Обобщенные системы координат

Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование

2 сентября 2024 г.

План

План

1. Обобщенные системы координат
2. Линейные векторные пространства

Основные определения

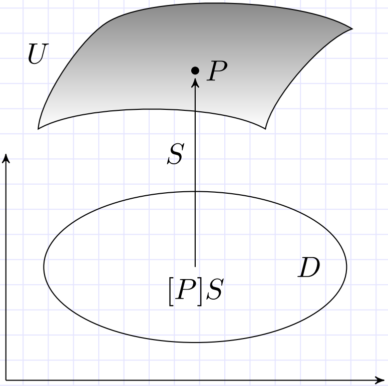
Более подробно: Макаров Е. М. Линейные и аффинные пространства в компьютерной геометрии. — Нижний Новгород, ННГУ, 2019. — URL: `http://www.lib.unn.ru/students/src/linear-affine.pdf`

- Отображение = функция.
- Преобразование = взаимно-однозначное отображение.
- id_U — тождественное отображение на множестве U.
- $(f \circ g)(x) = (g; f)(x) = f(g(x))$.

Определение (Система координат)

Пусть U — произвольное непустое множество, называемое в дальнейшем пространством. Элементы U будем называть точками. Пусть $D \neq \emptyset$. Обычно $D \subseteq \mathbb{R}^n$ для некоторого n. Биекция $S\colon D \to U$ называется системой координат на U. Будем называть $S^{-1}(P)$ координатами точки P и обозначать их через $[P]S$.

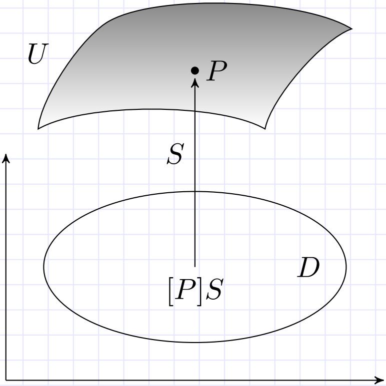
Система координат — обобщение единиц измерения.



Определение (Система координат)

Пусть U — произвольное непустое множество, называемое в дальнейшем пространством. Элементы U будем называть точками. Пусть $D \neq \emptyset$. Обычно $D \subseteq \mathbb{R}^n$ для некоторого n. Биекция $S\colon D \to U$ называется системой координат на U. Будем называть $S^{-1}(P)$ координатами точки P и обозначать их через $[P]S$.

Система координат — обобщение единиц измерения.



Отличия от многообразия:

- U не обязательно метрическое пространство;
- не обязательно $D \subseteq \mathbb{R}^n$;
- S — «глобальная» система координат (атлас из одной карты);
- S направлена снизу вверх.

Определение

Пусть $f\colon U \to U$, а $S, S'\colon D \to U$ — две системы координат. Будем говорить, что f сохраняет координаты по отношению к S и S', если

$$[P]S = [f(P)]S'$$

для каждой точки $P \in U$. В этом случае будем писать $S' = f(S)$.

Равенство $S' = f(S)$ формально ложно, потому что f нельзя применить к S.

Однако имеет место $S' = f \circ S$. Действительно,

$$[P]S = [f(P)]S' \iff S^{-1} = (S')^{-1} \circ f \iff S' = f \circ S.$$

В будущем система координат будет часто задаваться элементами пространства:

- векторами в линейном векторном пространстве (базис);
- точкой и векторами в аффинном пространстве (репер);
- точками в аффинном пространстве (барицентрический репер).

В этих случаях мы увидим, что $f(S)$ действительно получается применением f к элементам пространства, задающим S.

Равенство $[P]S = [f(P)]S'$ читается так: координаты прообраза в S равны координатам образа в S'.

Эквивалентное утверждение $S' = f \circ S$ можно записать так: «следующая диаграмма коммутативна».

