5

Случайный вектор

1. Многомерная случайная величина (случайный вектор).
2. Примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
3. Условное распределение, статистическая зависимость.

1. Иногда на практике приходится рассматривать поведение нескольких случайных величин. Такая ситуация встречается в том случае, когда величины рассматриваются как относящиеся к одному объекту и характеризующие его. Поэтому их приходится рассматривать в совокупности. Например, отклонение от центра при стрельбе характеризуется точкой в двумерном пространстве.

Рассмотрим $m-$мерное пространство R^m. $\sigma-$алгебра $\mathscr{B}$ состоит при этом из всех борелевских множеств пространства R^m.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_m$ – случайные величины. Совокупность $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ называется *$m-$мерной случайной величиной*, если множество $S = S(x_1, x_2, \dots, x_m) = \{\omega\colon X_1(\omega) < x_1, \dots, X_m(\omega) < x_m\} \in \mathscr{B}$. Так как $S = \bigcap_{i=1}^{m}\{\omega\colon X_i(\omega) < x_i\}$ и каждое событие $\{\omega\colon X_i(\omega) < x_i\} \in \mathscr{B}$, то и их произведение $S \in \mathscr{B}$. Следовательно, мы можем определить вероятность

$$\mathbf{P}(S(x_1, x_2, \dots, x_m)) = F(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

которая называется *совместной функцией распределения* случайного вектора $(X_1, X_2, \dots, X_m)$.

Как и в одномерном случае, для многомерных функций распределения устанавливаются следующие свойства. Функция распределения

1) неубывающая функция по каждому аргументу,
2) непрерывна слева по каждому аргументу,
3) удовлетворяет соотношениям

$$F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1,$$

$$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad 1 \le i \le m$$

при произвольных значениях остальных аргументов.

Функция распределения взятой отдельно величины X_i, называемая *маргинальным распределением* X_i, равна

$$F_i(x) = F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty), \qquad (1)$$

где x стоит на $i-$м месте.

Аналогично, маргинальное распределение любого подмножества величин X_i найдем, подставив ∞ вместо остальных величин в $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Для события $\Lambda = \{\omega : a_1 \le X_1 < b_1, \dots, a_m \le X_m < b_m\}$ найдем его вероятность:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\Lambda) = F(b_1, b_2, \dots, b_m) - \sum_{i=1}^{m} F(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_m) + \\ + \sum_{i<j} F(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, a_j, b_{j+1}, \dots, b_m) - \dots \\ + (-1)^m F(a_1, \dots, a_m).\end{aligned} \qquad (2)$$

Для случая $m = 2$ она равна

$$\mathbf{P}(\Lambda) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2). \qquad (3)$$

Если в одномерном случае свойств 1) – 3) достаточно для того, чтобы функция $F(x)$ была функцией распределения, то в многомерном случае этих свойств уже не достаточно и наряду с тем, что F – неубывающая, непрерывная слева и удовлетворяет свойствам (1) и 3) необходимо требовать, чтобы выражение в (2) было неотрицательным как вероятность попадания точки $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в прямоугольник Λ.

Дело в том, что требование (2) может быть и не выполнено, несмотря на наличие у функции $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ остальных свойств.

<u>Пример 1.</u> Пусть

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x + y \le 1, \\ 1, & \text{если } x + y > 1. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет свойствам 1) – 3), но

$$F(2, 2) - F(2, 0) - F(0, 2) + F(0, 0) = -1,$$

т.е. требование (2) не выполнено.

Мы будем рассматривать два важных случая: а) *дискретный случайный вектор* и б) *непрерывный случайный вектор*.

