3

Условная вероятность и дискретные вероятностные распределения

1. Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
2. Классические вероятностные распределения.
3. Дискретная случайная величина. Примеры.
4. Независимость дискретных случайных величин.

1. В основе определения вероятности события лежит некоторая совокупность условий K. Если никаких ограничений, кроме условий K, при вычислении вероятности $\mathbf{P}(A)$ не налагается, то такие вероятности называются безусловными.

Однако в ряде случаев приходится находить вероятности событий при дополнительном условии, что произошло некоторое событие B, имеющее положительную вероятность. Такие вероятности мы будем называть *условными* и обозначать символом $\mathbf{P}(A|B)$ или $\mathbf{P}_B(A)$ (под условной вероятностью $\mathbf{P}(A|B)$ мы можем понимать среднюю идеализированную условную частоту, к которой тяготеют реальные частоты $h_N(A\,|\,B) = h_N(AB)/h_N(B)$). Таким образом, определим условную вероятность так $\boxed{\mathbf{P}(A\,|\,B) = \dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)},\ \mathbf{P}(B) \neq 0.}$

Строго говоря, безусловные вероятности также являются условными, так как исходным моментом построенной теории было предположение о существовании некоторого неизменного комплекса условий K.

Рассмотрим следующий ***парадокс Мизеса***. Пусть некий теннисист может поехать на турнир либо в Москву, либо в Лондон, причем турниры происходят одновременно. Вероятность того, что он займет первое место в Москве, равна 0.9 в Лондоне — 0.6онечно, если он туда поедет. Чему равна вероятность того, что он займет где-либо первое место?

Решение: поскольку событие А = {выигрыш турнира в Москве} и событие В = {выигрыш в Лондоне} несовместны, то вероятность события $A\bigcup B$ = {выигрыш турнира в Москве или Лондоне} равна $\mathbf{P}(A\bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 0.9 + 0.6 = 1.5$.

Это противоречит тому, что вероятность любого события, в том числе и события $A\bigcup B$, не превосходит числа 1, т. е. $0 \le \mathbf{P}(A\bigcup B) \le 1$. Почему?

В рамках аксиоматики Колмогорова парадокс с теннисистом решается просто: вероятности 0,9 и 0,6 относятся к разным пространствам элементарных событий, поэтому сложение вероятностей в данном случае не имеет смысла (как мы выясним в дальнейшем, речь идет об условных вероятностях).

Пусть $\mathscr{A}$ – σ-алгебра подмножеств Ω. Пусть, кроме того, $\mathscr{B}$ – непустая система множеств (подалгебра) такая, что $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Мы предположим, что имеется функция $\mathbf{P}(A|B)$ двух переменных, определенная для $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{B}$.

Постулируем следующие аксиомы:

a) $\mathbf{P}(A|B) \ge 0$ и $\mathbf{P}(B|B) = 1$ $(A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B})$.

b) Для фиксированного $B \in \mathscr{B}$ $\mathbf{P}(A|B)$ есть вероятность на $\mathscr{A}$, т.е. если $A_n \in \mathscr{A}$ и $A_n A_m = \varnothing$, $n \neq m$, то

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,|\, B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n | B).$$

c) Если $A \in \mathscr{A}$, $B \subset C$ и $\mathbf{P}(B|C) > 0$, то

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB|C)}{\mathbf{P}(B|C)}.$$

Если системы аксиом a), b), c) выполнена, то мы говорим, что система $[\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathbf{P}(A|B)]$ есть условное вероятностное пространство.

В частности, можно определить условную вероятность по Колмогорову для:

$$A \in \mathscr{A},\ \mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)},\ \mathbf{P}(B) > 0.$$

При таком определении легко проверяются соотношения a), b), c). Так например, покажем c). Имеем:

$$\frac{\mathbf{P}(AB|C)}{\mathbf{P}(B|C)} = \frac{\mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(C)} \cdot \frac{\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(BC)} = \frac{\mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(BC)} = \mathbf{P}(A|BC) = \mathbf{P}(A|B).$$

Мы докажем сейчас несколько теорем, которые непосредственно следуют из аксиом.

Теорема 1. Для $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{B}$ имеем $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B)$.

Доказательство. Утверждение следует из аксиом a) и c), когда $B = C$.

Теорема 2. Для $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{B}$ имеем $\mathbf{P}(A|B) \le 1$.

Доказательство. Согласно теореме 1 и аксиоме b) $\mathbf{P}(A|B) \le \mathbf{P}(B|B)$. Наше утверждение следует из аксиомы a).

Теорема 3. Для $B \in \mathscr{B}$ имеем $\mathbf{P}(\varnothing|B) = 0$.

Доказательство. Утверждение следует из аксиомы b).

Теорема 4. Если ,$B \in \mathscr{B}$ и $AB = \varnothing$, то $\mathbf{P}(A|B) = 0$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1 и теоремы 3.

Теорема 5. Для $B \in \mathscr{B}$ имеем $\mathbf{P}(\Omega|B) = 1$.

Доказательство. Утверждение следует из аксиомы a) и теоремы 1.

Теорема 6. Если для фиксированного $C \in \mathscr{B}$ мы положим $\mathbf{P}^*_C(A) = \mathbf{P}(A|C)$, то система $[\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}^*_C]$ есть вероятностное пространство. Если B есть элемент $\mathscr{A}$ такой, что $BC \in \mathscr{B}$ и $\mathbf{P}^*_C(B) > 0$, если $\mathbf{P}^*_C(A|B)$ определено равенством $\mathbf{P}^*_C(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}^*_C(AB)}{\mathbf{P}^*_C(B)}$, то мы имеем $\mathbf{P}^*_C(A|B) = \mathbf{P}(A|BC)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно, следовательно, $\mathbf{P}^*_C$ – вероятность на $\mathscr{A}$ и $\mathbf{P}^*_C(\Omega) = 1$. Второе утверждение следует из аксиомы c). Далее, мы имеем по теореме 1:

$$\mathbf{P}^*_C(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*_C(AB)}{\mathbf{P}^*_C(B)} = \frac{\mathbf{P}(AB|C)}{\mathbf{P}(B|C)} = \frac{\mathbf{P}(ABC|C)}{\mathbf{P}(BC|C)} = \frac{\mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(BC)} = \mathbf{P}(A|BC).$$

Теорема 7. Предположим, что $\Omega \in \mathscr{B}$ мы положим $\mathbf{P}^*(A) = \mathbf{P}(A|\Omega)$. Тогда система $[\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}^*]$ есть вероятностное пространство. Кроме того, если $\mathbf{P}^*(B) > 0$, то мы имеем $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$.

Замечание. Класс $\mathscr{B}$ может содержать B такое, что $\mathbf{P}^*(B)=0$. Другой случай, когда B, для которых $\mathbf{P}^*(B)>0$, не содержатся в $\mathscr{B}$. Следовательно, $[\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathbf{P}(A|B)]$ не необходимо совпадает с Колмогоровским вероятностным пространством
$[\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}(A|B)]$.

Доказательство. Теорема 7 – специальный случай теоремы 6.

Формула умножения.

Определяя при $\mathbf{P}(B)>0$ условную вероятность как

$$\mathbf{P}(A|B)=\frac{\mathbf{P}(A\cdot B)}{\mathbf{P}(B)},$$

получаем *формулу умножения*:

$$\mathbf{P}(A\cdot B)=\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B).$$

Аналогично, если $\mathbf{P}(A)>0$, то

$$\mathbf{P}(A\cdot B)=\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A).$$

Применяя несколько раз формулу для n событий ($\mathbf{P}(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1})>0$), получаем формулу умножения в общем виде:

$$\mathbf{P}(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=\mathbf{P}(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbf{P}(A_1).$$

Например, при $n=3$ получаем $\mathbf{P}(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=\mathbf{P}(A_3|A_1\cdot A_2)\cdot\mathbf{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbf{P}(A_1)$.

Пример 1. Рассмотрим задачу распределения r различимых шаров по n различимым ящикам. Пусть $B_k(r,n)$ – число пустых ящиков равно k. Покажем, что для $k\ge 1$

а) $\mathbf{P}(B_k(r,n))=C_n^k\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^r\mathbf{P}(B_o(r,n-k))$;

б) $\mathbf{P}(B_o(r,n))=\displaystyle\sum_{j=1`}^{n}C_n^j(-1)^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^r$.

Доказательство. а) Пусть событие $A_i=i$-й ящик остался пустой. Тогда

$$\mathbf{P}(B_k(r,n))=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}\overline{A}_{j_1}\cdot\ldots\cdot\overline{A}_{j_{n-k}})=C_n^k\mathbf{P}(A_1\cdot\ldots\cdot A_k\overline{A}_{k+1}\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n),$$

где $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\}=\{1,\ldots,n\}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}$.

