$$I \xrightarrow{f} B$$

Отрезок разбит на $t_0, \dots, t_n$

Рис. 1: pic1

$$\widetilde{f}|_{[t_0,t_1]} \coloneqq p^{-1} \circ f|_{[t_0,t_1]}$$
$$f(t_i) \eqqcolon b_i$$
$$\widetilde{f}(t_1) \eqqcolon x_1 \in V_2 \quad \widetilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]} \coloneqq p^{-1} \circ f|_{[t_{i-1},t_i]}$$
$$x_i \in V_{i+1},\ p:\ V_{i+1} \to U_{i+1}$$

$\widetilde{f}$ непрерывно, т.к. $\forall i\ \widetilde{f}|_{t_{i-1},t_i}$ непрерывно, а $set[t_{i-1}, t_i]$ - фундаментальное покрытие отрезка I. Единственность $\widetilde{f}$ следует из построения

Теорема (О накрывающей гомотопии)**.** *Пусть* $p:\ X\to B$ *- накрытие,* $b_0\in B$*,* $x_0\in p^{-1}(b_0)$*. Пусть пути* $f,f':I\to B$ *с* $f(0)=f'(0)=b_0,\ f(1)=f'(1)$ *гомотопны.*
Тогда накрывающие пути $\widetilde{f},\widetilde{f}'$ *с* $\widetilde{f}(0)=\widetilde{f}'(0)=x_0$ *гомотопны и, в частности* $\widetilde{f}(1)=\widetilde{f}'(1)$

Доказательство. $\{U$ - прав. накр. окр-ть некоторой точки $\in B\}$ - открытое покрытие базы B.
H непр $\implies \left\{H^{-1}(U)\right\}$ - открытое покрытие пространства I^2
I^2 комп. метрическое пр-во $\implies$ по лемме Лебега $\exists$ разбиение $\{Q_{ij}\}$ пр-ва I

$$H(Q_{ij})\subset U_{ij}\text{ - прав. накрытая окр-ть}$$

$$Q_{ij}=[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j],\ i,j=0\dots,n$$

$$\exists!\,V_{00}\ni x_0:\ p:V_{00}\xrightarrow{\cong}U_{00}$$

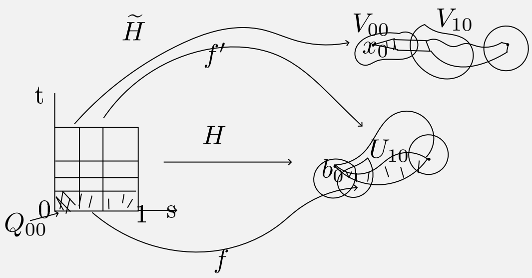
$$\widetilde{H}|_{Q_{00}}\coloneqq p^{-1}\circ H|_{Q_{00}}$$

$$\exists!\,V_{10}\supset\widetilde{H}(s_1\times[t_0,t_1]):\ p:V_{10}\xrightarrow{\cong}U_{10}$$

$$\widetilde{H}|_{Q_{10}}\coloneqq p\circ H|_{Q_{10}}:\ Q_{10}\to V_{10}$$

$$\widetilde{H}|_{Q_{n-1,0}}=p^{-1}\circ H|_{n-1,0}$$

$$f_i=H|_{I\times t_i},\quad i=1,\dots,n$$



Можно считать, что $H|_{T\times[t_0,t_1]}$ - гомотопия между f и $f_1\implies\widetilde{H}|_{I\times[t_0,t_1]}$ - гомотопия между $\widetilde{f}$ и $\widetilde{f}_1$
Аналогично строится $\widetilde{H}|_{T\times[t_j,t_{j+1}]}\implies\widetilde{f}\simeq\widetilde{f}_1\simeq\widetilde{f}_2\dots\simeq\widetilde{f}_n=f'\implies\widetilde{f}\simeq\widetilde{f}'\implies\widetilde{f}(1)=\widetilde{f}'(1)$ ■

§Фундаментальная группа окружности

Теорема.

$$\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$$

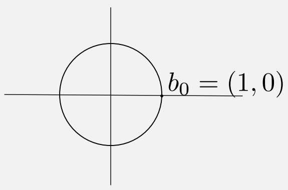
Доказательство.

