1-2

Вероятность

1. Понятие вероятности. Предмет теории вероятностей. Интерпретация вероятности.
2. Статистические закономерности и их количественный анализ.
3. Случайные события, элементарные исходы.
4. Аксиомы Колмогорова. Свойства вероятности.
5. Способы задания вероятности.

0. Литература.

Учебники

Теория вероятностей и математическая статистика.

1. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей – М.: Наука, 2005. – 448 с.
2. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики – М.: Наука, 1982.
3. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения – М.: Наука, 1968.
4. *Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М., Наука, 1969 – 512 с.
5. *Кендалл М.Дж., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи – М.: Наука, 1973.

Задачники.

6. *Тихов М.С.* Теория вероятностей и математическая статистика.– ННГУ, 2005.
7. *Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Лань, 2023. – 320 с.

Таблицы.

8. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики – М.: Наука, 1983.

1. В естественном языке существует масса выражений, близких по значению слову «вероятность»: это и правдоподобие, и степень подтверждения (возможно, с помощью фактов), и степень уверенности на основании данного свидетельства. Аналогично, прилагательное «вероятный» может означать все, что не является полностью определенным, а может служить для обозначения наиболее благоприятной альтернативы. Понять смысл подобных суждений можно тогда, когда четко представляешь себе, в чем состоит каждое понятие вероятности и с каким из них имеешь дело в данном конкретном случае.

Следует различать два типа понимания вероятности: вероятность в первом смысле есть понятие, определяемое системой аксиом исчисления вероятностей (математическое понимание), т.е. правил, позволяющих подсчитывать вероятности одних событий, когда известны вероятности других событий. Вероятность во втором смысле (по крайней мере в некоторых контекстах) не является формальным или количественным понятием, задаваемым в исчислении; это качественное понятие, выражающее степень уверенности, оценивающее гипотезы или отражающее категоричность (или недостаток категоричности) гипотезы или утверждения.

Мы не будем рассматривать вероятность в его естественном понимании, поскольку все попытки извлечь смысл вероятности из естественного языка сталкиваются с одной и той же проблемой: едва мы почувствуем, что извлекли этот смысл, как тут же осознаем, что использование слова «вероятно» в философских и научных контекстах не стало более осмысленным и точным. Там, где обычный подсчет альтернатив неприменим, любой философский анализ не способен привести к количественным оценкам.

Существует три способа эмпирической интерпретации вероятности в том виде, в каком это имело место в демографических, сельскохозяйственных и т.п. науках. *Во-первых,* вероятность можно буквально отождествить с относительной частотой. *Во-вторых,* вероятность можно считать абстрактным двойником относительной частоты. *В-третьих,* вероятность можно рассматривать как характеристику определенных типов событий, выявляющих определенные виды предрасположенностей или случайных механизмов.

Мы будем придерживаться второй интерпретации вероятности – дадим объективное понятие вероятности: что относительные частоты определенных классов экспериментов или испытаний оказываются чрезвычайно устойчивыми, предлагаем стохастическую (вероятностную) модель для объяснения и описания такой устойчивости.

Приведем простой пример про перепись населения. В некоторых странах устраивают сплошную перепись населения. Перепись нужна для того, чтобы планировать в будущем какие-то социальные мероприятия. Однако в ряде стран проводят 10% или 25% перепись. Правда, исходная совокупность при этом должна быть хорошо перемешана. Тогда ее результаты практически столь же надежны, как и при сплошной переписи, но такие переписи обходятся дешевле и быстрее обрабатываются.

Прежде чем непосредственно перейдем к предмету нашего рассмотрения, введем некоторые понятия и термины. Прежде всего это *сущность* и *явление*. Сущность – это внутреннее содержание предмета, выражающееся в единстве всех его многообразных свойств и отношений. Явление – то или иное обнаружение предмета, внешней формы его существования. В познании выступают ступени постижения предмета от явления к сущности.

Первоначальное понятие при изучении окружающего нас мира – событие. Событие определяется тем, произошло или нет некоторое явление.

Наблюдение – это целенаправленное восприятие, обусловленное задачей деятельности. Основное условие научного наблюдения – объективность, т.е. возможность контроля путем либо повторного наблюдения, либо применения иных методов исследования (например, эксперимента). Наблюдение выражается некоторым числом характеристических признаков, которые мы будем называть *комплексом условий* (например, при подбрасывании монеты мы наблюдаем, какой стороной она упадет). Будем считать, что комплекс условий может быть воспроизведен неограниченное число раз.

Эксперимент – это чувственно-предметная деятельность в науке (в узком смысле – опыт, воспроизведение объекта познания).

Испытанием будем называть осуществление комплекса условий. Определим также исход эксперимента как результат наблюдения.

Очень многие математические модели, скажем дифференциальные уравнения, которые вы уже изучали, для практической реализации требуют полностью детерминированного представления всех исходных данных, т.е. задание числовых значений не сопряжено с какой бы то ни было неопределенностью.

Детерминированное событие можно описать так: при каждом осуществлении комплекса условий обязательно происходит событие A (т.е. условия эксперимента однозначно определяют исход A).

Пример 1. Солнечные затмения – предсказаны наперед. Другие примеры – смена дня и ночи, смена времен года, коронация английской королевы, церковная служба или исполнение оперы.

Есть также явления, исход которых мы заранее предсказать не можем. Если на материальную точку действует известная сила и в некоторый момент заданы ее положение и скорость, то ее дальнейшее движение можно описать дифференциальным уравнением. Однако эта модель не всегда удовлетворительно описывает реальные физические явления, например, полет снаряда – он не падает в одну и ту же точку. Далее, нельзя заранее предсказать длительность жизни человека или технической системы, нельзя заранее предсказать, сколько человек придет на лекцию, какой стороной выпадет монета и т.д. Таким образом, есть события, исходы которых неоднозначно определяются условиями опыта. Приведем еще примеры таких событий.

Пример 2. Спортлото. Нельзя заранее предсказать, какие номера выпадут в очередном тираже.

Пример 3. Теория обнаружения. Если мы хотим выяснить, имеется ли в определенной точке неба звезда или какой-либо другой объект, мы направляем на участок неба, содержащей эту точку, телескоп или антенну, фотографируем этот участок или смотрим на экран локатора и отвечаем на вопрос, есть ли объект в интересующей точке или нет. Если сигнал от объекта слабый, то ответить на поставленный вопрос не очень просто, из-за наличия помех или флуктуаций и фона самого неба.

Пример 4. Теория связи. Например, мы передаем сигнал по каналам связи или производим радиолокацию и подаем сигнал $x(t)$ на антенну в течение интервала $(0,T)$. Из-за наличия фонового шума необходимо выделить полезный сигнал. Тот, кто слушал когда-нибудь удаленные станции, понимает, как непросто это сделать. В связи с развитием Интернета популярной становится теория телетрафика.

Пример 5. Выборочное обследование. Для получения некоторой информации можно обследовать всю выборочную совокупность. Той же цели можно достигнуть меньшими затратами, если обследовать какой-то процент совокупности. При этом выбор должен быть произведен таким образом, чтобы выборочная совокупность хорошо представляла исходную. Однако при этом довольно часто допускают ошибки обследования. Один из наиболее известных случаев неправильного использования статистического метода связан с ошибочным определением процедуры выборки. Данная ошибка была допущена в 1936 г. журналом «Литэрэри Дайджест» во время проводимого этим журналом предвыборного опроса перед выборами президента США с целью узнать, кто победит?. «Дайджест» предсказал, что Альфред Лэндон легко победит Франклина Рузвельта, однако в конечном счете Рузвельт победил в 46 из 48 штатов, причем во многих с подавляющим преимуществом.

Пример 6. Контроль качества. Для определения качества N изготовленных изделий определенный их процент ставят на испытания (скажем, n штук). Для сокращения времени испытания получают, так называемые, цензурированные выборки – ждут отказа первых k из них. Задача состоит в нахождении таких значений n и k, чтобы выводы о качестве партии были более достоверны при наименьших затратах на контроль.

Приведем еще несколько примеров на применение статистической теории распределения экстремальных событий. В 1956 году в Голландии произошло крупное наводнение, связанное с, так называемыми, нагонными наводнениями. Так вот, после этого правительство Голландии собрало крупнейших математиков, физиков для того, чтобы рассчитать высоту дамбы, которую предлагалось восстановить. Работа была проведена и количество экстремальных событий значительно убавилось. Для этого математикам пришлось хорошо вложиться в развитие теории экстремальных наблюдений. Но исследования дали результат.

Пример 7. Оценка средней продолжительности жизни (таблицы смертности, анализ таблиц смертности).

Пример 0. Оценка средней продолжительности жизни населения определяется по таблицам смертности. Приведем одну из таких таблиц. Расчет в них ведется на 100 тысяч (в среднем).
Итак, рассмотрим 100 000 и запишем это число в строке 0 (доля равна 1.0). В течение первого года умерло 4489 человек, осталось 95511 чел. (доля составляет 0.95511). В течение второго года умерло еще 648 человек, осталось 94864 (доля равна 0.94864) и т.д. Для оценки средней продолжительности будем использовать теоретический аналог математического ожидания положительной случайной величины, равны $\mu=\int_0^{+\infty}(1-F(x))\,dx$, подставляя вместо $1-F(x)$ ее оценку $S_n(x)=1-F_n(x)$ – оценку Каплана-Мейера. Иными словами, оценку для μ по формуле:

m=1.0+0.95511+0.94864+0.94607+0.94437+0.94289+0.94160+0.94031+0.93907+0.93788+0.93696
+0.93590+0.93514+0.93423+0.93340+0.93241+0.93136+0.93022+0.92865+0.92668+0.92489+0.92
279+0.92097+0.91865+0.91611+0.91349+0.91077+0.90816+0.90535+0.90231+0.89936+0.89577+0
.89274+0.88891+0.88541+0.88161+0.87737+0.87346+0.86910+0.86423+0.86021+0.85476+0.8498
8+0.84451+0.83921+0.83340+0.82668+0.82026+0.81327+0.80515+0.79738+0.78746+0.77902+0.7
6759+0.75674+0.74443+0.73097+0.71732+0.70225+0.68583+0.66987+0.65117+0.63514+0.61462+
0.59521+0.57405+0.55182+0.53158+0.50817+0.48434+0.46209+0.43699+0.41488+0.38639+0.360
85+0.33597+0.30872+0.28507+0.26155+0.23422+0.21160+0.18552+0.16797+0.14540+0.12651+0.
10819+0.09114+0.07596+0.06316+0.05256+0.04290+0.03382+0.02918+0.02394+0.01975+0.01663
+0.01289+0.00987+0.00748+0.00559+0.00413+0.00301+0.00216+0.00154+0.00107+0.00074+0.00
050+0.00034+0.00022+0.00015; $\hat{\mu} = m = 63.35528.$