По формуле умножения

$$\mathbf{P}(A_1\cdot\ldots\cdot A_k\overline{A}_{k+1}\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n)=\mathbf{P}(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)\cdot\mathbf{P}(\overline{A}_{k+1}\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_k)$$

и $\qquad\mathbf{P}(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)=\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^r$,

$$\mathbf{P}(\overline{A}_{k+1}\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_k)=\mathbf{P}(B_o(r,n-k)).$$

б) $\mathbf{P}(\overline{B}_o(r,n))=\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_i\mathbf{P}(A_i)-\sum_{i<j}\mathbf{P}(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}\mathbf{P}(A_iA_jA_k)-\ldots=$

$$=C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^r-C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^r+C_n^3\left(1-\frac{3}{n}\right)^r-\ldots\ .$$

В частности, $\mathbf{P}(B_o(n,n))=\displaystyle\sum_{j=1`}^{n}C_n^j(-1)^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^r=\frac{n!}{n^n}$.

(Попробуйте напрямую доказать последнее равенство).

Определение 1. Два события A и B называются *независимыми* (относительно вероятности $\mathbf{P}$), если

$$\boxed{\mathbf{P}(A\cdot B)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B).}$$

Определение 2. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любых $k=2,\dots,n$ и $1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_k})=\mathbf{P}(A_{i_1})\cdot\mathbf{P}(A_{i_2})\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Если это соотношение выполнено для $k=2$, то заданные события называются *попарно независимыми*.

Понятие независимости событий A и B для случая $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)>0$ может быть выражена в терминах условных вероятностей: два события A и B *независимы*, если (доказать самим !)

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A\,|\,B) \text{ или } \mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(B\,|\,A).$$

В определении независимости двух событий это свойство вводится для фиксированной вероятности $\mathbf{P}$. Это означает, что два события могут быть независимыми относительно одной вероятности и не быть независимыми относительно другой. Действительно, пусть проводятся три повторных независимых испытания, каждое из которых имеет два исхода: «успех» (У) и «неудача» (Н). Предположим, что $\mathbf{P}(H)=p$, где $0\le p\le 1$. Тогда $\mathbf{P}(У)=1-p$. Проведем три независимых испытания и рассмотрим события

$$A=\{\text{не более одного успеха}\},\quad B=\{\text{исход один и тот же}\}.$$

Ясно, что

$$A=\{ННН, ННУ, НУН, УНН\},\quad B=\{ННН, УУУ\}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(A)=p^3+3p^2(1-p),\quad \mathbf{P}(B)=p^3+(1-p)^3,\quad \mathbf{P}(AB)=p^3.$$

Теперь рассмотрим равенство

$$\mathbf{P}(A\cdot B)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B).$$

Оно имеет место в следующих случаях: $p=0$, $p=1$ и $p=1/2$ – т.е. в симметричном случае. Это означает, что события A и B при $p=0$, $p=1$ и $p=1/2$. Для остальных значений вероятности успеха p они являются зависимыми.

Теперь посмотрим, следует ли из попарной независимости независимость в совокупности? Следует ли из независимости тройкой попарная независимость и т.д.

Пример 2. Подбрасываются два одинаковых симметричных кубика.

Рассмотрим события

$A=$ на первом кубике выпадает 1, 2 или 3;

$B=$ на втором кубике выпадает 4, 5 или 6;

$C=$ сумма очков на обоих кубиках делится на 6.

Покажем, что события A, B, C попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности. Действительно,

$$C=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,6)\},$$

поэтому

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{P}(B)=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{P}(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

$$\mathbf{P}(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B),\quad \mathbf{P}(AC)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(C),$$

$$\mathbf{P}(BC)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C).$$

Но

$$\mathbf{P}(ABC)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C),$$

т.е. тройкой эти события зависимы, откуда следует, что эти события не являются независимыми в совокупности.

Пример 3. Подбрасываются два одинаковых симметричных кубика.

Рассмотрим события

$A =$ на первом кубике выпадает 1, 2 или 3;

$B =$ на первом кубике выпадает 3, 5 или 6;

$C =$ сумма очков на обоих кубиках равна 5.

Тогда,

$$C=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},$$

поэтому

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{P}(B)=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{P}(C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},$$

$$\mathbf{P}(AB)=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B),\ \ \mathbf{P}(AC)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(C),$$

$$\mathbf{P}(BC)=\frac{1}{36}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C).$$

Но

$$\mathbf{P}(ABC)=\frac{1}{36}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C),$$

т.е. тройкой эти события независимы, хотя попарно эти события зависимы.

Пример 4. Подбрасываются два одинаковых симметричных кубика.

Рассмотрим события

$A =$ на первом кубике выпадает 1, 2 или 6;

$B =$ на втором кубике выпадает 2, 3 или 5;

$C =$ сумма очков на обоих кубиках равна 5.

Тогда

$$C=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},$$

поэтому

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{P}(B)=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{P}(C)=\frac{1}{9},$$

$$\mathbf{P}(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B),\ \ \mathbf{P}(AC)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(C),$$

$$\mathbf{P}(BC)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C).$$

Но

$$\mathbf{P}(ABC)=\frac{1}{36}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C),$$

т.е. попарно и тройкой эти события независимы, откуда следует, что эти события являются независимыми в совокупности.

Пример 5. Подбрасываются два одинаковых симметричных кубика.

Рассмотрим события

$A =$ на первом кубике выпадает 1, 5 или 6;

$B =$ на первом кубике выпадает 3, 5 или 6;

$C =$ сумма очков на обоих кубиках равна 5.

Тогда $C = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$,

поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{9},$$

$$\mathbf{P}(AC) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(C), \quad \mathbf{P}(BC) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C).$$

Но

$$\mathbf{P}(ABC) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C),$$

т.е. попарно и тройкой эти события зависимы.

Пример 6. Подбрасываются два одинаковых симметричных кубика.

Рассмотрим события

$A =$ на первом кубике выпадает 1, 2 или 5;

$B =$ на первом кубике выпадает 2, 3 или 6;

$C =$ сумма очков на обоих кубиках равна 5.

Тогда

$C = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$,

поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{9},$$

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B), \quad \mathbf{P}(AC) = \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(C),$$

$$\mathbf{P}(BC) = \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C),$$

$$\mathbf{P}(ABC) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C).$$

Определение 3. Случайные события A_1 и A_2 называются *условно независимыми* относительно заданного события , $\mathbf{P}(B) > 0$, если

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 | B) = \mathbf{P}(A_1 | B) \mathbf{P}(A_2 | B). \qquad (1)$$

Какова связь между понятиями независимости и условной независимости?

Пример 7. Предположим, что симметричная монета подбрасывается 2 раза.

Рассмотрим события

$A_k = \{$ при k-м бросании выпал «герб» $\}$, $k = 1, 2$,

$B = \{$ при двух бросаниях выпала по крайней мере одна «решка»$\}$.

Тогда

, $\mathbf{P}(A_1 A_2) = \frac{1}{4} \mathbf{P}(A_1 A_2) = \frac{1}{4}$, так что $\mathbf{P}(A_1 A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)$,

и, значит события A_1, A_2 независимы.

Далее,

$$\mathbf{P}(A_1 | B) = \mathbf{P}(A_2 | B) = \frac{1}{3}, \text{ но } \mathbf{P}(A_1 A_2 | B) = 0.$$

Таким образом, условие (1) не выполнено, и, следовательно, независимые события A_1, A_2 не являются условно независимыми относительно B.

Пример 8. Пусть имеются две монеты, скажем 1 и 2, для которых исход «герб» имеет вероятность соответственно p_1 и , $0 \le p_i \le 1,\ i=1,2$. Предположим, что . Случайным образом выберем монету и подбросим ее дважды.

Рассмотрим события

$A_k =$ { при k -м бросании выпал «герб» }, $k=1,2$,

$B =$ { для эксперимента выбрана первая монета }.

Тогда

$$\mathbf{P}(A_1A_2\,|B) = p_1p_2, \quad \mathbf{P}(A_1|B) = p_1, \quad \mathbf{P}(A_2|B) = p_2,$$

т.е. соотношение (1) выполнено, и, значит, события A_1, A_2 условно независимы относительно B. Далее имеем

$$\mathbf{P}(A_1A_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2), \quad \mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2),$$

и, поскольку , $\mathbf{P}(A_1A_2) \ne \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_1A_2) \ne \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)$, т.е. события , A_2A_2 не являются независимыми хотя они условно независимы.

Приведенные примеры показывают, насколько сложным является понятие независимости событий.

Парадокс независимости. Юноша играет со своими родителями в теннис. Вероятность того, что он выиграет у мамы, равна p, а вероятность того, что он выиграет у отца равна q, где $0 < q < p < 1$. Юноша получит приз, если он выиграет по крайней мере две игры подряд из трех. При этом порядок их может быть ПМП (сначала с папой, потом с мамой, и наконец, с папой) или МПМ. При какой из этих двух комбинаций более вероятно получить приз?

