УМФ. Лекция

haha

6 декабря 2024 г.

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) \tag{1}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Задача Коши

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ t \geq 0$$

$$u(x,y,z)|_{t=0} = \phi(x,y,z) \tag{2}$$

$$u_t(x,y,z)|_{t=0} = \psi(x,y,z) \tag{3}$$

Смешанные задачи

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \Gamma = \partial\Omega$$

$$(x,y,z) \in \Omega, \ t \geq 0$$

$$\phi(x,y,z), \ \psi(x,y,z) \text{ заданы в } \Omega$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing, \ i \neq j$$

Граничные условия:

$$u(x,y,z,t)|_{\Gamma_1} = u_\Gamma(x,y,z,t), \ (x,y,z) \in \Gamma_1, \ t \geq 0 \tag{4a}$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q_\Gamma(x,y,z,t), \ (x,y,z) \in \Gamma_2, \ t > 0 \tag{4b}$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n} + hu(x,y,z,t)|_{(x,y,z)\in\Gamma_3} = p_\Gamma(x,y,z,t), \ (x,y,z) \in \Gamma_3, \ t \geq 0 \tag{4c}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = 0 \tag{5}$$

Формула Пуассона

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta}{at} dS + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta}{at} dS$$

Принцип Гюйкенса

Локализованные в пространстве начальные возмущения порождают возмущения локализованные во времени

$$D \subset \mathbb{R}^3$$

$$\phi(x,y,z) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$\psi(x,y,z) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$d_\star = dist(M;D)$$

$$d^\star = \sup_{N \in D} |M \ N|$$

$$t > d^\star$$

$$u(x,y,z,t) \equiv 0$$

$$t \in \left(\frac{d_\star}{a}, \ \frac{d^\star}{a}\right)$$

$$at < d_\star, \ t < \frac{d_\star}{a} \quad t = \frac{d_\star}{a}$$

$$u(x,y,z,t) \equiv 0$$

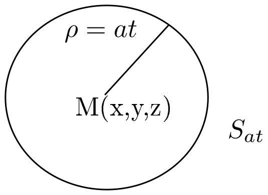

Рис. 1: Puasson formula

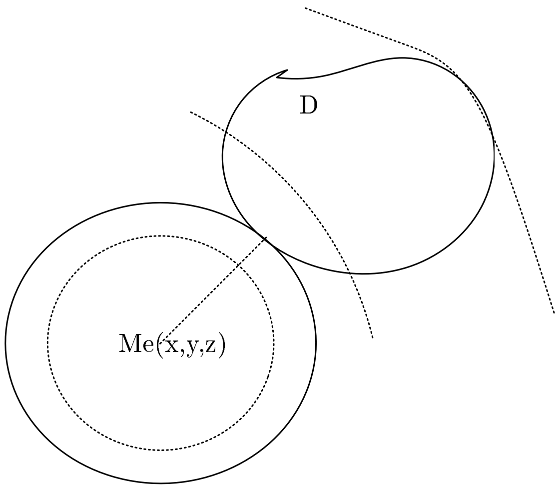

Рис. 2: Gukens principal

Цилиндрические волны

$$u = u(x, y, t) \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\phi = \phi(x, y),\ \psi = \psi(x, y)$$

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{C_{at}} \frac{\phi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 (x-\xi)^2 (y-\eta)^2}} + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{C_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 (x-\xi)^2 (y-\eta)^2}}$$

$$at < d_\star$$
$$u(x,y,t) \equiv 0$$
$$at > d_\star$$
$$t > \frac{d_\star}{\xi}$$

При $t \to \infty$ знаменатель стремится к 0
Для цилиндрических волн принцип Гюйгенса не выполняется

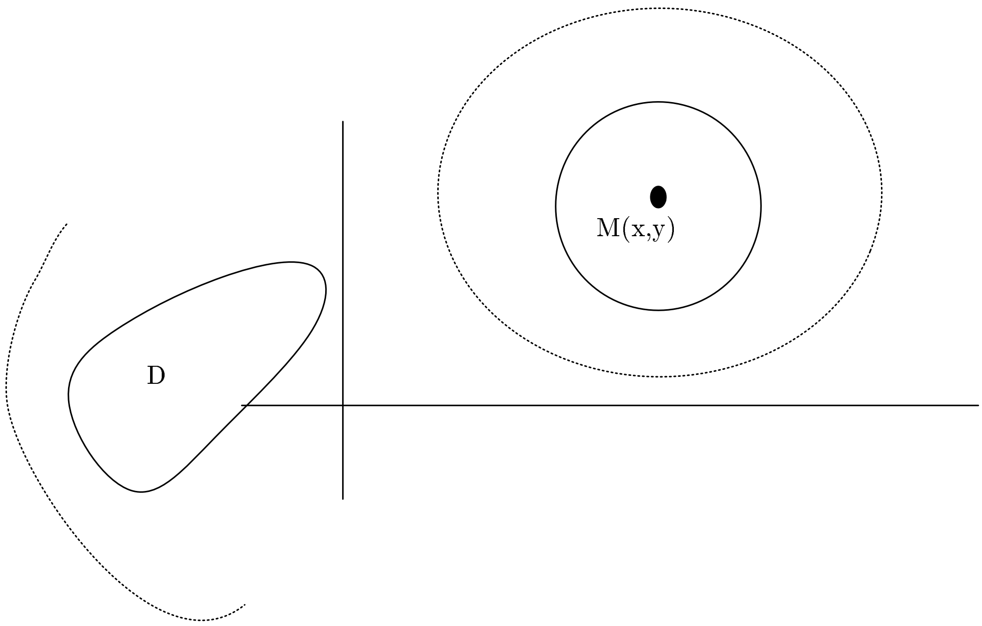

Рис. 3: Cylinder waves

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)$$

Формула Кирхгофа:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \frac{\phi(\xi,\eta,\zeta)}{at} dS + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{at} dS + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{D_{at}} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a})}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{D_{at}} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a})}{r} d\xi d\eta d\zeta \text{ - запаздывающий потенциал}$$