Таблица смертности населения России для календарного года 1959. мужчины

Возраст **x** (полное число ис-полнив-шихся лет)	Число доживших до возрас-та **x** лет l(x)	Число умерших d(x) в возрасте **x** лет	Возраст **x** (полное число ис-полнив-шихся лет)	Число доживших до возрас-та **x** лет l(x)	Число умерших d(x) в возрасте **x** лет	Возраст **x** (полное число исполнив-шихся лет)	Число доживших до воз-раста **x** лет l(x)	Число умерших d(x) в возрасте **x** лет	Возраст **x** (полное число исполнив-шихся лет)	Число доживших до воз-раста **x** лет l(x)	Число умерших d(x) в возрасте **x** лет
0	1.0	4489	**28**	0.90535	304	**56**	0.73097	1365	**84**	0.12651	1831
1	0.95511	648	**29**	0.90231	294	**57**	0.71732	1507	**85**	0.10819	1706
2	0.94864	256	**30**	0.89936	359	**58**	0.70225	1642	**86**	0.09114	1518
3	0.94607	171	**31**	0.89577	303	**59**	0.68583	1596	**87**	0.07596	1280
4	0.94437	148	**32**	0.89274	383	**60**	0.66987	1870	**88**	0.06316	1059
5	0.94289	128	**33**	0.88891	350	**61**	0.65117	1603	**89**	0.05256	966
6	0.94160	129	**34**	0.88541	380	**62**	0.63514	2052	**90**	0.04290	908
7	0.94031	124	**35**	0.88161	424	**63**	0.61462	1941	**91**	0.03382	464
8	0.93907	119	**36**	0.87737	391	**64**	0.59521	2116	**92**	0.02918	524
9	0.93788	92	**37**	0.87346	436	**65**	0.57405	2223	**93**	0.02394	420
10	0.93696	106	**38**	0.86910	487	**66**	0.55182	2024	**94**	0.01975	312
11	0.93590	76	**39**	0.86423	402	**67**	0.53158	2342	**95**	0.01663	374
12	0.93514	91	**40**	0.86021	545	**68**	0.50817	2383	**96**	0.01289	301
13	0.93423	83	**41**	0.85476	488	**69**	0.48434	2225	**97**	0.00987	240
14	0.93340	99	**42**	0.84988	537	**70**	0.46209	2510	**98**	0.00748	189
15	0.93241	105	**43**	0.84451	530	**71**	0.43699	2210	**99**	0.00559	146
16	0.93136	114	**44**	0.83921	581	**72**	0.41488	2849	**100**	0.00413	112
17	0.93022	157	**45**	0.83340	672	**73**	0.38639	2554	**101**	0.00301	84
18	0.92865	197	**46**	0.82668	642	**74**	0.36085	2488	**102**	0.00216	63

19	0.92668	179	**47**	0.82026	699	**75**	0.33597	2725	**103**	0.00154	46
20	0.92489	210	**48**	0.81327	812	**76**	0.30872	2366	**104**	0.00107	33
21	0.92279	182	**49**	0.80515	777	**77**	0.28507	2351	**105**	0.00074	24
22	0.92097	232	**50**	0.79738	992	**78**	0.26155	2733	**106**	0.00050	17
23	0.91865	254	**51**	0.78746	845	**79**	0.23422	2262	**107**	0.00034	11
24	0.91611	262	**52**	0.77902	1143	**80**	0.21160	2609	**108**	0.00022	8
25	0.91349	272	**53**	0.76759	1085	**81**	0.18552	1755	**109**	0.00015	5
26	0.91077	261	**54**	0.75674	1231	**82**	0.16797	2256	**110+**	0.00009	9
27	0.90816	280	**55**	0.74443	1346	**83**	0.14540	1890			

Вернемся к вероятности. Мы будем исходить из предположения, что в бесконечно длинной серии испытаний рассматриваемые события могут наступить сколь угодно раз, т.е. обладают свойством повторяемости. Назовем их массовыми случайными событиями.

Определим понятие частоты (относительной частоты) события A в N испытаниях, где N – число повторений реализации комплекса условий. Пусть $m = m(A)$ – число тех испытаний из N, в которых произошло событие A. Тогда частотой события A в N испытаниях называют отношение $h_N(A) = \dfrac{m(A)}{N}$.

Задание. Провести $N = 50$ подбрасываний монеты и фиксировать, появление (отмечая «1») или непоявление (отмечая «0») герба, а затем на графике откладывать пары $((N, h_N(\Gamma))$, $N = 1, 2, ..., 50$. При этом у вас должна обнаружиться следующее: с ростом числа наблюдений n колебания частоты становятся все меньше и меньше около некоторого постоянного (в данном случае около 0.5) числа. Например, для эксперимента: 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, получаем

1) 1=1.0 2) 1/2=0.5 3) 2/3=0.67 4) 3/4=0.75 5) 3/5=0.6 6) 4/6=0.67
7) 4/7=0.57 8) 4/8=0.5 9) 5/9=0.56 10) 5/10=0.5 11) 5/11=0.45
12) 5/12=0.42 13) 6/13=0.46 14) 7/14=0.5 15) 8/15=0.53 16) 8/16=0.5
17) 9/17=0.53 18) 9/18=0.5 19) 10/19=0.53 20) 11/20=0.55.

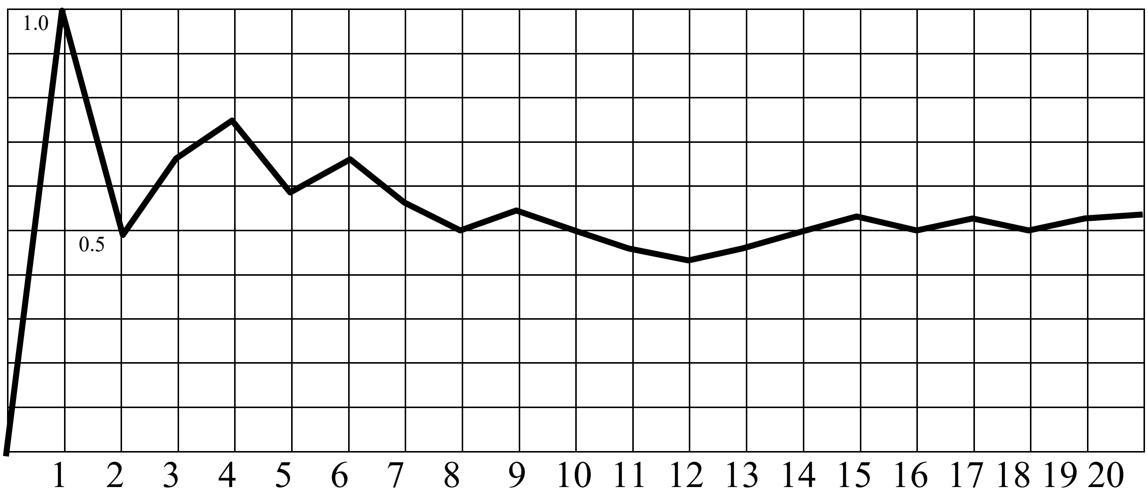


Рис. 1. Зависимость частоты $h_N(\Gamma)$ от числа испытаний n.

Итак, мы видим, что в последовательности экспериментов невозможно предсказать индивидуальные результаты исходов, так как эти отдельные результаты заранее предсказать наверняка нельзя. Однако как только мы перенесем свое внимание с индивидуальных экспериментов на последовательность экспериментов, то обнаруживается чрезвычайно важное явление: достаточно длинные последовательности обнаруживают поразительную устойчивость – при возрастающих значениях n принимать более или менее постоянное значение. Эту тенденцию будем называть устойчивостью частоты. В тех случаях, когда это утверждение не оправдывается, то довольно часто обнаруживается, что неизменность условий эксперимента так или иначе нарушена. Мы вправе **предположить**, что частота приближалась бы к определенному идеальному значению, если бы соответствующий ряд экспериментов можно было бы неограниченно продолжить в примерно одинаковых условиях.

Таким образом, событие будем называть ***случайным событием***, если его исход неоднозначно определяется условиями эксперимента и если оно обладает свойством устойчивости частот (т.е. как и биологов нас интересует поведение видов, а не отдельных индивидуумов, или как говорил товарищ Бывалов: у нас массовое производство и заниматься отдельной балалайкой мы просто не имеем возможности).

Задача – построить математическую теорию явлений, в которых обнаруживается статистическая устойчивость, а то идеальное число, к которому стремится частота будем называть вероятностью. Таким образом, с практической точки зрения всякий раз как только мы говорим, что вероятность события A равна p, то смысл этого заключается в следующем: практически несомненно, что в длинном ряду экспериментов частота примерно равна числу p. Это утверждение называют **частотной интерпретацией вероятности**. Поэтому предметом теории вероятностей являются случайные события (и их количественные характеристики – вероятности). (*Предмет* – все то, что может находиться в отношении или обладать каким-либо свойством – объект познания и его взаимоотношения с другими объектами).

Таким образом, вероятность для нас будет абстрактным двойником частоты, хотя в обыденном смысле вероятность – это и степень правдоподобия, и степень подтверждения, и степень возможности. Но мы построим математическую теорию на основе некоторых аксиом (как в геометрии).

Прежде всего возникает вопрос: существует ли необходимость в использовании вероятностных идей и что ее обуславливает? Не является ли эта необходимость временной, связанной с определенным уровнем развития науки?

Вероятностные представления довольно успешно применялись еще в 18 веке такими выдающимися учеными как Лаплас, Лагранж, Лежандр, Гаусс для оценки ошибок измерений, в результате чего уже в то время были заложены основы теории ошибок. Настоящая теория использования вероятностных идей в конкретных науках началась с 19 века. Первый урожай применения этого нового метода познания был получен в области изучения социальных явлений. Именно здесь было обращено внимание на то, что статистические закономерности, которым следуют социальные явления, получают свое объяснение на основе вероятностных представлений. Более того, этот новый способ анализа сложных социальных явлений в значительной мере способствовал обнаружению новых закономерностей в этой области. Конечно, такого рода регулярности, как устойчивый процент новорожденных одного пола, или доля писем, отправленных без адреса, могли быть открыты как чисто эмпирические правильности без привлечения понятия вероятности. Однако понимание таких важных обстоятельств, что эти закономерности могут проявляться лишь в совокупностях, что они не в равной степени обязаны результирующим эффектом всем элементам совокупности, не могло быть в полной мере достигнуто и обосновано помимо вероятностных представлений.

В 19 веке, по-видимому, была уже подготовлена почва для широкого проникновения вероятностно-статистических представлений в самые различные отрасли науки. Конечно, в каждой науке это происходило по-своему, и процесс этот был прежде всего обусловлен логикой развития каждой научной области. Внутренние проблемы ряда выросших к этому времени конкретных наук, а также потребности все более и более энергично развивавшегося производства ставят ученых перед необходимостью тщательного изучения массовых случайных явлений.

Последние десятилетия характеризуются резким повышением тех разделов математики и ее приложений, которые анализируют явления, носящие «случайный» характер. Эта тенденция в значительной степени объясняется и усиливается развитием компьютерной техники (теперь мы можем обрабатывать совокупности, которые раньше не смогли бы этого сделать да в некоторых случаях этого нельзя сделать в принципе, например, теория броуновского движения), а также тем, что большинство возникших в последние десятилетия новых математических дисциплин, примыкающих к направлению мысли, которое ныне обозначается собирательным термином «кибернетика», оказалось тесно связанным с теорией вероятностей, тем самым теория вероятностей стала чуть ли не самой первой по прикладному значению из всех математических дисциплин. При этом возникновение новых, в большинстве своем «порожденных» теорией вероятностей наук, скажем «теория игр», «теория информации», «страховая математика» или «стохастическая финансовая математика», «теория запасов», «теория надежности», «теория массового обслуживания» привело к положению, при котором теорию вероятностей также приходится рассматривать как объединение большого числа разнородных и достаточно глубоко развитых математических дисциплин. Если же прибавить ко всему вышесказанному бесспорное методологическое значение теории вероятностей, важность понимания связи между «случайным» и «неизбежным», между «динамическими» и «статистическими» закономерностями, то станет ясным, что в наше время основы теории вероятностей должны входить в научный багаж каждого образованного человека.

