Пример

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$A \sim (a_{i,k})$$
$$||Ax|| \leq c||x||$$
$$c^2 = \sum_{i,k} a_{i,k}^2$$
$$||A||^2 \leq \sum_{i,k} a_{i,k}^2$$
$$A : m_n \to m_p$$
$$A \sim (a_{i,k})$$
$$||A|| = \max_i \sum_k |a_{i,k}|$$
$$A : l_2 \to l_2$$
$$A \sim (a_{i,k})$$
$$||A||^2 \leq \sum_{i,k}^{\infty} a_{i,k}^2$$
$$A : m \to m$$
$$||A||^2 \leq \sup_i \sum_k |a_{i,k}|$$
$$(Ax)_{(s)} = \int_a^b Q(s,t)x(t)dt$$
$$a \leq s \leq b \quad a \leq t \leq b$$
$$1)\ A : L_2 \to L_2 \quad ||A||^2 \leq ||Q||^2$$
$$||A||^2 \leq \iint Q^2(s,t)dsdt$$
$$2)\ A : C \to C$$
$$||A|| = \max_s \int_a^b |Q(s,t)|dt$$

Принцип сжимающих отображения для линейного уравнения

X - B - пр-во. A - лин. огр. : $X \to X$

$$||A|| \leq q < 1 \quad x = S(x),\ S(x) = Ax + y$$

Теорема. *Пусть* X *- B - пр-во.* $y \in X,\ A : X \to X$ *лин. огран.* $||A|| \leq q < 1$.
Тогда уравнение $x = Ax + y$ $\exists!$ *решение* $x^\star$

$$x_0 \in X \quad x_{n+1} = Ax_n + y \to x^\star$$

Погрешность

$$||x_n - x^\star|| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot ||x_0 - Ax - y||$$

Множество всех линейных ограниченных операторов ЛНП X в ЛНП Y. Обозначим $(X \to Y)$. Это множество составляет линейное подпространство в линейном пространстве всех линейных операторов, которые отображают X в Y

Пусть $||(A+B)x|| = ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \leq ||A|| \cdot ||x|| + ||B|| \cdot ||x|| = (||A|| + ||B||) \cdot ||x||$

$$||(A+B)x|| \leq (||A|| + ||B||) \cdot ||x|| \implies ||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

$$||(\lambda A)x|| = ||\lambda Ax|| = |\lambda| \cdot ||Ax|| \leq |\lambda| \cdot ||A|| \cdot ||x||$$

$$||\lambda A|| \leq |\lambda| \cdot ||A||$$
$$||A|| = 0 \quad ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| = 0 \; \forall \, x$$
$$||Ax|| = 0 \quad Ax = 0 \quad A = 0$$

Рассмотрим
$$||\lambda A|| = \sup_{||x||=1} ||(\lambda A)x|| = \sup |\lambda| ||Ax|| = |\lambda| \cdot \sup ||Ax|| = |\lambda| \cdot ||A||$$

1) $||A|| \geq 0 \quad ||A|| = 0 \iff A = 0$
2) $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$
3) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

$$||(AB)x|| = ||A(Bx)|| \leq ||A|| \cdot ||Bx|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x|| \; \forall \, x$$
$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$
$$A: \; X \to X$$
$$A^n = A(A^{n-1})$$
$$||A^n|| \leq ||A||^n \text{ - грубая оценка}$$

Пусть $X = Y = C_{[0,1]}$
$$(Ax)_{(s)} = \int_0^s x(t)dt$$
$$||A|| = \max_s \int_0^t dt = 1, \; ||A^n|| \leq ||A||^n = 1$$
$$A(Ax) = \int_0^s \left(\int_0^t x(\tau) d\tau \right) dt = \int_0^s dt \int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^s d\tau \cdot x(\tau) \int_\tau^s dt = \int_0^s (s - \tau) x(\tau) d\tau$$
$$A^n x = \int_0^s \frac{(s - \tau)^{n-1} x(t) dt}{(n-1)!}$$
$$||A^n|| = \frac{1}{n!}$$

Пусть X, Y - ЛНП. $\{A_n\}, \; A$ - лин.огр : $X \to Y$

Определение. $A_n \to A$ по норме (сильная или равномерная сходимость), если $||A_n - A|| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
Если $\forall \, x \; A_n x \to Ax$ (поточечная или слабая сходимость)

$$||A_n x - Ax|| = ||(A_n - A)x|| \leq ||A_n - A|| \cdot ||x||$$

Пусть X, Y - ЛНП.
$$A_n: \; X \to Y \text{ - лин.огр}$$
$$S_n = \sum_{k=0}^n A_k \quad S_n \to S \quad S = \sum_{n=0}^\infty A_n$$
$$\sum_{k=0}^n (A_k x) = S_n x \to Sx = \left(\sum_{n=0}^\infty A_n \right) x$$
$$\sum_{k=0}^n (A_k x) = \left(\sum_{k=0}^n A_k \right) x$$
$$\sum_{n=0}^\infty (BA_n) = B \sum_{n=0}^\infty A_n$$
$$\sum_{n=0}^\infty (A_n B) = \left(\sum_{n=0}^\infty A_n \right) B$$

X - B - пр-во. $A: \; X \to X$
$$||A^n|| \leq a_n, \; \forall n, \; \sum_{n=0}^\infty a_n = \sigma$$

Тогда
$$\sum_{n=0}^\infty A^n = S \; : X \to X \quad ||S|| \leq \sigma$$