4
Функция распределения и непрерывные величины

1. Функция распределения (ф.р.). Свойства функции распределения.
2. Разложение функции распределения.
3. Непрерывные величины. Примеры.

1. Обобщая понятие дискретной случайной величины, дадим общее определение случайной величины (с.в.).

Определение 1. ***Случайной величиной*** называется измеримая функция элементарного исхода, т.е. действительная функция $X = X(\omega)$, заданная на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{A})$ такая, что $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathscr{A}$ для каждого $x \in R^1$.

Определение 2. Функция точки x: $F(x) = \mathbf{P}(\omega : X(\omega) < x)$, определенная на R^1, называется ***функцией распределения***.

Функция распределения имеет ряд важных свойств.

(I) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Доказательство. Определим $F(-\infty)$, $F(+\infty)$ равенствами:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x), \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$$

и покажем, что $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Действительно, $(X < -\infty) = \lim_{n\to\infty}(X < -n)$. Тогда

$$\mathbf{P}(X < -\infty) = \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty}(X < -n)) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(X < -n) = 0$$

в силу непрерывности в нуле $(\lim_{n\to\infty}(X < -n) = \varnothing)$, поскольку $(X < -n) \supset (X < -n-1)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X < -n) = \varnothing$. Аналогично, $F(+\infty) = 1$.

(II) $F(x)$ – *неубывающая функция*.

Доказательство. Пусть $a < b$. Тогда $(X < b) = (X < a) \bigcup (a \le X < b)$ и $(X < a) \bigcap (a \le X < b) = \varnothing$, поэтому в силу аддитивности вероятности

$\mathbf{P}(X < b) = \mathbf{P}(X < a) + \mathbf{P}(a \le X < b)$, т.е.

$$\mathbf{P}(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Так как $\mathbf{P}(a \le X < b) \ge 0$, отсюда следует требуемое свойство монотонности. Кроме того, это равенство дает возможность по $F(x)$ восстановить вероятность случайной величине X попасть в полуинтервал $[a, b)$.

(Ш) $F(x)$ – *непрерывная по крайней мере слева функция*.

Доказательство. Выберем какую-нибудь возрастающая последовательность $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, сходящуюся к x. Обозначим через A_n событие $\{x_n \le X < x\}$. Тогда $A_i \subset A_j$, если $i > j$, и произведение всех событий A_n есть невозможное событие. По аксиоме непрерывности

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty}(F(x) - F(x_n)) = F(x) - \lim_{n\to\infty}F(x_n) =$$
$$= F(x) - F(x-0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

(IV) *Множество* S *скачков функции* F *не более чем счетно.*

Доказательство. Обозначим через S_n множество точек, в которых F имеет скачок $\geq \frac{1}{n}$. Тогда $S = \bigcup_n S_n$. Для каждого n множество S_n конечно, иначе F превысила бы единицу. Следовательно, S не более чем счетно.

(V) *Две функции распределения тождественно равны, если они совпадают на множестве рациональных точек (на плотном в R^1 множестве).*

(VI) *Случайная величина $X(\omega)$ на $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ индуцирует вероятностную меру на измеримом пространстве $(R^1, \mathscr{B})$, которая полностью определяется функцией распределения $F(x)$.*

(Без доказательства).

(VII) *Измеримая функция случайной величины также является случайной величиной.*
Доказать самим.

(VIII) *Случайная величина $X(\omega)$ определяет $\sigma -$алгебру множеств $\mathscr{B}_X \subset \mathscr{B}$, т.е. $\mathscr{B}_X - \sigma -$подалгебра множеств ω.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{B}_1$. Рассмотрим $\mathscr{B}_X = \{X^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}_1\}$. В таком случае $\mathscr{B}_X$ – $\sigma -$алгебра, поскольку

(а) $X^{-1}(-\infty, \infty) = \Omega$, т.е. $\Omega \in \mathscr{B}_X$.

(б) $X^{-1}(\overline{A}) = \overline{(X^{-1}(A))}$, т.е. дополнения множеств из $\mathscr{B}_X$ принадлежат $\mathscr{B}_X$.

(с) $X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}\left(A_i\right)$, т.е. счетное объединение множеств из $\mathscr{B}_X$ также принадлежит $\mathscr{B}_X$. Очевидно, что $\mathscr{B}_X \subset \mathscr{B}$.

<u>Определение 3.</u> Говорят, что функция g: $R^1 \to R^1$ является измеримой (борелевской), если

$$B \in \mathscr{B} \Rightarrow \{x :\ g(x) \in B\} \in \mathscr{B}.$$

(IX) *Каждая функция $F(x)$ со свойствами:*

а) $F(x) -$ не убывает,

б) $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$,

в) $F(x) -$ непрерывна по крайней мере слева,

определяет случайную величину с функцией распределения $F(x)$.

Доказательство. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{B} -$ борелевская алгебра, порождаемая интервалами в $[0,1]$, а $\mathbf{P} -$ мера Лебега, так что $\mathbf{P}([0,\omega)) = \omega$, $0 \leq \omega \leq 1$. Тогда случайная величина

$$X(\omega) = \inf_{F(y) > \omega} y \qquad (0 \leq \omega \leq 1)$$

имеет функцию распределения

$$\mathbf{P}(\omega\colon X(\omega) < x) = \mathbf{P}\left(\omega\colon X(\omega) = \inf_{F(y) > \omega} y\right) = \mathbf{P}(\omega\colon 0 \leq \omega < F(x)) = F(x).$$

Таким образом, мы представили $F(x)$ как функцию распределения случайной величины, определенной на подходящем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbf{P})$.

