Элементы теории абелевых групп

A - аб. группа; $R = \mathbb{Z} \implies A - \mathbb{Z}$ - модуль
$O(a)$ - порядок эл-та $a \in A - \min n \in \mathbb{N} \mid na = 0$
$\nexists n \implies O(a) = \infty$

<u>Def</u> p - высота элемента $a \in A \to \max k \in \mathbb{N} \mid p^k x = a$ разрешимо в гр A
Если нет то p - высота $= 0$
Если для любого k разрешимо, то p - высота $= \infty$
<u>Example</u> 1) $A = Z,\ a = 4 \in A$
p - высота $4 \to 2^k x = 4$
$k = 1 \to x = 2$
$k = 2 \to x = 1$
$k = 3 \to x = 1/2 \notin \mathbb{Z}$
<u>Обозначение</u> $h_p(a)$ - p - высота

<u>Def</u> Характеристика $a \in A$ - последовательность p - высот

$$\chi(a) = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$$

<u>Example</u> 1) $A = Z$
$4 \in Z \implies \chi(4) = (2, 0, \dots, 0)$ $6 \in Z \implies \chi(6) = (1, 1, 0, \dots, 0)$
2) $A = Q^{(p)} = \{\frac{m}{p^s} \mid m \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{Z}\}$
$p = 3 \to 2 \in Q^{(p)} \to \chi(2) = (1, \infty, 0, \dots)$
3) $A = Q_p = \{\frac{m}{n} \mid (n, p) = 1\}$
$p = 3 \to 15 \in Q_p \to \chi(15) = (\infty, 1, \infty, \dots)$
4) $A = Q$
$\forall a \in A \to \chi(a) = (\infty, \dots, \infty, \dots)$

<u>Св-ва χ</u>
1) $\chi(a) = \chi(-a)$
2) $\chi(a) = (k_1, k_2, \dots k_n, \dots),\ m = p_1^{l_1} \dots p_s^{l_s} \in \mathbb{Z}$
$m \mid a \iff l_i \leq k_i\ \forall i = \overline{1, s}$
<u>Proof</u> $\implies$: Против $l_1 > k_1$, т.е. ур-е $p_1^{l_1} x = a$ неразрешимо

$$mx = a \implies p_1^{l_1} \cdot (p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_s^{l_s}) x = a \text{ - разрешимо с реш } x_0 \implies p_1^{l_1} y_0 = a,\ y_0 = p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s} \cdot x_0 \in A$$

$$p_1^{l_1} x = a \text{ разрешимо}$$

$\impliedby$: Индукция по s
$s = 1$ $p_1^{l_1} x = a$ - разрешимо
$< s$ верно

$$\underbrace{p_1^{l_1}}_{n} \underbrace{p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s}}_{t} x = a \text{ - разрешимо?}$$

$$(n, t) = 1 \iff un + vt = 1 \text{ for some } u, v \in \mathbb{Z}$$

$$nx = a \text{ - разр, решение } a'$$

$$tx = a \text{ - разр, решение } a''$$

$$nt(ua'' + va') = nu \cdot (ta'') + tv(na') = (un + vt)a = a \implies y_0 \text{ решение ур-я } (nt)x = a$$

3) $\chi(a) = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots \implies \chi(p_n a) = (k_1, \dots, k_n + 1, \dots)$

$$\chi_1 = (k_1, \dots, k_n, \dots)$$

$$\chi_2 = (l_1, \dots, l_n, \dots)$$

$$\chi_1 \geq \chi_2 \iff k_i \geq l_i\ \forall i$$

наименьший $\chi = (0, \dots, 0, \dots)$
наибольший $\chi = (\infty, \dots, \infty, \dots)$

Note любую последовательность $\chi = (k_1, \dots, k_n, \dots)$ неотр-х чисел и символом ∞ будет хар-кой некоторого элемента t.f. группы, а именно числа 1 в подгруппе группы Q, порожденной эл-ми $p_i^{-k_i}, \ i = 1, 2, \dots$

Def 2 хар-ки $\chi_1 \sim \chi_2$ - эквивалентны, если

$$\sum_i |k_i - l_i| < \infty \ (\infty - \infty = 0)$$

$\sim$ - отношение эквив-ти на мн-ве характеристик
Класс эквтв-ти называется типом $t(a)$

$$t(a) = \{\chi(b) \sim \chi(a) \mid b \in A\}, \ \chi(a) \text{ - представитель } t(a)$$

Def A - t.f.; $a_1, \dots, a_n$ - лнз (над $\mathbb{Z}$), если из $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = 0 \implies n_i = 0, \ i = \overline{1, k}$
Если M $-\infty$ сист. эл-тов из A, то M - лнз, если лнз любая её конечная подсистема
Мощность max лнз системы эл-тов в A, наз-ся её рангом, об $r(A)$

$$r(A) = 1 => \forall a_1, a_2 \in A: \ n_1 a_1 = n_2 a_2 \stackrel{3)}{\implies} \chi(a_1) \sim \chi(n_1 a_1) \ \chi(a_2) \sim \chi(n_2 a_2) \implies$$
$$\chi(a_1) \sim \chi(a_2) \implies t(a_1) = t(a_2)$$
$$t(A) \text{ - тип группы ранга 1}$$

Example 1) $t(Z) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$
2) $t(Q^{(p)}) = (0, 0, \dots, 0, \infty, 0, \dots)$
3) $t(Q_p) = (\infty, \infty, \dots, \infty, 0, \infty, \dots)$
4) $t(Q) = (\infty, \dots, \infty, \dots)$

Def $B \le A$ - называется существенная, если $B \cap C \neq 0 \ \forall 0 \neq C \le A$
Обозначение $B \le_e A$

Example $Z \le_e Q$

$$\forall 0 \neq B \le Q, \ \forall b = \frac{m}{n} \in B \implies nb = m \in Z \implies nb \in Z \cap B$$