Кажется, что комбинация МПМ более предпочтительна, чем ПМП, поскольку в последней придется два раза играть с отцом. Подсчитаем эти вероятности в предположении независимости.

Пусть комбинация – ПМП. Тогда юноша должен выиграть 1,2 матч (вероятность этого qp), либо 2,3 матч, т.е. хотя бы в одной из этих комбинаций. Тогда $P_{\text{ПМП}}(\ge 2) = qp + pq - qpq = 2pq - q^2p$, а $P_{\text{МПМ}}(\ge 2) = 2pq - p^2q < 2pq - q^2p$, что противоречит казалось бы здравому смыслу. Но на самом деле у юношу есть две попытки выиграть у отца, вместо одной в первом случае.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$– конечное вероятностное пространство. Всегда ли существуют на нем независимые события?

Прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A и B такие события, что $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Тогда необходимым и достаточным условием их независимости является выполнение равенства*

$$\mathbf{P}(AB)\cdot\mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = \mathbf{P}(\overline{A}B)\cdot\mathbf{P}(A\overline{B}).$$

Доказательство. 1) Если события A и B независимы, то независимыми будут и события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$. Кроме того, $\mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = \mathbf{P}(\overline{A}\cdot\overline{B})$ и события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ тоже независимы, то получаем требуемое.

2) Поскольку $\mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB), \mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)$,

$\mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(AB)$, то перемножая равенства получим, что

$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)$.

Теперь перейдем к примеру конечного вероятностного пространства, на котором существуют независимые события.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathscr{A}$ – σ – алгебра, порожденная элементарными исходами с алгеброй всех его подмножеств и $\mathbf{P}(\omega_1) = p_1 = \dfrac{1}{12}$, $\mathbf{P}(\omega_2) = p_2 = \dfrac{1}{4}$, $\mathbf{P}(\omega_3) = p_3 = \dfrac{1}{8}$, $\mathbf{P}(\omega_4) = p_4 = \dfrac{1}{6}$, события $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ будут независимыми. Если же $p_1 = \dfrac{1}{13}, p_2 = \dfrac{2}{13}, p_3 = \dfrac{3}{13}, p_4 = \dfrac{7}{13}$, то не существует в $\mathscr{A}$ пары независимых событий A и B кроме достоверного и невозможного. Для σ – алгебры, порожденной исходами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ и $\mathbf{P}(\omega_1) = p_1 = \dfrac{1}{3}$, $\mathbf{P}(\omega_2) = p_2 = \dfrac{1}{3}$, $\mathbf{P}(\omega_3) = p_3 = \dfrac{1}{3}$, не существует нетривиальных независимых событий. Для бесконечных σ – алгебр, например на единичном квадрате, если $\mathbf{P}(A)$ есть площадь множества A, то события – попадание в прямоугольники $(0, 0.5)\times(0,1)$ и $(0,1)\times(0, 0.5)$ будут независимыми событиями.

Формула полной вероятности.

Пусть $B_1, B_2, \dots, B_n$ – полная система несовместных событий и пусть $\mathbf{P}(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для произвольного события $A \in \mathscr{A}$ имеем $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cdot B_i)$. Из несовместности событий B_i, B_j ($i \neq j$) получаем $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \cdot B_i)$. Из формулы умножения

$\mathbf{P}(A \cdot B_i) = \mathbf{P}(A \mid B_i)\mathbf{P}(B_i)$, поэтому $\quad \mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid B_i)\mathbf{P}(B_i)$.

Отсюда

$$\inf_n \mathbf{P}(A \mid B_n) \le \mathbf{P}(A) \le \sup_n \mathbf{P}(A \mid B_n).$$

Пример 9. Имеется урна, в которой M бракованных изделий и $N - M$ годных, внешне неразличимых. Найти вероятность того, что второе выбранное изделие – бракованное.
Решение. Пусть события $A_i, i = 1, 2$ – появление бракованного изделия при i-м извлечении. Здесь надо уточнить, что делать с первым изделием. Возможны два случая: а) выбор без возвращения; б) выбор с возвращением.

Найдем $\mathbf{P}(A_1)$ вероятность события A_1. Естественно в обоих случаях по классическому способу она равна отношению числа благоприятствующих исходов M к числу всех возможных N и равновозможных исходов, т.е.

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{M}{N}.$$

Теперь найдем $\mathbf{P}(A_2)$ вероятность события A_2. Рассмотрим случай а).

Если произошло событие A_1, то

$$\mathbf{P}(A_2 | A_1) = \frac{M-1}{N-1}.$$

Если же произошло событие $\overline{A}_1$, то

$$\mathbf{P}(A_2 | \overline{A}_1) = \frac{M}{N-1}.$$

Кроме того, по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A_2)=\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1)\mathbf{P}(\overline{A}_1)=\frac{M-1}{N-1}\cdot\frac{M}{N}+\frac{M}{N-1}\cdot\frac{N-M}{N}=\frac{M}{N}$$

и здесь $\mathbf{P}(A_2)=\mathbf{P}(A_1)\neq\mathbf{P}(A_2|A_1)\neq\mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1)$.

В случае б) выбора с возвращением после выбора первого изделия мы имеем исходную ситуацию, т.е. вероятность $\mathbf{P}(A_2)$ не зависит от того, какое изделие было выбрано первым: годное или бракованное:

$$\mathbf{P}(A_2)=\mathbf{P}(A_2|A_1)=\mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1)=\frac{M}{N}.$$

Пример 9.0. Случайное блуждание. Пусть частица блуждает на прямой и выходит из точки n, делая шаг в точку $n-1$ с вероятностью p и шаг в точку $n+1$ с вероятностью $q=1-p<p,$ т.е. $p>0.5.$ Обозначим через $f(n)-$вероятность того, что частица выйдя из точки $n\in\mathbf{Z}$ попадет в точку 0. Из формулы полной вероятности следует, что

$$f(n)=q\cdot f(n-1)+p\cdot f(n+1). \qquad (*)$$

Это разностное уравнение и его решение будем искать в виде: $f(n)=\lambda^n, \lambda>0.$ Подставляя это решение в исходное разностное уравнение, получим, что λ должно удовлетворять следующим уравнениям:

$$\lambda^n=q\lambda^{n-1}+p\lambda^{n+1}\ \Leftrightarrow\ p\lambda^2-\lambda+q=0,$$

решениями которого являются корни $\lambda_1=q/p$ и $\lambda_2=1$.

Заметим, что если λ_1 и λ_2-решения уравнения (*), а C_1,C_2-произвольные константы, то $f(n)=C_1\cdot\lambda_1^n+C_2\cdot\lambda_2^n$ также будет решением уравнения (*). Поэтому,

$f(1)=q/p.$ (с учетом начальных условий)

Формула Байеса.

(Томас Байес (1702-1761) образование получил дома. Предположительно учитель Муавр, который в Лондоне вел частное преподавание. Отец Томаса был членом королевского общества, имел духовный сан и был пастором в одной из церквей Лондона. Т. Байес начал помогать ему. В 1731 г. пишет трактат «Божественная доброта, или попытка доказать, что принцип конечного божественного поведения и управления является счастьем его создателя». Кроме этого известно письмо Т. Байеса Дж.Кентону под названием «Опыт решения задачи по теории вероятностей покойного достопочтенного мистера Байеса, члена королевского общества, сообщено мистером Прайсом в письме к Джону Кентону, магистру искусств, члену королевского общества» (1763), где якобы была получена формула Байеса, но так она стала называться с легкой руки Лапласа).

Рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$:

$$B_i\cdot B_j=\varnothing, i\neq j,\ \bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega,\ \mathbf{P}(B_i)>0\ (i=1,2,\dots,n),\ \mathbf{P}(A)>0.$$

Имеем

$$\mathbf{P}(B_i|A)=\frac{\mathbf{P}(A\mid B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{\mathbf{P}(A\mid B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(A\mid B_j)\mathbf{P}(B_j)}.$$

Полученная формула называется *формулой Байеса*. События $B_1, B_2, \dots, B_n$ часто называют «гипотезами» и говорят, что формула Байеса дает возможность пересчитать вероятность $\mathbf{P}(B_i|A)$ гипотезу B_i после наступления события A (*апостериорная* вероятность); при этом $\mathbf{P}(B_i)$ называют *априорными* вероятностями.

Задача на формулу Байеса.