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] & & U \\
& D \arrow[ul, "S"] \arrow[ur, "S'"'] &
\end{tikzcd}$$

Коммутативность означает, что любые перемещения вдоль стрелок с общим началом и концом дают одно и то же отображение.

Замечание о развороте стрелок

Рассмотрим коммутативную диаграмму с начальной вершиной U_1 и конечной вершиной U_4.

$$
\begin{tikzcd}
 & U_2 \arrow[r, "f_2"] & U_3 \arrow[dr, "f_3"] & \\
U_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & U_4 \\
 & U_6 \arrow[r, "g_2"'] & U_5 \arrow[ur, "g_3"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1 = g_3 \circ g_2 \circ g_1$$

Если стрелка, выходящая из U_1 или входящая в U_4, соответствует биекции, то ее можно развернуть, и полученная диаграмма по-прежнему будет коммутативной.

Замечание о развороте стрелок

Рассмотрим коммутативную диаграмму с начальной вершиной U_1 и конечной вершиной U_4.

$$
\begin{tikzcd}
 & U_2 \arrow[r, "f_2"] & U_3 & \\
U_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & U_4 \arrow[ul, "f_3^{-1}"'] \\
 & U_6 \arrow[r, "g_2"'] & U_5 \arrow[ur, "g_3"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3^{-1} \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 &= f_3^{-1} \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \\
f_2 \circ f_1 &= f_3^{-1} \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1
\end{aligned}
$$

Если стрелка, выходящая из U_1 или входящая в U_4, соответствует биекции, то ее можно развернуть, и полученная диаграмма по-прежнему будет коммутативной.

Замечание о развороте стрелок

Рассмотрим коммутативную диаграмму с начальной вершиной U_1 и конечной вершиной U_4.

$$
\begin{tikzcd}
 & U_2 \arrow[r, "f_2"] & U_3 & \\
U_1 \arrow[ur, "f_1"] & & & U_4 \arrow[ul, "f_3^{-1}"'] \\
 & U_6 \arrow[ul, "g_1^{-1}"] \arrow[r, "g_2"'] & U_5 \arrow[ur, "g_3"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$f_2 \circ f_1 \circ g_1^{-1} = f_3^{-1} \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g_1^{-1}$$
$$f_2 \circ f_1 \circ g_1^{-1} = f_3^{-1} \circ g_3 \circ g_2$$

Если стрелка, выходящая из U_1 или входящая в U_4, соответствует биекции, то ее можно развернуть, и полученная диаграмма по-прежнему будет коммутативной.

Определение

Пусть $S, S' \colon D \to U$ — две системы координат. Функцией перехода от S к S' называется отображение $C^S_{S'}$, если диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& U & \\
D \arrow[ur, "S"] & & D \arrow[ul, "S'"'] \arrow[ll, "C^S_{S'}"]
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть если $S' = S \circ C^S_{S'}$.

Функция перехода единственна и является биекцией: $C^S_{S'} = S^{-1} \circ S'$.

Как доказать, что $C = C^S_{S'}$? В силу единственности достаточно показать, что C делает диаграмму коммутативной.

Основное свойство $C^S_{S'}$ (следует из определения): $[P]S = C^S_{S'}([P]S')$.

Мнемоника: $836800\,\text{Дж} = 4184\,\frac{\text{Дж}}{\text{ккал}} \cdot 200\,\text{ккал}$,

Утверждение 1

Пусть S, S' и S'' являются системами координат на U.

1. $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''} = C^S_{S''}$.
2. $(C^S_{S'})^{-1} = C^{S'}_S$.
3. $C^S_S = \mathrm{id}_D$.

В силу единственности функции перехода, чтобы доказать 1, достаточно показать, что $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''}$ делает внешний треугольник коммутативным.

$$\begin{tikzcd}
 & U & \\
D \arrow[ur, "S"] & D \arrow[u, "S'"'] \arrow[l, "C^S_{S'}"] & D \arrow[ul, "S''"'] \arrow[l, "C^{S'}_{S''}"]
\end{tikzcd}$$

Утверждение 1

Пусть S, S' и S'' являются системами координат на U.

