УМФ. Лекция

djkasadfhsaygfatfiask

1 ноября 2024 г.

Единственность решения

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad x \in [0;l],\ t \geq 0 \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x) \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 & x &= l \\ u(0,t) &= \mu_0(t) & u(l,t) &= \mu_l(t) \\ u_x(0,t) &= \nu_0(t) & u_x(l,t) &= \nu_l(t) \\ u(x,t) - hu(x,t)|_{x=0} &= q_0(t) & u_x(x,t) + hu(x,t)|_{x=l} &= q_l(t) \end{aligned} \tag{4}$$

$$u^1,\ u^2,\ u = u^1 - u^2$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0$$

$$u|_{t=0} = 0$$

$$u_t|_{t=0} = 0$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0$$

$$u_x(0,t) = 0 \qquad u_x(l,t) = 0$$

$$u_x - hu|_{x=0} = 0 \qquad u_x + hu|_{x=l} = 0$$

$$u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[a^2 u_x^2 + u_t^2] - a^2 \frac{\partial}{\partial x}(u_t u_x) - a^2 u_t x \cdot u_x$$

$$\int_0^l dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l [a^2 u_x^2 + u_t^2] dx = a^2 u_t u_x|_0^l$$

$$a^2 u_t u_x|_{x=l} = \begin{cases} 0, i,\ ii \\ -ha^2 u_t(l,t)u(l,t),\ iii \end{cases}$$

$$a^2 u_t u_x|_{x=0} = \begin{cases} 0, i,\ ii \\ a^2 h u_t(0,t)u(0,t),\ iii \end{cases}$$

Если нет граничных условий третьего рода:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l [a^2 u_x^2 + u_t^2] dx = 0$$

$$\int_0^l [a^2 u_x^2 + u_t^2] dx = \Phi(t)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = 0$$

$$\Phi(t) = const$$

$$\Phi(t) \equiv 0$$

$$[a^2 u_x^2 + u_t^2] \equiv 0$$

$$u_x \equiv 0,\ u_t \equiv 0$$
$$u = const = 0$$
$$u(x,t) \equiv 0$$

Если есть граничные условия третьего рода:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l [a^2u_x^2 + u_t^2]dx = -ha^2[u_t(l,t)u(l,t) + u_t(0,t)u(0,t)] = \frac{-ha^2}{2}\left[\frac{\partial u^2(l,t)}{\partial t} + \frac{\partial u^2(0,t)}{\partial t}\right]$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{ha^2}{2}u^2(l,t) + u^2(0,t) + \int_0^l [a^2u_x^2 + u_t^2]dx\right] = 0$$

$$\left[\frac{ha^2}{2}(u^2(l,t) + u^2(0,t)) + \int_0^l [a^2u_x^2 + u_t^2]dx\right] = const$$

$$\int_0^l [a^2u_x^2 + u_t^2] = 0$$

А это уже рассматривалось выше

При всех классических граничных условиях решение смешанной задачи 1-4 единственно

Резонанс

$$\omega_n = \frac{a\pi n}{l},\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n x}{l}$$