В дискретном случае задаются совместные вероятности

$$\mathbf{P}(X_1 = x_{1i}, \dots, X_m = x_{mj}) = p_{i\dots j}$$

значений случайного вектора. Маргинальные распределения, например, распределение X_1 находится по формуле

$$\mathbf{P}(X_1 = x_{1i}) = \sum_{k,\dots,j} \mathbf{P}(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2k}, \dots, X_m = x_{mj}).$$

В непрерывном случае задается *функция плотности распределения* $f(x_1, \dots, x_m)$ такая, что

$$F(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \dots dx_m.$$

Если $f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна по всем переменным, то

$$\frac{\partial^m F(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m} = f(x_1, \dots, x_m).$$

Плотность распределения $f(x_1, \dots, x_m)$ обладает следующими свойствами:

1. она неотрицательна, т.е. $f(x_1, \dots, x_m) \ge 0$;
2. вероятность попадания $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ в область G равна
$$\int_G \!\!..\!\! \int f(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 ... dx_m \, .$$

Маргинальное распределение, например, величины X_1 находится интегрированием по остальным переменным:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_m)\, dx_2 ... dx_m \, .$$

2. 1. <u>Дискретный случайный вектор.</u>

а) Полиномиальное распределение $(X_1, X_2, \dots, X_m)$.

Полиномиальное распределение можно рассматривать как обобщение биномиального. Совокупность состоит из элементов, имеющих m различных взаимно исключающих признаков, каждому из которых соответствует вероятность появления p_i, которые задаются требованием

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Производится выбор из совокупности с возвращением (повторная выборка). Вероятность того, что в выборке объема n будет k_1 элементов с первым признаком, k_2 − со вторым и т.д., равна

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} \, ,$$

$$k_i \ge 0, \; p_i \ge 0, \; i = 1, 2, \dots, m; \; \sum_{i=1}^{m} k_i = n \, .$$

<u>Пример 2.</u> В некотором производстве систематически получается 1% металлического лома и 5% исправимого брака, т.е. 5% продукции применимо лишь после некоторой дополнительной обработки, а 1% продукции вообще не может быть использован. Остальная продукция хорошая. С поточной линии взята выборка объема 50 образцов. а) Надо ли рассматривать 2% лома и 8% исправимого брака как нечто необычное? Б) Какова вероятность обнаружить в этой выборке два плохих (неисправимых) образца?

Решение. Пусть X_1 − число плохих образцов и X_2 − число исправимых образцов. Вопрос а) относится к случаю $X_1 = 1, \; X_2 = -4$. Чтобы на него ответить, следует сначала найти вероятность этой плохой ситуации или ситуаций, еще худших, а именно:

$$\mathbf{P}(X_1 \ge 1,\, X_2 \ge 4) = 1 - (\mathbf{P}(X_1 = 0) + \mathbf{P}(X_2 < 4) - \mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 < 4)) = \\ = 0.0913,$$

поскольку

$$\mathbf{P}(X_2 < 4) = \mathbf{P}(X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_2 = 1) + \mathbf{P}(X_2 = 2) + \mathbf{P}(X_2 = 3),$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 < 4) = \mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 = 1) + \\ + \mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 = 2) + \mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 = 3),$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 0) = 0.95^{50} = 0.076944975,$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = C_{50}^{1} \cdot 0.05 \cdot 0.95^{49} = 0.202486777,$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = C_{50}^{2} \cdot 0.05^{2} \cdot 0.95^{48} = 0.26110137,$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 3) = C_{50}^{3} \cdot 0.05^{3} \cdot 0.95^{47} = 0.219874838,$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 = 0) = \frac{50!}{0!0!50!} 0.01^{0} 0.05^{0} 0.94^{50} = 0.045330726,$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 = 1) = \frac{50!}{0!1!49!} 0.01^{0} 0.05^{1} 0.94^{49} = 0.120560443,$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 = 2) = \frac{50!}{0!2!48!} 0.01^{0} 0.05^{2} 0.94^{48} = 0.157113343,$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 0,\, X_2 = 3) = \frac{50!}{0!3!47!} 0.01^{0} 0.05^{3} 0.94^{47} = 0.133713483.$$

В этом случае вероятность 0.0913 следует рассматривать как необычную. При ответе на вопрос б) нужно воспользоваться биномиальным распределением при $p_1 = 0.01$ и $1 - p_1 = 0.99$. Тогда

$$\mathbf{P}(X_1 = 2) = C_{50}^{2} (0.01)^{2} (0.99)^{48} = 0.0756.$$

Заметим, что пуассоновское приближение для биномиальной вероятности с $\lambda = 0.5$ дает $\mathbf{P}(X_2 = 2)$ =0.758.

