Однопараметрические подгруппы

Теорема 1.

$$\begin{aligned}
&x = (x_1, ..., x_n) \\
&\frac{dx_i}{dt} = F_i\left(x_1(t), ..., x_{n(t)}\right) \\
&x_i(0) = 0 \\
&F_i(x_1, ..., x_n) - \text{гладкие в области } V \ni 0
\end{aligned} \tag{1}$$

$\exists!$ решение задачи (1) $x_i(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ гладкое решение

Теорема 2. $F(X, Y)$ - векторное поле гладкое в области $U \times V \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $F(X, Y)$ - гладкое отображение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\frac{dx}{dt} = F(X, Y) \qquad x_i(0) = 0 \tag{2}$$

$y_0 \in V \quad \exists V' \quad y_0 \in V' \subset V : \forall y \in V'$ задача (2) имеет гладкое решение $x(t, y), t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V'$

Определение. Пусть G - группа Ли, $\theta : (\mathbb{R}, +) \to G$ - гладкий гомоморфизм. θ называется однопараметрической подгруппой группы Ли.

$$\theta(t + s) = \theta(t)\theta(s)$$

$$\theta(0) = e$$

$\dot{\theta}$ - касательный вектор при $t = 0$. Обозначение θ_e

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}$$

Получаем соответствие однопараметрической подгруппы $\theta(t) \mapsto \theta_e \in T_{e(G)}$

Теорема 4. Указанное соответствие взаимно однозначно

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "L_s"'] & G \arrow[d, "L_{\theta(s)}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\theta"] & G
\end{tikzcd}$$

Доказательство:

$L_{\theta(s)}\, \theta(t) = \theta(s) \cdot \theta(t)$

$$t \to s + t \xrightarrow{\theta} \theta(s + t)$$

$$dL_{\theta(s)}\frac{d\theta}{dt} = d(\theta \circ L_s)\frac{d}{dt}\bigg|_t = d\theta\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t+s}\right) = \frac{d\theta}{dt}\bigg|_{t+s}$$

$$\frac{d\theta}{dt}\bigg|_{t+s} = \left(dL_{\theta(s)}\right)_{\theta(t)}\frac{d\theta}{dt}\bigg|_t$$

$$\frac{d\theta}{dt}\bigg|_s = dL_{\theta(s)}(\theta_e)$$

$$\begin{gathered}\frac{d\theta(t)}{dt} = dL_{\theta(t)}(\theta_e)\\ \theta(0) = 0\end{gathered} \tag{3}$$

(3) - дифференциальное уравнение однопараметрической группы

Допустим $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ имеют одинаковые касательные вектора при $t = 0$, т.е. $\theta_{1e} = \theta_{2e}$. Тогда они решение одного и того же уравнения.

$v \in T_{e(G)}\ \exists?\ \theta(t)\ |\ \theta_e = v$

$$\begin{gathered}\frac{d\theta(t)}{dt} = dL_{\theta(t)} \cdot v\\ \theta(0) = e\end{gathered} \tag{4}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists!\ \theta(t), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Рассмотрим $\varphi(t) = \theta(s) \cdot \theta(t), \quad \psi(t) = \theta(s+t) \quad |s| < \frac{\varepsilon}{2}, |t| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$dL_{\theta(s)} \cdot \frac{d\theta}{dt} = dL_{\theta(s)} \cdot v = dL_{\theta(s)\theta(t)} \cdot v$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = L_{\varphi(t)} \cdot v$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\theta(s+t)}{dt} = \frac{d\theta(s+t)}{d(s+t)} = \frac{d\theta(u)}{du} \overset{(4)}{=} dL_{\theta(u)}v = dL_{\psi(t)} \cdot v$$

$$\frac{d\psi}{dt} = dL_{\psi(t)}v$$

$\varphi(t) = \psi(t)$ для $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\theta(s)\theta(t) = \theta(s+t)$ для $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|s| < \frac{\varepsilon}{2}$
$t \in \mathbb{R} \quad N \in \mathbb{N}$
$|\frac{t}{N}| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\lambda(t) = \left(\theta\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N$$

надо доказать, что если $|\frac{t}{N}| < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$\theta\left(\frac{t}{N}\right)^N = \theta\left(\frac{t}{M}\right)^M$$

$$\underbrace{\frac{t}{NM} + ... + \frac{t}{NM}}_{M} = \frac{t}{N}$$

$$\left|\frac{t}{NM}\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\theta\left(\frac{t}{NM}\right)^{M} = \theta\left(\frac{t}{N}\right) \implies \theta\left(\frac{t}{MN}\right)^{MN} = \theta\left(\frac{t}{N}\right)^{n} \implies \theta\left(\frac{t}{MN}\right)^{MN} = \theta\left(\frac{t}{M}\right)^{M}$$

$\square$