Топология. Лекция

Me

5 октября 2024 г.

Th3. $(X, \tau_1),\ (X, \tau_2) \quad f : (Y, \omega) \to (X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$
$f_i = pr_i f$
f непр $\iff f_1, f_2$ непр

$$\begin{tikzcd}
& (Y,\omega) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
(X_1, \times X_2, \tau_1 \times \tau_2) \arrow[rr, "pr_1"'] & & (X_i, \tau_1)
\end{tikzcd}$$

Proof 1. $\implies$ из непрерывности композиции
2. $\impliedby$

$$\forall U \times X \in \tau_1 \times \tau_2,\ U \in \tau_1,\ V \in \tau_2$$

$$f_i^{-1} = f^{-1} pr_1^{-1}$$

$$f_1^{-1}(U) \in \omega f_1^{-1} = f^{-1}(pr_1^{-1}(U)) = f^{-1}(U \times X_2) \in \omega$$

$$f_2^{-1}(V) = f^{-1}(X_1 \times V) \in \omega$$

$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}((X_1 \times V) \cap (U \times X_2)) = f^{-1}(X_1 \times V) \cap f^{-1}(U \times X) \in \omega$$

Note Отображения пр-ва непрерывно $\iff$ оно непрерывно по каждой координате

§4 Связность топологических пространств

Def Топологическое пространство называется связным, если его нельзя представить в виде объеденения двух непересекающихся открытых множеств, в противном случае называется несвязным

Ex $A = (0, 1) \cup [2, 5) \quad (A, (\tau_0)_A)$
$(0, 1) \in (\tau_0)_A \quad [2, 5) \in (\tau_0)_A$ т.к. $[2, 5) = (1.5, 10) \cap A$

Ex $(\mathbb{Q}, \tau_0)$
$U = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > \sqrt{2}\}$
$V = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \sqrt{2}\}$
$Q = U \cup V,\ U \cap V = \varnothing$
$U = \hat{U} \cap \mathbb{Q},\ \tilde{U} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\}$
$V = \hat{V} \cap \mathbb{Q},\ \tilde{V} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$

Th1 Пр-во несвязно $\iff$ в нем существует непустое открыто-замкнутое множество, не совпадающее со всем пространством
Proof 1 $\implies (X, \tau)$ несвязно

$$\implies \exists U, V \in \tau\ U \neq \varnothing,\ V \neq \varnothing \mid X = U \cup V,\ U \cap V = \varnothing$$

$$U = CV \implies U \text{ замкнуто}$$

2. $\impliedby$ Пусть $\exists\, U$ открыто-замкнутое, $U \neq \varnothing,\ U \neq X$. Пусть $V = CU \implies X = U \cup CU$

Ex (X, τ_D) - любое открыто-замкнуто

Ex $(\mathbb{R}, \tau)$ База ир. топ. - ир. точки
связно т.к. нет открыто-замкнутых множеств (открытые состоят из иррациональных точек, замкнутые содержат $\mathbb{Q}$)

Th2 $([0,1],\tau_0)$ связно
Proof М. от противного

$$[0,1]=A\cup B \quad A,B \text{ открыты}$$
$$A\cap B=\varnothing,\ A,B \text{ непустые}$$

Пусть $0\in A$, А открыто

$$\implies [0,c)\in\tau_0[0,1]$$
$$c_0=\sup c \text{ таких, что} [0,c)\subset A$$

А замкнуто т.к. $A=CB \implies$

$$\implies A=\overline{A} \implies c_0\in A \implies [0,c_0)\subset A \implies \exists\epsilon \mid (c_0-\epsilon,c_0+\epsilon)\subset A \implies [0,c_0+\epsilon)\subset A$$