Пример 10а. На станции находятся три телефонных автомата, которые принимают монеты по 20 пенсов. Один из них (например, первый) никогда не работает, третий работает всегда,

а второй работает с вероятностью ½. Оправляясь в столицу на целый день, я хотел бы определить, какой из телефонов надежный, чтобы по возвращении я мог им воспользоваться. На станции ни души, и у меня есть всего лишь три монеты в 20 пенсов. Я пробую один телефон, и он не работает, затем два раза подряд пробую звонить по другому телефону, и оба раза он работает. Какова вероятность того, что этот второй выбранный телефон является надежным?
Решение. Пусть $A-$ рассматриваемое событие: первый из опробованных телефонов не работал, а второй дважды работал и пусть $B_i -$выбран $i-$й телефон ($i=1,2,3$),

Тогда $A = B_1B_2 \bigcup B_1B_3 \bigcup B_2B_3$, т.е. первый выбранный телефон не работает, а второй выбранный телефон работает с вероятность ½. Теперь

$$\mathbf{P}(A\,|\,B_1B_2)=\frac{1}{4},\,\mathbf{P}(B_1B_2)=\frac{1}{9},\quad \mathbf{P}(A\,|\,B_1B_3)=1,\,\mathbf{P}(B_1B_3)=\frac{1}{9},\quad \mathbf{P}(A\,|\,B_2B_3)=\frac{1}{2},\,\mathbf{P}(B_2B_3)=\frac{1}{9},$$

поэтому

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A\,|\,B_1B_2)\cdot\mathbf{P}(B_1B_2)+\mathbf{P}(A\,|\,B_1B_2)\cdot\mathbf{P}(B_1B_2)+\mathbf{P}(A\,|\,B_1B_2)\cdot\mathbf{P}(B_1B_2)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{7}{36}\quad \text{и}$$

$$\mathbf{P}(B_3\,|\,A)=\mathbf{P}(B_1B_3\,|\,A)+\mathbf{P}(B_2B_3\,|\,A)=\frac{\mathbf{P}(A\,|\,B_1B_3)\mathbf{P}(B_1B_3)}{\mathbf{P}(A)}+\frac{\mathbf{P}(A\,|\,B_2B_3)\mathbf{P}(B_2B_3)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}.$$

Пример 10. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную – с вероятностью 0.05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.
Решение. Введем обозначения

$C=$ {изделие удовлетворяет стандарту},

$\varGamma=$ {изделие является годным}.

Тогда из условий задачи получаем:

$$\mathbf{P}(C)=0.96,\quad \mathbf{P}(\overline{C})=0.04,\quad \mathbf{P}(\varGamma\,|\,C)=0.98,\quad \mathbf{P}(\varGamma\,|\,\overline{C})=0.05.$$

Из формулы Байеса

$$\mathbf{P}(C|\varGamma)=\frac{\mathbf{P}(\varGamma|C)\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(\varGamma)}=\frac{0.98\cdot 0.96}{0.98\cdot 0.96+0.05\cdot 0.04}=0.998.$$

Пример 11. Пусть есть две гипотезы относительно состава представленной урны: $H_1 -$ урна содержит 70% красных и 30% белых шаров;

$H_2 -$ урна содержит 30% красных и 70% белых шаров.

Эти гипотезы равновозможны, т.е. $\mathbf{P}(H_1)=\mathbf{P}(H_2)=\dfrac{1}{2}$.

Пусть производится выбор с возвращением этих шаров – в результате эксперимента в выборке оказалось 8 красных и 4 белых шара (событие A).

Используя формулу Байеса, покажите, что $\mathbf{P}(H_1|A)=0.97$. В такое значение апостериорной вероятности трудно поверить. Но еще более удивительным является следующее: пусть в выборке 105 красных и 101 белых шара (событие B). Тогда $\mathbf{P}(H_1|B)=0.97$. Вероятность оказалась той же самой (она зависит от разности числа красных и белых шаров, но не их отношения).
Пример 12. ***Техника рандомизированного ответа.***
Рассмотрим задачу. Вам задают вопрос, на который вы должны ответить либо "да" (ставите 1 – A – событие $\overline{A}$

B и $\overline{B}$, результат которого опрашиваемому не сообщают. Пусть $\mathbf{P}(A) = p,$ которая ***неизвестна***, и $\mathbf{P}(B) = \lambda \neq \frac{1}{2}$, которая ***известна***. Если наступает событие $B,$ то отвечающий дает правдивый ответ, если наступает событие $\overline{B},$ то опрашиваемый отвечает наоборот, т.е. ставит 1, если имеет место событие A, и 0, если имеет место событие $\overline{A}$. Обозначим вероятность исхода 1 через $q.$ Тогда

$$q = \mathbf{P}(A \mid B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\overline{A} \mid \overline{B})\mathbf{P}(\overline{B}) = p\lambda + (1-p)(1-\lambda) = p(2\lambda - 1) + 1 - \lambda.$$

Вместо q нам известна её оценка в виде частоты $\frac{m}{n},$ то

$$\hat{p} = \frac{\frac{m}{n} - (1-\lambda)}{2\lambda - 1} \ .$$

Пусть например, $\frac{m}{n} = 0.35$, $\lambda = 0.75$. Тогда $\hat{p} = \frac{0.35 - 0.25}{0.5} = 0.2$.

Разновидностью является ситуация вынужденного ответа, когда при наступлении события $\overline{B}$ всегда ставится 1. Здесь λ здесь может быть равна и 0.5. В последнем случае

$$\hat{p} = \frac{\frac{m}{n} - (1-\lambda)}{\lambda}.$$

Пусть например, $\frac{m}{n} = 0.6$, $\lambda = 0.5$. Тогда $\hat{p} = \frac{0.6 - 0.5}{0.5} = 0.2$

2. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые примеры нахождения вероятностей и определим классические вероятностные распределения.

1) Биномиальное распределение $B(n,p)$.

Пусть имеется урна, в которой M бракованных деталей и $N-M$ годных. Производится выбор с возвращением n раз (т.е. повторная выборка объема n). В каждом испытании либо наступает событие $A = \{$деталь бракованная$\}$, либо наступает противоположное событие $\overline{A} = \{$деталь годная$\}$. Обозначим через $B_{n,k} = \{$событие A в выборке объема n появилось k раз$\}$. Например, $C_1 = \underbrace{AA...A}_{k\ раз}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{(n-k)\ раз}$. В каждом испытании событие A появляется с вероятностью, равной $p = \frac{M}{N}$, $\mathbf{P}(A) = p$. Тогда $\mathbf{P}(C_1) = p^k q^{n-k}$, где $q = 1-p$. Искомая вероятность $\mathbf{P}(B_{n,k})$ равна сумме только что вычисленной вероятности для всех различных способов k появлений и $n-k$ непоявлений события A. Это число равно числу сочетаний C_n^k, следовательно,

$$p_k = \mathbf{P}(B_{n,k}) = C_n^k\, p^k q^{n-k}\,, k = 0, 1, \dots, n\,.$$

Это так называемое *биномиальное распределение* $B(n,\, p)$. На традиционном языке схема Бернулли выглядит следующим образом: *Испытаниями Бернулли называются независимые испытания с двумя исходами и с вероятностью успеха, не меняющейся от испытания к испытанию.*

Это определение не совсем ясно математически, но с его помощью можно узнавать, в каких конкретных ситуациях речь идет об испытаниях Бернулли. Испытаниями Бернулли будут, например, бросание симметричной монеты, стрельба в цель нескольких одинаково метких стрелков (попадание – успех). Определению испытаний Бернулли не будут удовлетворять бросания по-разному искривленных монет (от бросания к бросанию меняется вероятность успеха), стрельба в цель при наличии корректировки (нет независимости результатов выстрелов и вероятности успеха).

Найдем теперь такое k, при котором вероятность p_k максимальна (*наиболее вероятное значение, или мода*). Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{C_n^k\, p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1}\, p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)\,p}{k\,(1-p)}$$

и найдем k такое, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{(n-k+1)\,p}{k\,(1-p)} \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad k \le p\,(n+1)\,.$$

Тогда имеется либо одно целое значение, удовлетворяющее неравенству

$$np - q < k < np + p\,,$$

либо два таких целых, что

$$np - q \le k \le np + p\,,$$

поскольку разность между правой и левой частями последнего неравенства равна 1.

Пример 13. Какова вероятность того, что при 8 подбрасываниях монеты герб выпадет 5 раз?

Решение. Имеем: $\mathbf{P}(A_{8,5}) = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{8-5} = \frac{56}{128} = \frac{7}{32} = 0.21875\,.$

Пример 14. Известно, что вероятность рождения мальчика равна 0.512. Какова вероятность того, что среди 100 новорожденных ровно 51 мальчик?

Решение. Найдем искомую вероятность используя биномиальное распределение. Именно, обозначим через A_{51} – событие: среди 100 новорожденных ровно 51 мальчик. Тогда

$$\mathbf{P}(A_{51}) = C_{100}^{51} \cdot (0.512)^{51} \cdot (0.488)^{49} = 0.0795413625.$$

Пример 15. Каждая из двух урн содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих урнах равно 25. Из каждой урны наугад вынимают по одному шару. Зная, что вероятность того, что оба вынутых наугад шара окажутся белыми, равна 0.54, найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.

