ТВиМС. Лекция (16.05.2025)

Вероятностные модели роста. Распределение Бирнбаума-Сондерса

$$\Delta_t = \Delta x_t = x_t - x_{t-1}$$

$$\{X_t\} \quad \xi_t \text{ - импульс}$$

$$\Delta_t = g(X_{t-1}) \cdot \xi_t$$

$$x_t = \sum_{t=1}^{t} \Delta x_t = \sum (X_t - X_{t-1}) = g(X_{t-1})\xi_t$$

$$\xi_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{g(X_{t-1})}$$

$$\sum_{k=1}^{t} \xi_k = \sum \frac{X_t - X_{t-1}}{g(X_{t-1})}$$

$\{X_k - X_{k-1}\}$ - независимые о.р. случайные величины (ξ_k)

$$E(\xi_k) = a$$

$$D(\xi_k) = b^2$$

$$X_t \sim \mathcal{N}(na, nb^2)$$

Функция распределения

$$\Phi\left(\frac{x - na}{\sqrt{n}b}\right)$$

n - велико. $n \leftrightarrow t$

$$\sum_k \frac{X_t - X_{t-1}}{g(X_t)} \approx \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y} = \ln x - \ln x_0$$

Логарифмически нормальное распределение

$$P(X < x) = P(h(X) < h(x)) = \Phi\left(\frac{x - na}{\sqrt{n}b}\right)$$

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{g(y)}$$

Вместо $X \longrightarrow \ln X = U$ - имеет нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}bx} e^{-\frac{\ln x - a}{2b^2}}, \quad x > 0$$

1. Развитие трещин
2. Рост деревьев
3. Доходы в семье

Распределение BS (Бирнбаума-Сондерса)

τ - случайная величина

λ, θ - новые параметры

$$\begin{cases} \lambda\sqrt{\theta} = \frac{h(x)}{b} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\theta}} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$P(\tau \leq x) = 1 - \Phi\left(\lambda\left(\sqrt{\frac{\theta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\theta}}\right)\right) = 1 - \Phi\left(\lambda\left(\xi\left(\frac{t}{\theta}\right)\right)\right) \quad (1)$$

Пусть случайная величина T

$$\sqrt{\frac{\theta}{T}} - \sqrt{\frac{T}{\theta}} \in \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$$

тогда ф.р. T (1) будет иметь …

$$U = \lambda\left(\sqrt{\frac{\theta}{T}} - \sqrt{\frac{T}{\theta}}\right) \quad (2)$$

$$T = \lambda\left(\frac{U\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{V\theta}{2}\right)^2 + 1}\right)$$

Имеет распределение BS

Случаи применения - циклические нагрузки

Найдем моменты с.в. T

$$E(T) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{U\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{V\theta}{2}\right)^2 + 1}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$E(T^2) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{U\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{V\theta}{2}\right)^2 + 1}\right) \varphi(x) dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu_1 = E(T) = \lambda\left(\frac{\theta^2}{2} + 1\right) \\ &D(T) = \lambda^2\theta^2\left(\frac{5}{4}\theta^2 + 1\right) \\ &\mu^3 = E\left((T - \mu_1)^3\right) = \frac{\theta^4 + \lambda^3}{2}(11\theta^2 + 6) \end{aligned}}$$

Асимметрия

$$\frac{\mu_3}{D(t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\theta^2(11\theta^2 + 6)}{(5\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}$$

Эксцес

$$\gamma_2 = 3 + \frac{6\theta^2(93\theta^2 + 4)}{(5\theta^2 + 4)^2}$$

Разборчивая невеста (опять)