ОСА. Лекция

Я

5 ноября 2024 г.

Th.6 $F \subset K \subset L \implies F \subset L$ - алгебраическое
Proof

$$\forall \alpha \in L - \text{ алгебр над K } \implies \exists f(x) = k_0 + k_1x + \dots + k_nx^n \in K[x] \mid f(\alpha) = 0$$

$$k_0, k_1, \dots, k_n \in K \supset F \implies k_0, k_1, \dots, k_n - \text{ алг над F } \implies F \subset F(k_0) \subset f(k_0)(k_1) = f(k_0, k_1) \subset \dots$$

$$\subset F(k_0, k_1, \dots, k_n) \implies F \subset F(k_0, \dots k_n) \text{ - конечное } \implies F \subset F(k_0, \dots k_n) \text{ - алг } \implies$$

$$F \subset F(k_0, \dots, k_n) \subset K \text{ - алг}$$

α - алгебр над $F(k_0, \dots, k_n) \implies F(k_0, k_1, \dots, k_n) \subset F(k_0, k_1, \dots, k_n, \alpha) \implies F \subset F(k_0, \dots, k_n) \subset F(k_0, k_1, \dots, k_n, \alpha) \implies F \subset F(k_0, k_1, \dots, k_n, \alpha)$ - алг $\implies \alpha$ алг над F $\implies F \subset L$ - алг

Поле разложения многочлена

Def K - поле, $f(x) \in K[x]$
Поле $L \supset K$ - поле разложения f(x), если f(x) раскладывается на линейные множители в $L[x]$ и L - min с этим св-вом, т.е. не существует $F \mid K \subset F \subsetneqq L$ и все корни f(x) лежат в F

Th.1 $\forall f(x) \in K[x]$ $\exists$ поле разложения
Proof $K[x]$ - факториально $\implies f(x) = p_1(x), \dots, p_k(x)$, $p_i(x)$ - непр Индукция по $\deg f = n$
$n = 1$ $f(x) = ax + b \implies L = K$
$< n$ верно
n $p_1(x)$ - непр над K

$$\implies \exists K \subset F \text{ - min} \wedge \alpha_1 \in F \text{ - корень } p_1(x) \implies K \subset \implies K \subset K(\alpha_1)$$

$$\implies f(x) = (x - \alpha_1)g(x), \text{ где } \deg g(x) < n \implies \exists \text{ поле разложения } \hat{L} \text{ для g(x) } \implies K \subset \hat{L}$$

$$\subset \hat{L}(\alpha_1) = L \text{ - поле разложения f(x)}$$

Lemma $p(x) \in K[x]$ - неприводим, $\alpha \in L \supset K$ - корень p(x)
$\phi : K \to L$ - гомо полей. Тогда гомо ϕ можно продолжить до гомо
$\psi : K(\alpha) \to L$ ровно столькими способами сколько корней в L имеет многочлен $\phi(p(x))$, полученный из p(x) применением ϕ к его коэффициентам
Proof $\phi : K \to L$ - гомо. Нужно построить $\psi : K(\alpha) \to L$, $\psi|_K = \phi$

$$p(x) = k_0 + k_1x + \dots + k_nx^n; k(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in K\}$$

Если ψ $\exists$, то

$$\psi(a_0 + a_1\alpha + \dots a_n\alpha^{n-1}) = \psi(a_0) + \psi(a_1)\psi(alpha) + \dots + \psi(a_{n-1})\psi(\alpha)^{n-1}$$

$$= \phi(a_0) + \phi(a_1)\beta + \dots + \phi(a_{n-1})\beta^{n-1}, \text{ где } \beta = \psi(\alpha) \text{ дост опр-ть } \psi(\alpha)$$

$$0 = p(\alpha) = \psi(p(\alpha)) = \phi(k_0) + \phi(k_1)\beta + \dots + \phi(k_n)\beta^n \implies \beta \text{ - корень } \phi(p(x))$$

Th.2 Поле разложения определенно однозначно с точность до изоморфизма над K
Proof $f(x) = p_1 \dots p_n$

$$K \subset K(\alpha_1) \subset \dots \subset K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = L$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ - корни непр-х многочленов } p_1, \dots p_n$$

Пусть M - другое поле разложения f(x)

$$1)\ id = \phi_0 : K \to M \text{ - гомо}$$

$$2)\phi_1 : K(\alpha_1) \to M \text{ - сущ-ет по лемме}$$

$$3)\phi_2 : K(\alpha_1)(\alpha_2) \to M$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n)\phi_n : K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})(\alpha_n) \to M$$

$$\phi_n : L \to M \text{ - гомо}$$

$$Im\phi_n \text{ содержит } \alpha_1, \dots \alpha_n \text{ и поле K и } Im\phi_n \subset M \implies Im\phi_n = M \implies \phi_n \text{ - изом-зм}$$