Решение. Пусть общее количество шаров в первой и второй урнах равно m_1 и m_2 соответственно (для определенности считаем $m_1 \le m_2$), а количество белых шаров в этих урнах равно k_1 и k_2 соответственно. Тогда вероятность того, что оба шара белые равна $(k_1/m_1)\cdot(k_2/m_2)$. Получаем соотношения:

$$,\ m_1 + m_2 = 25\,.$$

Так как $27m_1m_2 = 50k_1k_2$, то хотя бы одно из чисел m_1, m_2 делится на 5. Но сумма $m_1 + m_2$ тоже делится на 5, поэтому каждое из чисел m_1, m_2 делится на 5. Таким образом имеем всего две возможности: либо $m_1 = 5, m_2 = 20$, либо $m_1 = 10, m_2 = 15$. В случае $m_1 = 5, m_2 = 20$ получаем

$$k_1k_2 = 54\,,\ \text{где}\ \ 0 \le k_1 \le 5\,,\ \ 0 \le k_2 \le 20\,.$$

Перебрав все возможные значения, найдем , $k_2 = 18$. Тогда в первой урне 2 черных шара, во второй тоже 2 черных шара, и вероятность вытащить два черных шара равна $(2/5)\cdot(2/20) = 0.04$. Аналогично в случае $m_1 = 10, m_2 = 15$ находим $k_1 = 9$, $k_2 = 9$. Тогда в первой урне 1 черный шар, во второй – 6 черных шаров, и вероятность вытащить два черных шара снова равна $(1/10)\cdot(6/15) = 0.04$ (в обоих случаях ответы одинаковы).

2) Полиномиальное распределение. Пусть имеем n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться одно из m событий $A_1, A_2, \dots, A_m$ и пусть вероятности $p_j = \mathbf{P}(A_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, не зависят от номера испытания (например, производится выбор с возвращением из урны, содержащей изделия разного сорта A_j), причем $p_j \geq 0$ и $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$. Пусть $B_{k_1 k_2 \dots k_m}$ обозначает событие, что в n испытаниях событие A_1 появилось k_1 раз, событие $A_2 -$ k_2 раз и т.д. , причем , $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Тогда

$$\mathbf{P}(B_{k_1 k_2 \dots k_m}) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m},$$

которое назовем полиномиальным распределением. Вероятность $\mathbf{P}(B_{k_1 k_2 \dots k_m})$ есть соответствующий член разложения $(p_1 + p_2 + \dots + p_m)^n$ в соответствии с полиномиальной теоремой. В частности при $m = 2$ получаем биномиальное распределение.

3) Гипергеометрическое распределение. Пусть урна содержит M бракованных и $N - M$ годных изделий ($M < N$). Производится выбор без возвращения объема n ($n \leq N$). Обозначим через $A_{n,k}^{N,M}$ событие, которое состоит в том, что среди n выбранных изделий ровно k бракованных (при этом должно выполняться условие $\max(0, M + n - N) \leq k \leq \min(n, M)$).

Вероятность события $A_{n,k}^{N,M}$ подсчитывается следующим образом (первое соотношение). Мы исходим из предположения, что все выборки по n объектов из N равновероятны. Число таких выборок равно $C_N^n = \dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}$. При этом $C_N^n = 0$ при $n < 0$ или $n > N$. При этом число выборок из M дефектных объектов по k дефектных объектов равно C_M^k, а число способов выбора из $(N - M)$ годных изделий по $(n - k)$ годных изделий, равно C_{N-M}^{n-k}. Общее число событий, соответствующих появлению в выборке объема kk дефектных изделий и $(n - k)$ годных, равно произведению $C_M^k C_{N-M}^{n-k}$. Искомую вероятность найдем как отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу исходов, т.е.

$$\mathbf{P}(A_{n,k}^{N,M}) = \frac{C_M^k\, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_n^k\, C_{N-n}^{M-k}}{C_N^M},\ \text{для}\ \max(0, M + n - N) \leq k \leq \min(n, M).)$$

События $A_{n,k}^{N,M}$ образуют полную группу несовместных событий, т.е.

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \mathbf{P}(A_{n,k}^{N,M}) = 1.$$

Второе равенство можно вывести либо исходя из представления числа сочетаний через факториалы, либо непосредственно. Именно, пусть $N -$ номера мест, занимаемых объектами, среди которых указано n мест, образующих выборку. Рассматриваем всевозможные размещения M дефектных объектов по N местам. Число таких размещений равно . Событию, при котором в выборке обнаружено ровно k дефектных объектов, благоприятствуют размещения k дефектных объектов на n указанных для выборки местах, и $M - k$ дефектных объектах на $N - n$ местах, не включенных в выборку. Общее число благоприятствующих исходов равно $C_n^k\, C_{N-n}^{M-k}$. Искомую вероятность получим как отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу исходов.

4) Полигипергеометрическое распределение. Обобщим предыдущий случай следующим образом. Предположим, что имеется урна, содержащая шары m различных цветов, более точно M_i шаров i-го цвета ($i = 1, 2, \dots, m$). Пусть $N = \sum_{i=1}^{m} M_i$ – общее число шаров и пусть $B_{k_1 k_2 \dots k_m}$ обозначает событие, состоящее в том, что в выборке объема n (выбор без возвращения) шаров первого цвета k_1, второго k_2, … , m-го цвета , $(k_i \geq 0, k_1 + k_2 + \dots + k_m = n)$. В таком случае

$$\mathbf{P}(B_{k_1 k_2 \dots k_m}) = \frac{C_{M_1}^{k_1} C_{M_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{M_m}^{k_m}}{C_N^n}, \quad 0 \leq k_i \leq \min(n, M_i), i = 1, \dots, m,$$

которое называется *полигипергеометрическим* распределением. События $B_{k_1 k_2 \dots k_m}$ образуют полную группу несовместных событий $\sum \mathbf{P}(B_{k_1 k_2 \dots k_m}) = 1$. Эти вероятности можно найти из соотношения $\prod_{i=1}^{m} (1+x)^{M_i} = (1+x)^N$ путем приравнивания в обеих частях коэффициентов при x^n.

5) Отрицательное биномиальное распределение. Пусть производится выбор с возвращением из урны до появления события m раз, вероятность которого в каждом отдельном испытании постоянная и равна p. Обозначим через B_n^m событие, что на n-м шаге испытания прекращаются. Тогда

$$\mathbf{P}(B_n^m) = C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m}, n = m, m+1, \dots , q = 1 - p \quad –$$

так называемое *отрицательное биномиальное распределение*. В частности, при $m = 1$ получаем геометрическое распределение:

$$\mathbf{P}(B_n^1) = pq^{n-1}, n = 1, 2, \dots , q = 1 - p.$$

При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n^1) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P}(B_n^m) = p^m \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}^{m-1} q^{n-m} = \left(\frac{p}{1-q} \right)^m = 1.$$

Пример 15а. Какова вероятность того, что бросании монеты n-й орел выпадет не раньше N-го бросания?

Решение. Если через k обозначить число орлов до шага $N-1$, то $(n \geq N) = \bigcup_{k=0}^{n-1} (k \leq N-1)$, поэтому $q_{n,N} = \mathbf{P}(n \geq N) = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} C_{N-1}^k}{2^{N-1}}$.

Если через $p_{n,N}$ обозначить вероятность того, что N случайно выбранных точек на сфере в n-мерном пространстве лежат на одной полусфере, то при $n = 2, N = 3$ (см. задачу **20** Сб. задач по ТВиМС) получим $p_{2,3} = \dfrac{3}{4}$ и $q_{2,3} = \dfrac{3}{4}$, т.е. они равны. Случайно ли такое совпадение? – В общем случае они тоже равны.

6) Распределение Маркова. Пусть урна содержит M белых и $N-M$ черных шаров. Случайно извлекают один шар, возвращают его обратно в то же самое время добавляя в урну R шаров того же цвета. Событие $A_{n,k}$ означает, что в выборке объема n ровно k шаров одного (белого) цвета. Определим вероятность этого события. Рассмотрим какой-либо вариант появления события $A_{n,k}$ (пусть первые k шаров белого цвета, а $n-k$ последующие черного цвета. Используя общую формулу умножения получим, что вероятность такого исхода равна

$$\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(M+jR)\prod_{h=0}^{n-k-1}(N-M+hR)}{\prod_{l=0}^{n-1}(N+lR)}.$$

Поскольку возможны C_n^k сочетаний полученных исходов, то

$$\mathbf{P}(A_{n,k})=\frac{C_n^k\prod_{j=0}^{k-1}(M+jR)\prod_{h=0}^{n-k-1}(N-M+hR)}{\prod_{l=0}^{n-1}(N+lR)}.$$

Рассмотрим частные и более общие, чем предложенная, схемы. Так, если $R=0$, то имеем **выбор с возвращением**, если $R=-1$ – **выбор без возвращения**. В более общем случае при каждом выборе шара будем добавлять c шаров одинакового с ним цвета и d шаров противоположного. При $c=-1, d=1$ имеем **модель теплообмена Эратосфена**: рассматриваются два сосуда и N находящихся в них частиц. Случайным образом выбирается частица и переносится в другой сосуд. Эта процедура повторяется. Каково распределение частиц после n шагов? Случай $c=0, d>0$ моделирует работу службы безопасности (каждый раз, когда извлекается белый шар служба безопасности усиливает контроль).