2. Остановим свое внимание на понятии случайного явления (часто понятие случайности применяют для характеристики не одного какого-либо явления, а выражения отношения данного явления к одному или нескольким явлениям). Не следует думать однако, что случайными мы называем явления, когда мы не можем учесть все факторы, порождающие разброс какой-то величины. Незнание не тождественно понятию случайного («люди измыслили идол случая, чтобы пользоваться им как предлогом, покрывающим их собственную нерассудительность» – Демокрит). Диалектический подход не связан с таким односторонним рассмотрением явления, носящего случайный характер.

При анализе случайных явлений приходится рассматривать статистические и динамические закономерности.

В природе и обществе многие процессы носят статистический характер, поскольку налицо большая совокупность однородных объектов, которые взаимодействуют между собой. Если сравнивать между собой поведение не отдельного индивидуума, не одного изделия и т.д., а поведение их совокупностей, обнаруживаются необходимые и общие черты, которые имеют место во всех совокупностях (ансамблях, коллективах и т.д.) данного рода. Необходимое и общее в движении статистических совокупностей данного типа (и на различных стадиях развития каждой из них) называют статистическими закономерностями.

Само собой разумеется, характер статистических законов зависит от специфики процесса, т.е. от природы предметов, составляющих статистическую совокупность, и их взаимодействий между собой. Закономерности, характеризующие движение отдельных частиц, принято называть динамическими. Итак, динамические закономерности управляют единичным явлением, статистические действительны для целого ансамбля явлений.

Закономерности, которые приходится рассматривать при анализе случайных явлений, носят именно статистический характер, так как связаны с массовым производством обычно как некоторая господствующая тенденция, которая в конкретных условиях осложняется действием многих случайных факторов. Обнаружить статистические закономерности нелегко, для этого требуется проанализировать множество факторов и установить статистическую устойчивость. Здесь большую помощь оказывают количественные методы анализа, которая разрабатывает специальная математическая дисциплина – математическая статистика, ориентированная на получение выводов по результатам эксперимента, которая в свою очередь развивается на базе теории вероятностей.

Следует всегда помнить, что статистический анализ касается лишь внешней, количественной стороны явлений, не вскрывая их сущности, качественной стороны. Поэтому статистика сама по себе без глубокого анализа качественных сторон явления может привести к неверным выводам. Должно быть очевидным, что результаты только количественного анализа никогда не могут явиться полным основанием для принятия того или иного решения. Для того, чтобы мы могли использовать обнаруженные закономерности как наукой, у нас должна быть повторяемость и воспроизводимость. Но даже в тех случаях, когда в процессе принятия решений количественный анализ играет основную роль, система, ориентированная на применение методов теории вероятностей, никогда не сможет выдать информацию в объеме, достаточном для выбора способа действий, независимо от того, насколько детализирована и усовершенствована модель системы. Такого рода системы могут функционировать лишь при условии, если наряду с количественным анализом они содержат элементы качественного анализа. И наконец, необходимо заметить, что сам процесс построения систем предполагает ориентацию не только на логические операции с числовыми данными, но и на обычный здравый смысл. В то же время статистический анализ может дать направление анализа реального явления, который позволит построить модель этого явления и объяснить факты, связанные с ним.

3. Предположим, что рассматривается некоторый опыт или явление, в котором в зависимости от случая происходит или не происходит интересующее наблюдателя событие A. Предположим, что условия опыта могут быть воспроизведены многократно, так что в принципе осуществима целая серия одинаковых и независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых в зависимости от случая происходит или не происходит событие A. Обозначим через N число всех опытов в этой серии испытаний и пусть $m = m(A) -$ число тех испытаний, в которых произошло событие A. Отношение $h_N(A) = \dfrac{m}{N}$ называется частотой события A в N испытаниях. Если событие A обладает свойством статистической устойчивости, то при достаточно больших N частоты $\dfrac{m}{N}$ в различных сериях испытаний оказываются приблизительно одинаковыми.

Число, около которого колеблется частота события A, будем интерпретировать как вероятность события A и обозначать $\mathbf{P}(A)$ – это называется *частотной интерпретацией вероятности*.

Интересующее нас событие A в каждом отдельном испытании может произойти, а может не произойти. В таком случае исход эксперимента не однозначно определяется его условиями, и событие A можно было бы назвать случайным. Однако при таком определении можно говорить лишь о наличии «неопределенности». Если эта неопределенность обладает свойством статистической устойчивости, то можно сказать, что имеется «случайность», т.е. случайное событие (со случайным событием мы можем связать вероятность, в то время как для неопределенного события этого сделать нельзя) или случайный эксперимент. По этой причине в экспериментальных исследованиях нужно следить за статистической устойчивостью.

В общем случае испытанием называется осуществление комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз. Явления, происходящие при реализации этого комплекса, т.е. в результате испытания, называются событиями.

Прежде всего, оговоримся, что будут изучаться только такие случайные события, которые в бесконечно длинной серии испытаний могут наступить сколько угодно раз, т.е. обладают свойством повторяемости. Их называют массовыми случайными событиями. Массовые явления есть результат большого, иногда необозримо большого числа испытаний. Именно с такими событиями и приходится иметь дело на практике. Например, появление брака в массовом производстве. Всюду в дальнейшем говоря о событии мы будем подразумевать массовое случайное событие.

В общем случае в результате испытания в зависимости от меняющихся случайных обстоятельств может произойти то или иное событие из множества событий, возможных при данном испытании. Такое множество называется полем событий, в котором рассматриваются случайные события.

Исходным моментом теории является предположение, что можно определить множество Ω и класс $\mathscr{A}$ подмножеств Ω таким образом, что всякое событие A, о вероятности которого имеет смысл говорить в пределах изучаемой задачи, можно интерпретировать как некоторое подмножество множества Ω, входящее в $\mathscr{A}$. Для того, чтобы получать содержательные результаты класс $\mathscr{A}$ должен быть достаточно богатым.

Мы будем рассматривать достоверное событие Ω (в теории вероятностей, по-видимому, следуя от Колмогорова А.Н. одной и той же буквой Ω обозначают и исходное множество и достоверное событие – дело в том, что если $A, B, \ldots$ – это подмножества, то такое двойное обозначение уместно, а если мы называем их событиями, а событие – это явление, то не совсем понятно такое переобозначение), если оно с необходимостью должно произойти (при каждой реализации комплекса условий K) и невозможное событие $\varnothing$, если оно заведомо не может произойти (ни при одной реализации комплекса K). Достоверное и невозможное событие определяются только по отношению к заданному комплексу условий K.

Мы будем говорить, что событие A влечет за собой событие B, или из A следует B (обозначение $A \subset B$), если при наступлении A неизбежно наступает B. Если $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$, то события A и B называются эквивалентными (обозначение $A = B$).

Рассмотрим n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Событие B, состоящее в том, что наступает хотя бы одно из них, называется объединением этих событий $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. В тех случаях, когда события несовместны (см. определение ниже) B называют суммой событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Событие B, состоящее в одновременном наступлении событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется их пересечением (или произведением), обозначение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ или $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$. Ясно, что аналогично можно определить счетное объединение событий $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ и счетное произведение событий $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$.

Два события A и B называются несовместными, если их совместное появление в одном испытании невозможно, $A \cdot B = \varnothing$. Если события A и B несовместны, то наступление события A влечет не наступление события B, и наоборот. Следовательно, $A \cdot B = \varnothing$ означает то же самое, что $A \subset \overline{B}$ и $B \subset \overline{A}$.

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если $A \cup \overline{A} = \Omega$ и $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

Событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, называют разностью событий A и B, и обозначают так: $A - B$. Например, событие $A - AB$ означает, что произошло событие A, но не произошли одновременно оба события, поэтому $A - AB = A \cdot \overline{B} = A - B$.

События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют полную группу событий, если хотя бы одно из них непременно должно произойти (при каждом осуществлении комплекса условий), т.е. если

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega.$$

Особенно существенное значение имеют полные группы попарно несовместных событий, т.е. случай, когда в предыдущем случае $B_i \cdot B_j = \varnothing, i \neq j$.

Введем теперь понятие ***элементарного исхода***. Практические соображения требуют введения некоторых событий (элементарных исходов) e_i, которые образуют полную группу *попарно несовместных* событий, так, что любое событие A можно представить в следующем виде:

$$A = e_{i_1} \bigcup e_{i_2} \bigcup ... \bigcup e_{i_k} \bigcup ...$$

(рассматривается конечное или счетное множество элементарных исходов). Элементарный исход интерпретируется как результат случайного эксперимента, поскольку практические соображения требуют, чтобы событие определялось как более общее понятие, чем элементарный исход (например, как множество элементарных исходов). При бросании монеты не обязательно выпадает герб или решка – монета может укатиться прочь или стать на ребро. Тем не менее, если в комплекс условий мы включим, чтобы не было таких случаев, то условимся рассматривать герб или решку как единственно возможные исходы бросания монеты. Другим примером является подбрасывание игрального кубика, где элементарными исходами можно определить так: $e_1 = \{1\}$ − выпадение единички, $e_2 = \{2\}$ − выпадение двойки и т.д., наконец, $e_6 = \{6\}$ − выпадение шестерки. Таким образом, различают составные (или разложимые) события и элементарные (или неразложимые) события. Иногда неразложимые события называют еще атомами. Элементарные (неразложимые) события, предстающие как мыслимые исходы опыта или наблюдения, определяют идеализированный опыт. По определению, каждый неразложимый исход идеализированного опыта представляется одним и только одним элементарным событием (исходом). Пространство элементарных исходов служит моделью идеализированного опыта в том смысле, что, по определению, любой мыслимый исход опыта описывался одним и только одним элементарным событием.

Определение 1. Класс случайных событий $\mathscr{A}$ будем называть ***алгеброй***, если:

1) $\Omega \in \mathscr{A}$; (достоверное событие находится в этом классе)
2) замкнут относительно дополнений, т.е. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$;
3) замкнут относительно конечных объединений, т.е. если $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathscr{A}$, то $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.

Можно показать, что для выполнения пункта 3) достаточно потребовать замкнутости этого класса относительно объединения двух множеств – замкнутости относительно попарного объединения.

Если 3) заменить на 3′) замкнутости относительно счетных объединений: т.е. если $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathscr{A}$, то потребуем, чтобы $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Определение 2. Класс случайных событий $\mathscr{A}$ будем называть $\sigma-$***алгеброй***, если:

1) $\Omega \in \mathscr{A}$;
2) замкнут относительно дополнений, т.е. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$;
3) замкнут относительно счетных объединений, т.е. если $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathscr{A}$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

Заметим, что если любое конечное объединение будет в этом классе, то из этого не будет следовать, что и счетное объединение будет в этом классе. Приведем **пример:**
пусть $\mathbf{Z} = \{...-1,0,1,2,...\}$ − множество целых чисел. Рассмотрим класс $\mathscr{A}$, класс подмножеств $\mathbf{Z} \supset A$, где A либо конечное множество, либо дополнение до конечного множества (т.е. это либо такие множества, например, $\{3,4,5\} \bigcup \{8,9\}$, либо $\{...,-4,-3\} \bigcup \{0,1\} \bigcup \{7,8,...\}$, которое является неограниченным вправо и влево; оно содержит и одноэлементные подмножества). Но $\mathscr{A}$, являясь алгеброй, не является $\sigma-$алгеброй, поскольку не содержит, например, множество $\{1,2,...\}$ (неограниченное в одну сторону). Если мы рассмотрим класс $\mathscr{B}$, содержащий класс $\mathscr{A}$ и множества вида $\{...,k-1,k\} \bigcup B$ или $C \bigcup \{m, m+1,...\}$, где B и C − конечные множества, то такой класс будет $\sigma-$алгеброй. Если алгебра конечна, то очевидно, она будет и $\sigma-$алгеброй.

