Определение (Сходимость по норме)**.**

$$x_n \to x \ ||x_n - x|| \to 0$$

Непрерывность нормы

$$||x_n - x|| \to 0 \implies ||x_n|| \to ||x||$$

$$x_n \to x \quad y_n \to y \quad \lambda_n \to \lambda$$
$$\lambda_n x_n + y_n \to \lambda x + y$$

Полная система элементов

Определение (Полная система элементов)**.** Система элементов называется полной, если для любого элемента x этого пространства $\forall \epsilon > 0 \ \exists L$ - линейная комбинация элементов системы такая, что $||L - x|| < \epsilon$
Эквивалетно:
система полная, если $\forall x \in X \ E\{L_n\} \ L_n \to x \quad ||L_n - x|| \to 0$

Пример $\{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots\}$ - полная в C, L_2
$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$ - полная в $C_{2\pi}, L_{2\pi}$

Определение (сходимость в себе)**.** $\{x_n\}$ сходится в себе по норме, если $\forall \epsilon > 0, \ \exists N(\epsilon) : \ \forall m > n > N(\epsilon) \implies ||x_n - x_m|| < \epsilon$

Определение. Если в ЛНП из сходимости в себе следует сходимость, то это полное ЛНП называется Банахово пространство (B - пространство)

Замечание. Подпространство в Банаховом пространстве само является Банаховым

Ряд элементов в Банаховом пространстве

Пусть $\{x_n\}_{n=0\ldots\infty}$. $\{s_n\}$ $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

$$\underbrace{s_n}_{\to s} - \underbrace{s_{n-1}}_{\to s} = x_n \implies x_n \to 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ - сходится} \iff \{s_n\} \text{ - сходится в себе}$$

Теорема (Достаточный признак сходимости)**.** *Если* $\forall n \ ||x_n|| \le c_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = c$, *то* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *- сходится, причем* $||s|| \le c$

Понятие линейного ограниченного оператора

Определение. Пусть X, Y - ЛНП. $A : X \to Y$ - линейный оператор
Если $\exists c : \ \forall x \in X \quad ||Ax|| \le c \cdot ||x||$, то оператор A называют линейным ограниченным

Рассмотрим

$$\rho(Ax, Az) = ||Ax - Az|| = ||A(x - z)|| \le c \cdot ||x - z|| = c \cdot \rho(x, z)$$

Теорема (1). *Для того, чтобы линейный оператор был ограниченным необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывным*

Доказательство. $\implies$: A - лин. огр $\implies$ $A \in Lip$ $\implies$ A - непрерывный
$\impliedby$: A - лин. непрерывный
От противного. Допустим A - не ограниченный. $\forall c\ \exists x ||Ax|| > c \cdot ||x||$.
$\forall n\ \exists x_n :\ ||Ax_n|| > n \cdot ||x_n||$.
При том $x_n \neq 0$.
Построим последовательность

$$z_n := \frac{x_n}{n \cdot ||x_n||}$$

$$||z_n|| = \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty, \quad z_n \to 0$$

$$Az_n = A\left(\frac{x_n}{n \cdot ||x_n||}\right) = \frac{1}{n \cdot ||x_n||} \cdot A(x_n)$$

$$||Az_n|| = \frac{1}{n \cdot ||x_n||}||Ax_n|| > \frac{n \cdot ||x_n||}{n \cdot ||x_n||} = 1$$

$$z_n \to 0 \quad Az_n \to A0 = 0$$

Противоречие ■

Теорема (2). *Для того, чтобы линейный оператор был ограниченным необходимо и достаточно, чтобы он ограниченное множество отображал в ограниченное*

Доказательство. Аналогично теореме 1 ■

Утверждение. *A - линейный ограниченный*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n = s \implies \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n A x_n = As$$

Доказательство.

$$A(s_n) = A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A(x_k)$$

$$s_n \to s \quad A(s_n) \to As$$

■

Норма оператора

$$M = \{c :\ ||Ax|| \leq c||x|| \quad \forall\, x\}$$

$$\alpha = \inf M \quad \exists c_n \in M,\ c_n \to \alpha$$

Рассмотрим:

$$\forall x :\ ||Ax|| \leq c_n||x|| \quad n \to \infty$$

$$||Ax|| \leq \alpha \cdot ||x|| \quad \forall x$$

$$\alpha = \min M$$

Определение. Если A - линейный ограниченный оператор, то нормой оператора будем называть

$$||A|| = \min\{c :\ ||Ax|| \leq c||x||,\ \forall x\}$$

1) $||A|| \geq 0$
2) $||Ax|| \leq c \cdot ||x|| \; \forall x, \quad ||A|| \leq c$

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \tag{1}$$

$$||A|| = \min\left\{c : \frac{||Ax||}{||x||} \leq c, \; \forall x \neq 0\right\}$$

$$||A|| = \sup\left\{\frac{||Ax||}{||x||}, \; \forall x \neq 0\right\}$$

$$||A|| = \sup\{||Az||, \; \forall z : ||z|| = 1\}$$

Рассмотрим:

$$\beta = \sup\{||Ax||, \; \forall x : \; ||x|| \leq 1\}$$

$$\beta \geq ||A||$$

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \leq ||A|| \quad \beta \leq ||A||$$

$$\beta = ||A||$$