7) Распределение Пуассона.

Теорема (Пуассон). *Если в биномиальном распределении $p=p_n\to 0$ при $n\to\infty$, но так, что $n\cdot p_n\to a$, то*

$$B_n(k,p)=C_n^k\,p^k q^{n-k}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{a^k}{k!}e^{-a}=\pi(k,a).$$

Доказательство. По предположению $p_n=\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, поэтому для любого фиксированного $k=0,1,\ \ldots$ и достаточно больших n

$$B_n(k,p)=C_n^k\,p^k q^{n-k}=$$
$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k\cdot\left(1-\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-k}.$$

Но $\quad \frac{n(n-1)\ldots)n-k+1)}{n^k}(a+o(1))^k\underset{n\to\infty}{\to}a^k$, и $\quad\left(1-\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-k}\underset{n\to\infty}{\to}e^{-a}$,

что доказывает теорему.

Набор чисел $\pi(k,a), k=0,1,...$ образует *пуассоновское распределение* вероятностей. При этом $\pi(k,a)\ge 0$, $\sum_{k=0}^{\infty}\pi(k,a)=1$. Отметим, что все рассмотренные выше распределения были определены для конечного числа событий (исходов). Пуассоновское распределение это пример распределения, определенного для счетного числа событий.

Приведем следующий результат Ю.В.Прохорова, показывающий, с какой скоростью величины $B_n(k\,,\,p)$ сходятся к $\pi(k\,,a)$ при $n\to\infty$; если $n\,p_n = a$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\, B_n(k\,,\,p) - \pi(k\,,\,a)| \le \frac{2a}{n}\cdot \min(2\,,\,a)\,.$$

Приведем одну оценку отклонения биномиального распределения от Пуассоновского, когда бернуллиевские величины распределены по-разному, но независимы.

Пусть $\xi_i \in B(1, p_j),\, S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j,\, \mu = \sum_{j=1}^{n} p_j.$

Теорема. *Для всех* $B \in \mathscr{F}$

$$|\,\mathbf{P}(S_n \in B) - \Pi_\mu(B)\,| \le \sum_{j=1}^{n} p_j^2,$$

где Π_μ *обозначает распределение Пуассона с параметром* μ.

Доказательство. Построим на Ω независимые случайные величины ξ_j и ξ_j^*:

$$\xi_j(\omega) = \begin{cases} 0, \text{если } \ \omega < 1 - p_j, \\ 1, \text{если } \ \omega \ge 1 - p_j, \end{cases}$$

$$\xi_j^*(\omega) = \begin{cases} 0, \text{если } \ \omega < e^{-p_j}, \\ k \ge 1, \text{если } \ \omega \in [\pi_{k-1}, \pi_k), \end{cases}$$

$$\pi_k = e^{-p_j} \sum_{m=0}^{k} \frac{p_j^m}{m!},\, k = 0,1,\ldots\,.$$

Имеем: $\xi_j \in B(1, p_j)$ и $\xi_j^* \in \Pi_{p_j}$, а $S_n \in B(n,\mu),\, S_n^* = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* \in \Pi_\mu.$

Найдем вероятность того, что $\xi_j \ne \xi_j^*.$ Это будет в случаях: 1) $A_1 = (\xi_j = 0, \xi_j^* \ge 1) = (1 - p_j \le \omega < e^{-p_j})$; 2) $A_2 = (\xi_j = 1, \xi_j^* > 1)$. В силу независимости

$$\mathbf{P}(\xi_j \ne \xi_j^*) = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2) \le (e^{-p_j} - 1 + p_j) + p_j(1 - e^{-p_j} - p_j e^{-p_j}) \le$$
$$\le (e^{-p_j} - 1 + p_j) + (1 - e^{-p_j} - p_j e^{-p_j}) \le p_j(1 - e^{-p_j}) \le p_j(1 - e^{-p_j} \le p_j^2,$$

где мы использовали неравенство $1 - e^{-p_j} \le p_j$. Кроме того, мы будем использовать неравенство $\mathbf{P}(S_n \ne S_n^*) \le \mathbf{P}(\bigcup_{j=1}^{n} (\xi_j \ne \xi_j^*) \le \sum_{j=1}^{n} p_j^2.$

Имеем: $\mathbf{P}(S_n \in B) = \mathbf{P}(S_n \in B, S_n = S_n^*) + \mathbf{P}(S_n \in B, S_n \ne S_n^*),$

$\mathbf{P}(S_n^* \in B) = \mathbf{P}(S_n^* \in B, S_n = S_n^*) + \mathbf{P}(S_n \in B, S_n \ne S_n^*).$

Так как справа первые две вероятности равны, то

$$\mathbf{P}(S_n \in B) - \mathbf{P}(S_n^* \in B) = \mathbf{P}(S_n \in B, S_n \ne S_n^*) - \mathbf{P}(S_n^* \in B, S_n \ne S_n^*) \le$$
$$\le \mathbf{P}(S_n \in B, S_n \ne S_n^*) \le \mathbf{P}(S_n \ne S_n^*).$$

Аналогично, в другую сторону, поэтому

$$|\mathbf{P}(S_n \in B) - \mathbf{P}(S_n^* \in B)| \le \mathbf{P}(S_n \ne S_n^*).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Заметим, что $\sum_{j=1}^{n} p_j^2 \le \max_j p_j \sum_{j=1}^{n} p_j$, поэтому если $\sum_{j=1}^{n} p_j \underset{n\to\infty}{\to} \lambda$, $\max_j p_j \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то будем иметь сходимость биномиального распределения к Пуассоновскому. В частности, если все $p_j = \dfrac{\lambda}{n}$, то $\sum_{j=1}^{n} p_j^2 = \dfrac{\lambda^2}{n}$.

Когда мы аппроксимируем биномиальное распределение пуассоновским, мы полагаем $a = np$. Приведем аппроксимации Л.Н.Большева, дающее лучшее приближение при конечных n. Именно, если $X \in B(n,p)$, то

$$\mathbf{P}(X \le m) = \sum_{k=0}^{m} \frac{y^k}{k!} e^{-y} + R,$$

где $$R = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right), \text{если } y = y_1 = \dfrac{p(2n-m)}{2-p}, \\ O\left(\dfrac{1}{n^4}\right), \text{если } y = y_2 = \dfrac{y_1}{1 + (m(m+2)) + my_1 - 2y_1^2)/(6(2n-m))}. \end{cases}$$

<u>Пример 16.</u> Пусть , $p = 0.01$, $np = 0.05$, $y_1 = 0.0452261$, $y_2 = 0.0449448$,

$\sum_{i=0}^{1} C_5^i p^i (1-p)^{5-i} = 0.9990197$, $\sum_{i=0}^{1} \dfrac{y_2^i}{i!} e^{-y_2} = 0.9990197$.

<u>Пример 17.</u> Пусть $n = 20$, $p = 0.01$, $y_1 = 0.1959798$, $y_2 = 0.1959128$,

, $\sum_{i=0}^{1} \dfrac{y_2^i}{i!} e^{-y_2} = 0.9831406$.

Имеет место также асимптотическое разложение вида:

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} = A(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{\mu-1} \frac{L_j(m,a)}{n^j} + O\left(\frac{1}{n^\mu}\right)\right),$$

$$L_j(m,a) = \frac{B_{j+1}(0) - B_{j+1}(m)}{j(j+1)} + \frac{m a^j}{j} - \frac{a^{j+1}}{j+1},$$

где $B_j(x) -$ многочлены Бернулли:

$$B_o(x) \equiv 1, \quad B_1(x) = x - 1/2, \quad B_2(x) = x^2 - x + 1/6, \ldots$$

<u>Пример 18.</u> Возьмем $n = 20$, $p = 0.01$, $\mu = 5$, $a = 0.2$. Тогда

$B(1) = 0.1652337$, $\pi(1) = 0.1637461$, $A(1) = 0.1652336$,

$B(0) = 0.8179069$, $\pi(0) = 0.8187307$, $A(0) = 0.8179068$.

<u>Пример 13.</u> Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0.004. Ткачиха за одну минуту может устранить обрывы не более чем на пяти веретенах. Найти вероятность того, что ткачиха, обслуживающая 1000 таких веретен, не сможет устранить все обрывы, которые возникнут в течение минуты.