Структура конечных алгебр событий.

Алгебру $\mathscr{A}$ будем называть *конечной*, если она содержит конечное число событий.

Определение 3. Событие $A \in \mathscr{A}$ будем называть *составным* (*разложимым*) событием, если существуют события $B \in \mathscr{A}$ и $C \in \mathscr{A}$ такие, что

$$A = B \bigcup C,\ B \neq A,\ C \neq A,\ B \neq \varnothing,\ C \neq \varnothing,\ B \cdot C = \varnothing .$$

В противном случае событие A называется *неразложимым*.

Неразложимые события будем называть *элементарными событиями* (или *элементарными исходами*).

Если $A -$ элементарное событие и $B \subset A$, то или $B = \varnothing$ или $B = A$. Таким образом, $A -$ элементарное событие, если и только если не существует $B \neq \varnothing$ и $B \neq A$, что $B \subset A$. Кроме того, дадим следующую характеризацию элементарного события: $A \neq \varnothing$ – элементарное , если для любого события B или $AB = \varnothing$, или $AB = A$.

Теорема 1. *В конечной алгебре (содержащей конечное число событий) любое событие* $(\neq \varnothing)$ *можно представить как объединение элементарных событий (причем единственным образом).*

Докажем сначала следующие леммы.

Лемма 1. *Произведение двух различных элементарных событий есть невозможное событие.*

Доказательство. Пусть A_1 и $A_2 -$ произвольные события. Тогда $A_1A_2 \subset A_1$. В частности, если A_1 – элементарное событие, то или $A_1A_2 = \varnothing$, или $A_1A_2 = A_1$. Аналогично, или $A_1A_2 = \varnothing$, или $A_1A_2 = A_2$. Поэтому $A_1 = A_2$, если $A_1A_2 \neq \varnothing$.

Лемма 2. *Если $B -$ событие из конечной алгебры, то существует элементарное событие A такое, что $A \subset B$.*

Доказательство. Так как $B -$ разложимое событие, то существует событие $A_1 \neq \varnothing$ такое, что $A_1 \subset B$ и $A_1 \neq B$. Если $A_1 -$ элементарное, то доказательство завершено. В противном случае существует событие $A_2 \subset A_1$. Так как алгебра конечна, то мы дойдем до последнего элементарного события A_n.

Доказательство теоремы 1. Пусть $B -$ разложимое событие. Тогда существует элементарное событие A_1, что $A_1 \subset B$, отсюда следует, что $B = A_1 \bigcup B_1$. Если $B_1 -$ элементарное событие, то теорема установлена. В противном случае $B_1 = A_2 \bigcup B_2$ и т.д. и за конечное число шагов мы исчерпаем все события, т.е.

$$B = A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcap A_m .$$

Докажем единственность представления. Пусть есть два различных представления

$$B = A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcap A_m = A_1' \bigcup A_2' \bigcup ... \bigcap A_p' \qquad (1)$$

такие, что $A_1 \neq A_j'$, $j = 1, 2, ..., p$. Тогда умножая обе части (1) на A_1, получим: $BA_1 = A_1 = \varnothing$, т.е. $A_1 = \varnothing$, что невозможно, т.е. A_1 совпадает с одним из A_j и т.д.

Теорема 2. *Число событий конечной алгебры $\mathscr{A}$ событий необходимо является степенью двух.*

Доказательство. Пусть $n -$ число элементов алгебры $\mathscr{A}$, а m обозначает число элементарных событий алгебры $\mathscr{A}$. Алгебра $\mathscr{A}$ необходимо содержит невозможное событие $\varnothing$ и достоверное событие Ω, т.е. $n \geq 2$. Вместе с элементарными событиями алгебра $\mathscr{A}$ содержит всевозможные их объединения. Рассмотрим произвольное событие A, содержащее r элементарных событий. Число таких событий равно C_m^r, а число всех возможных событий алгебры $\mathscr{A}$ равно $n = \sum_{r=0}^{m} C_m^r = 2^m$, ч.т.д.

Введение понятия элементарных событий позволяет установить изоморфизм между алгеброй событий и алгеброй множеств, считая что элементарные события являются элементами множества Ω.

4. В данном пункте речь пойдем о **математическом понятии вероятности** и **аксиоматике Колмогорова**. Для того чтобы получать содержательные результаты $\mathscr{A}$ – совокупность событий должна быть достаточно богатой и удовлетворять некоторым свойствам.

Пусть Ω – множество элементарных событий ω, $\mathscr{A}$ – множество подмножеств из Ω. Будем постулировать следующее:

0) $\mathscr{A}$ – алгебра множеств, т.е. а) $\Omega \in \mathscr{A}$; б) если $A \in \mathscr{A}$, то $\overline{A} \in \mathscr{A}$; в) если $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{A}$, то $A \bigcup B \in \mathscr{A}$.

Аксиомы Колмогорова (1) – (3)

1) Каждому множеству $A \in \mathscr{A}$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\mathbf{P}(A)$ (неотрицательность, т.е. $\mathbf{P}(A) \geq 0$).
2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. (нормированность)
3) Если $A, B \in \mathscr{A}$ и $A \cdot B = \varnothing$, то $\mathbf{P}(A \bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$. (аддитивность)

Так определенная функция $\mathbf{P}(A), A \in \mathscr{A},$ будем называть вероятностью по Колмогорову, или просто **вероятностью**. Это математическое определение вероятности.

Совокупность объектов $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, удовлетворяющую аксиомам 0) – 3), будем называть **вероятностным пространством.**

Система аксиом непротиворечива. Рассмотрим пример: Ω состоит из единственного элемента, $\mathscr{A} = \{\Omega, \varnothing\}$. При этом $\mathbf{P}(\Omega) = 1, \mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Система аксиом 1) – 3) не является полной – можно рассматривать различные вероятностные пространства и по разному определять вероятность лишь бы она удовлетворяла системе аксиом.

Отметим здесь, что конкретные числовые значения функции $\mathbf{P}$ нас также интересовать не будут – это лишь вопрос конкретной практической применимости той или иной модели.

Применение теории вероятностей к действительному миру происходит по следующей схеме.

1. Предполагают данным некоторый комплекс K условий, допускающий неограниченное число повторений.

2. Изучают определенный круг событий, которые могут наступать в результате осуществления условий K. В отдельных случаях эти события могут наступать или не наступать в разных комбинациях. В множество $\mathscr{A}$ включаются все возможные варианты появлений или не появлений рассматриваемых событий.

3. Если после реализации условий K осуществившийся на практике вариант окажется принадлежащим к определенному какими-либо условиями множеству $\mathscr{A}$, то говорят, что наступило событие A.

4. При известных условиях можно предположить, что некоторым событиям A, которые могут наступить или не наступить после осуществления условий K, поставлены в соответствие действительные числа $\mathbf{P}(A)$, обладающие следующими свойствами 1) – 3). Также:

а) Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий K будет повторен большое число N раз и если при этом $m -$ число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m / N будет мало отличаться от вероятности $\mathbf{P}(A)$.

Б) Если $\mathbf{P}(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий K событие A не произойдет.

Эмпирическая дедукция аксиом. Обычно можно предполагать, что система $\mathscr{A}$

$A, B,$

Ω. Далее ясно, что частота удовлетворяет неравенству $0 \le \frac{m}{N} \le 1$, так что вторая часть аксиомы 2 является вполне естественной. Для достоверного события Ω всегда $m = N$, благодаря чему естественно положить $\mathbf{P}(A) = 1$ (аксиома 3). Если, наконец, A и B несовместны между собой, то $m = m_1 + m_2$, где m, m_1, m_2 обозначают соответственно число опытов, в которых происходят события $A \bigcup B, A, B$. Отсюда следует, что $\frac{m}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N}$. Следовательно, наделим этим же свойством и вероятность, т.е.

$$\mathbf{P}(A \bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \quad \text{(аксиома 3).}$$

Теперь на основании аксиом мы можем получать определенные математические факты. Мы также докажем, так называемый, закон больших чисел, в котором математически докажем устойчивость частот.

Свойства вероятности.

1. Вероятность противоположного события $\overline{A}$ определяется через вероятность события A по следующей формуле:

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Доказательство. Из определения противоположного события имеем: $A \bigcup \overline{A} = \Omega$ и $A \cdot \overline{A} = \varnothing$. Поэтому $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \bigcup \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A})$, откуда $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

Следствие. Имеем: $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, так как $\varnothing = \overline{\Omega}$.

Замечание. Невозможному событию $\varnothing$ соответствует вероятность $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, в то время как из $\mathbf{P}(A) = 0$ не следует невозможность события A. Согласно принципу б) из обращения вероятности в нуль следует только , что при однократной реализации условий K событие A практически невозможно. Это, однако, не означает, что при достаточно длинном эксперименте событие A также не наступит. Согласно принципу а) можно лишь утверждать, что при $\mathbf{P}(A) = 0$ и при большом N отношение $\frac{m}{N}$ мало. Тем более нельзя сделать вывод о достоверности события A, если его частота $h_N(A) = 1$, и о невозможности, если $h_N(A) = 0$. Мы будем называть такие события практически невозможными.

Пусть теперь $\mathbf{P}(A) = 0.0001$. Следует ли отсюда практическая невозможность события A? Ясно, что во многих случаях и здесь можно считать такое событие практически невозможным, но нужно оговориться, что все зависит от последствий принимаемых решений, если мы встанем на такую точку зрения. Подробнее на этом вопросе мы остановимся, когда будем рассматривать задачи проверки статистических гипотез.

2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – несовместны, то

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i). \qquad \text{(конечная аддитивность)}$$

Доказательство по индукции – доказать самим.

3. Если $A \subset B$, то $\mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, отсюда, $\mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(B)$.

Доказательство. Имеем: $B = A \bigcup (B - A) = A \bigcup (B\overline{A})$ и $A \cdot (B\overline{A}) = \varnothing$, поэтому $\mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(A \bigcup B\overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B - A)$, откуда

$$\mathbf{P}(B-A)=\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A).$$

Следствие. Имеем: $\mathbf{P}(A)\le 1$, что получается, если взять $B=\Omega$.

Таким образом, $0\le \mathbf{P}(A)\le 1$.

4. Если $A, B -$ произвольные события, то

$\boxed{\mathbf{P}(A\bigcup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\bigcap B).}$ (формула включения-исключения)

Отсюда следует, что $\mathbf{P}(A\bigcup B)\le \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$ (полуаддитивность).

Доказательство. Имеем: $A\bigcup B=A\bigcup(B-AB)=A\bigcup(B\overline{A})$, причем $A\cdot(B-AB)=\varnothing$. Значит, $\mathbf{P}(A\bigcup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B-AB)$. Так как $AB\subset B$, то $\mathbf{P}(B-AB)=\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB)$. Отсюда имеем результат утверждения.