1. $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''} = C^S_{S''}$.
2. $(C^S_{S'})^{-1} = C^{S'}_S$.
3. $C^S_S = \mathrm{id}_D$.

В силу единственности функции перехода, чтобы доказать 1, достаточно показать, что $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''}$ делает внешний треугольник коммутативным.

$$\begin{tikzcd}
 & U & \\
D \arrow[ur, "S"] & D \arrow[u, "S'"'] \arrow[l, "C^S_{S'}"] & D \arrow[ul, "S''"'] \arrow[l, "C^{S'}_{S''}"]
\end{tikzcd}$$

Утверждение 1

Пусть S, S' и S'' являются системами координат на U.

1. $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''} = C^S_{S''}$.
2. $(C^S_{S'})^{-1} = C^{S'}_S$.
3. $C^S_S = \mathrm{id}_D$.

В силу единственности функции перехода, чтобы доказать 1, достаточно показать, что $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''}$ делает внешний треугольник коммутативным.

$$\begin{tikzcd}
 & U & \\
D \arrow[ur, "S"] & D \arrow[u, "S'"] \arrow[l, "C^S_{S'}"'] & D \arrow[ul, "S''"'] \arrow[l, "C^{S'}_{S''}"']
\end{tikzcd}$$

Утверждение 1

Пусть S, S' и S'' являются системами координат на U.

1. $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''} = C^S_{S''}$.
2. $(C^S_{S'})^{-1} = C^{S'}_{S}$.
3. $C^S_S = \mathrm{id}_D$.

В силу единственности функции перехода, чтобы доказать 1, достаточно показать, что $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''}$ делает внешний треугольник коммутативным.

$$
\begin{tikzcd}
& U & \\
D \arrow[ur, "S"] & D \arrow[l, "C^S_{S'}"'] \arrow[u, "S'"'] & D \arrow[l, "C^{S'}_{S''}"] \arrow[ul, "S''"']
\end{tikzcd}
$$

Утверждение 1

Пусть S, S' и S'' являются системами координат на U.

1. $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''} = C^S_{S''}$.
2. $(C^S_{S'})^{-1} = C^{S'}_S$.
3. $C^S_S = \mathrm{id}_D$.

В силу единственности функции перехода, чтобы доказать 1, достаточно показать, что $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''}$ делает внешний треугольник коммутативным.

$$
\begin{tikzcd}
 & U & \\
D \arrow[ur, "S"] & D \arrow[u, "S'"'] \arrow[l, "C^S_{S'}"] & D \arrow[ul, "S''"'] \arrow[l, "C^{S'}_{S''}"]
\end{tikzcd}
$$

Определение

Пусть S — система координат на пространстве U. Координатной функцией отображения $f\colon U \to U$ в S называется отображение $[f]S\colon D \to D$, которое делает следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & U \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[r, "{[f]S}"'] & D \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

Интуиция: $[f]S$ на уровне координат $\approx f$ на уровне точек.

Основное свойство $[f]S$ (из определения): $([f]S)([P]S) = [f(P)]S$.

f и $[f]S$ единственным образом восстанавливаются друг по другу, даже если они не являются биекциями.

Как доказать, что $g = [f]S$? В силу единственности достаточно показать, что g делает диаграмму коммутативной.

Утверждение 2

Если $f(S) = S'$, то $[f]S = C^S_{S'}$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & U \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[ur, "S'"] \arrow[r, "C^S_{S'}"'] & D \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

В силу единственности достаточно показать, что $C^S_{S'}$ выполняет роль $[f]S$, то есть делает квадрат коммутативным.

Это следует из коммутативности треугольников.