б) Двумерное распределение с конечным числом значений, заданное таблицей распределения.

<u>Пример 3.</u> Рассматривается размещение 3-х шаров по 3-м ящикам (шары различимы, ящики различимы). Пусть N – число занятых ящиков, а X_1 – число шаров в ящике с номером 1. Тогда совместное распределение (N, X_1) задается таблицей:

N \ X_1	0	1	2	3	N
1	2/27			1/27	1/9
2	6/27	6/27	6/27		2/3
3		6/27			2/9
X_1	8/27	12/27	6/27	1/27	1

Маргинальные распределения:

$$\mathbf{P}(X_1=0)=\mathbf{P}((X_1=0)\bigcap((N=1)\bigcup(N=2)\bigcup(N=3))=$$
$$=\mathbf{P}(X_1=0,\,N=1)+\mathbf{P}(X_1=0,\,N=2)+\mathbf{P}(X_1=0,\,N=3)=$$
$$=2/27+6/27+0=8/27,$$

$\mathbf{P}(X_1=1)=0+6/27+6/27=12/27$, $\mathbf{P}(X_1=2)=6/27$, $\mathbf{P}(X_1=3)=1/27$.

Аналогично,

$$\mathbf{P}(N=1)=2/27+0+0+1/27=3/27=1/9,$$
$$\mathbf{P}(N=2)=2/3,\ \ \mathbf{P}(N=3)=2/9.$$

<u>Пример 4.</u> Двумерная случайная величина (X,Y) имеет распределение, заданное таблицей:

$Y \backslash X$	1	2	3	
0	0.06	0.02	0.12	0.2
-1	0.09	0.03	0.18	0.3
-2	0.15	0.05	0.3	0.5
	0.3	0.1	0.6	1

Здесь

$$\mathbf{P}(X=1)=0.06+0.09+0.15=0.3,\ \ \mathbf{P}(X=2)=0.1,\ \ \mathbf{P}(X=2)=0.1,$$
$$\mathbf{P}(Y=0)=0.06+0.02+0.12=0.2,\ \ \mathbf{P}(Y=-1)=0.3,\ \ \mathbf{P}(Y=-2)=0.5.$$

<u>2. Непрерывный случайный вектор.</u>

а) Равномерное распределение в $m-$мерной области G.

Обозначим через V меру области G (площадь, объем и т.д.). Плотность распределения равна

$$f(x_1,\dots,x_m)=\begin{cases}\dfrac{1}{V}, & \text{если}\ \ (x_1,\dots,x_m)\in G,\\ 0, & \text{если}\ \ (x_1,\dots,x_m)\notin G.\end{cases}$$

Рассмотрим случай $m=2$.

<u>Равномерное распределение в круге</u> $K=\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2\le r^2\}$.

Плотность распределения равна

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & \text{если}\ \ (x_1,x_2)\in K,\\ 0, & \text{если}\ \ (x_1,x_2)\notin K.\end{cases}$$

<u>Распределения в прямоугольнике</u> $\Pi=\{(x_1,x_2):a_1\le x_1\le b_1,\ a_2\le x_2\le b_2\}$.

Здесь

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b_2-a_2)(b_1-a_1)}, & \text{если}\ \ (x_1,x_2)\in \Pi,\\ 0, & \text{если}\ \ (x_1,x_2)\notin \Pi.\end{cases}$$

З а м е ч а н и е . Когда давалось определение геометрической вероятности, то под словами «наудачу выбирается точка в какой-либо области» имелось в виду равномерное распределение соответствующих случайных величин.

б) $m-$мерное нормальное распределение.

Введем обозначения

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_m)^T,\ \boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_m)^T - \text{вектор-столбцы,}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} - \text{матрица, причем } b_{ik}=b_{ki},$$

$|\mathbf{B}|-$ определитель матрицы $\mathbf{B}$, квадратичная форма

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \sum_{i,\,j=1}^{m} b_{ij}\,(x_i-a_i)(x_j-a_j)\,.$$

Тогда плотность распределения равна

$$f(x_1,\dots,x_m)=\frac{\sqrt{|\mathbf{B}|}}{(2\pi)^{m/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right)$$

Двумерное нормальное распределение.

