КиМ. Лекция

daskf

22 октября 2024 г.

Свободные модуль

$$_RF \to \{f_i\}_{i\in I} \text{ - базис в F} \iff \forall\, m \in F\ \exists!\ r_{i_1},\dots,r_{i_k} \in R \mid m = r_{i_1}f_{i_1} + \dots + r_{i_k}f_{i_k}$$

$$\iff F = \bigoplus_{i\in I} Rf_i \iff$$

$$1)\ \{f_i\}_{i\in I} \text{ - лнз (над R)}$$

$$2) F = \sum_{i\in I} Rf_i \iff F = _R< f_i >_{i\in I}$$

Th R - модуль F свободен $\iff F \cong \bigoplus_{i\in I}\ _RR$
Proof

$$F = \bigoplus_{i\in I} Rf_i$$

$$\phi : R \to Rf_i : r \mapsto rf_i \text{ - гомо левых R - модулей}$$

$$r \in \ker\phi \implies \phi(r) = rf_i = 0 \implies f_i \text{ - лнз } r = 0 \implies \ker\phi = \{0\}$$

$\Longleftarrow$:

$$F \cong \bigoplus_{i\in I}\ _RR = \{(\dots, r_k, \dots) \mid r_k \in R \text{ и почти все } r_k = 0\}$$

Базис:

$$\{(\dots, 0, 1, 0, \dots\} \implies F \text{ - свободен}$$

Examples
1) Векторные пр-ва - свободные модули
2) $\mathbb{Z}$ - модули ($\equiv$ абелевы группы)
Аб. гр A - свободна $\iff A \cong \bigoplus Z$

Предл любой R - модуль M является эпиморфным образом некоторого свободного R - модуля
Proof Пусть $\{m_i\}_{i\in I}$ система образующих
Рассмотрим своб. модуль $F = \bigoplus_{i\in I}\ _RR$ с базисом $\{f_i\}_{i\in I}$

Рассмотрим

$$\phi : F \to M : f = r_{i_1}f_{i_1} + \dots + r_{i_k}f_{i_k} \mapsto m = r_{i_1}m_{i_1} + \dots + r_{i_k}m_{i_k} \text{ - эпиморфизм}$$

Сл $\forall$ R - модуль M $\cong$ фактормодулю своб модуля

Вполне приводимые модули

Def Модуль M наз-ся простым, если он ненулевой и имеет только два подмодуля $\{0\},\ M$

Упр Найти все простые $\mathbb{Z}$ - модули ($\cong$ абелевы группы)

Def Модуль M называется вполне приводимым, если любой подмодуль в нем выделяется прямым слагаемым, т.е.

$$\forall N \leq M: \; M = N \oplus K \text{ some K} \leq M$$

Note любой простой модуль вполне приводим. Обратное неверно

Lemma1 Подмодули и гомоморфные образы вполне приводимых модулей вполне приводимы
Proof M - вполне приводим, $N \leq M$. N - вп. приводим?

$$\forall K \leq N \implies M = K \oplus X$$

$$N = N \cap M = N \cap (K \oplus X) = K + (N \cap X) = K \oplus (N \cap X)$$

Рассмотрим:

$$f : M \to f(M) \implies f(M) \cong {}^{M}/_{\ker f}$$

С другой стороны

$$\ker f \leq M \implies M = \ker f \oplus Y \implies Y \cong {}^{M}/_{\ker f} \cong f(M) \implies$$

$$\text{т.к Y - вп. приводим, то } f(M) - \text{ вполне приводим}$$

Lemma2 Пусть M - R -модуль, $\{M_i\}_{i \in I}$ - семейство простых подмодулей в M, порождающих M ($M = \sum_{i \in I} M_i$). Тогда для любого подмодуля $N \leq M$ $\exists J \subset I \mid M = N \oplus (\bigoplus_{j \in J} M_j)$

Сведения из теории множеств

Уже было видимо в ОСА

Proof Рассмотрим чум $X = \{K \subset I \mid N + (\bigoplus_{k \in K} M_k) = N \oplus (\bigoplus_{k \in K} M_k)\}$
1) $X \neq \varnothing$, т.к. $\varnothing \in K$
2) $\{Y_s\}_{s \in S}$ - лу подмн-во в X $\implies$ верхняя грань $\bigcup_{s \in S} Y_{i_s} \implies$ в X $\exists \max J \implies N \oplus (\bigoplus_{j \in J} M_j) = N'$
$N' \stackrel{?}{=} M$. Противное: $M \neq N'$

$$\implies \text{ т.к. } = \sum_{i \in I} M_i, \text{ then } \exists M_t \mid M_t \not\subseteq N' \implies M_t \cap N' = \{0\}$$

Тогда $N' + M_t = N' \oplus M_t = N \oplus (\bigoplus_{j \in J}) M_j) \oplus M_t = N \oplus (\bigoplus_{q \in J \cup \{t\}} M_q)$. Противоречие с макс J

Th Для R - модуля M эквивалентно:
1) M - сумма простых подмодулей $M = \sum_{i \in I} M_i$
2) $M = \bigoplus_{j \in J} M_j$, M_j -прост
3) M - вполне приводимый модуль
Proof 1) $\implies$ 2) следует из леммы 2 при $N = 0$
2) $\implies$ 3)

следует из леммы 2