КиМ. Лекция

3 декабря 2024 г.

2)

$$\forall\ \alpha \in \hom_R\left(M_i \bigoplus_{j=1}^{m} N_j\right)$$

α определяет последовательность $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, где $\alpha_j = \pi_j \alpha:\ M \to \bigoplus_{j=1}^{m} N_j \to N_j$
Обратно $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ определяет α:

$$\forall m \in M:\ \alpha(m) = n = (n_1, \dots, n_m) = (\pi_1(n), \dots, \pi_m(n)) = (\pi_1 \alpha(m), \dots, \pi_m \alpha(m)) = (\alpha_1, \dots \alpha_m)(m)$$

$$\phi : \hom_R\left(M_i \bigoplus N_j\right) \to \bigoplus_{j=1}^{m} \hom_R(M, N_j) : \alpha \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

$$\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$$

<u>Lemma.1</u>
$End_R R_R \cong R$
<u>Proof</u> <u>упр</u> $\phi : R \to End_R R_R : r \mapsto \phi_r$, где $\forall x \in R_R :\ \phi_r(x) = rx$ - изом-зм колец

Lemma 2

$$M_R = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$$

Тогда

$$End_R M \cong \begin{bmatrix} End_R M_1 & \hom_R(M_2, M_1) & \dots & \hom_R(M_n, M_1) \\ \hom_R(M_1, M_2) & End_R M_2 & \dots & \hom_R(M_n, M_2) \\ \dots & & & \\ \hom_R(M_1, M_n) & \hom_R(M_2, M_n) & \dots & End_R M_n \end{bmatrix} = S$$

В частности, если $M_i \cong M_j \cong N \quad \forall i, j$

$$End_R M \cong M_n(End_R N)$$

Proof $\pi_i : M \to M_i$ - проекция
$\eta_j : M_j \hookrightarrow M$ - вложение

$$\pi_i \eta_j = 0,\ i \neq j$$

$$\pi_i \eta_i = 1_{M_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \pi_i = 1_M = 1$$

$$\forall\, \alpha \in End_R M \implies \alpha = 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \pi_i \alpha \sum_{i=1}^{n} \eta_j \pi_j = \sum_{i,j} \eta_i (\pi_i \alpha \eta_j) \pi_j = \sum_{i,j} \eta_i \alpha_{ij} \pi_j$$

$$\alpha_{ij} = \pi_i \alpha \eta_j \in \hom_R(M_j, M_i)$$

$$\phi : End_R M \to S :\ \alpha \mapsto (\alpha_{ij}) \text{ - изом-зм колец}$$

$$1)\ \phi(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} \phi(\alpha) + \phi(\beta) \iff (\alpha + \beta)_{ij} \stackrel{?}{=} \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

$$(\alpha + \beta)_{ij} = \pi_i (\alpha + \beta) \eta_j = \pi_i \cdot \alpha \cdot \eta_j + \pi_i \beta \eta_j = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

$$2) \phi(\alpha\beta) \stackrel{?}{=} \phi(\alpha)\phi(\beta)$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \pi_i \cdot \alpha\beta \cdot \eta_j = \pi_i \cdot \alpha \cdot 1 \cdot \beta \cdot \eta_j = \pi_i \cdot \alpha \sum_k \eta_k \pi_k \cdot \beta \eta_j = \sum_k (\pi_i \alpha \eta_k)(\pi_k \beta \eta_j) = \sum_k \alpha_{ik} \beta_{ki}$$

$$c_{ij} = \sum_k \alpha_{ik} \beta_{ki} = (\alpha\beta)_{ij}$$

3) иньективность

$$\forall \alpha \in \ker\phi :\ \phi(\alpha) = 0 = (\alpha_{ij}) \implies \alpha_{ij} = 0\ \forall i, j$$

$$\alpha = \sum_{i,j} \eta_i \cdot 0 \cdot \pi_j = 0$$

4) сюрьективность

$$\forall (c_{ij}) = C \in S$$

$$\sum_{a,b} \eta_a \cdot c_{ab} \pi_b = \alpha$$

$$\alpha_{ij} = \pi_i \left(\sum_{a,b} \eta_a c_{ab} \pi_b \right) \eta_j = \pi_i \eta_i c_{ij} \pi_j \eta_j = c_{ij}$$

Lemma 3 (Лемма Шура)
Пусть M, N - простые R - модули. Тогда

$$\forall 0 \neq \phi \in \hom_R(M, N) \text{ - изоморфизм}$$

В частности, $End_R M$ - тело
Proof

$$\forall 0 \neq \phi \in \hom_R(M, N) \implies im\phi \leq N \implies im\phi = 0 \vee im\phi = N \implies \phi \text{ - сюрьективно}$$

$$\ker\phi \leq M \implies \ker\phi = 0 \vee \ker\phi = M \implies \phi \text{ - иньективно}$$

Lemma 4

1) $M_n(D)$ - простое кольцо, где D - тело

2)

$$S = \left[\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right] \text{ - простое R - модуль}$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij}E_{sk} = \begin{cases} 0, & j \neq s \\ E_{ik}, & j = s \end{cases}$$

1) Пусть $0 \neq I \triangleleft R,\ 0 \neq A(a_{ij}) \in I$, пусть $a_{ij} \neq 0$

$$a_{ij}^{-1}E_{ii}AE_{jj} = E_{ij} \in I$$

$$\forall\, E_{kl}:\ E_{kl} = E_{ki}E_{ij}E_{jl} \in I$$

$$R =< E_{ij} >_R \implies I = R$$

2) Упр R - модуль M - простой $\iff \forall 0 \neq m_1 \in M,\ \forall m_2 \in M\ \exists r \in R \mid m_2 = m_1 \cdot r$

$\impliedby$:

$$0 \neq N \leq M,\ \text{пусть } 0 \neq n \in N$$

Берём $\forall m \in M$

$$\implies m = \underbrace{n \cdot r}_{\in N} \text{ for some } r \in R \implies M \subset N \implies M = N$$