Общая формула – формула включения-исключения (вероятность осуществления хотя бы одного события) доказывается по индукции:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1`}^{n}A_i\right)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}S_j,$$

где $S_j=\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_j\le n}\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_j})$.

Пример 1. Из ящика, содержащего n билетов с номерами 1, 2, … , n вынимают по одному все билеты. Предполагается, что все последовательности номеров билетов имеют одинаковые вероятности. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным.

Решение. Пусть $A_i -$ событие: совпадение i-го номера. Тогда

$$\mathbf{P}(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},\quad \mathbf{P}(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)},\ \ldots,$$

Тогда

$$S_1=C_n^1\cdot\frac{1}{n}=1,\ S_2=C_n^2\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2!},\ S_3=C_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3!},\ \ ,\ S_j=\frac{1}{j!}.$$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1`}^{n}A_i\right)=1-\frac{1}{n(n-1)}C_n^2+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}C_n^3-\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\approx\frac{1}{e}\approx 0.37.$$

Более общим образом, если через $p_{[m]}$ обозначить вероятность того, что произошло ровно m событий A_i из n, а через $p_m -$ хотя бы m событий из n, то

$$p_{[m]}=\sum_{j=m}^{n}(-1)^{j-m}C_j^mS_j,$$

$$p_m=\sum_{j=m}^{n}(-1)^{j-m}C_{j-1}^{m-1}S_j,\quad p_m=p_{[m]}+p_{[m+1]}+\ldots+p_{[n]}.$$

Рассмотрим предыдущий пример. Там

$$S_j\cdot C_j^m=\frac{1}{j!}\cdot\frac{j!}{m!(j-m)!}=\frac{1}{m!(j-m)!}.$$

Тогда (при $n\to\infty$)

$$p_{[m]}=\frac{1}{m!}-\frac{1}{m!}+\frac{1}{m!\cdot 2!}-\frac{1}{m!\cdot 3!}+\ldots=\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots\right)=\frac{(1-e^{-1})}{m!}=\frac{e^{-1}(e-1)}{m!}=\frac{p_{[1]}}{m!},$$

$$p_{[1]}=1-e^{-1}\approx 0.63212.$$

Пример 2. r различимых шаров раскладываются случайным образом по n различимым ящикам. Найти вероятность того, что ровно k ячеек окажутся пустыми.

Решение. Число способов, какими можно разложить шары равно n^r. Пусть A_j – событие: ящик с номером j пуст. Тогда

$$\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_j})=\frac{(n-j)^r}{n^r} \quad \text{и} \quad S_j=C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^r.$$

Поэтому искомая вероятность равна

$$p_{[k]}=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}C_j^kC_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^r.$$

Пример 3. r неразличимых шаров раскладываются случайным образом по n различимым ящикам. Найти вероятность того, что ровно k ячеек окажутся пустыми.

Решение. Число способов, какими можно разложить шары равно C_{n+r-1}^r, так как если разложить шары по ящикам и использовать перегородки, то получим, например,

000|0||0…0|0 (r шаров 0 и $(n-1)$ перегородок |).

Пусть A_j – событие: ящик с номером j пуст. Тогда

$$\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_j})=\frac{C_{n+r-j-1}^r}{C_{n+r-1}^r},$$

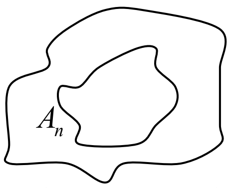
так как событие $A_{i_1}A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_j}$ означает, что j ящиков пусты и две перегородки можно заменить на одну.

Поэтому искомая вероятность равна

$$p_{[k]}=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}C_j^kC_n^j\frac{C_{n+r-j-1}^r}{C_{n+r-1}^r}.$$

5. Если $A_n\subset A_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ – непрерывность снизу.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим $C_1=A_1$, $C_2=A_2-A_1,\ldots,$ $C_n=A_n-A_{n-1},\ldots$.



Отсюда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, причем $C_i\cdot C_j=\varnothing$, для $i\neq j$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(C_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(C_k)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{P}(C_1)+\mathbf{P}(C_2)+\ldots+\mathbf{P}(C_n)\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{P}(A_1)+(\mathbf{P}(A_2)-\mathbf{P}(A_1))+\ldots+(\mathbf{P}(A_n)-\mathbf{P}(A_{n-1}))\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(A_n).$$

6. Если $A_n\supset A_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ – непрерывность сверху.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим , $n=1,2,\ldots$. Тогда $B_n\subset B_{n+1}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\overline{A}_n)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\right)=\mathbf{P}\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}\right),\text{ откуда }\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

7. Из аксиомы аддитивности и аксиомы непрерывности в нуле следует аксиома счетной аддитивности.

Доказательство. Положим $\bigcup_{n=1`}^{\infty}A_n = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\cup B_n$, где , $i\neq j$,

$B_n=\bigcup_{k=n+1}^{\infty}A_k$. Покажем, что $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\varnothing$. Пусть это соотношение не выполнено, т.е. существует такое ω, что $\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$. Отсюда следует, что это ω принадлежит каждому B_n. Следовательно, существует такой номер n_o, что $\omega\in A_{n_o}$. Рассмотрим $\bigcap_{k=n_o+1}^{\infty}B_k$. Это событие содержит ω. Отсюда следует, что существует $n_1>n_o$ такое, что $\omega\in A_{n_1}$. Это значит, что $A_{n_o}\cdot A_{n_1}\neq\varnothing$, т.е. эти события совместны (им принадлежит исход ω), что противоречит предположению. Значит, $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\varnothing$. В таком случае

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1`}^{\infty}A_n\right)=\mathbf{P}\big(A_1\big)+\mathbf{P}\big(A_2\big)+\ldots+\mathbf{P}\big(A_n\big)+\mathbf{P}\big(B_n\big)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\big(A_k\big),$$

так как $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big(B_n\big)=0$.

8. Из аксиомы счетной аддитивности следует аксиома непрерывности в нуле.

Доказательство. Пусть $B_1\supset B_2\supset\ldots\supset B_n\supset\ldots$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k=\varnothing$. Тогда $B_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\overline{B}_{k+1}$, события ,

$k=1,2,\ldots k=1,2,\ldots$ несовместны, и

$$\mathbf{P}(B_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(B_k\overline{B}_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(B_k\overline{B}_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\big((\mathbf{P}(B_1)-\mathbf{P}(B_2))+\ldots+(\mathbf{P}(B_n)-\mathbf{P}(B_{n+1}))\big)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\big(\mathbf{P}(B_1)-\mathbf{P}(B_{n+1})\big)=\mathbf{P}(B_1)-\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(B_n).$$

Отсюда $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(B_n)=0$.

9. Имеет место полуаддитивность вероятности:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1`}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\big(A_n\big).$$

Доказательство. По индукции (самим)

5. Мы рассмотрим три способа определения вероятности: статистический, классический и геометрический. (Покажите сами, что классический и геометрический способы удовлетворяют системе аксиом).

Статистический способ. При статистическом способе за вероятность события A при большом числе испытаний принимается его частота $h_N(A)=\dfrac{m}{N}$.

Это не является определением вероятности в строгом смысле слова, так система аксиом для него не будет иметь места, поскольку частота будет принимать различные значения при переходе

N достаточно велико, то эти различия столько незначительны, что в практическом применении ими можно пренебречь.

Классический способ. Пусть пространство Ω содержит n элементарных исходов $e_1, e_2, \ldots, e_N$, эти исходы равновозможны, причем событию A благоприятствуют k из них, т.е. $A = e_{i_1} \cup e_{i} \cup \ldots \cup e_{i_k}$. Тогда вероятность события A определим следующим образом:

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n}.}$$

Следует отметить умозрительный характер классического способа, так как в действительности никаких экспериментов здесь не проводится. Однако если равновозможность имеет место, то, как показала практика, вероятность угадывается правильно.

Недостатки:

1) требование равновозможности, которое трудно, а иногда и невозможно точно установить;
2) конечность числа элементарных исходов.

Второй недостаток исправляет в определенной степени геометрический способ определения вероятности.

Пример 1. Рассмотрим игральный кубик, симметричный, сделанный из однородного материала. В таком случае можно считать, что равновозможность имеем место. Число всех исходов равно 6 ($N = 6$). Событие $A -$ выпадение грани, кратной 3. Тогда число благоприятствующих исходов равно $k = 2$. По классическому определению вероятность равна $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Если же мы рассмотрим спичечный коробок и захотим найти вероятность того, что при подбрасывании он упадет картинкой вверх, то здесь вероятность этого события нельзя найти по классическому способу, так как нет равновозможности (грани разные).

Приведем еще один пример, который нам понадобится в дальнейшем.

1. $abc\,\vert -\vert -$	10. $a\,\vert bc\vert -$	19. $-\vert a\vert bc$
2. $-\vert abc\vert -$	11. $b\,\vert ac\vert -$	20. $-\vert b\vert ac$
3. $-\vert -\vert abc$	12. $c\,\vert ab\vert -$	21. $-\vert c\vert ab$
4. $ab\,\vert c\vert -$	13. $a\,\vert -\vert bc$	22. $a\vert b\vert c$
5. $ac\,\vert b\vert -$	14. $b\,\vert -\vert ac$	23. $a\vert c\vert b$
6. $bc\,\vert a\vert -$	15. $c\,\vert -\vert ab$	24. $b\vert a\vert c$
7. $ab\,\vert -\vert c$	16. $-\vert ab\vert c$	25. $b\vert c\vert a$
8. $ac\,\vert -\vert b$	17. $-\vert ac\vert b$	26. $c\vert a\vert b$
9. $bc\,\vert -\vert a$	18. $-\vert bc\vert a$	27. $c\vert b\vert a$

Пример 2. Имеется три ящика и три шара. Каждый шар (будем обозначать их буквами a, b, c) имеет одинаковую вероятность попасть в каждый из трех ящиков (см. таблицу выше). Пусть событие $A -$число шаров в первом ящике равно 1, а $B -$ число занятых ящиков равно 2. Требуется определить вероятность события $A \cdot B$. Для нахождения этой вероятности рассмотрим все возможные исходы и подсчитаем число благоприятствующих исходов (в силу условий задачи все исходы будут равновозможны).

Благоприятствующими событию $A \cdot B$ исходами являются 10, 11, 12, 13, 14, 15. Таким образом,

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

Пример 3. m неразличимых шаров раскладываются по n различимым ящикам (это могут быть пирожные на тарелочках). Считая, что каждый шар попадает в каждый из ящиков с одинаковой вероятностью, найти вероятность того, что не найдется ни одного пустого ящика.

Решение. Пусть 0 обозначает шар, $|-$ стенку между ящиками. Поскольку крайние стенки и дно нам не важны, то уберем их и оставим существенные стенки. Рассмотрим какое либо распределение шаров по ящикам:

$$\underbrace{00...0}_{m_1}|\underbrace{0...0}_{m_2}|\ \ldots|\underbrace{00...0}_{m_n}, \text{ причем } m_1+m_2+...+m_n=m.$$

Так как стенок $(n-1)$, а шаров m, то надо найти число комбинаций $(n-1)$ «единиц» среди m «нулей», которое равно числу сочетаний $C_{n+m-1}^{n-1}=C_{n+m-1}^{m}$. Таким образом, число всех различных распределений n шаров по n ящикам равно C_{n+m-1}^{n-1}. Если ящик не пуст, то $m_i\geq 1$. Тогда выбирая по одному шару из каждого ящика, получим $m-n$ шаров. Число комбинаций из $m-1$ нулей и единиц, в которых $n-1$ единиц, равно C_{m-1}^{n-1}. Следовательно, вероятность искомого события (в предположении равновозможности) равна $p=\dfrac{C_{m-1}^{n-1}}{C_{n+m-1}^{n-1}}$.