Противоречие $\implies c=1$

Th.3 Пусть А связное подмножество (X,τ) т.е. А связно как подпр-во в (X,τ)
Пусть $U,V\in\tau \quad U\cap V=\varnothing$
$A\subset U\cup V$
Тогда $A\subset U\vee A\subset V$
Proof От противного
Пусть $A\cap U=A_1\neq\varnothing$
$A\cap V=A_2\neq\varnothing$

$$A=A_1\cup A_2,\ \text{в } \tau_A$$
$$A_1,A_2 \text{ открыты} \implies \text{ против со связностью А}$$

Th.4 $A_i\subset X_i,\ i\in I \quad \forall A_i$ связно
$\bigcap_{i\in I}A_i\neq\varnothing \implies \bigcup_{i\in I}A_i$ связно
Proof $\bigcup_{i\in I}A_i$ несвязно

$$\implies A=U\cup V,\ U\cap V=\varnothing$$
$$U,V\in\tau_A,\ U\neq\varnothing,\ V\neq\varnothing \implies A_i\in \text{ только одному из множеств}$$
$$\implies A\in \text{ U или V}$$

Ex $((0,1],\tau_0)$ - св пр-во

Th.5 А связное подмн-во в (X,τ) любое В лежащие между А и его замыкание т.е. $A\subset B\subset\overline{A}$ связно
Proof М от противного
Пусть $\exists U,V\in\tau \mid B=U\cup V,\ U\cap V=\varnothing,\ U\neq\varnothing,\ V\neq\varnothing$

$$\overset{Th.3}{\implies} A \text{ принадлежит одному из мн-в U или V}$$

Пусть $A\subset U$

$$\implies \exists x\in B\mid x\in V \implies x\in\overline{A}$$
$$V \text{ - окрестность точки x} \mid V\cap A=\varnothing$$

Сл.1 замыкание связного мн-ва связно
Пусть в т.5. $B=\overline{A},\ A\subset\overline{A}\subset\overline{A}$

Th.6 Непрерывный образ связного пространства связен
Proof М от противного

$$f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$$

f - сюрьекция
(X, τ) связно
Пусть $Y = U \cup V,\ U, V \in \omega,\ U \cap V = \varnothing,\ U \neq \varnothing,\ V \neq \varnothing$

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \implies f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau,\ f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$$

$$f^{-1}(U) \neq \varnothing,\ f^{-1}(V) \neq \varnothing \implies X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$$

Противоречие со связностью (X, τ)

Ex $S^1 : \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ связно
Окрестность - образ отрезка $I = [0, 1]$
$f(I) = \{x = cos 2\pi t, y = \sin 2\pi t\}$

Th.7 Произведение связных пр-в связно
Proof $(X, \tau),\ (Y, \omega)$ - связные пр-ва
М. от противного

$$(X \times Y, \tau \times \omega) \text{ несвязно} \implies X \times Y = U \cup V,\ U \cap V = \varnothing,\ U \neq \varnothing,\ V \neq \varnothing\ U, V \in \tau \times \omega$$

Пусть $(x_0, y_0) \in U$
Пусть $f : (X, \tau) \to (X \times Y, \tau \times \omega) : x \mapsto (x, y_0) \implies f$ непрерывно, т.к. прообраз любого открытого открыт

$$\forall A \times B \in \tau \times \omega \implies f^{-1}(A \times B) = \varnothing \text{ если } y_0 \notin B$$

$$f^{-1}(A \times B) = A \text{ если } y_0 \in B$$

$$\overset{Th.6}{\implies} (X \times \{y_0\}) \text{ связно}$$

Аналогично $(\{x_0\} \times Y)$ связно
$(X \times \{y_0\}) \cap (\{x_0\} \times Y) = (x_0, y_0)$

$$\implies X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \text{ связно}$$

$$X \times Y = \bigcup_{x_0 \in X} \{x_0\} \times Y \implies \{x\} \times Y \cap X \times \{y_0\} \neq \varnothing \implies \bigcup_{x_0 \in X} \{x_0\} \times Y \subset U$$