Еще одно объяснение: $[P]S = [f(P)]S' \xmapsto{C^S_{S'}} [f(P)]S$.

Утверждение 3

1. $[f \circ g]S = ([f]S) \circ ([g]S)$.
2. $[\mathrm{id}_U]S = \mathrm{id}_D$.
3. Если f — преобразование, то $[f^{-1}]S = ([f]S)^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g"] & U \arrow[r, "f"] & U \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[r, "{[g]S}"'] & D \arrow[u, "S"'] \arrow[r, "{[f]S}"'] & D \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}
$$

По условию квадраты коммутативны, следовательно, весь прямоугольник также коммутативен.

Сравнение функций перехода и координатных функций

- $C^S_{S'} \circ C^{S'}_{S''} = C^S_{S''}$
- $[f \circ g]S = ([f]S) \circ ([g]S)$

Различия

- Композиция функций перехода записывается слева направо,
  - Сначала происходит переход от S к S', а затем от S' к S''.
- Композиция координатных функций записывается справа налево.
  - Сначала к точке применяется g, затем f.
- В цепочке композиций функций перехода каждая следующая использует систему координат, полученную из предыдущей.
- В цепочке композиций отображений все координатные функции берутся в одной и той же системе координат.

Теорема 4

Рассмотрим отображение $f\colon U \to U$ и системы координат $S, S'\colon D \to U$. Пусть $g\colon U \to U$ будет преобразованием, сохраняющим координаты по отношению к S и S', а $h\colon U \to U$ будет таким отображением, что $[h]S' = [f]S$. Тогда $f = g^{-1} \circ h \circ g$.

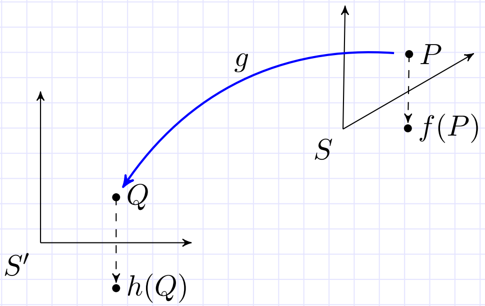
$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g"] & U \arrow[r, "h"] & U \arrow[r, "g^{-1}"] & U \\
D \arrow[u, "S"] \arrow[ur, "S'"'] \arrow[rrr, "{[h]S' = [f]S}"'] & & & D \arrow[ul, "S'"] \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}
$$

Треугольники коммутативны в силу предположения о g, а трапеция — по определению $[h]S'$.

Отсюда следует коммутативность прямоугольника.

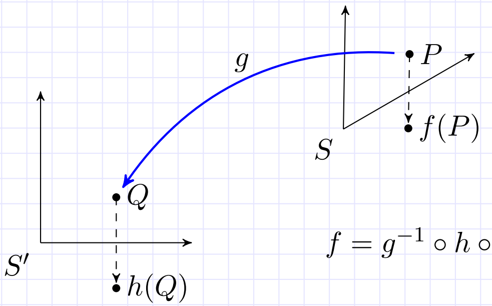
Но f единственным образом восстанавливается по $[f]S$.

Разложение отображения в другой системе координат



- Будем называть S «известной» системой координат, поскольку $[f]S$ известна, а S' «неизвестной», поскольку $[f]S'$ неизвестна.
- g сохраняет координаты по отношению к S и S'.
- $[h]S' = [f]S$: h делает в S' то же, что f делает в S.
- Тогда $f = g^{-1} \circ h \circ g$.
- Интуитивно: преобразуем S в S', делаем наше отображение, преобразуем обратно.

