Прямые суммы модулей

1) Внешняя прямая сумма

$$M, N \text{ - R - модули}$$

$$M \oplus N = \{(m,n) \mid m \in M,\, n \in N\} \text{ - R - модуль с операциями:}$$

$$(m,n) + (m',n') = (m+m', n+n')$$

$$\forall r \in R : r \cdot (m,n) = (rm, rn)$$

Пусть $M_i,\ i \in I \implies \bigoplus_{i\in I} M_i = \{(\dots, m_i, \dots) \mid m_i \in M_i$ и почти все $m_i = 0\}$

2) Внутренняя прямая сумма

M - R - модуль, N_1, N_2 - подмодуль в M (обозн $N_1, N_2 \leq M$)

$$N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1,\, n_2 \in N_2\} \leq M$$

$$N_1 + N_2 = N_1 \oplus N_2,\ \text{если } N_1 \cap N_2 = \{0\}$$

Упр. $N_1 \oplus N_2 = M \iff \forall\, m \in M\ \exists!\ n_1 \in N_1,\ n_2 \in N_2 \mid m = n_1 + n_2$

Пусть $N_i,\ i \in I$ - подмодуль в M

$$\oplus_{i\in I} N_i = \{n_{i_1} + \dots + n_{i_k} \mid n_{i_j} \in N_{i_j}\} \text{ и } N_j \cap (\sum_{i\neq j} N_i) = \{0\}$$

Упр $M = \bigoplus N_i \iff \forall m \in M\ \exists!\ n_{i_1} \in N_{i_1}, \dots n_{i_k} \mid m = n_{i_1} + \dots + n_{i_k}$

$\implies$: уже есть

!:

$$m = n_{i_1} + \dots n_{i_k} = n_{j_1} + \dots + n_{j_s}$$

$$\text{Если } n_{i_1} \notin N_{j_1}, \dots, N_{j_s} \implies n_{i_1} = n_{j_1} + \dots + n_{j_s} - n_{i_2} - \dots - n_{i_k} \implies n_{i_1} \in N_{i_1} \cap \sum_{i\neq i_1} N_i$$

$$\text{Тогда } m = n_{i_1} + \dots + n_{i_k} = n'_{i_1} + \dots + n'_{i_k}$$

$$(n_{i_1} - n'_{i_1}) + \dots + (n_{i_k} - n'_{i_k}) = 0 \implies -\tilde{n} = (n_{i_2} - n'_{i_2}) + \dots + (n_{i_k} - n_{i_k}) \in \sum_{i\neq i_1} N_i \implies \tilde{n} \in N_{i_1} \cap \left(\sum_{i\neq i_1} N_i\right) = 0$$

$$(n_{i_1} - n'_{i_1}) = \tilde{n}$$

1) $\overset{\sim}{\iff}$ 2)

Циклические модули

Def $_RM$ - кон/пор, если $_RM =< m_1, \dots m_k >= Rm_1 + \dots + Rm_k = \{r_1 m_1 + \dots + r_k m_k \mid r_i \in R, m_i \in M\}$

$_RM$ - циклический, если $_RM =_R< m >= Rm$

Th $_RM$ - циклический $\iff$ $^R/_I$, где I - левый идеал в R

Proof $\implies$:

$$_RM =< m >= Rm$$

$$\phi : R \to M =< m >: r \mapsto rm \text{ - R - гомо-зм сюрьективный}$$

$$\forall r' \in R :\ \phi(r'r) = (r'r)m = r'(rm) = r'\phi(r)$$

$$\overset{1 \text{ th iso}}{\implies} M \cong {}^R/_{\ker\phi},\ \text{где } \ker\phi \leq_R R \implies \ker\phi \text{ - левый идеал}$$

$\impliedby$:

$$_R{}^R/_I = \{r + I \mid r \in R\} =< 1 + I >= R(1+I) \text{ - циклич} \implies M \text{ - циклический}$$

$$\forall r + I \in {}_R{}^R/_I :\ r + I = r(1+I) \in R(1+I)$$

Example Найдём все циклические $\mathbb{Z}$ - модули (абелевы группы)

$$R = \mathbb{Z},\ n\mathbb{Z} \text{ - все идеалы в } \mathbb{Z}$$

$$A \text{ - цикл} \implies A \cong {}_{\mathbb{Z}}Z/_{nZ} \implies A \cong Z_n \vee A \cong Z$$

Свободные модули

Def Пусть M - R - модуль; $\{f\}_{i\in I}$ - мн-во элем-ов из M называется базисом, если:

$$\forall m \in M \; \exists! \; r_{i_1}, \ldots, r_{i_k} \in R \mid m = r_{i_1} f_{i_1} + \cdots + r_{i_k} f_{i_k}$$

R - модуль F называется свободным, если он имеет базис

Example Векторное пространство

Def $f_1, \ldots f_k \in_R M$ - лнз над R, если из $r_1 f_1 + \ldots r_k f_k = 0 \implies r_i = 0$
$\{f_i\}_{i\in I}$ - лнз, если лнз любая её конечная подсистема

Упр $\{f_i\}_{i\in I}$ - базис $\iff$ 1) $M =< f_i >_{i\in I}$ 2)$\{f_i\}_{i\in I}$ - лнз

Th R - модуль F свободен $\iff$ $F = \bigoplus_{i\in I} {}_R R$