Предел в метрическом пространстве

Определение (Сходимость по расстоянию). $x_n \to x: \ \rho(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

В $\mathbb{R}^n$ - сх-ть покоординатная
m, C - сх-ть равномерная
s - сх-ть покоординатная
S - сх-ть почти всюду
L_∞ - равномерная сх-ть почти всюду
l, L - сх-ть в среднем
l_2, L_2 - среднеквадратичная сходимость

Свойства предела

1) доб $\vee$ удал
2) единственнось
3) сходимость $\implies$ ограниченность

Утверждение (Непрерывность расстояния).

$$\begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases} \implies \rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$$

x - точка прикосновения M

$$\forall \epsilon = \frac{1}{n} \implies \exists x_n \in M: \ \rho(x_n, x) < \epsilon_n = \frac{1}{n}$$

Теорема. *Чтобы F было замкнутым* $\iff \Big((x_n \in F, \ x_n \to x) \implies (x \in F)\Big)$

Плотные множества

Определение (Плотное множество). A, B - мн-во в МП
A плотно в B, если $\forall x \in B \ \forall \epsilon > 0 \ \exists y \in A: \ y \in S(x, \epsilon)$ $(\forall x \in B \ \exists \{y_n\}, \ y_n \in A: \ y_n \to X)$

Пример 1) $A = \mathbb{Q}, \ B = \mathbb{R}$
2) $A = P, \ B = C$

Свойства

1) A плотно в A
2) A плотно в B. B плотно в D. Тогда A плотно в D

Определение. Если множество плотно во всем метрическом пространстве, то оно называется плотным всюду

Рассмотрим множестве алгебраических полиномов с рациональными коэффицентами P_r. Оно плотно в P, которое плотно в $C \implies P_r$ плотно в C
P_r, P, C плотные в L_2
$C_{2\pi}[-\pi, \pi]$ $x(-\pi) = x(\pi)$ плотно в $C[-\pi, \pi]$ по метрике $L_2[-\pi, \pi]$
T_r плотно в T плотно в $C_{2\pi}$

Сепарабельное метрическое пространство

Определение (Сепарабельное метрическое пространство). Пространство сепарабельно, если в нем существует конечное или счётное всюду плотное множество

Известно, что m - не сепарабельное

Утверждение. *Если X - сепарабельное МП, Y - подмножество, то Y - сепарабельное МП с метрикой, индуцированной из X*

Доказательство. X - сепарабельно, значит есть счётное A - всюду плотное в X множество

$$\forall y \in Y\ \forall n\ \epsilon = \frac{1}{n}\ \exists x_{ny} \in A: \ \rho(y, x_{ny}) < \frac{1}{n}$$

Рассмотрим множество

$$\left\{z: \ z \in Y.\ \rho(z, x_{ny}) < \frac{1}{n}\right\}$$

Счётное количество множеств
Выберем $z_n \in Y: \ \rho(z_n, x_{ny}) < \frac{1}{n}$.
Тогда

$$\rho(z_n, y) \leq \rho(z_n, x_{ny}) + \rho(x_{ny}, y) < \frac{2}{n}$$

Значит Y - сепарабельно ■

Сходимость в себе

Определение. $\{x_n\}$ сх-ся в себе, если $\rho(x_m, x_n) \to 0,\ m > n \to +\infty$

Утверждение. *Из сходимости следует сходимость в себе*

Доказательство. $x_n \to a$

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, a) + \rho(x_n, a) \to 0$$

■

Утверждение. $\exists \epsilon > 0 \quad \rho(x_m, x_n) \geq \epsilon$, *то нет сходящейся подпоследовательности*

Утверждение. *Если последовательность сходится в себе, то она ограничена*

Сх-ть в себе $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Сх-ть

Определение (Полное метрическое пространство)**.** Метрическое пространство называется полным, если в нём из сходимости в себе следует сходимость

Компактное множество

Определение (Предкомпактное множество)**.** Множество называется предкомпактным (относительно компактным), если любая последовательность его элементов содержит сходящуюся подпоследовательность