2. (X) Разложение Жордана. *Если* $F(x)-$ *функция распределения, заданная на отрезке* $[a,b],$ *а* $x_1,x_2,x_3,...$ *суть все внутренние точки разрыва. Тогда имеет место следующее разложение:*

$$F(x)=c_1\tilde{F}_1(x)+c_2\tilde{F}_2(x),$$

где $\tilde{F}_1(x)-$ *ступенчатая функция распределения, а* $\tilde{F}_2(x)-$ *непрерывная функция распределения и* $c_1\geq 0, c_2\geq 0, c_1+c_2=1.$. *Такое разложение единственно.*

Доказательство. Если $c_1=0$ или $c_2=0,$ то имеем либо функцию скачков (ф.р. дискретной случайной величины), либо непрерывную функцию., поэтому будем считать, что $0<c_1,c_2<1.$

Положим

$F_1(a)=0,$

$F_1(x)=[F(a+0)-F(a)]+\sum\limits_{a<x_i<x\leq b}(F(x_i+0)-F(x_i)).$

Функция $F_1(x)$ является ступенчатой функцией, а $F_2(x)=F(x)-F_1(x)-$ непрерывная функция.

Лемма. *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *задана возрастающая функция* $g(x),$ *непрерывная слева. Если* $x_1,x_2,...,x_n-$ *произвольные точки, лежащие внутри* $[a,b],$ *то*

$$[g(a+0)-g(a)]+\sum_{k=1}^{n}[g(x_k+0)-g(x_k)]\leq g(b)-g(a). \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что

$$a<x_1<x_2<...<x_n<b.$$

Пусть $a=x_0, b=x_{n+1}$. Введем в рассмотрение точки $y_0,y_1,...,y_n,$ так чтобы $x_k<y_k<x_{k+1}$ $(k=0,1,...,n)$. Тогда

$$g(x_k+0)-g(x_k)\leq g(y_k)-g(y_{k-1}) \quad (k=1,2,...,n),$$

$$g(a+0)-g(a)\leq g(y_1)-g(a).$$

Складывая эти неравенства, мы получим (2).

Замечание. Переходя в (2) к пределу, получим

$$[g(a+0)-g(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[g(x_k+0)-g(x_k)]\leq g(b)-g(a). \qquad (3)$$

Докажем теперь, что разность $F_2(x)=F(x)-F_1(x)$ между возрастающей функцией и ее функцией скачков есть возрастающая и непрерывная функция. Пусть $a\leq x<y\leq b.$ Если неравенство (3) применить к отрезку $[x,y]$ и функциям $F_1(x)$ и $F(x),$ то получим неравенство

$$F_1(y)-F_1(x)\leq F(y)-F(x), \qquad (4)$$

откуда $F_2(x)\leq F_2(y)$ и функция $F_2(x)$ оказывается неубывающей.

Далее, если в неравенстве (4) устремить y к $x,$ то в

$$F_1(x+0)-F_1(x)\leq F(x+0)-F(x). \qquad (5)$$

С другой стороны, из самого определения функции $F_1(x)$ следует, что при $x<y$ будет $F(x+0)-F(x)\leq F_1(y)-F_1(x),$ откуда в пределе при $y\to x,$

$$F(x+0)-F(x)\leq F_1(x+0)-F_1(x).$$

Отсюда и из (5) следует, что $F_1(x+0)-F_1(x)=F(x+0)-F(x),$ и, стало быть,

$$F_2(x+0)=F_2(x).$$

Полагая $\tilde{F}_1(x)=\dfrac{F_1(x)}{c_1},\ c_1=F(b);\ \tilde{F}_2(x)=\dfrac{F_2(x)}{c_2},\ c_2=1-F(b),$ получим утверждение (X).

(XI) Разложение Лебега. *Непрерывная функция распределения разлагается на сингулярную и абсолютно непрерывную части:*

$$F_2(x)=c_{21}F_{21}(x)+c_{22}F_{22}(x),$$

где $F_{21}(x)$ *– абсолютно непрерывная функция распределения, т.е. существует неотрицательная функция* $f(x)$, *что* $F_{21}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$, *а* $F_{22}(x)$ *– сингулярная функция распределения (имеет производную, равную нулю почти всюду).*

ТЕОРЕМА . *Для вероятностной меры* $\mathbf{P}(A)$ *имеет место представление*

$$\mathbf{P}(A)=\int\limits_A f(x)\,d\mu(x)+\psi(A),$$

где меры μ *и* ψ *сингулярны, т.е. существуют множества* N *и* M, *для которых* $R^1=N\cup M,\ N\cap M=\varnothing$, *причем* $\mu(N)=0,\ \psi(M)=0$.

Доказательство. Пусть $\lambda=\mathbf{P}+\mu$ и $L_2(\lambda)$ – линейное пространство измеримых функций, для которых $\int|f|^2\,d\lambda<\infty$. Рассмотрим в $L_2(\lambda)$ функционал

$$\alpha(f)=\int f\,d\mathbf{P}.$$

Если $f\in L_2(\lambda)$, то функционал $\alpha(f)$ определен, так как $|f|\le 1+f^2$, поэтому

$$\int|f|\,d\mathbf{P}\le 1+\int f^2\,d\mathbf{P}.$$

Но

$$\int f^2\,d\mathbf{P}\le\int f^2\,d\lambda=\int f^2\,d\mathbf{P}+\int f^2\,d\mu<\infty.$$

Функционал линеен: $\alpha(c_1f_1+c_2f_2)=c_1\alpha(f_1)+c_2\alpha(f_2)$.

