

Метрические пространства

X - метрическое пространство, если:

$\forall x, y \in X$ задано число $\rho(x, y)$ - расстояние между x и y (метрика)

Примеры

- 1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$ - следствие из 3)

$\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$ - инвариантность относительно сдвига

$$\rho(x) \stackrel{\text{дн}}{=} \rho(x, 0)$$

$$\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

- 1) $\mathbb{R}^n. \vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$\rho^2(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2$$

- 2) $m_n. x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - упорядоченный набор

$$\rho(x) = \max_{k=1, \dots, n} |x_k|$$

- 3) m - пространство ограниченных числовых последовательностей. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n \dots)$

$$\rho(x) = \sup_{k=1, \dots, \infty} |x_k|$$

- 4) $l. x = (x_1, \dots, x_n \dots)$

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$$

- 5) $l_2. x = (x_1, \dots, x_n \dots)$

$$\rho^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$$

- 6) s - пространство всех числовых последовательностей. $x = (x_1, \dots, x_n \dots)$

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n(1 + |x_n|)}$$

- 7) S - измеримые функции. $x(t), t \in [a, b]$

$$\rho(x) = \int_a^b \frac{|x|}{1 + |x|} dt$$

- 8) L

$$\rho(x) = \int_a^b |x(t)| dt$$

- 9) L_2

$$\rho^2(x) = \int_a^b x^2(t) dt$$

- 10) C

$$\rho(x) = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

- 11) L_{∞} - ограничено измеримые функции

$$\rho(x) = \inf \{C : C \geq |x(t)| \text{ п.в. } t \in [a, b]\}$$

- 12) $C_{[a, b]}^1 \subset C_{[a, b]}$

$$\rho(x) = \max_{\forall t} |x(t)| + \max_{\forall t} |x'(t)|$$

Индукцированная метрика

Определение. X - метр. пр-во, $Z \subset X$
 Z - метр. пр-во, с метрикой, индуцированной из X

Виды множеств в метрических пространствах

$a \in X$ - м.п., $r \geq 0$

$S(a, r) = \{x : x \in X, \rho(a, x) < r\}$ открытый шар

$\bar{S}(a, r) = \{x : x \in X, \rho(a, x) \leq r\}$ замкнутый шар

Определение. Окрестность $S(a, \epsilon)$, $\epsilon > 0$

Определение. $M \subset X$ - метр. пр-во
Если для $x \in M$ $\exists S(x, \epsilon) \subset M$, то x - внутренняя точка M

Определение. $x \in X$ - метр. пр-во, называется точкой прикосновения множества M , если $\forall \epsilon > 0 \exists y \in M$ $\rho(x, y) < \epsilon$

Определение. Если множество содержит все свои точки прикосновения, то оно называется замкнутым

Утверждение. Замыкание множества является замкнутым множеством

Утверждение. Для того, чтобы множество было замкнутым необходимо и достаточно открытость его дополнения

Определение. $x_n \rightarrow x : \rho(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$