§1. Топологические пространства

Опр.. Пусть на мн-ве X задано семейство τ, удовлетворяющие условиям:
1. X, $\varnothing \in \tau$
2. $\forall$ U_α, $\alpha \in A$ $\quad U_\alpha \in \tau \quad \forall \alpha \Rightarrow \cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$
3. $\forall U_i$, $i = \overline{1, n} \quad U_i \in \tau \Rightarrow \cap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$
Тогда (X, τ) - топологическое поствансвто. τ - топология
Опр.. U $\in \tau \Rightarrow$ U - открытое. CU - замкнутое
Опр.. $\forall$ открытое мн-во, содеражащие точку x, называется его окресностью
Теорема Мн-во U $\in \tau \Leftrightarrow \forall$x $\in$ U входит в него с нек-рой окр-тью
Опр. Пусть на мн-ве X задано отображение
d: X$\times$X $\to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условиям:
1. d(A,B) ≥ 0, $\forall$A,B
d(A,B) $= 0 \Leftrightarrow$ A=B
2. d(A,B) $=$ d(B,A) $\forall$A,B
3. d(A,B) $+$ d(B,C) $\geq$ d(A,C) $\quad \forall$A,B,C $\in$ X
Тогда (X, d) - метрическое пространство

Опр. Пусть (X, d) - метр. пр-во.
Тогда объединение произвольных наборов открытых шаров является топологией
d(a,b) $= \sqrt{\sum_i^n (a_i - b_i)^2}$
$(\mathbb{R}^n, \mathrm{d})$ - метр. пр-во
$\tau_0 = \tau_d$
Опр. Пусть (X, τ) - топология. $A \subset X$

Тогда $\tau_A = \{U \cap A | U \in \tau\}$ называется топологией индуцированной их X на A
(A, τ_A) – подпространство пространсва (X, τ)

Теорема (Транзитовность инд. топологии) Let (X, τ), $B \subset A \subset X$
Тогда $\tau_B = (\tau_A)_B$
Д-во.
1. $\tau_B \subset (\tau_A)_B$

$$\forall U \in \tau_B \Rightarrow \exists V \in \tau \quad | \quad U = V \cap B \Rightarrow \tilde{V} = V \cap A \in \tau \Rightarrow \tilde{V} \cap B = (V \cap A) \cap B = V \cap B \Rightarrow U \in (\tau_A)_B$$

2. $(\tau_A)_B \subset \tau_B$

$$\forall U \in (\tau_A)_B \Rightarrow \exists V \in \tau_A \quad | \quad U = V \cap B \Rightarrow \exists \tilde{V} \in \tau | V = \tilde{V} \cap A \Rightarrow U = \tilde{V} \cap B \in \tau_B$$

Опр. $(X, \tau)\Sigma \subset \tau$ наз-ся базой τ, если каждое открытое множество является объединением подмножеств из Σ

Пр (X, τ_d) Σ - база τ_d состоит из открытых шаров

Теорема (Критерий базы в топологическом пространстве)
Let (X, τ)
Σ является базой $\Leftrightarrow$
1. $\Sigma \subset \tau$
2. $\forall U \in \tau$, $\forall x \in U \, \exists V \in \Sigma \, | \, x \in V \subset U$
Теорема (Критерий базы в на мн-ве)
Пусть X множество без топологии
Σ - база некоторой топологии $\Leftrightarrow$

1. $X = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha,\ U_\alpha \in \Sigma$

2. $\forall U, V \in \Sigma \quad \forall x \in U \cap V\ \exists W \in \Sigma \mid x \in W \subset U \cap V$

Опр. Let (X, τ) - т.п. $\forall A \subset X$

т. a называется внутренней, если $\exists U_a \mid U_a \subset A$

мн-во внутренних точек $\mathrm{Int}A = \mathring{A}$

Теорема $\forall A \Rightarrow \mathrm{Int}A \in \tau$

Теорема $A \in \tau \Leftrightarrow A = \mathrm{Int}A$

Теорема $\forall A, B \Rightarrow$

1. $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}B$

2. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$

Д-во.

1.

$$\forall x \in \mathrm{Int}A \Rightarrow \exists U_x \mid U_x \subset A \xRightarrow{A \subset B} U_x \subset B \Rightarrow x \in \mathrm{Int}B$$

2. a) $\mathrm{Int}(A \cap B) \overset{?}{\subset} \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$

$\forall x \in \mathrm{Int}(A \cap B) \Rightarrow \exists U_x \subset A \cap B \Rightarrow U_x \subset A\ \wedge\ U_x \subset B \Rightarrow x \in \mathrm{Int}A\ \wedge\ x \in intB \Rightarrow x \in \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$

b) $\overset{?}{\supset}$

$$\forall x \in \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B \Rightarrow \begin{cases} x & \in \mathrm{Int}A \Rightarrow \exists U_x \mid U_x \subset A \\ x & \in \mathrm{Int}B \Rightarrow \exists V_x \mid V_x \subset B \end{cases} \Rightarrow W_x = U_x \cap V_x \Rightarrow W_x \subset A \cap B$$

Теорема. Внутренность множества A является объединением всех открытых подмножеств, содержащихся во множестве A

$$\mathrm{Int}A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad A_i \in \tau\ A_i \subset A$$

Д-во.

1. $\mathrm{Int}A \overset{?}{\subset} \bigcup\limits_{i \in I} A_i \quad A_i \in \tau,\ A_i \subset A$

$$\mathrm{Int}A \in \tau,\ \mathrm{Int}A \subset A \Rightarrow \mathrm{Int}A = A_{i_0}$$

2. $\mathrm{Int}A \overset{?}{\supset} \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

$$\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad x \in A_{i_0},\ A_{i_0} \in \tau \quad A_{i_0} \subset A$$

A_{i_0}окрестность т.x, которая включена в A $\Rightarrow x \in \mathrm{Int}A$

Опр. точка a называется точкой прикосновения множества A, если любая окресность точки a пересекается со множеством A.

Множество точек прикосновения называется замыканием $\bar{A}$

Пр. $(\mathbf{R}, \tau_0)$ $A = [0, 1) \cup \{2\}$

$\bar{A} = [0, 1] \cup \{2\}$