УМФ. лекция

18 октября 2024 г.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx}(x,t) = 0 \tag{1}$$
$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x) \quad x \in [O;l] \tag{2}$$
$$u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x) \quad x \in [O;l] \tag{3}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} u(0,0) &\quad = 0 = \phi(0) \\ u_t(0,0) &\quad = 0 = \psi(0) \\ u(l,0) &\quad = 0 = \phi(l) \\ u_t(l,0) &\quad = 0 = \psi(l) \end{aligned} \tag{5}$$

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{6}$$

$$T''(t)X(x) - a^2 T(t)X''(x) = 0 \mid \ : a^2 T(t)X(x)$$
$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$
$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \tag{7}$$

$$X''(t) + \lambda X(t) = 0 \tag{8}$$
$$X(0) = X(l) = 0 \tag{9}$$

$$T(t)X(0) = 0$$
$$T(t)X(l) = 0$$

(8), (9) - задача Штурма-Лиувилля.
Она заключается в нахождении собственных значений и собственных функций
Собственными значениями называются те значения λ при которых есть хотя бы одно нетривиальное решение задачи. Сами эти нетривиальные решения $X(x)$ называются собственными функциями соответсвующие собственным значениям

$$p^2 + \lambda = 0$$
$$p^2 = -\lambda$$
$$1)\ \lambda < 0$$
$$p = \pm\sqrt{-\lambda}$$
$$X(x) = Ce^{\sqrt{-\lambda \cdot x}} + De^{-\sqrt{-\lambda}}$$
$$\begin{cases} X(0) = C + D = 0 \\ X(l) = C(e^{\sqrt{-\lambda} l} - e^{-\sqrt{-\lambda} l}) \end{cases}$$
$$X(x) = Ax + B$$
$$2)\ \lambda = 0$$
$$X(0) = A \cdot 0 + B = 0 \implies B = 0$$
$$3)\ \lambda \geq 0$$

$$p = \pm\sqrt{\lambda}i$$

$$X(x) = C\cos(\sqrt{\lambda}x) + D\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X(0) = C = 0$$

$$X(l) = D\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = (\frac{\pi n}{l})^2,\ n \in \mathbb{N} \\ X(x) = D_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \end{cases} \tag{10}$$

$$T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = 0$$

$$T_n(t) = A_n\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)$$

$$u_n(x,t) = \left(A_n\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\right)\sin\frac{\pi n x}{l} \tag{11}$$

2 этап завершающий
Решение будет искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\right)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{\pi n x}{l} = \phi(x) \tag{12}$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n x}{l}B_n\sin\frac{\pi n x}{l} = \psi(x)\ \Big|\cdot\sin\frac{\pi m x}{l}, \int_0^l \tag{13}$$

$$\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\cdot\sin\frac{\pi m x}{l}dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi m x}{l}dx = \int_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx$$

$$\begin{cases} A_m &= \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx \\ B_m &= \frac{2}{l}\frac{l}{a\pi m}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx \end{cases} \tag{14}$$