$$p:\ \mathbb{R}\to S^1$$

$$p(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$$

$$\phi:\ \mathbb{Z}\to\pi_1(S,b_0)$$

$$\phi(n)=[f_n],\text{ где }f_n(t)\coloneqq(\cos 2\pi nt,\sin 2\pi nt),\quad t\in[0,1]$$

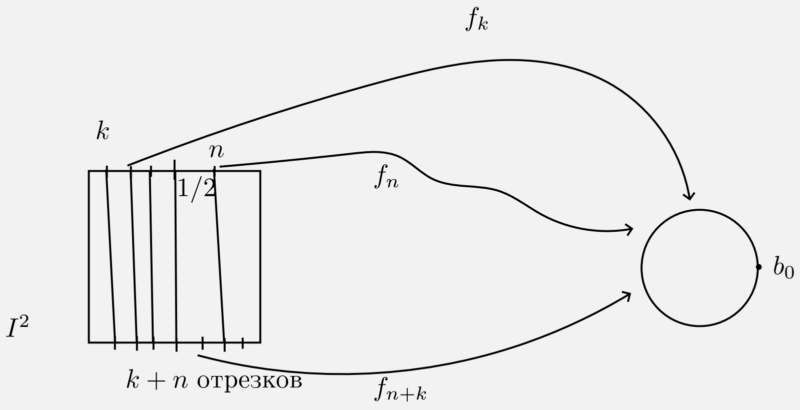


1) ϕ - гомоморфизм - ?

$$\phi(k+n) = \phi(k)\phi(n) - ?$$

$$[f_{k+n}] = [f_k f_n] - ?$$

$$f_{n+k} \simeq f_k f_n - ?$$



2) ϕ - мономорфизм - ?

$$\ker\phi = \{0\} - ?$$

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \quad n \in \ker\phi \implies \phi(n) = [e_{b_0}] \implies f_n \simeq e_{b_0}$$

$$n = 0 - ?$$

Пусть $\widetilde{f_n}$ - путь, накрывающий петлю f_n
Ясно, что $\widetilde{f_n}(t) = nt,\ t \in [0,1]$, т.к. $p(\widetilde{f_n}(t)) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt) = f_n(t) \implies \widetilde{f_n}(1) = n$
Ясно, что $\widetilde{e}_{b_0} = e_0,\ O \in \mathbb{R} \implies \widetilde{e}_{b_0}(1) = 0$
По теореме о накрывающей гомотопии $\widetilde{f_n} \simeq e_0 \implies n = 0$
3) ϕ - эпиморфизм - ?

$$\forall\, [u] \in \pi_1(S^1, b_0)\ \exists\, n \in \mathbb{Z}:\ [u] = \phi(n) = [f_n] - ?$$

Пусть $\widetilde{u}$ - путь с началом в точке $0 \in \mathbb{R}$ накрывающий петлю $u \implies n = \widetilde{u}(1) \in \mathbb{Z}$

$$u \simeq f_n - ?$$

$$\widetilde{u} \simeq \widetilde{f_n} - ?$$

$\mathbb{R}$ односвязно, $\widetilde{u}(0) = \widetilde{f_n}(0) = 0$. $\widetilde{u}(1) = \widetilde{f_n}(1) = n \implies \widetilde{u} \simeq \widetilde{f_n} \implies u = p \circ \widetilde{u} \simeq p \circ \widetilde{f_n} = f_n$ ■

Замечание.

$$[f_n] = [f_1]^n$$

§Фундаментальная группа вещественного проективного пространства

$$\mathbb{R}P^n = \{l \subset R^{n+1} \mid 0 \in l\},\ l \text{ - прямая}$$

$$S^n \subset R^{n+1} \text{ - единичная сфера с центром в точке } 0$$

$\exists$ отображение $p : S^n \to \mathbb{R}P^n : p(x) \coloneqq l \ni x, -x$

$\forall l \in \mathbb{R}P^n:\ p^{-1}(l) = \{x, -x\} \implies \mathbb{R}P^n = {}^{S^n}/{}_{x\sim -x} \implies$ топология в $\mathbb{R}P^n$ - фактор-топология, p - проекция на факто