Решение. Найдем сначала вероятность противоположного события, т.е. вероятность того, что ткачиха сможет устранить все обрывы, которые могут возникнуть в течение минуты. Она равна

$$p = 0.996^{1000} + C_{1000}^1 \cdot 0.004 \cdot 0.996^{999} + C_{1000}^2 \cdot 0.004^2 \cdot 0.996^{998} +$$
$$+ C_{1000}^3 \cdot 0.004^3 \cdot 0.996^{997} + C_{1000}^4 \cdot 0.004^4 \cdot 0.996^{996} + C_{1000}^5 \cdot 0.004^5 \cdot 0.996^{995} =$$
$$= 0.785444,$$

поэтому искомая вероятность равна 0.214556.
Найдем также сколько станков может обслуживать ткачиха, чтобы с вероятностью 0,995 она могла бы устранять обрывы. Из таблиц функции распределения Пуассона, т.е. $F(5)=e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{6}+\frac{a^4}{24}+\frac{a^5}{120}\right)=0.995$ при $a=1{,}6$, поэтому $n=\frac{1.6}{0.004}=400$ и, значит, ткачиха может обслуживать 400 станков.
В начале своей карьеры Е.Виноградовой для устранения обрыва требовалось в среднем 12 секунд, т.е. 5 обрывов за 1 минуту; за 1 час в среднем происходило 2 обрыва, поэтому $p=\frac{2}{60}=\frac{1}{30}$. Если надежность взять равной 0,99, то $a=1.75$ и она могла обслужить $1{,}75\cdot 30=52{,}5$ станков. Виноградова обслуживала 52 станка.

Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Теорема (Муавр-Лаплас). *Если вероятность события A в n независимых испытаниях постоянна и равна ($0<p<1$), то*

$$\frac{B_n(m,p)\sqrt{npq}}{\varphi(x)}\underset{n\to\infty}{\to}1$$

равномерно для всех m, для которых $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ находится в каком-либо конечном интервале. Здесь $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Доказательство. Мы воспользуемся известной из математического анализа формулой Стирлинга (одновременно открытой и Муавром): при $n\to\infty$,

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}e^{\theta_n},$$

в которой остаточный член удовлетворяет неравенству

$$|\theta_n|\le\frac{1}{12n}.$$

Заметим, что

$$m=np+x\sqrt{npq}\underset{n\to\infty}{\to}\infty$$

и

$$n-m=nq-x\sqrt{npq}\underset{n\to\infty}{\to}\infty,$$

поскольку $\alpha\le x\le\beta$. Тогда

$$B_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\left(\frac{n}{m}p\right)^m\left(\frac{n}{n-m}q\right)^{n-m}e^{\theta},$$

где $|\theta|=|\theta_n-\theta_m-\theta_{n-m}|<\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}\right)$. Отсюда следует, что e^{θ} равномерно стремится к 1. Теперь

$$\ln A_n=\ln\left(\frac{n}{m}p\right)^m\left(\frac{n}{n-m}q\right)^{n-m}=$$

$$=-(np+x\sqrt{npq})\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)-(nq-x\sqrt{npq})\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)=$$

$$= -(np + x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{qx^2}{2np} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) -$$

$$-(nq - x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{px^2}{2nq} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Значит,

$$A_n : e^{-x^2/2} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \quad \text{и} \quad \sqrt{npq}\cdot\sqrt{\frac{n}{m\,(n-m)}} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Отсюда следует результат теоремы.

Имеет место также **интегральная теорема Муавра-Лапласа**:

$$\mathbf{P}\left(\alpha \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \beta\right) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(x)\,dx, \; \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

При этом

$$\sup_x \left| \sum_{k\le x} \frac{k-np}{\sqrt{npq}} - \Phi(x) \right| \le \frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}.$$

Итак, **подведем итог**.

Если в биномиальном распределении $B(n, p)$ число наблюдений n умеренно, то используется прямая формула вычисления биномиальных вероятностей.

Если n велико, а p мало (или близко к 1), то используется аппроксимация Пуассона.

Если n велико, а p умеренно, то аппроксимация Муавра-Лапласа.

Однако использование той или иной аппроксимации определяется тем, какую точность мы можем при этом обеспечить. Если нас удовлетворит точность, даваемая границей $\Gamma_1 = 2p\min(2, np)$, то будем использовать приближение Пуассона; если же граница $\Gamma_2 = \dfrac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}$ обеспечит заданную точность, то приближение, даваемое теоремой Муавра-Лапласа.

<u>Пример 19.</u> Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0.02. Из большой партии отбирается 100 штук и проверяется их качество. Если среди них окажется не менее трех бракованных, то вся партия возвращается на сплошную разбраковку. Определить вероятность того, что партия будет возвращена.

Решение. Значение $n = 100$ предположительно считать большим. Расчитаем границы Γ_1 и Γ_2. Имеем:

$$\Gamma_1 = 2\cdot 0.02\cdot \min(2, 2) = 0.08, \quad \Gamma_2 = \frac{0.02^2 + 0.98^2}{\sqrt{100\cdot 0.02\cdot 0.98}} = 0.686.$$

Выберем значение границы $\Gamma_1 = 0.08$. Тогда:

а) По биномиальному распределению

$\mathbf{P}(X=0) = 0.98^{100} = 0.1326195$, $\quad\quad \mathbf{P}(X=1) = C_{100}^{1}\cdot 0.02\cdot 0.98^{99} = 0.2706521$,

$\mathbf{P}(X=2)=C_{100}^{2}\cdot 0.02^{2}\cdot 0.98^{98}=0.2734138$, $\mathbf{P}(X=3)=C_{100}^{3}\cdot 0.02^{3}\cdot 0.98^{97}=0.1822758$,
$\mathbf{P}(X\geq 3)=0.3233146$.

б) По распределению Пуассона
$\mathbf{P}(X=0)=e^{-2}=0.1353352$, $\mathbf{P}(X=1)=2e^{-2}=0.2706705$,
$\mathbf{P}(X=2)=2^{2}e^{-2}/2!=0.2706705$, $\mathbf{P}(X=3)=2^{3}e^{-2}/3!=0.180447$,
$\mathbf{P}(X\geq 3)=0.3233238$.

Действительная точность определения вероятности $\mathbf{P}(X\geq 3)$ оказалать равна 0.0000092.

Пример 20. Рассмотрим вновь пример 14 и воспользуемся теоремой Муавра-Лапласа для определения вероятности $\mathbf{P}(A_{51})$. Она равна 0.0797457584, так как $x=\dfrac{51-100\cdot 0.512}{\sqrt{100\cdot 0.512\cdot 0.488}}=0.04$, $\sqrt{100\cdot 0.512\cdot 0.488}=4.9986$.

Если в биномиальном распределении $B(16,\,0.5)$ откладывать значения $x=\dfrac{k-16\cdot 0.5}{\sqrt{16\cdot 0.5\cdot 0.5}}$ и вероятности $C_{16}^{k}\,0.5^{16}$, то получим график, изображенный ниже.

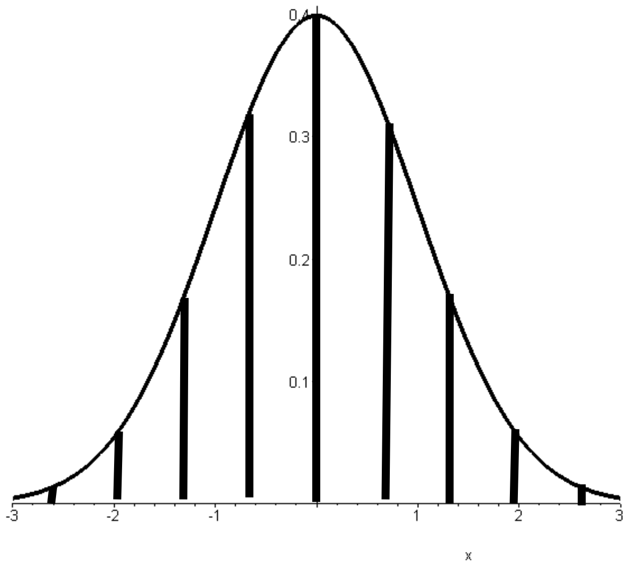

Рис. 1

3. Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие *случайной величины* (с.в.). Число вызовов от абонентов на телефонную станцию в течение определенного промежутка времени, является случайной величиной, потому что принимает те или иные значения в зависимости от случайных обстоятельств. Или, величина уклонения точки падения снаряда от центра мишени определяется больших количеством разнообразных причин, носящих случайный характер.

Определим сначала понятие дискретной случайной величины. Пусть A – случайное событие. Пусть (случайная) переменная ξ_A, величина определена следующим образом:

$$\xi_A=\begin{cases}1, & \text{если } A \text{ произошло},\\ 0, & \text{в противном случае (т.е. если } \overline{A} \text{ произошло).}\end{cases}$$

Тогда значение ξ_A зависит от случая, кроме того мы имеем:

$$\mathbf{P}(\xi_A=1)=\mathbf{P}(A)=p \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\xi_A=0)=\mathbf{P}(\overline{A})=1-p=q.$$

Случайная величина ξ_A называется *индикатором* события A и обозначается иногда как I_A, χ_A.

