КиМ. Лекция

daf

5 ноября 2024 г.

Th Эквив-но для модуля M
1) $M = \sum_{i \in I} M_i$, M_i - простые
2) $M = \bigoplus_{j \in J} M_j$
3) M - вп. приводим
Proof 1) $\implies$ 2) Из леммы при $N = 0$
2) $\implies$ 3) Из леммы
3) $\implies$ 1) Let S - сумма всех простых подмодулей в M
$S \overset{?}{=} M$ $\forall x \in M \setminus S$
Рассмотрим чум

$$(X, \subset) = \{N \leq M \mid S \subset N \wedge x \notin N\} \neq \varnothing \text{ т.к. } S \in X$$

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \implies \text{ верхняя грань } \bigcup_{k \in K} N_k \in X \implies \text{ по лемме Цорна } \exists \max N^\star \mid S \subset N^\star \wedge x \notin N^\star$$

$$Y = \{N_k\}_{k \in K}$$

$$M \text{ - вп. приводим } \implies M = N^\star \oplus C \implies \text{ т.к. } S \subset N^\star, \text{ то C - непростой } \implies \exists A \leq C \mid A \neq 0 \wedge A \neq C$$

$$\implies C - \text{ вп. приводим } \implies C = A \oplus B \implies M = N^\star \oplus A \oplus B$$

$$x \in N^\star \oplus A$$

$$x \in N^\star \oplus B$$

Тогда

$$x \in (N^\star \oplus A) \cap (N^\star \oplus B) \implies x \in N^\star + ((N^\star \oplus A) \cap B) = N^\star$$

$$(N^\star \oplus A) \cap B = 0$$

Артиновы модули

Def Модуль M - артинов, если любая убывающая цепь подмодулей $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ стабилизируется, т.е. $\exists k \in \mathbb{N} \mid M_k = M_{k+1} = \ldots$

Examples 1) Все конечные модули
2) Векторные пр-ва (конечномерные)

Def Кольцо R наз-ся артиновым справа, если R_R - артинов R - модуль ($\equiv$ любая убывающая цепь правых идеалов обрывается)

Task M - артинов $\iff$ любое семейство подмодулей в M имеет min подмодуль

Th 1) Пусть M артинов и $N \leq M \implies$ M - артинов $\iff$ N и ${}^{M}/_{K}$ - артинов
2) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i - простые. Тогда M - артинов $\iff |I| = n < \infty$
Proof
1) $\implies$: M - артинов $\implies$ N - артинов
Let $\overline{M_1} \supset \overline{M_2} \supset \dots$ - убыв цепь в ${}^{M}/_{N}$. $\exists$ вз/одн соотв-е между подмодулями в ${}^{M}/_{N}$ и подмодулем в M, содержащим N $M_1 \supset M_2 \dots$ - убыв цепь в M, которая стаб. Тогда$\overline{M_1} \supset \overline{M_2} \supset \dots$ стабилизируется
$\impliedby$:

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots \implies M_1 \cap N \supset M_2 \cap N \implies M_p \cap N = M_{p+1} \cap N = \dots$$

$${}^{M_1 + N}/_{M} \supset {}^{M_2 + N}/_{N} \supset \dots$$

$$\implies {}^{M_q + N}/_{N} = {}^{M_{q+1}}/_{N} = \dots \implies M_q + N = M_{q+1} + N = \dots$$

Пусть $t = \max(p, q)$

$$M_{t+1} = M_{t+1} + (M_{t+1} \cap N) = M_{t+1} + (M_t \cap N) = M_t \cap (M_{t+1} + N) = M_t \cap (M_t + N) = M_t$$

2) $\implies$: Против $|I| = \infty \implies M \supset \bigoplus_{i \neq i_1} M_i \supset \bigoplus_{i \neq i_1, i_2} M_i$
$\impliedby$:

$$|I| = n \implies M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n \implies \text{ in M } 2^n \text{ подмодулей}$$

Th(Брауэр)
R - кольцо, I - правый идеал в R
1) $R_R = I \oplus J \iff I = eR$, где $e^2 = e$ - идемпотент
2) Если I - min, то $I^2 = 0 \vee I = eR$
Proof $\implies$: $R_R = I \oplus J \implies 1 = e + f,\ e \in I,\ f \in J$
Берем $\forall i \in I$

$$1 = e + f \mid \cdot i \text{ справа} \implies i = ei + fi \implies fi \in J,\ fi = i - ei \in I \implies fi \in I \cap J = \{0\} \implies fi = 0$$

$$\implies i = ei \overset{i=e}{\implies} e = e^2 \text{ - идемп-т; } I = eI;\ eR \subset I,\ \text{с др стороны: } I = eI \subset eR \implies I = eR$$

$\impliedby$: $R = eR \oplus (1-e)R$
a) $\forall r \in R:\ r = er + (1-e)r \implies R = eR + (1-e)R$
b) $\forall x \in er \cap (1-e)R$
$x = er_1 = (1-e)r_2$
$er_1 = (1-e)r_2 \mid \cdot e$
$er_1 = e(1-e)r_2 = (e - e^2)r_2 = 0$
Тогда $R = eR \oplus (1-e)R$
2) $I^2 \neq 0$

$$\implies \exists\ a \in I \mid aI \neq 0; aI \subset I \implies aI = I \implies ae = a \text{ some } e \in I. \text{ Умножим справа на e}$$

$$ae^2 = ae \implies a(e^2 - e) = 0$$

Рассмотрим $K = \{i \in I \mid ai = 0\}$ - правый идеал $K \subset I$; $K \neq I \implies K = 0 \implies e^2 - e = 0 \implies e = e^2$

$$eR \subset I,\ \text{cause } e \in I \implies eR = I$$