Комплан. Лекция

dajflsadf

10 декабря 2024 г.

Ряды Лорана

<u>Th</u> (о !)
Ф-ия $f(z) \in H(z_0)$! образом разлагается в ряд Тейлора по $(z - z_0)$
<u>Proof</u>

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ c_n = \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n,\ d_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$\implies d_n = c_n \implies !$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z =$$

$$\cos z =$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

$$(1+z)^{\mu} =$$

<u>Def</u> Рядом Лорана по степеням $(z - z_0)$ называется ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \quad (1)$$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

$f_1(z)$ - главная часть ряда Лорана (сингулярная)

$f_2(z)$ - правильная часть ряда Лорана (регулярная)

Выясним область сходимости ряда Лорана

1) $f_2(z)$ - регуляр

$$|z - z_0| < R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

2) $f_1(z)$ - регулярна

$$\frac{1}{z - z_0} = \xi$$

$$|\xi| = \left|\frac{1}{z - z_0}\right| < r_1 = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}}$$

$$|z - z_0| > r = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}$$

$$r \geq R \implies (1) \text{ не сходится ни в какой области}$$

Будем считать, что $r < R$

1) Области сходимости (1) есть круговое кольцо $0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

$$r = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}$$

2) В этом кольце ряд (1) сходится абсолютно, а внутри этого кольца равномерно
3) В этом кольце ряд Лорана (1) определяет однозначную аналитическую функцию

Частные случаи

1) $c_{-k} = 0,\ k = 1, 2, \ldots.\ f(z) = f_2(z)$
Ряд Тейлора частный случай ряда Лорана
2) $r = 0 \quad \exists c_{-k} \neq 0$
Ряд Лорана сходится в кольце $0 < |z - z_0| < R$
(1) - ряд Лорана в окр-ти т z_0
3) $z_0 = 0,\ R = \infty.\ r < |z| < \infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n$$

Ряд (1) - ряд Лорана в окрестности бесконечности
Если $r = 0.\ 0 < |z| < \infty$
Ряд Лорана сходится в окрестности нуля и бесконечности

Вычесление коэф-тов

$$\gamma_\rho:\ |z - z_0| = \rho,\ r < \rho < R$$

$$(1) \cdot \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}},\ k \in \mathbb{Z}$$

На γ_ρ ряд (1) сходится равномерно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (z - z_0)^{n-(k+1)} dz = \begin{cases} 0,\ n \neq k \\ 2\pi i,\ n - k - 1 = -1 \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

<u>Th</u> (Лорана)
1) Ф-ия $f(z)$ регулярная в кольце $r < |z-z_0| < R$ представима в этом кольце сходящимся рядом Лорана (1) по степеням $(z-z_0)$
2) В данном кольце ряд (1) единственный
<u>Proof</u>
1) В данном кольце фиксируем точку z

$$c_1: \ |t-z_0| = \rho_1$$

$$c_2: \ |t-z_0| = \rho_2$$

$$r < \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2 < R$$

По фор-ле Коши для многосвязной области:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2 \cup c_1^-} \frac{f(t)dt}{t-z} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(t)dt}{t-z}}_{\phi_2(z)} \underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(t)dt}{t-z}}_{\phi_1(z)} = \phi_2(z) + \phi_1(z)$$

a) $\phi_2(z)$

$$\frac{1}{t-z} \text{ - разложим по пол степеням } (z-z_0)$$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z+z_0-z_0} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(t-z_0)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(z)dt}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(t)\cdot(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}dt$$

$$\phi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}\cdot(z-z_0)^n$$

b) $\phi_1(z)$ разложим по отрицательным степеням $(z-z_0)$

$$-\frac{1}{t-z} = \frac{1}{z-t} = \frac{1}{(z-z_0)-(t-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k}$$

По признаку Вейерштрасса полученный ряд сходится равномерно

$$\left|\frac{(t-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{|z-z_0|}\cdot\left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{1}{|z-z_0|}\cdot\frac{\rho_1^n}{|z-z_0|^n} = \frac{1}{|z-z_0|}\cdot q^n \quad q<1$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\cdot f(t) \wedge \int_{c_1}$$

$$\phi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{-k+1}}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^k}$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$$\forall z: \ r < |z-z_0| < R$$

На $|z-z_0| = r, \ |z-z_0| = R$ имеется хотя бы по одной особой точки функции $f(z)$
2) Т.к. коэф-ты ряда Лорана однозначно определяются по соотв-им формулам, то разложение в ряд Лорана единственно

<u>Note</u> $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z - z_0| < R$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$$

Где $f_1(z)$ регулярна в $|z - z_0| > r$, $f_2(z)$ регулярна в $|z - z_0| < R$
$f_1(z)$ разлагают по отрицательным степеням, а $f_2(z)$ по положительным

Классификация изолированных особых точек однозначных аналитических функций

<u>Def</u> Точка $z = z_0$ называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если $f(z)$ является однозначной аналитической в некоторой окрестности точки z_0 т.е. в $0 < |z - z_0| < R$