Комплан. Лекция

what am i?

12 ноября 2024 г.

Th (Коши)

$$\int_L f(z)dz = 0$$

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{\Gamma_1^-} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_n^-} f(z)dz$$

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz$$

Proof
Из многосвязной области сделаем односвязную. Проведём разрезы $l_k = l_k[a_k, b_k]\ a_k \in \Gamma_k,\ b_k \in \Gamma_0$

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1^- \cup \dots \cup \Gamma_n^- \cup \sum_{k=1}^n l_k \cup \sum_{k=1}^n l_k^-$$

Попали в условия теоремы Коши для односвязной области

$$\int_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1^-} + \dots + \int_{\Gamma_n^-} + \sum_{k=1}^n \int_{l_k} + \sum_{k=1}^n \int_{l_k^-} = 0$$

Частный случай
Th (О деформации контура) Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D ограниченной контурами $\Gamma_0,\ \Gamma_1$

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz$$

Th.4 (Интегральная формула Коши для односвязной области)
Если функция f(z) регулярна в односвязной области D, какой бы не был замкнутый контур $L \subset D$, $\forall z \in IntL$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)dt}{t-z} \quad t \in L,\ z \in IntL \tag{1}$$

Proof
Фиксируем $z \in IntL$

$$\gamma_\rho :\ |t-z| = \rho$$

Построим ф-ию:

$$\phi(t) = \frac{f(t)}{t-z}$$

Она регулярна в области D за исключением точки $t = z$
По частному случаю:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(t)dt}{t-z} \tag{2}$$

Покажем, что

$$\lim_{\rho \to 0} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(t)dt}{t-z} = f(z) \tag{3}$$

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{t-z} dt = 2\pi i \mid \cdot \frac{f(z)}{2\pi i}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{t-z} dt = f(z)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{t-z} - f(z) \right| < \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(t)-f(z)}{t-z} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int \frac{|f(t)-f(z)|}{|t-z|} dt < \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{dt}{|t-z|} = \frac{\epsilon}{2\pi} |2\pi| = \epsilon$$

f(t) непрерывна в $t = z \implies \forall \epsilon\ \exists \delta\ \rho = |t-z| < \delta \implies |f(t) - f(z)| < \epsilon$
Интеграл F(z) в формуле (1) называют интеграл Коши
$\frac{1}{t-z}$ - ядро интеграла Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in Int(L) \\ 0, & z \in Ext(L) \end{cases}$$

Th.5 (Интегральная формула Коши для многосвязной области)
Пусть $f(z) \in H(D)$ D - ограниченая n+1 замкнутым контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$
Тогда $\forall z \in Int(D)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)dt}{t - z}$$

$$L \equiv \partial \overline{D} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1^- \cup \dots \cup \Gamma_n^-$$

Proof

$$\gamma_\rho : \ |t - z| = \rho$$

$$\overline{Int(\gamma_\rho)} \subset D$$

Получим n+2 связную область. Граница $L \cup \gamma_\rho^-$

$$\phi(t) = \frac{f(t)}{t - z} \text{ регулярная в (n+2) связной области}$$

$$\int_{L \cup \gamma_\rho^-} \phi(t) = 0$$

$$\int_L \frac{f(t)}{t - z} dt = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(t)}{t - z} dt$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(t)}{t - z} dt = f(z)$$

Note Интегральную формулу Коши можно переписать в виде

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$z \in L \quad z_0 \in Int(L)$$

$$f(z) \in H(\overline{Int(L)})$$

Example

$$\oint_L \frac{e^z}{z(z - 2i)} dz$$

1) $L \equiv \Gamma_1$

$$\oint \frac{e^z}{z(z - 2i)} dz = 0$$

$$z = 0 \notin Int\Gamma_1$$

$$z = 2\pi \notin Int\Gamma_1$$

2) $L \equiv \Gamma_2$ Охватывает $z = 0$

$$z = 2i \notin Int\Gamma_1$$

$$z = 0 \in Int\Gamma_1$$

$$\oint \frac{e^t}{z(z - 2i)} dz = \oint \frac{\frac{e^z}{z - 2i}}{z} = 2\pi i \cdot f(z)|_{z = z_0} = 2\pi i \frac{e^z}{z - 2i}|_{z=0} = -\pi$$

$$\frac{e^z}{z - 2i} \text{ - аналит в } Int\Gamma_1$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z - 2i}$$

$$z_0 = 0$$

3) Охватывает $z = 2i$
4) Охватывает обе
Первый способ:

$$\frac{1}{z(z - 2i)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\quad}{z - 2i} - \frac{1}{z} \right)$$

$$\oint_L \frac{e^z}{z(z-2i)} = \frac{1}{2i}\left(\oint_l \frac{e^z}{z-2i}dz - \oint_L \frac{e^z}{z}dz\right)$$

Второй способ:
Делим область дважды проходимой кривой l

$$\int_{L_1=C_1\cup l} + \int_{L_2=C_2\cup l^-}$$