Плотность распределения равна ($(a_1,a_2)\in R^2$, $\sigma_1>0, \sigma_2>0, -1\le\rho\le1$)

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\cdot\frac{(x_1-a_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(x_2-a_2)}{\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right).$$

Плотность нормального распределения сохраняет постоянное значение на эллипсах

$$\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\cdot\frac{(x_1-a_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(x_2-a_2)}{\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}=C^2\,.$$

Вероятность попадания внутрь этого эллипса равна

$$\mathbf{P}(C)=1-\exp\left(-\frac{C^2}{2(1-\rho^2)}\right).$$

Эллипс с $C=2$ называется *эллипсом рассеяния*. Он является геометрической характеристикой концентрации двумерного распределения около его центра (a_1,a_2).

Задача. Покажите, что маргинальные распределения величин X_1 и X_2 также являются нормальными $N(a_1, \sigma_1^2)$ и $N(a_2, \sigma_2^2)$ соответственно, т.е.

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

Покажем, что если $\rho = 0$, то

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2).$$

Действительно, если $\rho = 0$, то

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) = f_1(x_1) f_2(x_2).$$

3. Рассмотрим пару случайных величин (X_1, X_2) и множество $B \in \mathscr{B}_1$ такое, что $\mathbf{P}(X_1 \in B) \neq 0$. Следуя определению условной вероятности, мы можем толковать отношение

$$\frac{\mathbf{P}(X_1 \in B,\, X_2 < x_2)}{\mathbf{P}(X_1 \in B)} = F(x_2 | X_1 \in B) \qquad (4)$$

как условную вероятность неравенства $(X_2 < x_2)$ при условии, что $(X_1 \in B)$. Выражение (4), рассматриваемое как функция x_2 можно назвать условной функцией распределения величины X_2 при условии, что $X_1 \in B$, и обозначать через

$$F_2(.\,| X_1 \in B).$$

Если существует такая функция $F_2(._2 | ._1)$, что

$$\mathbf{P}(X_1 \in B,\, X_2 < x_2) = \int_B F_2(x_2 | x_1)\, dF_1(x_1)$$

для всех B и x_2, причем $F_1(x_1)$ – функция распределения величины X_1, то можно назвать $F_2(\,.\,| x_1)$ условной функцией распределения величины X_2, при условии, что $X_1 = x_1$.

В абсолютно непрерывном или дискретном случаях условное распределение определяется относительно легко. Пусть $f(x_1, x_2)$ – совместная плотность (X_1, X_2) и $f_1(x_1)$ – плотность только X_1.

По определению

$$\mathbf{P}(X_1 \in B, X_2 < x_2) = \int_B \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_B f_1(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{x_2} \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}\, dx_2, \qquad f_1(x_1) \neq 0.$$

Это показывает, что

$$F_2(x_2\,|\,x_1)=\int_{-\infty}^{x_2}\frac{f(x_1,x_2)}{f_1(x_1)}dx_2$$

удовлетворяет определению условного распределения. Кроме того, отношение $f(x_1,x_2)\,/\,f_1(x_1)=f_2(x_2|x_1)$ можно рассматривать как условную плотность распределения величины X_2 при условии $X_1=x_1$. Если $f_1(x_1)=0$ безразлично как определить условную функцию распределения.

В непрерывном случае из предыдущей формулы получаем

$$f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)\,dx_1=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x_2|x_1)\,f_1(x_1)\,dx_1\,.$$

В случае дискретного распределения

$$\mathbf{P}(X_1\in B,\,X_2<x_2)=\sum_{j:x_{1j}\in B}\ \sum_{k:x_{2k}<x}\mathbf{P}(X_1=x_{1j}\,,\,X_2=x_{2k})=$$

$$=\sum_{j:x_{1j}\in B}\mathbf{P}(X_1=x_{1j})\sum_{k:x_{2k}<x}\frac{\mathbf{P}(X_1=x_{1j}\,,\,X_2=x_{2k})}{\mathbf{P}(X_1=x_{1j})}=$$

$$=\sum_{j:x_{1j}\in B}\mathbf{P}(X_1=x_{1j})\sum_{k:x_{2k}<x}\mathbf{P}(\,X_2=x_{2k}\,|\,X_1=x_{1j})\,.$$

Таким образом, функция двух переменных $\mathbf{P}(\,X_2=x_{2k}\,|\,X_1=x_{1j})$ есть условное распределение величины X_2, при условии, что $X_1=x_{1j}$.