Он ограничен:

$$|\alpha(f)|=\left|\int f\,d\mathbf{P}\right|\le\left(\int f^2 d\mathbf{P}\right)^{1/2}\le\left(\int f^2 d\lambda\right)^{1/2}=\|f\|,$$

откуда $\|\alpha\|\le 1$.

По теореме Рисса каждый линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве допускает представление

$$\alpha(f)=(f,g)=\int f\,g\,d\lambda=\int f\,d\mathbf{P}. \qquad (1)$$

Положим $I_A=f$ – индикатор множества A, такого, для которого функция f равна 1, т.е.

$$I_A=I_A(u)=\begin{cases}1, & \text{если } u\in A,\\ 0, & \text{если } u\notin A.\end{cases}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(A)=\int I_A\,d\mathbf{P}=\int\limits_A g\,d\lambda\le\lambda(A),$$

откуда $0\le g(u)\le 1$. Определим множество $N=\{u:g(u)=1\}$. Тогда

$$\mathbf{P}(N)=\lambda(N)=\mathbf{P}(N)+\mu(N),\ \text{значит},\ \mu(N)=0.$$

Пусть

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}_1(A)+\psi(A),$$

где $\mathbf{P}_1(A) = \mathbf{P}(A \cdot \overline{N})$, $\psi(A) = \mathbf{P}(A \cdot N)$, поэтому

$\psi(M) = \mathbf{P}((R^1 \setminus N) \bigcap N) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$, а, значит,

ψ и μ – сингулярны. Из (1) следует, что

$$\int f\,g\,d\mathbf{P} + \int f\,g\,d\mu = \int f\,g\,d\mathbf{P} \;\Rightarrow\; \int f\,(1-g)\,d\mathbf{P} = \int f\,g\,d\mu .$$

Положим

$$f = \begin{cases} \dfrac{I_A}{1-g}, & u \notin N, \\ 0, & u \in N. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \int\limits_{A \bigcap \overline{N}} \frac{g}{1-g}\,d\mu = \int\limits_A \overline{g}\,d\mu ,$$

где

$$\overline{g} = \begin{cases} \dfrac{g}{1-g}, & u \notin N, \\ 0, & u \in N. \end{cases}$$

3. Мы уже определили абсолютно непрерывную случайную величину как такую величину, для которой функция распределения имеет представление $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$. Рассмотрим для некоторого действительного x вероятность неравенства $(x \le X < x + \Delta x)$. При $\Delta x \to 0$ будем иметь:

$$\frac{\mathbf{P}(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \to f(x).$$

Для бесконечно малого интервала мы будем иметь $\mathbf{P}(x \le X < x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, а для конечного интервала $\mathbf{P}(a \le X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

В случае непрерывной величины бессмысленно говорить о вероятности отдельного ее значения x, ибо по соседству со значением x располагается континуум других возможных значений, так что событие $(X = x)$ практически невозможно, т.е. $\mathbf{P}(X = x) = 0$. Например, если мы рассмотрим отклонение действительного размера изготовленной детали от номинального, то с вероятностью нуль мы можем говорить, что это отклонение в точности равно +0.050000017 мм. Во всех случаях практически невозможно установить, произошло такое событие или нет, так как все измерения производятся всегда с ограниченной точностью и в –качестве результата измерения мы можем фактически указать лишь границы некоторого узкого интервала, внутри которого находится измеренное значение. Значениям непрерывной величины по своему существу присуща некоторая неопределенность. Таким образом, в данном случае вероятность, отличная от нуля, может быть связана только с попаданием величины в заданный интервал.

Для непрерывной величины $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$. Функцию $f(x)$ называют функцией плотности, плотностью распределения (или *плотностью*) величины X. Она обладает следующими свойствами: 1) $f(x) \ge 0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

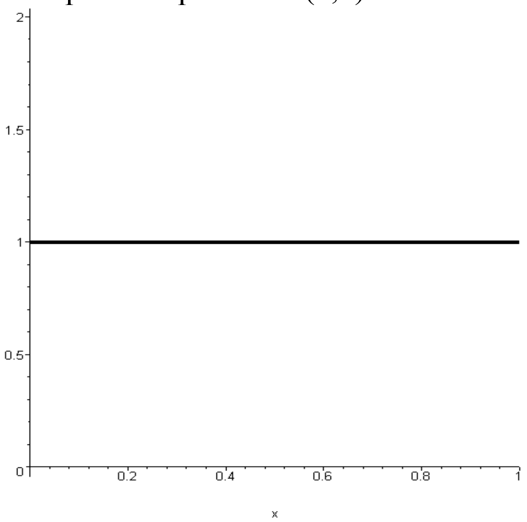
Примеры.

1) *Равномерное* на интервале (a, b) распределение $\mathcal{R}(a, b)$.

