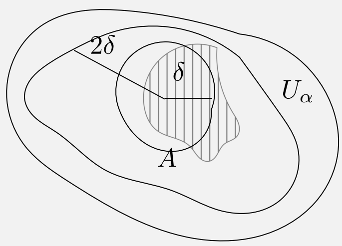
Лемма (Лебега о покрытии). *X - компактное метрическое пространство*
Любые открытые покрытия $\{U_\alpha\}$ пространства X

$$\exists \delta > 0: \ \forall A \subset X, \ diam A < \delta \ \exists \alpha \ A \subset U_\alpha$$

Доказательство. X - метрическое $\implies \forall b \in X \ \exists r_b > 0: \ \exists \alpha: \ D_{r_b}(b) \subset U_\alpha$

$$\left\{D_{\frac{r_b}{2}}\right\} \text{ - окрытое покрытие пространства } X$$

X - компактное $\implies \exists b_1, \dots, b_n: \ X = \bigcup_{i=1}^n D_{\frac{r_{b_i}}{2}}(b_i)$
$\delta \coloneqq min\left\{\frac{r_{b_i}}{2}\right\}$



Пусть $a \in A \ \exists i: \ a \in D_{\frac{r_{b_i}}{2}}(b_i)$
$\forall \subset D_{r_{b_i}}(b_i)$?

$$\forall c \in A \ \rho(c, b_i) \leq \rho(c, a) + \rho(a, b_i) < \delta + \frac{r_{b_i}}{2} \leq r_{b_i} \implies c \in D_{r_{b_i}}(b_i)$$

$$A \subset D_{r_{b_i}}(b_i) \subset U_\alpha$$

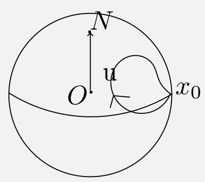
■

Теорема. *При $n > 1$ сфера S^n односвязна*

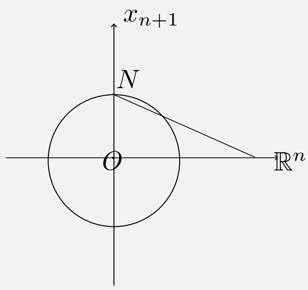
Доказательство. Пусть $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}: \ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$

$$x_0 = (1, 0, \dots, 0)$$

Пусть $u: \ I \to S^n$ - петля с началом в точке x_0



1°. $u(I) \neq S^n \implies \exists N \in S^n \setminus u(I)$
Пусть $S_{p_N}: \ S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ - стереографическая проекция с центром в точке N



$$\frac{|t|}{1} = \frac{|x|}{1 - x_{n+1}}$$

$$t = (t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) \text{ - гомеморфизм}$$

$$(S_{p_N} \circ u) \text{ - петля в } \mathbb{R}^n \text{ с началом в точке } (1, 0, \ldots, 0) \implies \exists \text{ гомотопия } h_t: \ h_0 = S_{p_N} \circ u, \ h_1 = e_{x_0}$$

$$(S_{p_N})^{-1} \circ h_t \text{ - гомотопия, соединяющая } u \text{ с } e_{x_0}$$

2° $u(I) = S^n$. Покроем сферу S^n открытыми полусферами $\{U_\alpha\}$

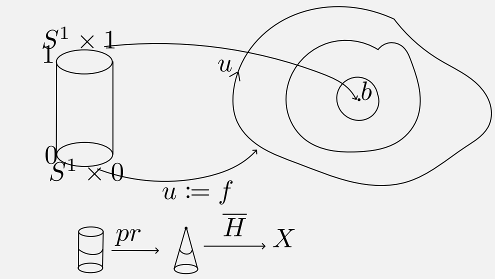
$$u : I \to S^n \text{ непр } \implies \{u^{-1}(U_\alpha\} \text{ - открытое покрытие отрезка } I$$

I - компактное метр-ое $\implies \exists$ разбиение $(t_0, t_1, \ldots, t_n):\ u([t_{i-1}, t_i]) \subset U_\alpha$
$u_i \coloneqq u|_{[t_{i-1}, t_i]}$ - путь в $U_\alpha \neq S^n \implies \exists N \in S^n \setminus U_\alpha, N \notin u_i[t_{i-1}, t_i] \implies S_{p_N} \circ u_i$ - путь в $\mathbb{R}^n \implies$ он гомотопен линейному пути $\implies S_{p_N}^{-1}$ заменяет путь u_i гомотопным ему путем $\widetilde{u}_i$
$\implies u = u_1 u_2 \ldots u_k \simeq \widetilde{u_1}\widetilde{u_2} \ldots \widetilde{u_n} =: \widetilde{u}$
$\widetilde{u}(I)$ - объеденение дуг k окружностей $\implies \widetilde{u}(I) \neq S^n$ по 1° $\widetilde{u} \simeq e_{x_0} \implies u \simeq e_{x_0}$ ■

Замечание. S^1 не односвязна

Теорема (Критерий односвязности)**.** *Пусть X линейно связано: следующие утверждения равносильны:*
1. X односвязно, т.е. любая петля в X с началом в отмеченной точке x_0 гомотопна e_{x_0}
2. Любая петля в X свободно гомотопна нулю
3. любое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ продолжается до непрерывного отображения $D^2 \to X$
4. Любые два пути с одинаковыми началами и концами гомотопны как пути

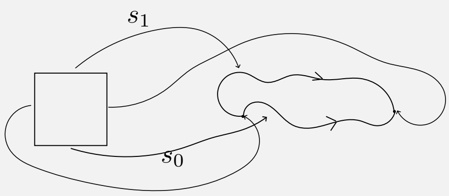
Доказательство. $1 \implies 2$? - очевидно по определению связанной гомотопии
$2 \implies 3$: Пусть $u : S^1 \to X$ - петля в X.
Существует гомотопия $H : S^1 \times I \to X$



K - конус
$pr_b :\ K \to D^2$ - проекция на основанипе - гомеоморфизм

$$\implies \overline{H} \circ pr_b^{-1} :\ D^2 \to X$$

$$(\overline{H} \circ pr_b^{-1})|_{S^1 \times 0} = \overline{H}|_{S^1 \times 0} = H|_{S^1 \times 0} = f$$



по 3 $\exists\ \overline{H} :\ D^2 \to X :\ \overline{H}|_{s_1} = s_0 \overline{s_1}$
$\implies \overline{H} \circ pr$ - искомая гомотопия
$4 \implies 1$: т.к. петля u с началом в точке x_0 и петля e_{x_0} - частный случай пустей с общим началом и концом ■

Накрытия

Определение. Накрытием топологического пространства B называется непрерывное отображение $p : XB$, которое сюрьективно и $\forall b \in B\ \exists$ окрестность $U_b \subset B$ этой точки, для которой $p^{-1}(U_b) = \bigcup_\alpha V_\alpha,\ \forall \alpha$. V_α - открыто в X, $p|_{V_\alpha} :\ V_\alpha \to U_b$ - гомеоморфизм и $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$, если $\alpha \neq \beta$.
X - называется пространством накрытия. B - база накрытия. p - проекция накрытия