Крайный срок кр - 25 апреля 2025 23:59

$$x_t = B\theta + \epsilon t, \quad t = 1, \dots, n$$

$\{\epsilon_t\}$ - независимые одномер. распр. случайные величины

$$E(\epsilon_t) = 0$$

$$E(\epsilon\epsilon^T) = \sigma^2$$

Предположение

$$\epsilon_t = \rho\epsilon_{t-1} + \delta_t$$

$$E(\delta_t) = 0,\ E(\delta_t\delta_s) = \begin{cases} \sigma_0^2,\ s = t \\ 0,\ s \neq t \end{cases}$$

$$\epsilon_t = \rho(\rho\epsilon_{t-2} + \delta_{t-1}) + \delta_t = \rho^2\epsilon_{t-2} + \rho\delta_{t-1} + \delta_t = \rho^2(\rho\epsilon_{t-3} + \delta_{t-2}) + \rho\delta_{t-1} + \delta_t = \rho^3\epsilon_{t-3} + \rho^2\delta_{t-2} + \rho\delta_{t-1}$$

$$+\delta_t = \delta_t + \rho\delta_{t-1} + \rho^2\delta_{t-2} + \rho^3\delta_{t-3} + \dots$$

$$D(\epsilon_t) = D(\delta_t) + \rho^2 D(\delta_{t-1}) + \rho^4 D(\delta_{t-2}) + \dots$$

$$E(\epsilon_t) = 0 \quad D(\epsilon_t) = \sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{1 - \rho^2}$$

$$\epsilon_t\epsilon_{t-k} = ((\delta_t + \rho\delta_{t-1} + \dots + \rho^{k-1}\delta_{t-k+1} + \rho^k(\delta_{t-k} + \rho\delta_{t-k-1} + \dots))$$

$$E(\delta_t\delta_{t-k}) = \rho^k\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{1 - \rho^2}\rho^k$$

$$\begin{cases} X = B\theta + \epsilon \\ E(\epsilon) = 0 \\ \Sigma = E(\epsilon\epsilon^T) = \sigma^2\Sigma_0 \end{cases}$$

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{03} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{03}^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 + \rho & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 + \rho & -\rho \\ 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^{-1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \rho} & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = A_n^{-1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \rho^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = C^{-1}X = (\sqrt{1 - \rho^2}x_1, x_2 - \rho x_1, \dots, x_n - \rho x_{n-1})$$

$$U = C^{-1}B = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \rho^2} & \sqrt{1 - \rho^2}b_{11} & \dots & \sqrt{1 - \rho^2}b_{1p} \\ 1 - \rho & b_{21} - \rho b_{11} & \dots & b_{2p} - \rho b_{1p} \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$x_t = \theta b_t + \epsilon_t$$

Считаем, что $\{\epsilon_t\}$ - независимые случайные величины

$$\tilde{\theta}_{\text{об}} = \frac{\sum_t b_t x_t}{\sum_t b_t^2}$$

$$D(\tilde{\theta}_{\text{а}}) = \sigma^2 (B^T B)^{-1} \frac{\sigma^2}{\sum_t b_t^2}$$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^n e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^n e_t^2 - 2\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1} + \sum_{t=1}^{n-1} e_t^2 + e_n^2}{\sum_{t=2}^n e_t^2} = 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_t^2}\right)$$

Пример
доходность $A \sim Y_t, \quad B \sim X_t$

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \epsilon_t$$

t	y_t	x_t
1	-2.825	-5.31
2	26.02	16.84
...	...	...
15	18.01	10.73

ϵ_t - нез. с.в. Оценим по МНК $\beta_1, \ \beta_2$

$$\hat{y} = 4.06 + 1.3x_t \quad DW = 0.503$$

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \quad r = 0.748$$

Мартингал

Определение. 1) $\{X_n\}, \ n = 1, 2, \dots$
2) Фильтрация σ-алгебра - $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{n+1}$
Естественная фильтрация

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \dots, X_n) \quad \forall\, n$$

Пусть $E(|X_n|) < \infty$
a) Мартингал

$$E(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n$$

b) субмартингал

$$X_n \leq E(X_m|\mathcal{F}_n)$$

c) супермартингал

$$X_n \geq E(X_m|\mathcal{F}_n)$$