Если величина X принимает значения в интервале (a, b) с вероятностью пропорциональной длине отрезка, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a, \text{ или } x \ge b, \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ если } a < x < b. \end{cases}$$

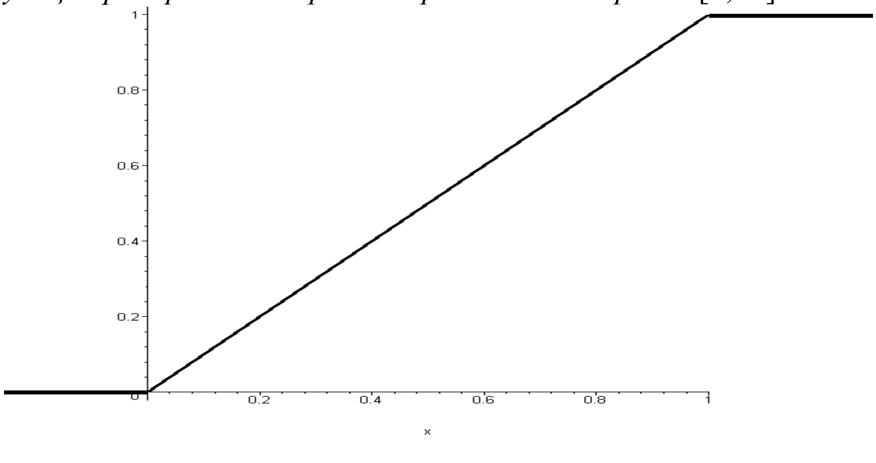
Плотность равномерного на (0,1) закона имеет вид



Ее функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \ge b, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ если } a < x < b, \\ 0, \text{ если } x \le a. \end{cases}$$

Функция распределения равномерного на интервале $[1;25]$ *закона.*



При $a = 0$, $b = 1$ имеем равномерное распределение на (0, 1) с плотностью $f(x) = 1$, если $0 < x < 1$, и функцией распределения для этих значений, равной $F(x) = x$.

Равномерное распределение – частный случай *бета-распределения* с плотностью

$$f(x) = \frac{(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\delta-1}}{\beta(\alpha, \delta)(b-a)^{\alpha+\delta-1}}, \text{ если } a < x < b.$$

В случае $a = 0, b = 1$ имеем плотность распределения

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\delta-1}}{\beta(\alpha,\delta)}, \text{ если } 0 < x < 1,$$

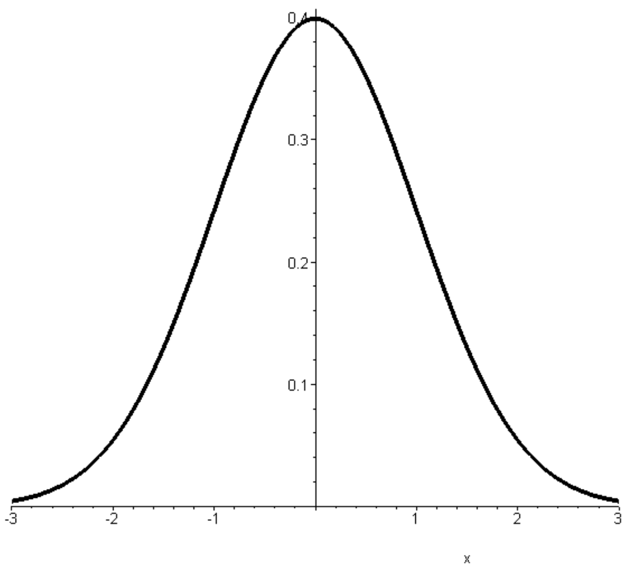
где $\beta(\alpha,\delta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}$, $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$.

2) *Нормальный* закон распределения $N(a,\sigma^2)$.

Говорят, что случайная величина X имеет нормальное распределение (обозначение $X \in N(a,\sigma^2)$), если

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ для } -\infty < x < \infty.$$

При $a = 0$, $\sigma = 1$ имеем стандартное нормальное распределение $N(0,1)$ с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$:



Нормальное распределение играет большую роль в теории вероятностей и к нему мы еще неоднократно вернемся.

Функция распределения нормального закона $N(a,\sigma^2)$ равна $\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

Функция распределения стандартного нормального закона имеет вид:

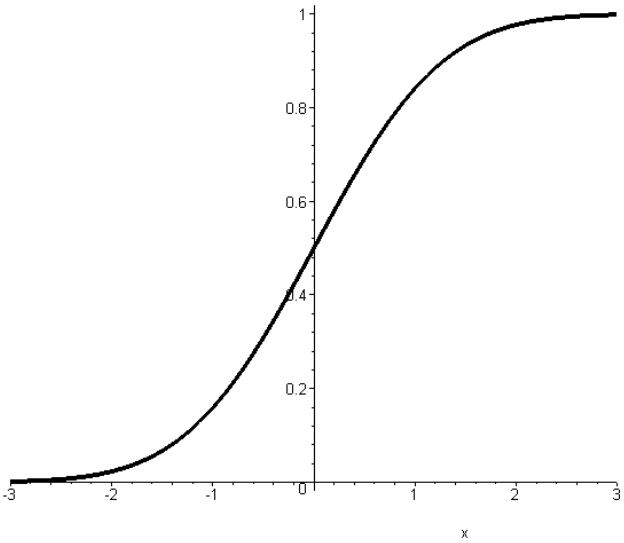


Таблица значений функции $\Phi(x)$ дается для $x>0$. Для $x<0$ ее значения можно найти по формуле $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$; $\Phi(0)=0.5$. Таблица дается обычно для $0\le x\le 3$. Для больших x функцию $\Phi(x)$ аппроксимировать с помощью следующей формулы:

$$Q(x)=\mathbf{P}(X>x)=1-\Phi(x)\approx\frac{1}{2}\exp(-0.717x-0.416x^2).$$

Расчет стоимости опциона на BS-рынке.

Рассмотрим финансовый рынок, функционирующий в дискретные моменты времени и на котором имеются финансовые активы двух видов: а) безрисковые, например, *банковский вклад* (B) и б) рисковые, например, *акции* (S).