Пусть (X_1,X_2) имеет совместное двумерное нормальное распределение с плотностью

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\cdot\frac{(x_1-a_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(x_2-a_2)}{\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right).$$

Найдем условную плотность распределения $f_2(x_2|x_1)$. Имеем:

$$f_2(x_2|x_1)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_1(x_1)}=\frac{f(x_1,x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)\,dx_2}=$$

$$=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\cdot\frac{(x_1-a_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(x_2-a_2)}{\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}:$$

$$:\frac{\exp\left(-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}=$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\rho^2(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\cdot\frac{(x_1-a_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(x_2-a_2)}{\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left(x_2 - a_2 - \rho\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-a_1)\right)^2\right),$$

т.е. распределение является нормальным с параметрами

$$a_2 + \rho\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - a_1) \quad \text{и} \quad \sigma_2^2(1-\rho^2).$$

О п р е д е л е н и е. Мы будем говорить, что две случайные величины ***независимы***, если

$$F(x_2 | X_1 \in B) = F_2(x_2) \text{ для всех } x_2 \;\; B \in \mathscr{B}_1. \qquad (5)$$

Выбирая в качестве B интервал, получим из (5)

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2) \quad \text{для всех} \qquad (x_1, x_2) \in R^2. \qquad (6)$$

Ясно, что из (6) следует (5).

В абсолютно непрерывном случае *условие независимости* можно сформулировать в виде

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \quad \text{для всех} \qquad (x_1, x_2) \in R^2. \qquad (6)$$

Если $f_2(x_2|x_1) \neq f_2(x_2)$, то величины (X_1, X_2) зависимы, в противном случае, т.е. когда $f_2(x_2|x_1) = f_2(x_2)$ – независимы.

Так например, если (X_1, X_2) имеют двумерное нормальное распределение и $\rho = 0$, то величины (X_1, X_2) – ***независимы.***

Если же случайные величины (X_1, X_2) имеют двумерное дискретное распределение, то услови*е независимости* равносильно следующему условию:

$$\mathbf{P}(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2j}) = \mathbf{P}(X_1 = x_{1i})\cdot\mathbf{P}(X_2 = x_{2j}) \text{ для всех } i,\, j.$$

Как и в непрерывном случае, по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(X_2 = x_{2j}) = \sum_i \mathbf{P}(X_2 = x_{2j} | X_1 = x_{1i})\cdot\mathbf{P}(X_1 = x_{1i}).$$

Пример 7. Рассмотрим вновь пример 3. Имеем:

$$\mathbf{P}(X_1 = 0 | N = 1) = \frac{\mathbf{P}(X_1 = 0, N = 1)}{\mathbf{P}(N = 1)} = \frac{2/27}{1/9} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 1 | N = 1) = \frac{0}{1/9} = 0,$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 2 | N = 1) = \frac{0}{1/9} = 0,$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 3 | N = 1) = \frac{1/27}{1/9} = \frac{1}{3}.$$

Мы видим, что $\frac{2}{3}+0+0+\frac{1}{3}=1$, эти вероятности неотрицательны и, следовательно, имеем условное распределение, при условии, что $N=1$.

Аналогично,

$$\mathbf{P}(X_1=0 \mid N=2)=\frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(X_1=1 \mid N=2)=\frac{1}{3},$$

$$\mathbf{P}(X_1=2 \mid N=2)=\frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(X_1=3 \mid N=2)=0;$$

и

$$\mathbf{P}(X_1=0 \mid N=3)=0, \qquad \mathbf{P}(X_1=1 \mid N=3)=1,$$

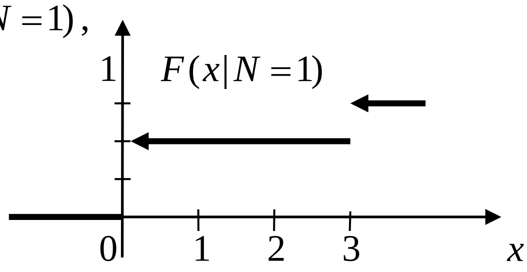
$$\mathbf{P}(X_1=2 \mid N=3)=0, \qquad \mathbf{P}(X_1=3 \mid N=3)=0.$$

