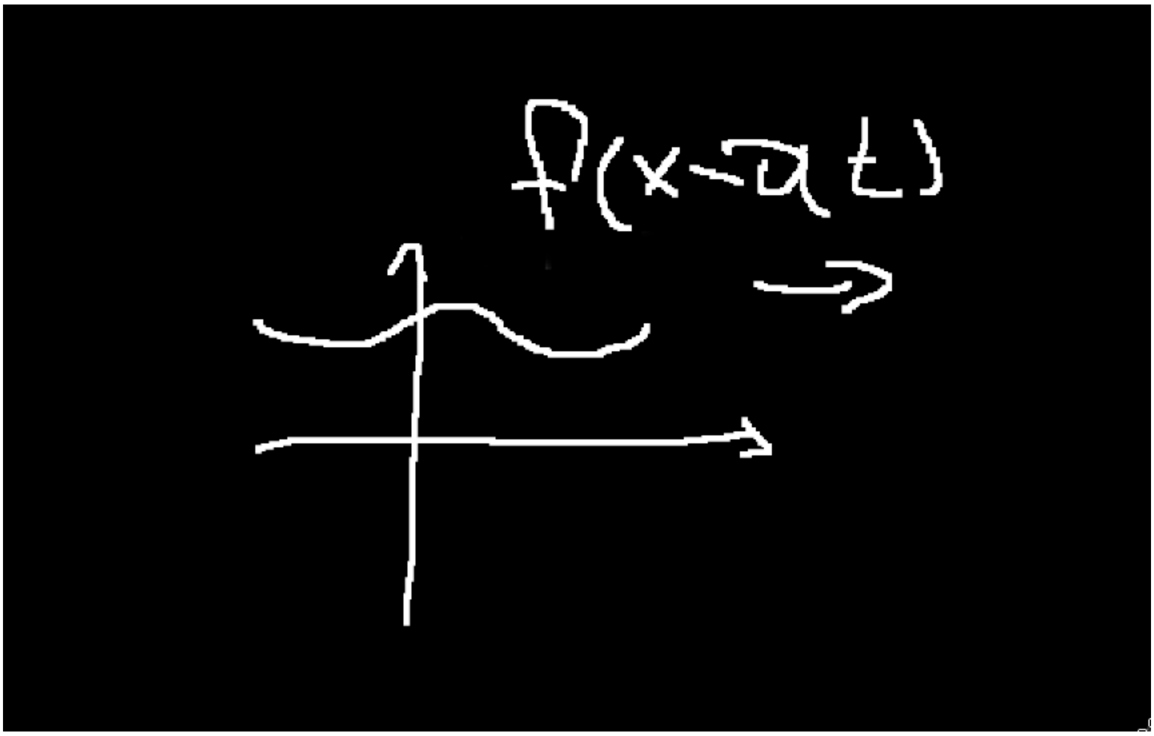


Рис. 1:

$$g(x) = \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\chi)d\chi + \frac{\phi(x)}{2} + \frac{C}{2}$$
$$f(x) = \frac{-1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\chi)d\chi + \frac{\phi(x)}{2} - \frac{C}{2}$$
$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\chi)d\chi - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(\chi)d\chi$$
$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\chi)d\chi + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(\chi)d\chi$$
$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\chi)d\chi \tag{8}$$
$$u \in C^2(\mathbb{R}\times[0;\infty]) \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}) \quad \psi \in C^1(\mathbb{R})$$

Непрерывная зависимость решения от данных:

$$u_{tt}^{(i)}(x,t) - a^2 u_{xx}^{(i)}(x,t) = 0$$
$$u^{(i)}(x,t)|_{t=0} = \phi(x)$$

$$u_t^{(i)}(x,t)|_{t=0} = \psi(x)$$
$$u = u^{(1)} - u^{(2)}$$
$$\phi = \phi^{(1)} - \phi^{(2)}$$
$$\psi = \psi^{(1)} - \psi^{(2)}$$
$$|u(x,t)| \le \frac{|\phi(x-at)|+|\phi(x+at)|}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi(\chi)|d\chi \le \epsilon + \frac{\delta}{2a}\cdot 2aT = \epsilon + \delta T$$
$$0 \le t \le T$$
$$|\phi^{(1)} - \phi^{(2)}| \le \epsilon$$
$$|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}| \le \delta$$
$$|u^{(1)} - u^{(2)}| \le \delta + \delta T \to 0$$