Банковский счет в момент времени n изменяется по формуле сложных процентов (r – процентная ставка банковского счета):

$$B_n=(1+r_n)B_{n-1},\ r_n=r,\ n=1,2,\dots,\ B_o=x.$$

Цена акции изменяется по следующему закону:

$$S_n=(1+\rho_n)S_{n-1},\ n=1,2,\dots,\ B_o=x,$$

где ρ_n – последовательность случайных величин, принимающих только два значения a и b, причем

$$-1<a<r<b,$$

$$\mathbf{P}(\rho_n=a)=p,\ \mathbf{P}(\rho_n=b)=q=1-p.$$

Рассмотрим стандартный опцион купли Европейского типа, являющийся контрактом, который дает право покупателю купить в фиксированный момент времени N в будущем, скажем, акцию по оговариваемой цене K. Если (случайная) стоимость (цена) акции описывается процессом $S=(S_n)$, то в момент N выигрыш покупателя равен $f_N=(S_N-K)^+$. В случае $S_N>K$ после покупки акции по цене K покупатель продает их немедленно по фактической стоимости S_N, получая прибыль S_N-K; если же $S_N\le K$, то покупателю предоставленным ему правом покупки не имеет смысла пользоваться.

Оперируя на (B,S)-рынке, инвестор выбирает ту или иную стратегию $\pi=(\pi_n)$, состоящую из портфеля ценных бумаг $\pi_n=(\beta_n,\gamma_n)$, $n\ge 1$, которому соответствует капитал $X_n=\beta_n B_n+\gamma_n S_n$, где $\beta_n B_n$ – сумма на банковском счете и $\gamma_n S_n$ – в акциях.

Стратегия π

f_N), если с вероятностью единица $X_N^\pi\ge f_N$. При этом $X_o^\pi=x$. То минимальное значение x, обозначаемое $\boldsymbol{C}_N$, для которого возможно построение (минимального) хеджа π^*, естественно называть *справедливой* (*рациональной*) стоимостью рассматриваемого контракта с опционом. Положим

$$p = \tilde{p} = \frac{r-a}{b-a}, \; K_o = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_o(1+a)^N} \Big/ \ln \frac{1+a}{1+b} \right].$$

Будем предполагать, что $K_o \le N$. Тогда справедливая цена равна (Кокс, Росс, Рубинштейн, 1972)

$$\boldsymbol{C}_N = S_o \sum_{k=K_o}^{N} C_N^k \tilde{p}^k (1-\tilde{p})^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k -$$

$$-K(1+r)^{-N} \sum_{k=K_o}^{N} C_N^k \tilde{p}^k (1-\tilde{p})^{N-k} = (1+r)^{-N} F_N(S_o; \tilde{p}).$$

Оптимальная стратегия определяется следующим образом:

$$\beta_n^* = B_N^{-1}\{F_{N-n+1}(S_{n-1}; \tilde{p}) - (1+r)[F_{N-n}(S_{n-1}(1+b); \tilde{p}) -$$

$$- F_{N-n}(S_{n-1}(1+a); \tilde{p})]\},$$

$$\gamma_n^* = \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b); \tilde{p}) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a); \tilde{p})}{(1+r)^{-(N-n)} S_{n-1}(b-a)}$$

<u>Пример.</u> Пусть S_n – это стоимость 100 USD в швейцарских франках CHF, при этом $S_o = 150$ CHF, а в следующий момент эта величина может стать либо 180 CHF, либо 90 CHF, что соответствует либо повышению, либо понижению курса доллара по отношению к швейцарскому франку. Далее,

$$S_1 = S_o(1+\rho_1),$$

где ρ_1 равно либо $b = 1/5$, либо $a = -2/5$. Пусть процентная ставка равна 0, а вклад на банковском счету постоянен и равен $B_o = 1$ CHF ($r = 0$). Тем самым, помещение вклада на банковский счет не принесет прибыли, но и взятие некоторой ссуды взаймы не облагается процентами при ее возврате.

Предлагается опцион на покупку (доллара) с датой погашения $N = 1$ и ценой погашения $K = 150$ CHF, т.е. $f(S_1) = (S_1 - 150)^+$ CHF. Иначе говоря, при повышении курса доллара покупатель предлагаемого ему европейского опциона купли получит 180 CHF – 150 CHF = 30 CHF; при понижении же курса $f(S_1) = 0$.

Для определения справедливой цены $\boldsymbol{C}_N$ определим

$$\tilde{p} = \frac{r-a}{b-a} = \frac{2/5}{3/5} = 2/3.$$

Если $N = 1$, то соответствующее значение $a = -2/5$, $b = 1/5$, $S_o = 150$, $K = 150$ и поэтому

$$K_o = 1 + \left[\ln \frac{150}{150(1-2/5)^1} \Big/ \ln \frac{1-2/5}{1+1/5} \right] = 1 + [-0.737] = 1 + 0 = 1,$$

$$\boldsymbol{C}_1 = S_o \tilde{p}(1+b) - K\tilde{p} = S_o \tilde{p} b = 150 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = 20.$$

Это означает, что продавец опциона, получив от покупателя 20 CHF, обладает начальным капиталом X_o = 20 CHF и, следовательно, β_o и γ_o могут быть выбраны так: $\beta_o^* = 0$, $\gamma_o^* = 2/15$.

Перед моментом времени $n=1$ продавец должен так перераспределить свой начальный портфель (β_o, γ_o), превратив его в портфель (β_1, γ_1), чтобы после объявления о значении S_1 в момент времени $N=1$ были бы удовлетворены условия контракта, включающие в себя выплату платежа покупателю и возврат долга (соответствующего отрицательным значениям β_n и γ_n), если таковой производился.