Аналогичным образом мы можем определить случайную величину ξ с двумя значениями a и : $(\xi = a) = A$, $(\varsigma = b) = \overline{A}$.

Далее, пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ или $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – различные действительные числа (возможные значения величины ξ). Пусть $\{A_k\}$ – полная система несовместных событий, состоящих в том, что $\{(\xi = k)\}$. Именно, $A_k = \{\xi = k\}$. Если это события являются *случайными* для каждого значения k, то и сама величина ξ называется *случайной*. Очевидно, что для этих событий определен набор вероятностей, $\sum_{k=1}^{n(\infty)} \mathbf{P}(A_k) = 1$. Заметим, что $A_k A_j = \varnothing$, если $k \neq j$ и $\bigcup_{k=1}^{n(\infty)} A_k = \Omega$. При этом будем рассматривать элементарные исходы A_k. Мы могли бы каждому событию A_k поставить в соответствие значение $(\xi = k)$, если A_k произошло. По этой причине дадим такое определение дискретной случайной величины, обозначая элементарные исходы через ω.

Определение. Функцию $\xi(\omega)$ элементарного исхода, определенную на множестве элементарных исходов Ω назовем *дискретной случайной величиной* со счетным числом значений, если

$$\{\omega : \xi(\omega) = x_k\} \in \mathscr{A} \quad \text{для любого значения } x_k .$$

Как известно, элементы σ-алгебры $\mathscr{A}$ мы называем случайными событиями, т.е. события $(\xi(\omega) = x_k)$ при каждом k являются *случайными*.

Система равенств

$$\mathbf{P}(\xi = x_k) = p_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

определяет распределение вероятностей (или говорят *распределение* случайной величины). В следующей лекции мы обобщим понятие случайной величины и дадим общее определение.

Замечание. Мы могли бы случайную величину определить так, чтобы были случайными события $(\xi \leq x)$ для любого действительного $x \in R$. Тогда событие $(\xi = x_k)$ определяется через введенные события следующим образом: $(\xi = x_k) = (\xi \leq x_k) - (\xi \leq x_{k-1})$.

Итог: Для того, чтобы определить дискретную случайную величину, достаточно задать ее значения и вероятности этих значений.

Примеры распределений дискретных случайных величин.

Мы обозначаем случайную величину (с.в.) буквой X.

1) Распределение Бернулли (Обозначение: $X \in B(1, p)$).
   $\mathbf{P}(X = k) = p_k = p^k q^{1-k}, 0 < p < 1, q = 1 - p, k = 0, 1$.

2) Биномиальное распределение ($X \in B(n, p)$).
   $\mathbf{P}(X = k) = p_k = C_n^k p^k q^{n-k}, 0 < p < 1, q = 1 - p, n \in N, k = 0, 1, \dots, n$.

3) Распределение Пуассона ($X \in \mathscr{P}(\lambda)$).
   $$\mathbf{P}(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, \dots .$$

Пример. В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0.0006. Каждый владелец застрахованного ав-

$A = \{$страховая компания получит прибыль не менее 6 000 000 руб.$\}$.

Решение. Для того чтобы компания получила прибыль не менее 6 млн. руб. на выплату страховых должно уйти не более 6 000 000 руб, т.е. число аварий должно быть не более 15. Так как $n = 10\,000$ – велико, а вероятность $p = 0.0006$ – мала и , $2a \cdot \min(2, a) = 0.00242a \cdot \min(2, a) = 0.0024$, то для расчета искомой вероятности используем распределение Пуассона. Именно,

$$\mathbf{P}(X \le 15) = 0.9995\,.$$

4) Гипергеометрическое распределение.

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k = \frac{C_M^k\, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \text{ для } \max(0, M + n - N) \le k \le \min(n, M)\,.)$$

5) Геометрическое распределение.

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k = q\ p^k\,, 0 < p < 1, q = 1 - p, k = 1, 2, \ldots\ .$$

6) Отрицательное биномиальное распределение.

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k = C_{m+k-1}^k \frac{a^k}{(1+a)^{m+k}},\ a > 0, m \in N, k = 0, 1, \ldots\ .$$

7) Распределение Паскаля.

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}},\ a > 0,\ k = 0, 1, \ldots\ .$$

Если в этом примере сделать замену $q = 1 - p = \frac{1}{1+a}\,q = 1 - p = \frac{1}{1+a}$, то получим геометрическое распределение. То же замечание касается и отрицательного биномиального распределения.

8) Логарифмическое распределение.

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k = \frac{1}{-\ln(1-p)} \frac{p^k}{k}, 0 < p < 1, k = 1, 2, \ldots, \infty\,.$$

9) Равномерное дискретное распределение.

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{N},\ k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

4. Рассмотрим понятие независимости дискретных случайных величин.

Определение. Дискретные случайные величины X и Y будем называть независимыми, если независимыми являются события $A_k = (X = x_k)$ и $B_j = (Y = y_j)$ для всех k и j, т.е. если

$$\mathbf{P}(X = x_k, Y = y_j) = \mathbf{P}((X = x_k)\cdot(Y = y_j)) = \mathbf{P}(X = x_k)\mathbf{P}(Y = y_j)$$

для всех k, j.

$\mathbf{P}(A) = 22/43$. Если событие B означает условие, что рождение происходит в день соединения Юпитера с Марсом, то в предположении, что расположение звезд не определяет индивидуальных судеб людей, условная вероятность $\mathbf{P}(A/B)$ будет иметь то же самое значение $\mathbf{P}(A/B) = 22/43$, т.е. фактический подсчет частоты рождения мальчиков при таких специальных астрономических условиях привел бы к 22/43. Хотя такой подсчет в достаточно обширных размерах, возможно, никем не проводился, нет оснований сомневаться в его результатах. Естественно, что такого рода независимость не следует абсолютизировать. Например, перемещение Юпитера оказывает некоторое влияние, скажем на полет артиллерийского снаряда, но на практике с этим можно не считаться. Сказанное поясняет также, что независимость событий и величин в том конкретном и относительном понимании этого термина, которое каждый раз имеет место, никак не противоречит принципу всеобщей связи всех явлений.

Отметим также, что формальное определение независимости событий или случайных величин значительно шире понятия реальной независимости в смысле принадлежности к причинно не связанным явлениям. Это можно проиллюстрировать с помощью следующего примера. Пусть $X-$ равномерно распределенная на $(0,1)$ случайная величина (см. лекцию 4). Тогда в разложении X в двоичную дробь

$$x = \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{4} + \frac{y_3}{8} + \dots$$

случайные величины $Y_k, k = 1, 2, \dots$ независимы, хотя все они связаны по своему происхождению. Понятно, что это обстоятельство лишь расширяет сферу применения всех утверждений, которые получены при выполнении формального условия независимости.

Пример 23. Имеется последовательность независимых испытаний с двумя исходами 0 и 1, причем вероятность появления единицы постоянна и равна α. Испытания проводятся до появления двух единиц подряд. Какова вероятность p_n того, что объем испытаний равен $n+2$?

Решение. Покажем, что эта вероятность равна

$$p_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k \alpha^{k+2} (1-\alpha)^{n-k} . \qquad (*)$$

Действительно, пусть имеется какой-либо исход, например,

0…010…010…010…011,

когда число единиц равно $k+2$ и $m_1 -$ число нулей до первой единицы, $m_2 -$ число нулей между первой и второй единицами и т.д., и, наконец, $m_{k+1} -$ число нулей между k-й единицей и двумя последними (так как исход должен заканчиваться двумя единицами подряд). Очевидно, что условию задачи будут отвечать числа m_i такие, что , $m_1 \ge 0, m_2 \ge 1, \dots ,$ $m_{k+1} \ge 1$ и $m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1} = n-k$. Если мы сделаем замену $m_1' = m_1,\ m_2' = m_2 - 1, \dots ,$ $m_{k+1}' = m_{k+1} - 1$, то придем к классической задаче размещения $n-2k$ неразличимых шаров по $k+1$ различимым ящикам. Значит, число различных последовательностей нулей и единиц, удовлетворяющих указанному условию, будет равно числу сочетаний C_{n-k}^k из $n-k$ по k элементов, причем $C_{n-k}^k = 0$, если $k > n-k$, и, следовательно, p_n имеет вид (*). Приведем простую формулу для вероятности p_n:

$$p_n = \frac{\alpha^2 (1-\alpha)^n}{2^{n+1} q} \left((1+q)^{n+1} - (1-q)^{n+1}\right., \text{где} \qquad x = \frac{\alpha}{1-\alpha},\ q = \sqrt{1+4x} .$$

Так, например, при $n+2=10$, т.е. при $n=8$ и $\alpha=\frac{1}{2}$, получаем вероятность $p_8=\frac{17}{512}$, при $n+2=8$, т.е. при $n=6$, получаем вероятность, равную $\frac{13}{256}$, а при $n+2=7$, т.е. при $n=5$, получаем вероятность, равную $\frac{21}{128}$.