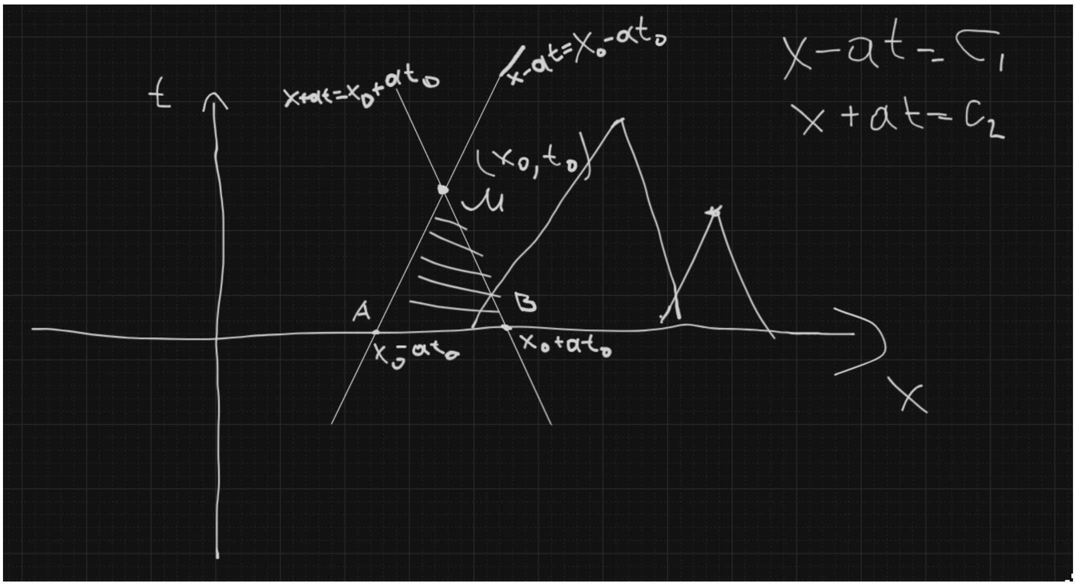


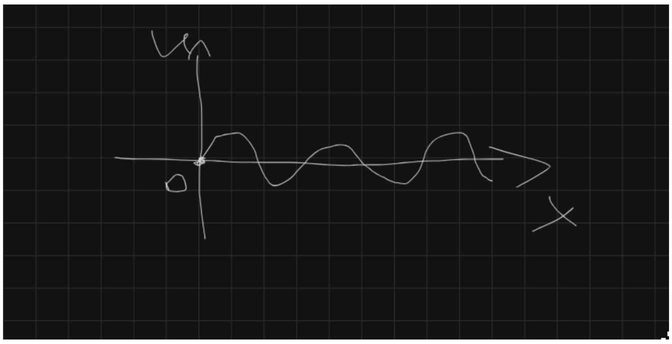
Рис. 2: Характеристический треугольник

$$x \in \mathbb{R},\ t \in [0, T]$$

Характеристический треугольник AMB называется область определённости

Вопрос из экза:

Свободные колебания полубесконечной струны с закреплённым концом



Для ур-я (1)

$$x \geq 0,\ t \geq 0$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x)$$

$$u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x)$$

Также:

$$u(0,t) = 0$$

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$$

$$V(x,t)|_{t=0} = \Phi(x),\ x \in \mathbb{R}$$

$$V_t(x,t)|_{t=0} = \Psi(x),\ x \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

$(\phi(0) = 0, \psi(0) = 0$ - условия согласования$)$

$$U(x,t) = \frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\chi)d\chi$$

$$U(0,t) \equiv 0$$