Следующее значение $(\beta_1 *, \gamma_1 *)$ оптимального хеджа будет определять по формулам:

$$\gamma_1 * = \frac{F_o(S_o(1+b);\tilde{p}) - F_o(S_o(1+a);\tilde{p})}{S_o(b-a)} =$$

$$= \frac{f(S_o(1+b)) - f(S_o(1+a))}{S_o(b-a)} = \frac{f(S_o(1+b))}{S_o(b-a)} =$$

$$= \frac{\max\{0, S_o(1+b)-K\}}{S_o(b-a)} = \frac{b}{b-a} = \frac{1/5}{1/5+2/5} = \frac{1}{3}.$$

Поскольку $X_o = \beta_1 * B_o + \gamma_1 * S_o$ и $B_o = 1$, имеем:

$$\beta_1 * = X_o - \gamma_1 * S_o = 20 - \frac{1}{3} \cdot 150 = -30.$$

Последнее означает, что для достижения своего платежного обязательства продавец опциона вместе с получением премии в 20 CHF совершает еще заем 30 CHF. Суммарный капитал в 50 CHF «вкладывается» в доллары по курсу 150 CHF = 100 USD, т.е. приобретается 33,33 USD.

Когда же в момент $N=1$ объявляется новый курс доллара, то возможны две ситуации.

1) Курс стал 100 USD = 180 CHF, и в этом случае опцион предъявляется к исполнению. Значение платежного обязательства равно 30 CHF, а капитал выбранного эмитентом оптимального портфеля равен

$$X_1 * = \beta_1 * B_1 + \gamma_1 * S_1 = -30 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 180 = 30 \text{ CHF},$$

и, следовательно, платежное обязательство погашается.

2) Курс стал 100 USD = 90 CHF, и в этом случае платежное обязательство f равно 0. Поэтому эмитент должен только вернуть долг в 30 CHF, что он может сделать, поменяв 33,33 USD по этому курсу и получив 30 CHF, которые он и возвратит на банковский счет.

Представим теперь ситуацию, когда рынок функционирует в моменты времени, кратные не единице, а некоторому положительному числу Δ.В результате для $t = \Delta, 2\Delta, \ldots, T$ приходим к следующим рекуррентным уравнениям, определяющим (B, S, Δ)*-рынок*:

$$B_t^{(\Delta)} = (1 + r_t(\Delta)) B_{t-\Delta}^{(\Delta)}, \quad B_o^{(\Delta)} > 0,$$

$$S_t^{(\Delta)} = (1 + \rho_t(\Delta)) S_{t-\Delta}^{(\Delta)}, \quad S_o^{(\Delta)} > 0.$$

Пусть для (B, S, Δ)-рынка выполнены соотношения:

$$1 + r(\Delta) = e^{r\Delta}, \quad 1 + b(\Delta) = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \quad 1 + a(\Delta) = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}.$$

Применяя к формуле для определения справедливой цены теорему Муавра-Лапласа, получим при $\Delta \to 0$

$$\boldsymbol{C}_T(\Delta) \approx S_o \Phi(\tilde{y}_\Delta) - K(1 + r(\Delta))^{-[T/\Delta]} \Phi(y_\Delta *),$$

где $\tilde{y}_\Delta = \dfrac{[T/\Delta]\tilde{p}_\Delta - K_o(\Delta)}{\sqrt{[T/\Delta]\tilde{p}_\Delta(1-\tilde{p}_\Delta)}}$, $y_\Delta * = \dfrac{[T/\Delta] p_\Delta * - K_o(\Delta)}{\sqrt{[T/\Delta] p_\Delta * (1 - p_\Delta *)}}$,

$$K_o(\Delta) = 1 + \left[\frac{\ln(K/(S_o(1+a)^{[T/\Delta]}))}{\ln((1+a)/(1+b))}\right],$$

$$p_\Delta{}^* = \frac{r(\Delta)-a(\Delta)}{b(\Delta)-a(\Delta)}, \quad \tilde{p}_\Delta = \frac{1+b(\Delta)}{1+a(\Delta)} p_\Delta{}^*$$

При $\Delta \to 0$

$$K_o(\Delta) \approx \frac{\ln(K/S_o) + [T/\Delta]\sigma\sqrt{\Delta}}{2\sigma\sqrt{\Delta}} \to \left[-\frac{\ln(K/S_o)+\sigma T}{\ln(1+b)}\right] = K_o,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[T/\Delta]p_\Delta{}^* - K_o(\Delta)}{\sqrt{[T/\Delta]p_\Delta{}^*(1-p_\Delta{}^*)}} = \frac{T(r-\sigma^2/2)+\ln(S_o/K)}{\sigma\sqrt{T}} = y^*,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[T/\Delta]\tilde{p}_\Delta - K_o(\Delta)}{\sqrt{[T/\Delta]\tilde{p}_\Delta(1-\tilde{p}_\Delta)}} = \frac{T(r+\sigma^2/2)+\ln(S_o/K)}{\sigma\sqrt{T}} = \tilde{y}.$$

В результате получаем следующую формулу (формула Блэка-Шоулза)

$$\boldsymbol{C}_T(\Delta) \to \boldsymbol{C}_T = S_o\Phi(\tilde{y}) - K e^{-rT}\Phi(y^*).$$

Модель Блэка-Шоулза.