<u>Пример 3а.</u> Пусть имеется три кубика грани которых обозначены не числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, а другими. Именно,

$A=(1,8,11,12,13,14),\quad B=(5,6,7,9,10,18),\quad C=(2,3,4,15,16,17)$.

Если вероятность того, что при одновременном подбрасывании кубиков вероятность того, что число очков на кубике A больше числа очков на кубике B, больше 0.5, то мы будем писать $A\succ B$ и говорить, что кубик A лучше, чем кубик B. Сравним кубики A и B, отметив клетку знаком +, если число очков на кубике A больше, чем на кубике B Имеем:

A\B	**5**	**6**	**7**	**9**	**10**	**18**
1						
8	+	+	+			
11	+	+	+	+	+	
12	+	+	+	+	+	
13	+	+	+	+	+	
14	+	+	+	+	+	

Таким образом, $\mathbf{P}(A\succ B)=\dfrac{23}{36}>\dfrac{1}{2}$. Аналогично, $\mathbf{P}(B\succ C)=\dfrac{21}{36}>\dfrac{1}{2}$, так как

B\C	**2**	**3**	**4**	**15**	**16**	**17**
5	+	+	+			
6	+	+	+			
7	+	+	+			
9	+	+	+			
10	+	+	+			
18	+	+	+	+	+	+

Отсюда, в силу транзитивности, казалось должно следовать, что $A\succ C$. Найдем вероятность этого события. Имеем $\mathbf{P}(C\succ A)=\dfrac{21}{36}>\dfrac{1}{2}$, так как

A\C	**2**	**3**	**4**	**15**	**16**	**17**
1	+	+	+	+	+	+
8				+	+	+
11				+	+	+
12				+	+	+
13				+	+	+
14				+	+	+

что противоречит, казалось бы здравому смыслу.

<u>Пример 4.</u> Найти вероятность того, что в номере случайно выбранного в большом городе автомобиля (номера четырехзначные – такие номера автомобилей были до определенного периода) сумма первых двух цифр равна сумме двух последних.

Решение. Пусть m_k – число вариантов, когда $x+y=k$ ($10x+y-$ двузначное число). Тогда $0 \le y = k-x \le 9$ и $\max(0, k-9) \le x \le k$. Легко подсчитать , что $m_k = k+1$. Теперь, если выбрали первые две цифры, например, 02, то вторые две цифры можно выбрать так: 02, 11, 20, и сумма $S = \sum_{k=0}^{18} m_k^2$, поскольку наибольшая сумма равна 18 и мы выбираем пары. Если дополнить каждую цифру до 9, например, 98 поставить в соответствие 01, то получим $m_k = m_{18-k}$, поэтому $S = 2\sum_{k=0}^{8} m_k^2 + m_9^2$. Составим таблицу значений:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Значит, $S = 670$, поэтому вероятность равна $p = \dfrac{670}{1000} = 0.067$.

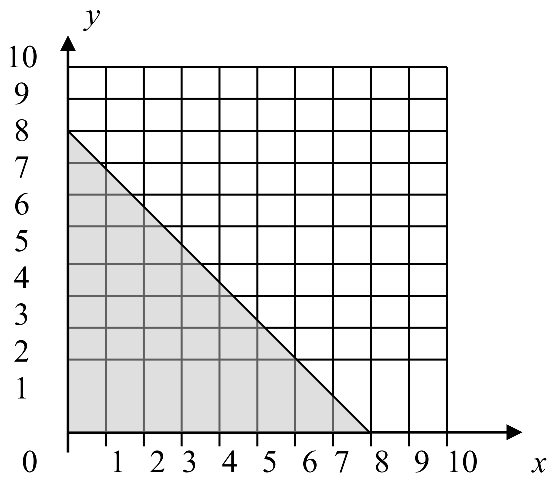
Задача 5. Найти вероятность того в шестизначном трамвайном билете (были и такие билеты) сумма первых 3-х цифр будет равна сумме 3-х последних. Такие билеты считались *счастливыми*.

Решение. Для трех слагаемых $S = 2\sum_{k=0}^{13} m_k^2$, где m_k – число вариантов, когда в трехзначном числе $\overline{xyz}$ будет $x+y+z=k$, причем $\max(0, k-9) \le x+y \le k$, $0 \le x, y \le 9$. Изобразим этот случай в системе координат $x0y$. Для каждого k число m_k равно числу точек в закрашенной области, т.е. для $k \le 9$ это число равно $m_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} = C_{k+2}^2$, поскольку при переходе от k к $k+1$ добавляется $k+2$ точки. Для $k \ge 10$ число точек увеличивается на $k+2$ и уменьшается на $C_3^1 \cdot C_{k-8}^2$. Именно, , $m_{11} = 63+8-2 = 69$, $m_{12} = 69+7-3 = 73$, $m_{13} = 73+6-4 = 75$.

Таким образом, получаем следующую таблицу

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m_k	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75

Тогда $S = 55252$ и $p = 0.055252$.



Аналогично может быть подсчитано число благоприятствующих исходов (и соответственно вероятность) для случая четырех, пяти и т.д. цифр.

Например, , $S_5 = 432457640$. Соответственно, , $p_5 = 0.043 p_5 = 0.043$.

В общем случае ν цифр можно подсчитать по следующей формуле:

$$m_k = C_{k+\nu-1}^{\nu-1} - C_\nu^1 \cdot C_{k+\nu-11}^{\nu-1} + C_\nu^2 \cdot C_{k+\nu-21}^{\nu-1} - C_\nu^3 \cdot C_{k+\nu-31}^{\nu-1} + \dots \quad .$$

Можно показать, что

$$S_\nu = C_{11\nu-1}^{2\nu-1} - C_{2\nu}^{1} \cdot C_{11\nu-11}^{2\nu-1} + C_{2\nu}^{2} \cdot C_{11\nu-21}^{2\nu-1} - \ldots \quad .$$

Для $\nu = 3$ предыдущая формула примет вид

$$S_3 = C_{32}^{5} - 6 \cdot C_{22}^{5} + 15 \cdot C_{12}^{5}. \qquad (*)$$

Выведем формулу (*) (необязательно). Для этого нам понадобится формула включения-исключения из формальной логики. Именно, пусть $B -$ конечное множество, элементы которого могут обладать некоторыми из свойств $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Обозначим через $N(c_i), 1 \le i \le m,$ число элементов множества B, обладающих свойством c_i, через $N(c_i, c_j), i \ne j, -$ число элементов, обладающих одновременно двумя свойствами c_i, c_j, и т.д. Пусть также $N(1) -$ общее число элементов в множестве B. Тогда число элементов в множестве B, не обладающих ни одним из свойств $c_1, c_2, \ldots, c_m$, равно

$$N(1) - \bigcup_{i=1}^{m} N(c_i) + \bigcup_{i \ne j} N(c_i, c_j) - \bigcup_{i \ne j \ne k} N(c_i, c_j, c_k) + \ldots \quad .$$

Чтобы лучше запомнить эту формулу, надо формально раскрыть произведение:

$$\prod_{i=1}^{m} (1 - c_i) = 1 - c_1 - \ldots - c_m + c_1 c_2 + \ldots - c_1 c_2 c_3 + \ldots \quad .$$

Перейдем к решению нашей задачи. Заметим, что число счастливых билетов равно числу решений уравнения **(6)** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27,$ где $0 \le x_i \le 27, i = 1, 2, \ldots, 6,$ и если первые пять x_i определены, то последнее из x_i определяется однозначно. Теперь, число решений уравнения $x_1 + x_2 = 27,$ где $0 \le x_i \le 27, i = 1, 2,$ равно $28 = C_{28}^{1} = C_{27+1}^{1}.$ Число целочисленных решений уравнения **(3)** $x_1 + x_2 + x_3 = 27,$ где $0 \le x_i \le 27, i = 1, 2, 3,$ будет определяться так: если $x_1 = 0,$ то это число равно $C_{28}^{1},$ если $x_1 = 1,$ то это число равно C_{27}^{1}, и т.д. и если $x_1 = 27,$ то это число равно C_{1}^{1}. Таким образом, общее число решений уравнения (3) равно

$$C_{28}^{1} + C_{27}^{1} + \ldots + C_{1}^{1} = C_{29}^{2}.$$

Последнее соотношение следует либо как сумма арифметической прогрессии, либо из комбинаторного тождества $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n} = C_{n+m+1}^{n+1}$, можно вывести по индукции.

Продолжая и дальше, получим, что общее число решений уравнения (6) равно $C_{32}^{5} = C_{27+5}^{5}.$

Теперь нам надо установить соответствие между количеством счастливых билетов и общим количеством решений уравнения (6), у которого для $1 \le i \le 6, \ 0 \le x_i \le 9.$ Это следует из того, что если $0 \le x_i \le 9, i = 1, 2, \ldots, 6,$ и $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6,$ то мы сопоставим билету $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ билет $x_1 x_2 x_3 (27 - x_4)(27 - x_5)(27 - x_6),$ для которого сумма «цифр» будет равна 27.

Обозначим через c_i свойство «цифра» на i-м месте не меньше 10. Тогда, согласно формуле включения-исключения число случаев, не обладающих ни одним из свойств $c_1, c_2, \ldots, c_m,$ будет равно $C_{32}^{5} - 6 \cdot C_{22}^{5} + 15 \cdot C_{12}^{5}$, так как $C_6^1 = 6, C_6^2 = 15.$ Таким образом,

$$S_3 = 201376 - 6 \cdot 26334 + 15 \cdot 792 = 55252.$$

<u>Задача 6.</u> У театральной кассы стоят в очереди $2n$ человек. Среди них n человек имеют монеты только двухрублевого достоинства, а остальные – только монеты по 1 рублю. Билет стоит 1 рубль. Каждый покупатель приобретает по одному билету. Чему равна вероятность того, что ни один покупатель не будет ждать сдачу, если:

а) в начальный момент в кассе нет денег;

б) в начальный момент у кассира находится m монет рублевого достоинства?