Разложение отображения в другой системе координат

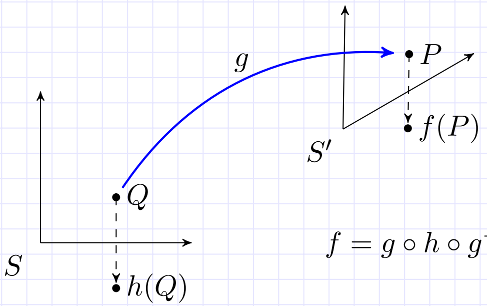


$$f = g^{-1} \circ h \circ g$$

Более привычно через S обозначить стандартную (неизвестную) систему координат, а через S' — нестандартную (известную) систему координат.
(См. следующий слайд.)

Также удобнее найти и обозначить через g преобразование, сохраняющее координаты по отношению к новым S и S'.

Разложение отображения в другой системе координат

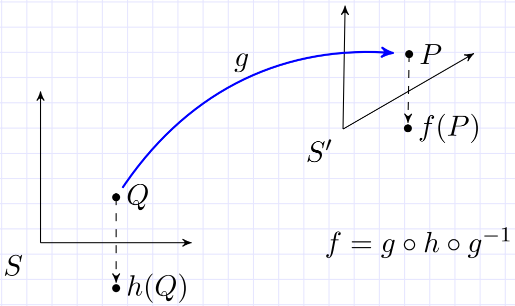


$$f = g \circ h \circ g^{-1}$$

Более привычно через S обозначить стандартную (неизвестную) систему координат, а через S' — нестандартную (известную) систему координат.

Также удобнее найти и обозначить через g преобразование, сохраняющее координаты по отношению к новым S и S'.

Разложение отображения в другой системе координат

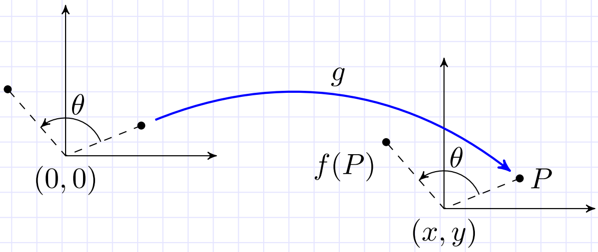


Равенство $f = g \circ h \circ g^{-1}$ можно записать в координатах S:

$$
\begin{aligned}
[f]S &= [g]S \circ [h]S \circ ([g]S)^{-1} \\
&= (C^S_{S'}) \circ ([f]S') \circ (C^S_{S'})^{-1}
\end{aligned}
$$

так как $g(S) = S'$ влечет $[g]S = C^S_{S'}$ (утверждение 2).

Разложение отображения в другой системе координат



Например, в документации Java написано про метод

```
void rotate(double theta, double x, double y)
```

осуществляющий поворот на θ вокруг точки (x, y):

This is equivalent to the following sequence of calls:

```
translate(x, y);
rotate(theta);
translate(-x, -y);
```

ср. $[f]S = (C^S_{S'}) \circ ([f]S') \circ (C^S_{S'})^{-1}$

План

Базис как система координат

Рассматриваем конечномерные векторные пространства над $\mathbb{R}$.

Базис $E = (e_1, \ldots, e_n)$ определяет систему координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Из свойств базиса вытекает, что $E \colon \mathbb{R}^n \to V$ — биекция.

Утверждение 5

Функция перехода $C^E_{E'}$ от E к $E' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ определяется умножением на матрицу, состоящую из столбцов $\begin{pmatrix} [e'_1]E & \ldots & [e'_n]E \end{pmatrix}$.

Доказательство. Рассмотрим координаты $v = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n$ в E:

$$[v]E = x'_1[e'_1]E + \ldots + x'_n[e'_n]E.$$

Это и означает $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e'_1]E & \ldots & [e'_n]E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Линейные отображения

Отображение $f\colon V \to V'$ называется линейным, если оно сохраняет операции векторного пространства, то есть

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

для любых $u, v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Легко показать:

1. тождественное отображение линейно;
2. композиция линейных отображений линейна;
3. отображение, обратное к линейному преобразованию линейно.

Система координат, порождаемая базисом (предыдущий слайд) — линейное отображение.

