Алгебра. Лекция

AAAAAAAA

19 ноября 2024 г.

$\mathcal{A}$ - алгебра над полем K

Example 1) $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ - алгебра с делением
2) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ - двумерная алгебра с делением над $\mathbb{R}$
3) $K \subset L \implies L$ - алгебра с делением над K

Алгебра кватернионов

$$\mathbb{H} = < i, j \mid i^2 = j^2 = -1,\ ij = -ji >$$

Как векторное пр-во над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1, i, j, k\},\ k = ij \implies \forall\, q \in \mathbb{H} : q = a + bi + cj + dk,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & i & j & k \\ 1 & i & j & k \\ i & -1 & k & -j \\ j & -k & -1 & i \\ k & j & -i & -1 \end{array}$$

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk \text{ - сопряженный}$$

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$$

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2 q_1} \text{ - проверим на базисе}$$

$$\overline{ij} = \overline{k} = -k$$

$$\overline{j} \cdot \overline{i} = (-j)(-i) = ji = -k$$

$$\overline{ik} = \overline{-j} = j$$

$$\overline{k} \cdot \overline{i} = (-k)(-i) = ki = j$$

$$\overline{jk} = \overline{i} = -i$$

$$\overline{k} \cdot \overline{j} = kj = -i$$

$$q = a + bi + cj + dk \neq 0 \iff (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$$

$$q\overline{q} = (a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) = a^2 - abi - acj - adk + abi + b^2 - bck + bdj + acj + bck + c^2 - cdi + adk - dbj + cdi + d^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = N(q) - \text{ норма}$$

$$q\overline{q} = N(q) \mid \ : N(q) \implies q\left(\frac{\overline{q}}{N(q)}\right) = 1 \implies q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N(q)} \implies \mathbb{H} \text{ - алгебра с делением}$$

$$N(q_1 q_2) = N(q_1) N(q_2)$$

$$N(q_1 q_2) = q_1 q_2 \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 \overline{q_2} \cdot \overline{q_1} = q_1 N$$

Th $\mathcal{A}$ - к/мер алгебра над K
1) $\forall a \in \mathcal{A}$ алгебраичен над K. В частности, существует $\mu_a(x) in K[x]$ - min мн-н
2) $a \in \mathcal{A}$ обратим $\iff \mu_a(0) \neq 0$
3) если A - без делителей нуля $\implies A$ - алгебра с делением
Proof 1) $\dim_k A = n < \infty \implies 1, a, a^2, \dots a^n$ - лз над K $\implies \exists$ не все равные нулю $k_0, \dots k_n \in K| \enspace k_0 + \dots k_n a^n = 0 \implies a$ - корень $f(x) = k_0 + \dots + k_n x^n \in K[x] \implies a$ алгеб-н над K
2) $\implies$:

$$\mu_a(x) = k_1 + k_2 x + \dots + k_m x^m \in K[x].$$

Допустим противное: $\mu_a(0) = 0 \iff k_1 = 0$

$$\mu_a(a) = k_2 a + \dots + k_m a^m = 0 \implies a(k_2 + \dots + k_m a^{m-1}) = 0 \mid \cdot a^{-1}$$

$$\implies k_2 + \dots + k_m a^{m-1} = 0 \implies g(a) = 0, \text{ где } g(x) = k_2 + \dots k_m x^{m-1} \in K[x], \ \deg g(x) < \deg \mu_a(x)$$

$\Longleftarrow \quad \mu_a \neq 0 \iff k_1 \neq 0$

$$k_1 + k_2 a + \dots + k_m a^m = 0 \implies k_2 a + \dots k_m a^m = -k_1 \mid \cdot (-k_1)^{-1}$$

$$a \cdot [(k_2 + \dots k_m a^{m-1}) \cdot (-k_1)^{-1}] = 1$$

3) доказано

Th (Фробениус, 1877)
Существует точно 3 ассоциативные конечномерные алгебры с делением над $\mathbb{R}: \mathbb{R}, \ \mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$
Proof Let A - конечномерная ассоциативная алгебра с делением над $\mathbb{R}$. Определим вид её элементов

$$\forall a \in A \text{ - алгебраичен над } \mathbb{R}, \text{ let } \mu_a(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ - мин мн-н - неприводим над } \mathbb{R}$$

$$\implies \mu_a(x) = x - a \vee \mu_a(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta, \ D = 4\alpha^2 - 4\beta = 4(\alpha^2 - \beta) < 0$$

$$b \overset{\text{df}}{=} a - \alpha$$

$$\mu_a(a) = a^2 - 2\alpha a + \alpha^2 - \alpha^2 + \beta = (a - \alpha)^2 + (\beta - \alpha^2) = 0 \implies b^2 = \alpha^2 - \beta < 0$$

Две возможности для $a \in A$
1) $a \in \mathbb{R}$
2) $a = \alpha + b$, где $\alpha \in \mathbb{R}, \ b^2 < 0$