Решение. Примем, что всевозможные расстановки покупателей равновозможны. Таким образом имеется C_{2n}^{n} всех возможных и равновозможных случаев. Для разыскания числа благоприятствующих случаев начнем со случая а) и прибегнем к следующему приему. Рассмотрим плоскость $x0y$ и допустим, что покупатели в порядке очередности располагаются в точках оси абсцисс с координатами 1, 2, … , $2n$. В начале координат расположена касса. Припишем каждому лицу, имеющему 2 руб., значение $+1$, а имеющему рубли -1. Будем теперь суммировать последовательно эти значения слева направо и в каждой целочисленной точке отмечать в виде ординаты полученную сумму. Припишем началу координат ординату, равную 0. Соединим концы ординат ломаной и назовем ее траекторией. Ясно, что она на концах отрезка $(0, 2n)$ имеет ординаты, равные 0. Каждой траектории поставлено в соответствие определенное расположение лиц с рублями и двухрублевыми монетами. Интересующему нас событию благоприятствуют те и только те траектории, которые не поднимаются над осью абсцисс. Вычислим теперь общее число траекторий, достигающих или пересекающих хотя бы раз прямую $y=1$. Эти и только эти траектории благоприятствуют противоположному событию, когда хотя бы одному лицу придется ожидать сдачу. Для этой цели построим новую, фиктивную траекторию. До первого достижения прямой $y=1$ она совпадает со старой, а от точки достижения этой прямой она является зеркальным отображением старой траектории относительно прямой $y=1$ (на рис. 2 – пунктирная ломаная). Каждая новая траектория начинается в точке (0,0) и заканчивается в точке $(2n, 2)$. Отсюда следует, что единичных подъемов она имеет больше, чем спусков (именно: $n+1$ подъемов и $n-1$ спусков). Отсюда следует, что всех новых траекторий будет C_{2n}^{n-1}. Значит, число событий, благоприятствующих событию нашей задачи, будет $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}$, и тем самым, искомая вероятность равна

$$p=1-\frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n}^{n}}=\frac{1}{n+1}.$$

Задача 7. Т е о р е м а о б а л л о т и р о в к е . Предположим, что на выборах кандидат A набрал m голосов, а кандидат B набрал n голосов, причем $m>n$. Покажите, что вероятность того, что при последовательном подсчете голосов кандидат A был все время впереди B, равна $\frac{m-n}{m+n}$.

Решение. Одно из решений этой задачи приведено в книге Пуанкаре “Теория Вероятностей».
Прежде всего, число всех возможных вариантов голосований за A и B равно

$$C_{m+n}^{m}=C_{n+m}^{n}=\frac{(n+m)!}{m!n!}.$$

Разобьем множество всех возможных исходов (будем предполагать их равновозможность) сначала на две части: 1) когда A все время впереди и 2) когда A не все время впереди.

В случае 1 первый поданный голос должен быть за A. В случае 2 первый голос может быть за B (случай 21), или первый голос за A (случай 22). Соответствующее число случаев обозначим через N_1 (первый голос за A и A все время впереди), N_{21} (первый голос за B, в этом случае A не все время впереди) и N_{22} (первый голос за A, но A не все время впереди). Тогда $N_1+N_{21}+N_{22}=C_{n+m}^{m}$. Подсчитаем N_{21}: если уберем первый голос за B, то всего будет C_{n+m-1}^{m} различных исходов, поэтому $N_{21}=C_{n+m-1}^{m}$. Тогда вероятность исходов типа 21 будет равна

$$\frac{N_{21}}{N_1+N_{21}+N_{22}}=\frac{C_{n+m-1}^{m}}{C_{n+m}^{m}}=\frac{(n+m-1)!n!m!}{m!(n-1)!(n+m)!}=\frac{n}{n+m}.$$

Далее, Пуанкаре показывает, что $N_{21}=N_{22}$

$AABAB|BABAA-$ после черты A

правую части: $BABAA|AABAB$ – через черту A в первый раз восстанавливает лидерство. Тогда устанавливается взаимно-однозначное соответствие между такими исходами, отсюда следует, что

$$\frac{N_1}{N_1+N_{21}+N_{22}}=1-2\frac{n}{n+m}=\frac{m-n}{m+n}.$$

Другое решение приведено в книге Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов, Мир, 1971 – 266 с.

Можно разобрать какой-нибудь простой частный случай и перечислить все возможные комбинации, а потом подсчитать число благоприятствующих исходов и найти вероятность как отношение.

Заметим, что если обозначить через $N(a,b)$ число благоприятствующих случаев, когда в итоговом протоколе за кандидата A было подано a голосов, а за кандидата $B-$ b голосов, то $p=\dfrac{N(a,b)}{C_{a+b}^{a}}$ и, кроме того, $N(a,b)$ удовлетворяет соотношению

$N(a,b)=N(a-1,b)+N(a,b-1)$, что отражает тот факт, что последним будет голос либо за кандидата A, либо за кандидата B. Заметим, что $N(m,m)=0$ (даже если последним будет подан голос за B, число голосов сравняется), поэтому $N(m+1,m)=N(m+1,m-1)$ и $N(m,1)=m-1$.

Теперь запишем равенства (аналогичные соотношения для нестрогих неравенств мы уже рассматривали и раньше):

$N(m,2)=N(m-1)+N(m,1)=N(m-1,2)+(m-1)$,

$N(m-1,2)=N(m-2,2)+(m-2)$,…….

$N(3,2)=N(3,1)=2$.

Складывая эти равенства, получаем $N(m,2)=\dfrac{(m+1)(m-2)}{2}$, поэтому учитывая, что

$C_{m+2}^{2}=\dfrac{(m+2)(m+1)}{2}$, получаем вероятность $p=\dfrac{m-2}{m+2}$. В нашей задаче $p=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

Покажем, что в общем случае $N(m,k)=\dfrac{m-k}{m+k}C_{m+k}^{k}$.

Действительно, $N(m-1,k)+N(m,k-1)=\dfrac{m-k-1}{m+k-1}\cdot C_{m+k-1}^{k}+\dfrac{m-k+1}{m+k-1}\cdot C_{m+k-1}^{k-1}=$

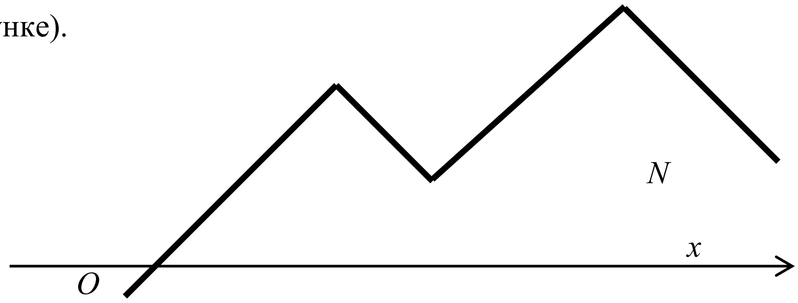
$$=\frac{m-k-1}{m+k-1}\cdot\frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}+\frac{m-k+1}{m+k-1}\cdot\frac{(m+k-1)!}{(k-1)!\,m!}=\frac{m-k}{m+k}\cdot C_{m+k}^{k}=N(m,k).$$

В таком случае вероятность равна $p=\dfrac{m-k}{m+k}$.Формулу $p=\dfrac{m-n}{m+n}$ можно доказать по индукции. Действительно, мы ее уже рассмотрели для случая $m=4,n=2$ и можно рассмотреть $m=4,n=3$. В этом случае $N(4,3)=N(3,3)+N(4,2)=N(4,2)=5$. Еще, $N(5,3)=N(4,3)+N(5,2)=5+9=14$, поэтому $p(5,3)=\dfrac{14}{C_8^3}=\dfrac{14}{56}=\dfrac{1}{4}$, $p(4,3)=\dfrac{5}{C_7^3}=\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$. Докажем, что $p(m,n)=\dfrac{m-n}{m+n}$ по индукции.

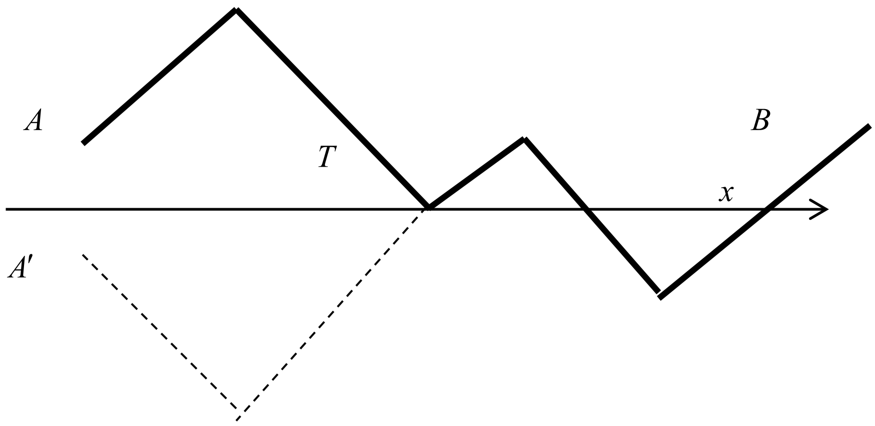
Первый голос за A выбирается с вероятностью $\dfrac{m}{m+n}$, а за B с вероятностью $\dfrac{n}{m+n}$. Тогда, используя индуктивное предположение, что для меньшего количества это будет верно, получаем:

$$p(m,n)=\frac{m}{m+n}p(m-1,n)+\frac{n}{m+n}p(m,n-1)=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1+n}{m-1+n}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m-(n-1)}{m+n-1}=\frac{m-n}{m+n}.$$

Решение 3. Будем представлять протокол голосования в виде пути длины $m+n$, в котором $s_k - s_{k-1} = \varepsilon_k = +1$, если k-й голос подан за P и $\varepsilon_k = -1$, если за Q. Обратно, каждый путь из начала координат в точку $(p+q, p-q)$ можно интерпретировать как протокол голосования с данными итогами p и q. Тогда s_k есть число голосов, на которое P опережал Q или отставал от него после учета k-го голоса. Кандидат P лидировал на всем протяжении выборов только в том случае, когда $s_1 > 0$, … , $s_n > 0$, т.е. когда все вершины лежат строго выше оси x (путь такого типа изображен на рисунке).



Пусть $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$ – точки с целочисленными координатами, лежащие в положительно квадранте: , $a_2 > 0a_2 > 0$, $b_2 > 0b_2 > 0$. Под отражением A относительно оси x понимается точка $A' = (a_1, -a_2)$.



Лемма (Принцип отражения). *Число путей из A в B, которые касаются оси x или пересекают ее, равно числу путей из A' в B.*

Доказательство. Рассмотрим какой-либо путь из A в B, имеющий одну или несколько точек касания или пересечения с осью x. Пусть $t-$ наименьшая из их координат на оси x такой точки (T). Отражая путь AT симметрично относительно оси x, получим путь $A'T$, ведущий из A' в T. Между путями из A в B и из A' в B устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Это доказывает лемму. (фактически принцип отражения устанавливает соответствие между путями, только несколько иначе).

Доказательство теоремы о баллотировке. Очевидно, что существует столько же допустимых путей, сколько существует путей из точки (1,1) в точку $(p+q, p-q)$, которые не касаются оси x и не пересекают ее. В силу последней леммы число таких путей равно

$$M = C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^{p},$$

откуда искомая вероятность равна $\alpha = \dfrac{C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^{p}}{C_{p+q}^{p}} = \dfrac{p-q}{p+q}$.

Геометрический способ

В случае опытов с равновозможными исходами вероятность $\mathbf{P}(A)$, связанная с данным опытом, определяется как «доля» тех исходов, которые приводят к наступлению этого события. Аналогичным образом подсчитывается вероятность более сложных опытов, когда имеется бесконечное число равновозможных исходов.

