# Функан. Лекция (15/05/2025)

## Унитарное пространство. Гильбертово пространство

**Определение.** $X$ - ЛП, $\forall x, z \in X, \quad (x; z)$
1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2) $(x, y) = (y, x)$
3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
4) $(\lambda x, z) = \lambda(x, y)$

Тогда $X$ - унитарное пространство (предгильбертово)

**Определение.** $e_1, ..., e_n$. Определитель Грамма

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & (e_n, e_n) \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow \text{система элементов линейно независима}$$

**Определение.** $X$ - ЛП, $Y$ - унитарное

$$A : X \to Y$$

$A$ - линейный обратимый
$e_1, ..., e_n$ - лнз $\Leftrightarrow \det((Ae_i, Ae_k)) \neq 0$

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y) \ \text{ - неравенство Коши-Буняковского}$$

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

Унитарное пространство $\Longrightarrow$ ЛНП

1) $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda| \ \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2 \ |(x, y)| + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2 \ \|x\| \ \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

В унитарном пространстве:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$x, y \neq 0 \quad |(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\| \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : y = k \cdot x$$

$$\begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases} \Longrightarrow (x_n, y_n) \to (x, y)$$

**Определение.** Полное унитарное пространство называется Гильбертовым пространством (Н - пространство)

$$\mathbb{R}^n, L_2[a,b]$$
$$A \text{ - лин. огранич} \quad A : X \to Y,\, X \text{ - Н-пр-во}$$
$$\forall x, y \quad (Ax, y) = (x, Ay)$$
$$A = A^* \text{ - самосопряженный}$$

$$C = C^*,\, I$$
$$A = I - \lambda \cdot C$$

$$(Ax)_{(s)} = \int_a^b Q(s,t)x(t)dt \quad s \in [a,b]$$

Такой оператор самосопряженный, если:

$$Q(s,t) = Q(t,s)$$

# Границы самосопряженного оператора

$$|(Ax,x)| \le \|Ax\| \cdot \|x\| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|x\|$$
$$|(Ax,x)| \le \|A\| \cdot (x,x)$$
$$-\|A\| \cdot (x,x) \le (Ax,x) \le \|A\| \cdot (x,x)$$

$$\exists m, M : \forall x \quad m(x,x) \le (Ax,x) \le M(x,x)$$

$m, M$ - границы самосопряженного оператора. Среди них имеются $\max m$, $\min M$, эти числа называются точной нижней и верхней границами.

$$\|A\| = \max(|m|, |M|)$$

$$x \ne 0$$
$$m = \inf(Ax,x)$$
$$M = \sup(Ax,x)$$
$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} |(Ax,x)|$$

**Определение.** Если $m > 0$, то этот оператор называют положительно определенным в Н - пространстве

$$\|A\| = M$$

$$C = C^* \quad \|C\| \le q \quad |\lambda|\ q < 1$$
$$A = I - \lambda \cdot C$$

$A$ - положительно определенный