Утверждения на предыдущих слайдах использовали понятие отображения, сохраняющего координаты.

Следовательно, нужно доказать, что сохранение координат равносильно линейности.

Эквивалентность линейности и сохранения координат

Утверждение 6

Пусть V — n-мерное векторное пространство, $f\colon V \to V$ и $E = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.

1. Если f — линейное отображение, то $f \circ E = E'$, где $E' = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
2. Обратно, если $f \circ E = E'$ для некоторой системы векторов E', то $E' = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ и f — линейное отображение.

1. Следует из $f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n)$.

2. Пусть $f \circ E = E'$. Тогда $f = E' \circ E^{-1}$ линейно как композиция линейных отображений. Заметим, что биективность E' не используется.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] & & U \\ & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "E"] \arrow[ur, "E'"'] & \end{tikzcd}$$

$f(e_1) = f(E(1,0,\ldots,0)) = E'(1,0,\ldots,0) = e_1'$ и аналогично для других e_i.

Матрица линейного отображения

Пусть $E = (e_1, \dots, e_n)$ — базис.

Обозначение $E' = f(E)$ на слайде 6 означает $E' = f \circ E$.

Согласно п. 2 утверждения 6, $E' = f \circ E$ влечет $E' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Поэтому $f(E) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Согласно п. 1 утверждения 6, если f линейно, то оно сохраняет координаты по отношению к E и $f(E)$.

Следовательно, согласно утверждениям 2 и 5, имеет место равенство $[f]E = C^E_{f(E)}$, то есть $[f]E$ есть матрица, состоящая из столбцов $[f(e_1)]E, \dots, [f(e_n)]E$.

Направление системы координат как отображения

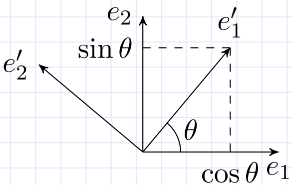
Заметим, что для равенства $f \circ E = E'$ отображения E и E' должны преобразовывать координаты в векторы, а не наоборот (причина направления S на слайде 5).

Еще одно преимущества такого выбора в том, что отображение $E' \colon \mathbb{R}^n \to V$ определено для линейно зависимых систем E'.

Это позволяет обобщить определения «f сохраняет координаты по отношению к E и E'» и «функция перехода от E к E'» для для линейно зависимых E' и сохранить утверждение $[f]E = C^E_{f(E)}$ (следующая лекция).

Основные линейные отображения на плоскости

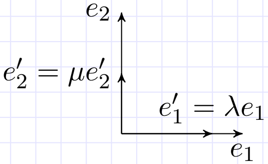
Поворот (rotation)



$$\cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta$$
$$\sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta$$
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Поворот в направлении от e_1 к e_2; иначе нужно сменить знак угла.

Масштабирование (scaling)

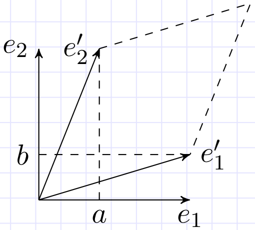


$$S(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$S(-1, 1)$ есть симметрия относительно оси Oy (обозначение: S_y).
$S(1, -1)$ есть симметрия относительно оси Ox (обозначение: S_x).
$S(-1, -1)$ есть симметрия относительно точки O.
$S(\lambda, \lambda)$ есть гомотетия с центром в O.

Основные линейные отображения на плоскости

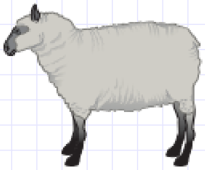
Сдвиг (shear)



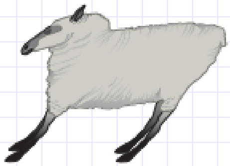
$$Sh(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

Единичный квадрат переводится в показанный параллелограмм.

Не путать с параллельным переносом.



sheep



sheared sheep