Def $f : (X,\tau) \to (Y,\omega)$ - гомеоморфизм, если
1. f - биекция
2. f непрерывна
3. f^{-1} - непрерывна
Def

TH Отношение гомеом на мн-ве топологических пр-в является отношением эквивалентности

Def X - мн-во, U_α - сем-во подмн-в X
U_α - покрытие, если $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$
Def Покрытие называется фундаментальным, если $\forall (Y,\omega)$ $\forall$ отображения $f : (X,\tau) \to (Y,\omega)$
$f|_{U_\alpha} : (U_\alpha, \tau_\alpha) \to (Y,\omega)$ непр. $\implies$ непрерывность f

Def Покрытие наз-ся открытым, если $U_\alpha \in \tau \quad \forall \alpha$
Th.3 любое открытое покрытие пр-ва является фундаментальным
Proof (X,τ)

$$U_\alpha,\ \alpha \in A - \text{ покрытие}$$

$$U_\alpha \in \tau \quad \forall \alpha \in A$$

Пусть $f : (X,\tau) \to (Y,\omega)$ $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$ -непр

$$\forall V \in \omega \implies f^{-1}(V) \in \tau$$

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap (\cup_{\alpha\in A} U_\alpha = \cup (f^{-1}(V) \cap U_\alpha) = \cup_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}(V)$$

$$\text{из непр } f_\alpha : (U_\alpha, \tau_\alpha) \to (Y,\omega) \implies f_\alpha^{-1}(V) \in \tau_\alpha \implies \exists \tilde{U}_\alpha \in \tau \mid f_\alpha^{-1} = \tilde{U}_\alpha \cap U_\alpha$$

$$\text{по условию } U_\alpha \in \tau \implies f_\alpha^{-1}(V) \in \tau$$

Th Конечное замкнутое покрытие является фундаментальным
Доказательство аналогично с учётом условия, что конечное объединение замкнутых множеств замкнуто

Ex $(\mathbb{Z}, \tau_D) \ncong (\mathbb{Q} \cap [0,1], \tau_0)$ - топология не явл τ_D
Ex $([0,1], \tau_D)$ $((0,1), \tau_D)$ $\exists f$ - биекция $[0,1]$ на $(0,1)$ т.к. мощности совпадают f - гомеоморфизм
Ex $((0,1), \tau_0)$ $((a,b), \tau_0)$
$f(x) = a + (b-c)x$
Note $f : (\mathbb{R}^n, \tau_0 \to (\mathbb{R}, \tau_0)$ непр $\iff$

Th5 $f : (X,\tau) \to (Y,\omega)$ непр
$\forall A \subset X \implies f|_a$ непр
Proof

Ex $([0,1], \tau_0) \ncong ((0,1) \setminus \{a\}, \tau_0)$

Идея док-ва
М. от противного
Пусть f - гомеоморфизм
Пусть $f(0) = a \in (0,1)$

$$\tilde{f} : ((0,1], \tau_0) \to ((0,1), \tau_0)$$

$\tilde{f}$ - ограничение f $\implies$ $\tilde{f}$ - гомеоморфизм
Ex $s^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
$\tilde{s}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$

$$(s^1, \tau_0) \cong (\tilde{s}^1, \tau_0)$$

$$F : \begin{cases} x' &= ax \\ y' &= dy \end{cases}$$

$$F:(\mathbb{R}^2,\tau_0)\to(\mathbb{R}^2,\tau_0)$$

$$F|_{s^1}:(S^1,\tau_0)\to$$

§3 Произведение топологических пространств

Note "$\tau\times\omega$"не является топологией

Th Пусть $(X,\tau),\ (Y,\omega)$ - т.п. $\implies$ $\tau\times\omega$ - база некоторой топологии на $X\times Y$. Эта топология называется топологией произведения
Proof Проверим критерий базы на мн-ве $\Sigma=\tau\times\omega$
Критерий базы на множестве $X\times Y$
1. $\bigcup_{\alpha\in A}=X\times Y$
2. $\forall U,V\in\Sigma\ \forall x\in U\cap V\implies\exists W\in\Sigma\mid x\in W\subset U\cap V$

1 очевидно выполнено
2.
$$\forall U\in\Sigma\implies U=A_1\times B_2,\quad A_1\in\tau,\ B_1\in\omega\quad V=A_2\times B_2\quad A_2\in\tau,\ B_2\in\omega$$
Пусть $x\in U\cap V\implies x=(a,b)\ a\in X,\ b\in Y$
$$a\in A_1\cap A_2$$
$$b\in B_1\cap B_2$$
Пусть $W=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$

Th Σ_1 - база (X,τ) , Σ_2 - база (Y,ω)
Тогда $\Sigma_1\times\Sigma_2$ - база $\tau\times\omega$
Proof Критерий базы в т.п.
1. $\Sigma\subset\tau\times\omega$ - топология произведения
2. $\forall U\in\tau\times\omega\ \forall x\in U\ \exists V\in\Sigma\mid X\in V\subset U$
1 из определения базы

2.
$$U=\bigcup_{i\in I}(A_i\times B_i)\ A_i\in\tau,\ B_i\in\omega$$
$\forall x\in U\implies\exists A_{i_0}\times B_{i_0}\mid x\in A_{i_0}\times B_{i_0}\implies x=(a,b)\ a\in A_{i_0}\in\tau,\ b\in B_{i_0}\in\omega\implies\exists\tilde{A}\in\Sigma_1\mid a\in\tilde{A}\subset A_{i_0}\ b\in\tilde{B}\subset B_{i_0}$
$\implies(a,b)\in(\tilde{A},\tilde{B})\subset U$

Def Отобр $pr_1:X\times Y\to X:(x,y)\mapsto x$
$pr_2:X\times Y\to Y:(x,y)\mapsto y$

Th $pr_i(X_1\times X_2,\tau_1\times\tau_2\to(X_i,\tau_i)$ непрерывна
Proof
$$\forall U\in\tau_i\implies pr_1^{-1}(U)=(U\times X_2)\in\tau_1\times\tau_2$$
Аналогично для pr_2