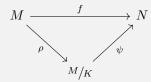
## Кольца и модули. Лекция(24.09.24)

 $\underline{\mathrm{Def}}\ \mathrm{M},\,\mathrm{N}$  -  $\mathrm{R}$  - модули. Отображение f:M o N - гомоморфизм модулей

- 1)  $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad \forall m_1, m_2 \in M$
- 2)  $f(r,m) = r \cdot f(m) \quad \forall r \in R \ \forall m \in M$ 
  - Упр. 1)  $\ker f\{m \in M \mid f(m) = 0\}$  подмодуль в М
- 2)  $\overline{Imf}\{n\in N\mid n=f(m)$  для нек-го  $m\in M\}$  подмодуль в N
- 3) Гомоморфизм  $f: M \to N$  иньективен  $\iff \ker f = \{0\}$



 $f = \rho \psi$ 

Proof Положим  $\psi(m+k) = f(m)$ 

$$\frac{\text{Корр-ть}}{\psi(m'+K)} m+K=m'+K \iff m'-m \in K \implies m'=m+k$$
 
$$\psi(m'+K)=f(m')=f(m+K)=f(m)+f(K)=f(m)$$

 $\psi$  - R - гомоморфизм

$$\psi\left((m+K) + (\tilde{m}+K)\right) = \psi((m+\tilde{m}) + K) = f(m+\tilde{m}) = f(m) + f(\tilde{m}) = \psi(m+K) + \psi(\tilde{m}+K)$$
$$\psi(r(m+K)) = \psi(rm+K) = f(rm) = rf(m) = r\psi(m+K)$$
$$\forall m \in M: \ \psi\rho(m) = \psi(m+K) = f(m) \implies \psi\rho = f$$

1-я Th об изоморфизмах Пусть  $f:{}_RM \to {}_RN$  - эпиморфизм  $\implies {}^M/\ker f \cong N$ 

<u>Proof</u> По лемме существует R - гомо-зм  $\psi: {}^M/\ker f \to N$  - эпиморфизм  $: \psi(m+\ker f) = f(m)$ 

 $\forall m + \ker f \in \ker \psi \implies \psi(m + \ker f) = 0 \implies m \in \ker f \implies m + \ker f = \ker f \implies \psi$  - иньект

2-я Th об изоморфизмах Пусть K, N - подмодули R - модуля M

Тогда  $N + K/N = K/N \cap K$ 

Proof Рассмотрим  $f: K \to K + N/N : f(k) = k + 0 + N$ 

$$\forall (k+n) + N \in K^{+N}/N \implies (k+n) + N = k + (n+N) = k + N = f(k) \implies k = f^{-1}((k+n) + N)$$

$$\forall k \in \ker f \implies f(k) = k + N = N \implies k \in N \cap K \implies \ker f \subseteq N \cap K$$

$$\forall x \in N \cap K \implies f(x) = x + N = N \implies x \in kerf \implies N \cap K \subseteq \ker f$$

$$\ker f = N \cap K$$

По первой теореме об изо  $K/\ker f = K/K \cap N \cong K + N/N$ 

3-я Th об изоморфизмах Пусть K, N - подмодули R - модуля M, причём  $K \subseteq N$ 

 $\overline{\text{Тогда } M/N = M/K/N/K}$ 

 $\underline{\operatorname{Proof}}$  рассмотрим  $f: {}^M/{}_K o {}^M/{}_N: m+K \mapsto m+N$  - сюр гомо-зм

$$\forall m+K \in \ker f \implies f(m+k) = n+N = N \implies n+K \in \ker f \implies N/K \subseteq \ker f$$

<u>Тһ</u> (Модулярный закон)

Пусть A,B,C - подмодули в М и  $B \subseteq A \implies$ 

$$A \cap (B+C) = B + (A \cap C)$$

 $\underline{\operatorname{Proof}}$ 

$$\forall x \in A \cap (B+C) \implies x \in A \land x = b+c \implies c = x-b \implies c \in A \cap C \implies x \in B + (A+C) \implies A \cap (B+C) \subseteq B + (A\cap C)$$

$$\forall y \in B + (A \cap C) \implies y = b + z \in A \cap (B + C) \implies B + (A + C) \subseteq A \cap (B + C)$$