Геометрический способ определения вероятности состоит в следующем. Пусть каждому элементарному исходу ω поставлена в соответствие некоторая область $G \subset \boldsymbol{R}^n$, мера которой определена и равна $m(G)$. Пусть, кроме того, событию A соответствует область $g \subset G$, мера которой также определена и равна $m(g)$. Спрашивается, чему равна вероятность события A? При этом выражению «точка случайно (или наудачу) бросается в область G» придается следующий смысл: брошенная точка может попасть в какую-либо часть области G, вероятность попасть в какую-либо часть области G пропорциональна мере этой части и не зависит от ее расположения (т.е. равновероятными или равновозможными считаются все те события, которым соответствуют фигуры одинаковой площади). Тогда, по определению, вероятность события A (вероятность попасть в область g при бросании в область G) равна

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m(g)}{m(G)}.$$

З а д а ч а 8. З а д а ч а о в с т р е ч е. Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц A и B, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы (в первом приближении будем читать, что момент прихода одного лица не влияет на момент прихода другого; в дальнейшем мы уточним понятие независимости событий).

Решение. Обозначим момент прихода лица A через x, а лица B – через y. Каждому элементарному исходу (x, y) поставим во взаимно-однозначное соответствие точку на плоскости с координатами (x, y), причем за единицу масштаба выберем минуту. Тогда множество всех исходов представляет собой квадрат со стороной 60:

$G = \{(x, y): 0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\}$, причем $m(G) = 3600$.

Для того, чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \le 20$, т.е. $g = |x - y| \le 20$, причем $m(g) = 3600 - 1600 = 2000$, поэтому
искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры (область g) к площади всего квадрата (область G): $p = \dfrac{2000}{3600} = \dfrac{5}{9} \approx 0.55555555$.

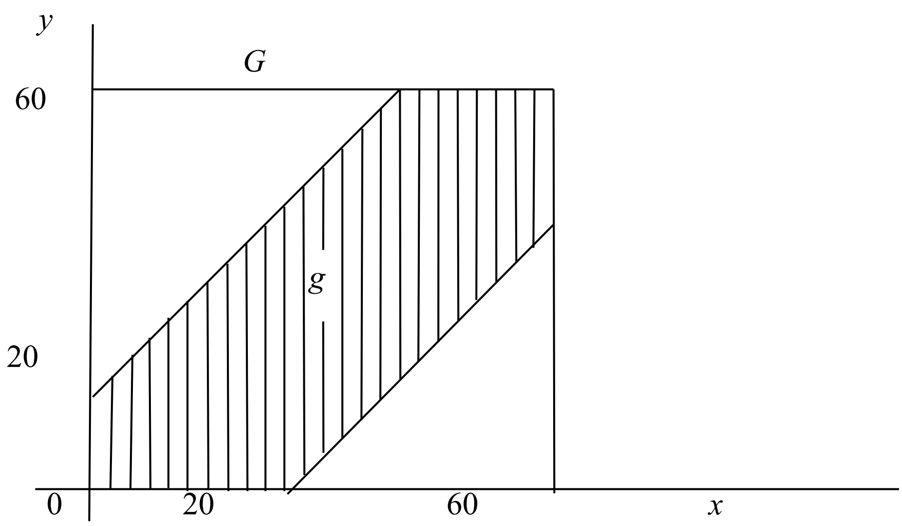


Рис. 1

Взглянем на эту же задачу с другой стороны: так как время прихода мы можем фиксировать с точностью до секунды, то множество всех исходов – это множество всех пар секунд от 0 до 3600, поэтому согласно классическому определению, число всех благоприятствующих исходов равно 3601^2. Число благоприятствующих исходов равно $3601^2 - 2401 \cdot 2400$, поэтому искомая вероятность равна

$$p = \frac{3601^2 - 2401 \cdot 2400}{3601^2} = 0.555617.$$

Таким образом, задача теории вероятностей заключается в том, чтобы, зная вероятности некоторых простейших событий, полученные из опыта или теоретических допущений относительно природы данного процесса, получить путем анализа или вычислений, вероятности интересующих нас сложных событий, а значит, тем самым иметь возможность предсказать частоты этих событий при массовом производстве испытаний.

Содержательные теоремы теории вероятностей могут быть получены, если рассматривать не одно событие, а много. Действительно, пока имеется одно событие, все, что можно сказать – это то, что оно произойдет или нет. Однако о большом числе случайных событий можно сделать некоторые практически достоверные выводы.

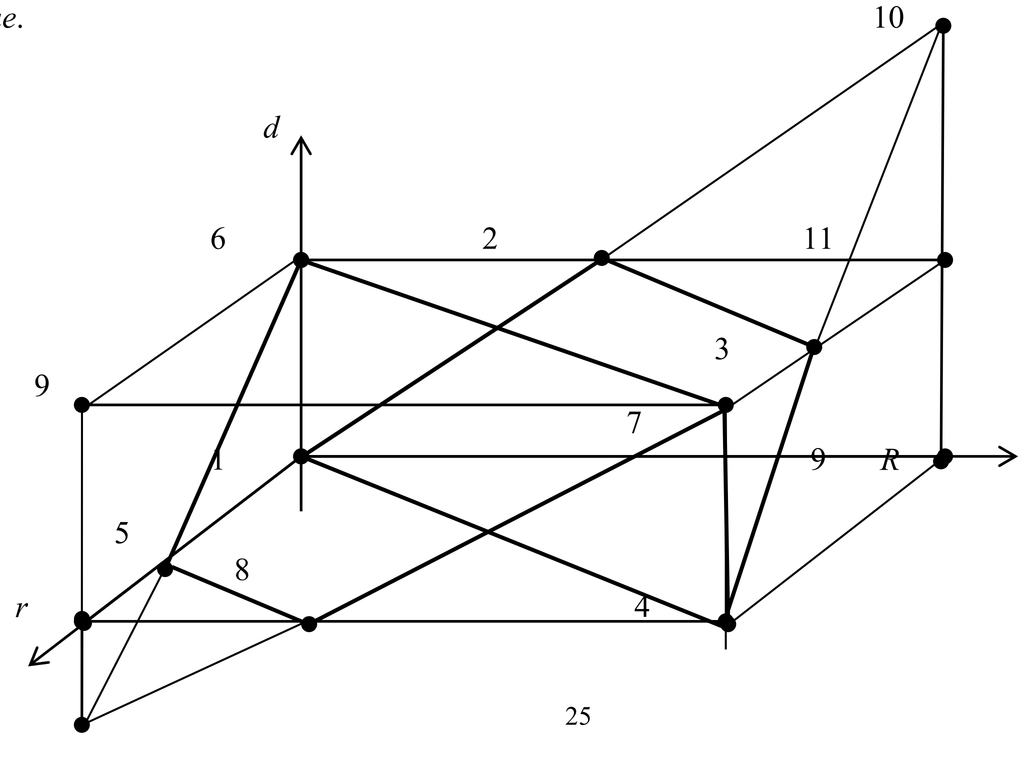
Задача 8а. У одного молодого человека было две подруги, они жили в противоположных концах города — на востоке и на западе. Парень работал в центре. Каждый день после работы он спускался в метро и садился на первый приходящий поезд. В какую сторону поедет поезд — к той девушке он и отправлялся. Количество поездов в каждую сторону одинаковое, интервалы между поездами были одинаковыми (по 2 минуты), но парень стал замечать, что в какое бы время он ни выходил с работы, к западной девушке он приезжал в три раза чаще, чем к той, что жила на востоке. Он подумал, что это судьба, и женился на ней. Правильно ли он рассуждал?

Решение. Пусть поезд на запад приходит в 0мин, 2мин, 4 мин и т.д., а на восток в 0 м 30 сек, 2 м 30 сек, 4 м 30сек, … . Тогда время ожидания на запал в 3 раза больше, чем на восток, чем и объясняется, этот парадокс.

Задача 9. Для сборки шарикоподшипника необходимо, чтобы между R – радиусом наружного кольца, r – радиусом внутреннего кольца и d – диаметром шариков существовало следующее соотношение: $0 \le R - r - d \le \delta$. Предположим, что R, r, d независимы и равномерно распределены соответственно на отрезках $[50.0, 51.0], [40.0, 41.0], [9.5, 10.0]$.

Найти вероятность сборки шарикоподшипника в случае, когда $\delta = 0.5$.

Решение.



Вершины области возможных значений находятся в точках с координатами 1(50,40,9.5), (51,40,9.5), 4(51,41,9.5), (50,41,9.5),

6(50,40,10), (51,40,10) 7(51,41,10), (50,41,10).

Благоприятствующие исходы составляют множество точек, лежащих внутри и на границе многогранника с вершинами в точках

1(50,40,9.5), 2(50.5,40,10), 3(51,40.5,10), 4(51,41,9.5),

5(50,40.5,9.5), 6(50,40,10), 7(51,41,10), 8(50.5,41,9.5).

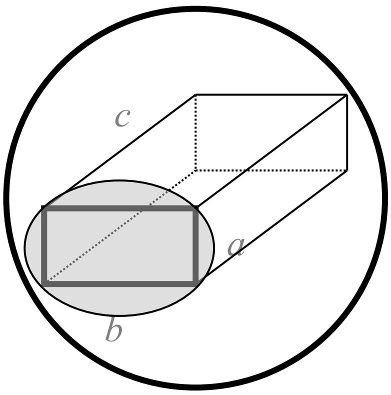
Объем параллелепипеда равен $V = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$. Объем многогранника с вершина 1,2,3,4,11,10 равен $V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = \frac{7}{48}$. Тогда объем многогранника с вершинами 12345678 равен $V_2 = V - 2V_1 = \frac{1}{2} - \frac{7}{24} = \frac{5}{24}$, поэтому вероятность искомого события равна $p = \frac{V_2}{V} = \frac{5}{12}$.

Задача 10. Пете надо принести воды объемом 20 л, но его ведро вмещает 10 л воды. Зачерпнув из колодца полное ведро, он по дороге домой разливает случайную долю воды. Какова вероятность того, что ему достаточно сходить за водой еще два раза? ***Ответ:*** 1/6.

Решение. Пусть $x -$ доля разлитой воды, $0 < x < 1$. Тогда Петя принес за первый раз воды $10\cdot(1-x)$. За второй раз он не сможет принести воды так, чтобы суммарное количество стало равным 20 л, поэтому ему придется сходить, по крайней мере, еще один раз. Если y и $z -$ доли выплеснутой воды соответственно за второй и третий раз, то в сумме у него будет $10\cdot(3-x-y-z)$. Это должно быть не меньше 20, поэтому имеем: $3-x-y-z \ge 2$, откуда $x+y+z \le 1$. Это множество есть тетраэдр, объем которого равен $\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\cdot S\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$.

Задача 11. На плоскость наудачу бросается спичечный коробок. Считая, что он однороден, найти вероятность того, что коробок будет выпадать той или иной гранью (принять длину ребер $a = 1.7$ *см*, $b = 3.7$ *см*, $c = 5$ *см*)?

Решение. Речь идет о равномерном распределении на сфере. Коробок упадет на ребро ab, если его центр тяжести находится над ее проекцией на плоскость падения.



Площадь поверхности шара равна $S = \pi D^2$, где $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 -$ диаметр шара. Из сферической геометрии известно, что площадь сферического прямоугольника ab равна

$$S_1 = D^2 \operatorname{arctg}\frac{ab}{cD},$$

поэтому соответствующая вероятность равна

$$p_{ab} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{ab}{cD} = 0.0613292 \approx 0.06,\ \ p_{bc} = 0.3297303 \approx 0.33,$$

$$p_{ac} = 0.1089404 \approx 0.11.$$

Для случая $a = b = c$ (т.е. для кубика) имеем:

$$p_{ab} = p_{bc} = p_{ac} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\pi} = \frac{1}{6} = 0.167.$$