Комплан. Лекция

wtf

22 октября 2024 г.

Th.5(Св-ва симметрии)
Точки z_1, z_2 симметричные относительно окружности в широком смысле при др. линейном преоб-и отображаются в точки w_1, w_2 симметричные относительно образа $C = L(\Gamma)$

Задача 1 (Полупл-ть на круг)
найти все др-лин преобр, отображающие $Imz > 0$ на единичный круг так, чтобы некоторая точка $z_1 = \beta \in \{z : \ Imz > 0\}$ перешла в $w_1 = 0$

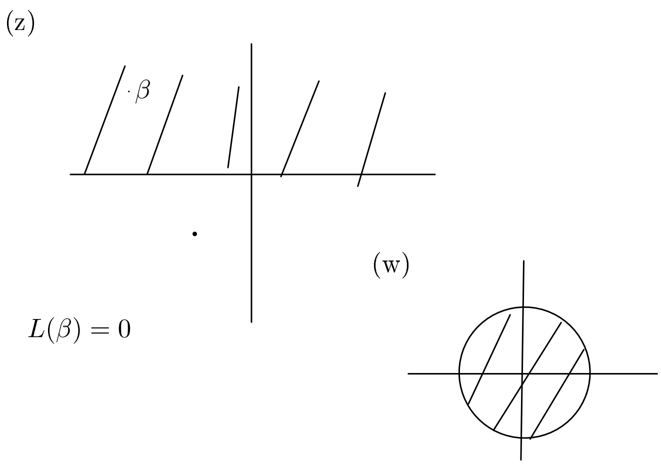

Рис. 1: task1

$\beta, \ \bar{\beta}$ симм отн $Imz = 0$
$L(\beta) = 0, \ L(\bar{\beta} = \infty$
$L(\{Imz = 0\}) = \{|w| = 1$

$$w = \frac{a(z - \beta}{c(z - \bar{\beta})} \ A = \frac{a}{c} = ?$$

$$z = x \to |w| = 1$$

$$|w| = |A| \frac{|x - \beta|}{|x - \bar{\beta}|} = 1$$

$$\beta = \delta + i\gamma$$

$$\bar{\beta} = \delta - i\gamma$$

$$|x - \beta| = \sqrt{(x - \delta)^2 + \gamma^2}$$

$$|x - \bar{\beta}| = \sqrt{(x - \delta)^2 + \gamma^2}$$

$$A = 1 \cdot e^{i\alpha} \quad \alpha = ArgA \in \mathbb{R}$$

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}} \quad Im\beta > 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Note. Разрешая равенство относительно z, получим все дробно-линейные преобразования отображающие единичный круг на верхную полуплоскость

Task2 (Круг в себя)
Найти все др-лин преоб, отображающие $|z| < 1$ в $|w| < 1$ так, чтобы $z_1 = \beta$ перешла в $w_1 = L(\beta) = 0$

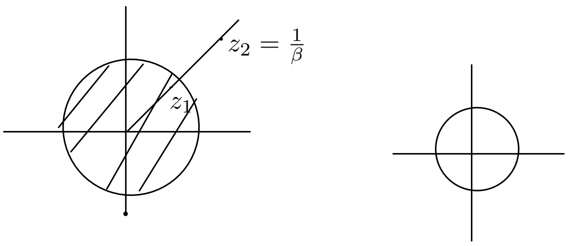

Рис. 2: task2

$$z_1 = \beta \to w_1 = 0$$

$$z_2 = \frac{1}{\bar{\beta}} \to w_2 = \infty$$

$$w = A \cdot \frac{z-\beta}{z-\frac{1}{\beta}} = A \cdot \frac{\bar{\beta}(z-\beta)}{z\bar{\beta}-1}$$

$$w = B\frac{z-b\eta}{1-\bar{\beta}\cdot z}$$

$$z = 1 \to |w| = 1$$

$$|w| = |B|\frac{|1-\beta|}{|1-\bar{\beta}|} = 1 \implies |B| = 1$$

$$B = 1 \cdot e^{i\alpha} \quad \alpha = ArgB \in \mathbb{R}$$

$$w = e^{i\alpha}\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}\cdot z} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ |\beta| < 1$$

Task3 (Полупл-ть в себя)
Найти все др-лин преоб отображающие верхнюю полуплость в себя так, чтобы 3 граничные точки перешли в $0, 1, \infty$

$$\frac{w-0}{w-1} : \frac{\infty-0}{\infty-1} = \frac{z-\alpha}{z-\beta} : \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$$