Точно так же

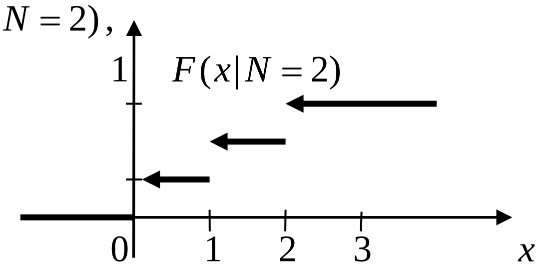
$$\mathbf{P}(N=1 \mid X_1=0)=\frac{1}{4},\ \mathbf{P}(N=2 \mid X_1=0)=\frac{3}{4},\ \mathbf{P}(N=3 \mid X_1=2)=0.$$

Имея условное распределение мы можем построить условную функцию распределения. Например,

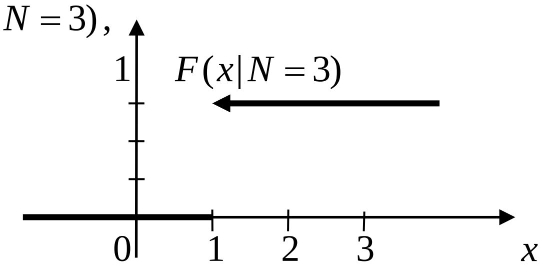
$$\mathbf{P}(X_1<x \mid N=1)=F(x \mid N=1),$$



$$\mathbf{P}(X_1<x \mid N=2)=F(x \mid N=2),$$



$$\mathbf{P}(X_1<x \mid N=3)=F(x \mid N=3),$$



и условные функции распределения разные.

По формуле полной вероятности

$$F_1(x)=\mathbf{P}(X_1<x)=\mathbf{P}(X_1<x \mid N=1)\mathbf{P}(N=1)+\mathbf{P}(X_1<x \mid N=2)\mathbf{P}(N=2)+$$

$$+\mathbf{P}(X_1 < x \mid N=3)\mathbf{P}(N=3) = F(x|N=1)\ \mathbf{P}(N=1) + F(x|N=2)\ \mathbf{P}(N=2) +$$
$$+ F(x|N=3)\ \mathbf{P}(N=3).$$

Пример 8. Рассмотрим снова пример 4. Здесь имеют место равенства:

$$\mathbf{P}(X=1, Y=0) = 0.06 = 0.3\cdot 0.2 = \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=0),$$
$$\mathbf{P}(X=1, Y=-1) = 0.09 = 0.3\cdot 0.3 = \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=-1),$$

и т.д. всех комбинаций значений величин X и Y. Таким образом, эти величины независимы.

Бета-биномиальное распределение.

Введем понятие $\Gamma(\alpha)$ гамма- и $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ бета-функции.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\ \alpha>0,$$

которая удовлетворяет следующему функциональному уравнению:
$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \Gamma(1)=1$, $\Gamma(n+1)=n!$

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ C_n^k = \frac{1}{(n+1)\mathrm{B}(n-k+1,k+1)}.$$

Рассмотрим Биномиальное Распределение $B(n,p)$:

$$\mathbf{P}(X=k \mid n,p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k=0,1,\dots,n,$$

и предположим, что сам параметр p является случайной величиной, имеющей бета-распределение с плотностью

$$\pi(p\mid\alpha,\beta) = \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}, 0\le p\le 1,$$ и ноль в остальных случаях.

Тогда

$$f(k\mid n,\alpha,\beta) = \int_0^1 P(X=k\mid n,p)\pi(p\mid\alpha,\beta)\,dp = C_n^k\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\int_0^1 p^{k+\alpha-1}(1-p)^{n-k+\beta-1}dp =$$
$$= C_n^k\frac{\mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}$$

смесь распределений (**бета-биномиальное распределение)**