Введем обозначения:

c – цена опциона,

S – текущая цена акции,

K – цена исполнения,

$e^{-\delta t}$ – дисконтный множитель на срок t по непрерывной ставке δ,

t – срок до даты исполнения,

δ – непрерывная процентная ставка (сила роста), принятая для дисконтирования,

$\Phi(d_1)$ и $\Phi(d_2)$ – функции нормального распределения,

σ^2 – дисперсия доходности акции (волатильность) – доходность измеряется в виде ставки непрерывных процентов.

Тогда цена опциона определяется по формуле (Блэк и Шоулз)

$$\boxed{c = S\cdot\Phi(d_1) - K\cdot e^{-\delta t}\cdot\Phi(d_2).}$$

Параметры d_i рассчитываются следующим образом:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t}{\sigma\sqrt{t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}.$$

Пример. Предположим, что на момент покупки опциона колл известны следующие параметры: $S = 100$, $K = 110$, $t = 9$ месяцев (0.75 года), $\sigma^2 = 0.3^2 = 0.09$, $\delta = 0.1$. На основе этих данных получим:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \left(0.1 + \frac{0.09}{2}\right) \cdot 0.75}{0.3\sqrt{0.75}} = 0.0517,$$

$$d_2 = 0.0517 - 0.3\sqrt{0.75} = -0.208.$$

По таблице функции нормального распределения находим:

$$\Phi(0.052) = 0.510736, \ \Phi(-0.208) = 0.417614.$$

Таким образом, цена опциона равна

$$c = 100 \cdot 0.510736 - 110 \cdot e^{-0.1 \cdot 0.75} \cdot 0.417614 = 8.46.$$

3) *Показательное* (*экспоненциальное*) распределение ($X \in \mathcal{E}(\lambda)$).

Рассмотрим наступления событий на некотором интервале времени при условии, что наступления событий в течение двух неперекрывающихся временных интервалов, независимы. Пусть $Q(t)$ – вероятность того, что за интервал времени t не произойдет ни одного события. Если t_1 и t_2 – два последовательных интервала, то согласно гипотезе независимости

$$Q(t_1)Q(t_2) = Q(t_1 + t_2).$$

Если функция непрерывна, то это уравнение имеет невырожденное решение

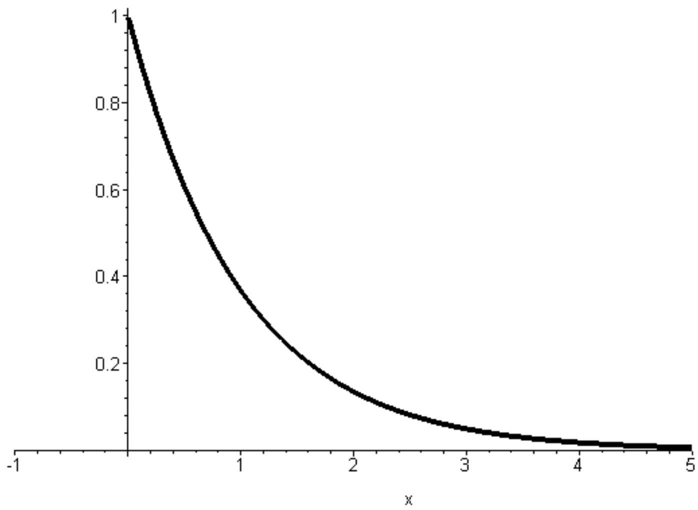
$$Q(t) = e^{-\lambda t}, \ t > 0.$$

Отсюда, функция распределения времени ожидания до наступления события равна

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0; F(t) = 0, t \le 0.$$

Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, \quad\quad x \le 0. \end{cases}$$



Показательный закон хорошо описывает длительность работы электронных ламп. Оно выводится в предположении, что длительность работы прибора определяется случайными колебаниями нагрузки, но не старением самого прибора. Это предположение трудно проверяемо, а иногда и неверно. Кроме того, при предположениях о распределении вероятностей различных нагрузок, которое также может быть неверным, хотя бы потому, что нагрузка, возможно не обладает статистической устойчивостью, и потому бессмысленно говорить о ней в вероятностных терминах. Однако гипотеза показательного распределения очень привлекательна. Во-первых, показательный закон обладает гармоничным свойством самовоспроизводимости в следующем смысле. Допустим, что интересующий нас прибор состоит из

n $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причем отказ любого звена приводит к отказу прибора, а моменты отказов x_i звеньев A_i независимы и распределены по показательному закону $X_i \in \mathscr{E}(\lambda_i)$. В таком случае момент отказа всего прибора есть $X = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Имеем:

$$\mathbf{P}(X < x) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)},$$

т.е. вновь получается показательный закон с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Вторая причина привлекательности показательного закона – его связь с законом Пуассона. Например, время между двумя последовательными вызовами, распределенными по закону Пуассона $\mathscr{P}(\lambda)$, распределено по показательному закону $\mathscr{E}(\lambda)$.

4) Распределение Парето.