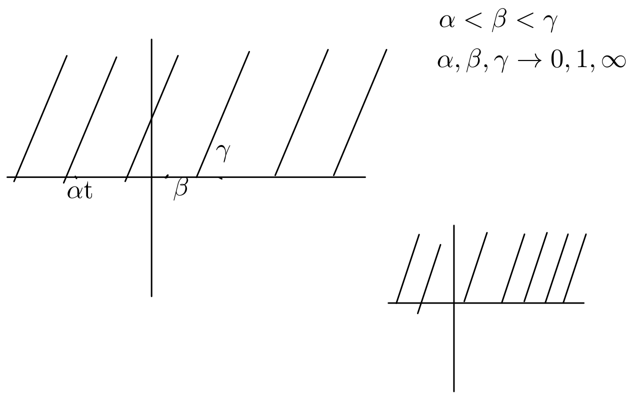

Рис. 3: task3

$$\implies \frac{w}{w-1} = \frac{z-\alpha}{z-\beta} \cdot \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$$

$$w = \frac{z-\alpha}{z-\beta} \cdot \delta(w-1)$$

$$w = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

<u>Example</u> Отобразить единичный круг $|z| < 1$ на $Imw > 0$

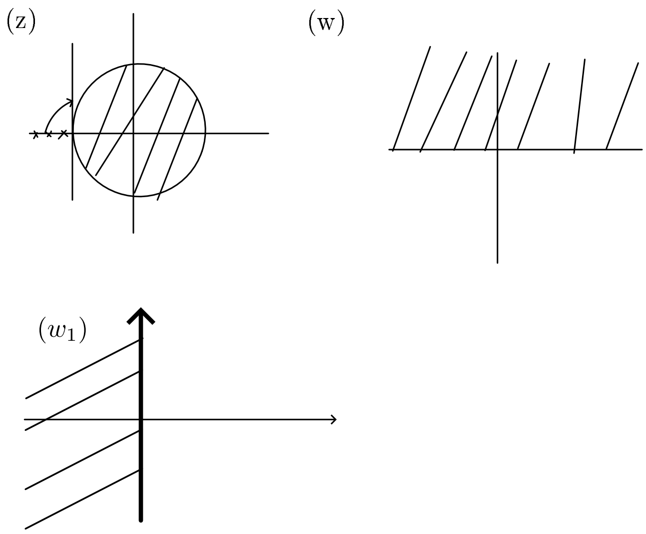

Рис. 4: Ex1

$$w_1 = \frac{z+1}{z-1}$$

$$z = -1 \to w_1 = 0$$

$$w_2 \equiv w = w_1 + e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$w = -i \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Отображение с помощью степенной функции

$$w = z^{\lambda},\ \lambda > 0, \lambda \neq 1$$
$$z > 0 \implies z^{\lambda} > 0$$
$$\frac{dw}{dz} = \lambda \cdot z^{\lambda-1} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}, \text{ кроме } z=0,\ z=\infty \implies w = z^{\lambda} \text{ - конмформно всюду, кроме } z=0, z=\infty$$
$$z = re^{i\phi},\ w = \rho \cdot e^{i\theta} \quad \rho e^{i\theta} = (re^{i\phi})^{\lambda}$$
$$|w| = \rho = r^{\lambda}$$
$$\theta \equiv \arg w = \lambda\phi$$
$$\begin{cases} |w| & = |z|^{\lambda} \\ \arg w & = \lambda \arg z \end{cases} \implies \text{ луч } \phi \text{ отобразится вз/одн в луч } \theta$$

Вывод 1 Ф-ия $w = z^{\lambda},\ \lambda > 0, \lambda \neq 1$ угол $\phi_1 \leq \phi < \phi_2$ в (z) с вершиной в т $z = 0$ раствора $\phi - \phi_1 \leq 2\pi$ отобр в угол $\lambda\phi_1 \leq \theta < \lambda\phi_2$ в (w) с вершиной в $w = 0$ раствора $\lambda(\phi_2 - \phi_1)$ вз-одн, если $\lambda(\phi_2 - \phi_1) \leq 2\pi$, т.е. в т. $z = 0$ нарушается конф степенной функции

$$w = \sqrt{z} \quad w = z^n,\ w = \sqrt[n]{z},\ n \geq 2$$

Вывод 2 Ф-ия $w = z^n$ угол $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ конф отображает в угол $0 < \theta < \pi$, т.е. в $Imw > 0$

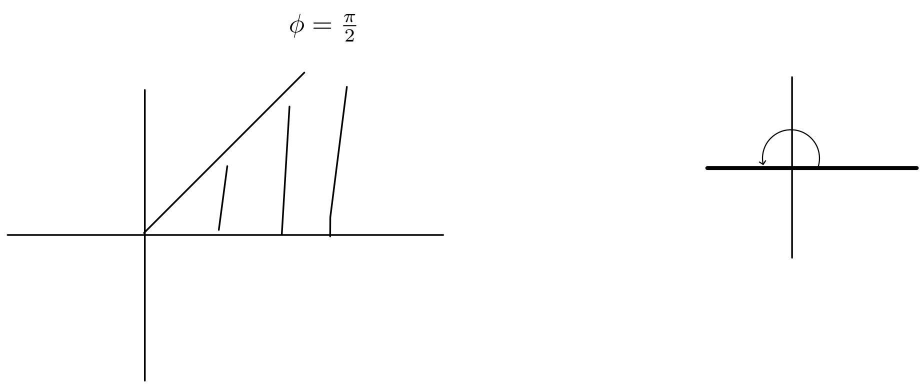

Рис. 5: pic4

$$w = z^n$$
$$z = re^{i\phi},\ w = \rho e^{i\theta}$$
$$\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\phi}$$

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ \theta = n\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r < +\infty \\ \phi = 9 \end{cases} \implies L_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$l_2 : \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho < +\infty \\ \theta = \pi \end{cases}$$