Теорема. *Доказательство.* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
$\Omega \to \Omega_\epsilon$
$\Gamma \to \Gamma \cup S_\epsilon$

$$v = \frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = \frac{1}{r}$$

$$\iiint_{\Omega_\epsilon} \frac{\Delta u}{r} dxdydz = \iint_\Gamma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) d\Gamma + \iint_{S_\epsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) d\Gamma \tag{1}$$

Предпологаем $u \in C^n(\overline{\Omega})$
$\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$
Тогда по теореме Вейерштрасса

$$\exists C > 0 : \ \forall (x,y,z) \in \overline{\Omega} \ |u(x,y,z)| \le C, \ |\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \le C$$

Рассмотрим:

$$\iiint_{\overline{B_\epsilon(M_0)}} \frac{\Delta u}{r} dxdydz$$

Если перейти в сферическую систему координат

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \qquad \theta \in [0;\pi], \ \phi \in [0;2\pi] \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

То элемент объёма

$$dV = dxdydz = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$\iiint_{\overline{B_\epsilon(M_0)}} \frac{\Delta u}{r} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\epsilon \Delta u \cdot r dr$$

$$\left| \iiint_{\overline{B_\epsilon(M_0)}} \frac{\Delta u}{r} dxdydz \right| = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\epsilon |\Delta u| \cdot r dr \le C\frac{\epsilon^2}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

$$\iiint_{\Omega_\epsilon} \frac{\Delta u}{r} dxdydz = \iiint_\Omega \frac{\Delta u}{r} dxdydz - \iiint_{B_\epsilon} \frac{\Delta u}{r} dxdydz$$

$$\iiint_{\Omega_\epsilon} \frac{\Delta u}{r} dxdydz \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \iiint_\Omega \frac{\Delta u}{r} dxdydz$$

$$\iint_{S_\epsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \frac{1}{\epsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \le \epsilon \cdot C \cdot 4\pi \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = |(grad\, u, \vec{\nu}) \le \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \le C$$

На S_ϵ:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial r}, \ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\epsilon^2}$$

$$\iint_{S_\epsilon} u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\Gamma = \frac{1}{\epsilon^2}\iint_{S_\epsilon} u d\Gamma = \frac{1}{\epsilon^2} u(M^\epsilon) \cdot 4\pi\epsilon^2 \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 4\pi u(M_0)$$

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\Delta u}{r_{MM_0}} dxdydz = \iint_\Gamma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) d\Gamma - 4\pi u(M_0)$$

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\Delta u}{r_{MM_0}} dxdydz = +\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) d\Gamma$$

■

Следствие. *Если u - гармоническая, т.е. $\Delta u = 0$ в Ω. Тогда*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_\Gamma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) d\Gamma \tag{2}$$

Свойства гармонических функций

Вопросы из билета
1. Свойства гармонических функций. Теорема о среднем арифметическом
2. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме для гармонической функции

$$\Delta u(x,y,z) = 0 \quad u \in C^2(\overline{\Omega}) \tag{3}$$

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \right) dxdydz = 0$$

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \widehat{\nu x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \widehat{\nu y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \widehat{\nu z} \right) d\Gamma = \iint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 0$$

Теорема (О среднем арифмитическом)**.** *Пусть $u \in C^2(\overline{B_R(M_0)})$ гармоническая в $B_R(M_0)$*
$\Gamma = S_R(M_0)$
По следствию:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R(M_0)} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R(M_0)} u \left(-\frac{1}{r^2} \right) \Big|_{r=R}$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R(M_0)} u d\Gamma \tag{4}$$

Теорема (о максимуме и минимуме для гармонической функции)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - открытое ограниченное, с границей Γ, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ - гармоническая.*
Тогда наибольшее и наименьшее значения достигаются на границе Γ и функция может принимать наибольшие или наименьшее значение во внутренней точке только в том случае, когда $u \equiv const$

Доказательство. Предположим, что u приняла своё наибольшее значение во внутренней точке M_0. Докажем, что $u \equiv const$.
Тогда $\exists\, r_0 > 0 : \ \overline{B_{r_0}(M_0)} \subset \Omega$.
По теореме о среднем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \iint_{S_{r_0}(M_0)} u(M) d\Gamma$$

Также справедливо

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \iint_{S_{r_0}(M_0)} u(M_0) d\Gamma$$

$$\frac{1}{4\pi r_0^2} \iint_{S_r(M_0)} \underbrace{(u(M_0) - u(M))}_{\geq 0} d\Gamma = 0$$

$$u(M_0) \equiv u(M)$$

Те же рассуждения справедливы для любых $r: \ 0 < r \leq r_0$
Тогда в $\overline{B_{r_0}(M_0)}$ $u(M) \equiv u(M_0)$
Если рассмотрим точку $N \in \Omega$. Можем соединить M_0 с N линией конечное длины. Множество точек этой линий l замкнуто.
Если взять $R_0 = dist\{l; \Gamma\} > 0$
И если в предыдущих рассуждениях взять $r_0 = R_0$, то можно построить конечную цепь шаров $\{B_{R_0}(M_i)\}_{i=0}^m$, $M_{i+1} \in B_{R_0}(M_i)$, $i = 0, \dots, m-1$. $N \in \overline{B_{R_0}(M_m)}$ ■