ТФКП. Лекция

Mr. Robot

15 октября 2024 г.

$$z = x + iy,\ \overline{z} = x - iy,\ z\overline{z} = x^2 + y^2$$

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2},\ y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$y = -i\frac{z - \overline{z}}{2}$$

$$Az \cdot \overline{z} + B\frac{z + \overline{z}}{2} - iC\frac{z - \overline{z}}{2} + D = 0$$

$$A \cdot z \cdot \overline{z} + \left(\frac{B}{2} - i\frac{C}{2}\right)z + \left(\frac{B}{2} + i\frac{C}{2}\right)\overline{z} + D = 0$$

$$Az\overline{z} + Mz + \overline{M}\overline{z} + D = 0$$

$$A, D \in \mathbb{R} \quad M, \overline{M} \in \mathbb{C}$$

Th2(Круговое свойство дробно-линейного преобразования)
Всякое дробно-линейное преобразование $w = \frac{az+b}{cz+d}$ отображает окружность в широком смысле на окружность в широком смысле(при этом обычная окружность может перейти в прямую и наоборот)
Proof

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

$$1)\ w_1 = cz + d$$

$$2)\ w_2 = \frac{1}{w_1}$$

$$3)\ w_3 = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot w_2 \equiv w$$

$$w = \frac{1}{z} \quad \overline{w} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$A \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} + M\frac{1}{w} + \overline{M}\frac{1}{\overline{w}} + D = 0$$

$$Dw\overline{w} + \overline{M}w + M\overline{w} + A = 0$$

Note $w = L(z)$
Γ - окружность или прямая на плоскости (z)
$C = L(\Gamma)$

$$|z - z_0| = R \not\ni z = \infty$$

$$Bx + Cy + D = 0 \ni z = \infty$$

$$z = \frac{d}{c} \to w = \infty$$

$$z = -\frac{d}{c} \in \Gamma \implies w = L(-\frac{d}{c}) = \infty \in C \implies C \text{ - прямая на (w)}$$

$$z = -\frac{d}{c} \notin \Gamma \implies w = \infty \notin C \implies C \text{ - окружность на (w)}$$

Example

$$w = \frac{z - 5}{z + 2i} \implies z = -2i$$

$$\Gamma_1: \ |z+5| = 2$$
$$\Gamma_2: \ |z-i| = 3$$
$$|-2i+5| \stackrel{?}{=} 2$$
$$\sqrt{4+25} \neq 2$$
$$z = -2i \notin \Gamma_1 \implies L(\Gamma_1) \text{ - окружность}$$
$$|-2i-i| \stackrel{?}{=} 3$$
$$3 = 3$$
$$z = -2i \in \Gamma_2 \implies L(\Gamma_2) \text{ - прямая}$$
$$z_1 = 4i \quad w_1 = \frac{4i-5}{6i} = \frac{-i(4i-5)}{6} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}i$$
$$z_2 = 3+i$$
$$w_2 = \frac{3+i-5}{3+i+2i} = \frac{-2+i}{3+3i} = \frac{1}{3}\frac{(-2+i)(1-i)}{2} = \frac{-2+1+i+2i}{6} = \frac{-1}{6} + \frac{i}{2}$$
$$z_1 = -3$$
$$z_2 = -7$$
$$z_3 = -5+2i$$

Note.2 (Отображение круговых областей)
$$w = L(z)$$
$$\Gamma - \text{ окр или прямая}$$
$$D_1, D_2 - \text{ круговые области}$$
$$C = L(\Gamma)$$
$$G_1, G_2$$
$$D_1 \to G_1 \vee G_2$$
1. По внутренней точке
$$z_0 \in D_1$$
$$L(z_0) = w_0$$
$$w_0 \in G_1 \implies D_1 \to G_1$$
$$w_0 \in G_2 \implies D_1 \to G_2$$
$$w = \frac{z-5}{z+2i} = \frac{i-5}{3i} = \frac{-i(i-5)}{3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}i$$
2. По направлению обхода границы
$$z_1, z_2, z_3 - \text{ точки на границе области} \in \Gamma = \partial D_1$$
$$w_1 = L(z_1) \subset \partial(L(D_1))$$
$$w_2 = L(z_2) \subset \partial(L(D_1))$$
$$w_3 = L(z_3) \subset \partial(L(D_1))$$
Пусть для определённости D_1 остаётся справо
D_1 перейдёт в ту из областей $G_1 \vee G_2$, которая будет лежать справа при движении по границе $\partial(L(D_1))$

Th.3(Единственность дробно-линейного преобразования)
$w = L(z)$ однозначно определяется заданием 3-х различных точек

$$L(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3$$

Proof
1.

$$w_1 = \frac{\alpha z + \beta}{z + \gamma}$$
$$L(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3$$

2.

$$z = z_0,\ w = w_0 \quad w_0 = L(z_0)$$
$$w_k = L(z_k),\ k = \overline{0, 3}$$
$$w_k - w_l = \frac{(ad - bc)(z_k - z_l)}{(cz_k + d)(cz_l + d} \quad k, l = \overline{0, 3}$$

Отбросив индекс 0 получим:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \implies w = \dots \tag{1}$$

Def Выражение стоящее справа (слева) в формуле (1), называется двойным или ангармоническим отношением четырёх точек
Это отношение - инвариант любого др-линейного отображения

Note

$$z_k, w_k - \text{конечны},\ k = 1, 2, 3$$

Если какая-либо из $z_k = \infty$ или $w_l = \infty$, то в формуле (1) соответ. разницу надо заменить на 1
Ex

$$z_1 = i, z_2 = 1, z_3 = \infty$$
$$w_1 = \infty, w_2 = -1, w_3 = 2i$$
$$\frac{w - \infty}{w + 1} : \frac{2i - \infty}{zi + 1} = \frac{z - i}{z - 1} : \frac{\infty - i}{\infty - 1}$$
$$\frac{2i + 1}{w + 1} = \frac{z - i}{z - 1}$$

Def Неподвижными точками отображения $w = \Phi(z)$ называются точки, переходящие сами в себя, т.е. $z = \Phi(z)$

Th.4 $w = L(z)$ $(w \not\equiv z)$ имеет две неподвижные точки (в частности кратную неподвижную точку)
Proof

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$
$$cz^2 + (d - a) \cdot z - b = 0$$
$$1)\ \text{корней} > 2 \implies \exists\, \text{бесконечно много решений}$$
$$c = 0,\ d - a = 0,\ b = 0$$
$$w = \frac{az}{a} = z$$
$$2)\ c \neq 0 \implies 2\ \text{корня или корень кратности}\ 2$$
$$3)\ c = 0,\ d - a \neq 0 \implies 1\ \text{корень}$$