Распределение с плотностью

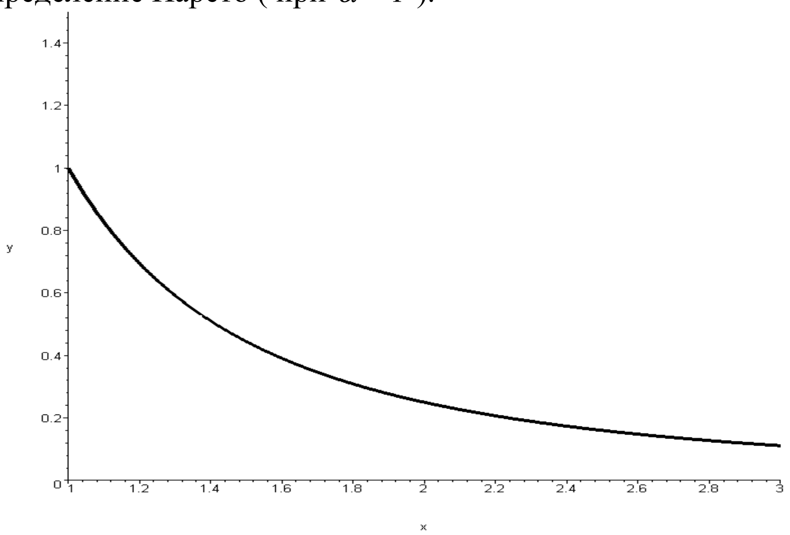
$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha+1}, \text{ если } \theta < x < \infty.$$

Это распределение преобразованием $x = \theta / y$ сводится к распределению с плотностью (бета-распределение)

$$g(y) = \alpha\, y^{\alpha-1},\ 0 < y < 1.$$

Распределение Парето часто используется в различных задачах экономической статистики. Так, например, налоговые органы обычно интересуются распределением годовых доходов тех лиц, годовой доход которых превосходит некоторый предел θ, установленный законами о налогообложении. Считается, что распределение Парето хорошо описывает распределение доходов.

Распределение Парето (при $\alpha = 1$).



5) *Хи-квадрат*-распределение (χ_n^2).

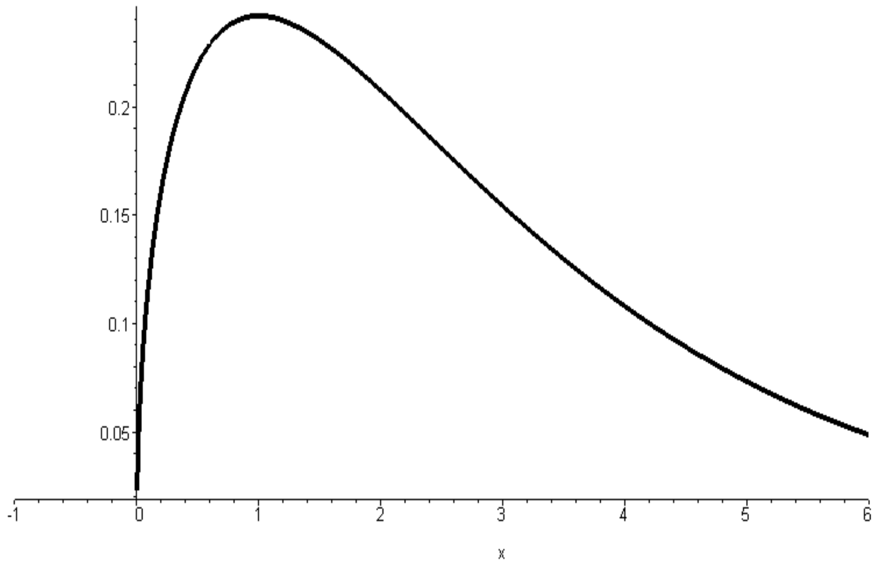
Так называется распределение с плотностью

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0.$$

Число n называется числом степеней свободы.

Если X имеет распределение Пуассона с параметром λ, т.е. $X \in \mathscr{P}(\lambda)$, то $\mathbf{P}(X \le m) = \mathbf{P}(\chi_{2m+2}^2 \ge 2\lambda)$.

Распределение хи-квадрат при $n=4$: $f(x)=\dfrac{x\,e^{-x/2}}{4}$, $x>0$.



6) t_n -распределение *Стьюдента*.

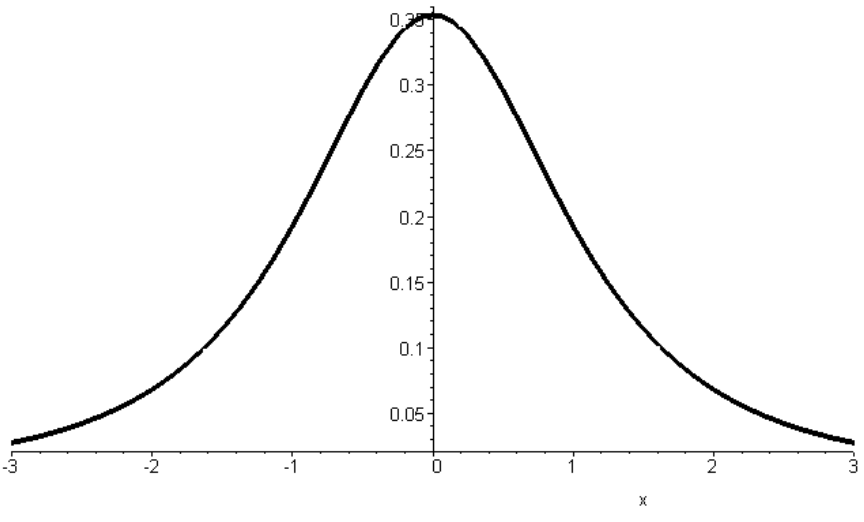
Так называется распределение с плотностью

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<x<\infty\,.$$

При больших n ($n\geq 30$) распределение t_n можно считать приближенно распределенным нормально $N(0,1)$.

При $n=1$ получаем распределение *Коши* с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<\infty\,.$$



7) $F_{m,n}$ -распределение *Фишера*.

Так называется распределение с плотностью

$$f(x) = 2\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{n}{m}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \quad -\infty < x < \infty .$$

Заметим, что $F_{m,n} = 1/F_{n,m}$, $F_{n,1} = t_n^2$.