Топология. Лекция

whoo

22 ноября 2024 г.

Th.5 $([a,b],\tau_0)$ компактен
Proof Let $[a,b] = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha,\ U_\alpha \in \tau_{0[a,b]}$
Let $X = \{x \in (a,b] \mid [a,x]$ покрыв конечным числом $U_\alpha\}$
1. $X \neq \varnothing$. Let $a \in U_{\alpha_1}$

$$\implies \exists [a, a+\epsilon) \subset U_{\alpha_1} \implies [a, a+\frac{\epsilon}{2}] \subset U_{\alpha_1},\ a+\frac{\epsilon}{2} \in X$$

2. Let $v = \sup X$. Докажем, что $v \in X$
Let $V \subset U_\beta$

$$\implies \exists\ \epsilon \mid (v-\epsilon, v+\epsilon) \subset U_\beta$$

$$c \in (v-\epsilon, v+\epsilon) \cap X$$

$$[a,c] \subset U_{\alpha_1} cup \dots \cup U_{\alpha_n}$$

$$[a,v] \subset U_{\alpha_1} cup \dots \cup U_{\alpha_n} cup U_\beta$$

Докажем, что $v = b$

Let $v < b$

$$v \in U_\beta \implies v \in (v-\epsilon, v+\epsilon) \implies [a, v+\frac{\epsilon}{2}] = U_{\alpha_1} \cup \dots \cap U_{\alpha_n} cup U_\beta$$

Th6 Компактное подмн-во в Хауздорфовом пр-ве замкнуто
Proof $(X,\tau) \in T_2$
A - комп подмн-во.
Докажем, что $CA \in \tau$

$$\forall p \in CA,\ \forall x \in A \implies \exists U_p, U_x \mid U_p \cap U_x = \varnothing$$

См. pic1

$$\forall x \in A\ U_p^x \mid U_p^x \cap U_x = \varnothing$$

$$\exists \text{ Конечное подпокр A окр-тями } U_{x_1}, \dots U_{x_n}$$

$$U_p = U_p^{x_1} \cap \dots \cap U_p^{x_n}$$

Проверим, что $U_p \subset CA$

$$U_p \cap (\underbrace{U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}}) = (U_p \cap U_{x_1}) \cup (U_p \cap U_{x_n}) = \varnothing$$

Th7 непрерывный образ комп пр-ва компактен
Proof $f : (X,\tau) \to (Y,\omega)$ - непр отображение, f - сюрьекция
Let $V_{\alpha,\alpha\in A}$ - открытое покрытие Y

$$f^{-1}(V_\alpha) \in \tau$$

$$f^{-1}(V_\alpha) \text{ - покрытие X}$$

$$\exists \text{ конечное подпокрытие X мн-вами } f^{-1}(V_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(V_{\alpha_k})$$

$$\implies V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_k} \text{ - конечное подпокр Y}$$

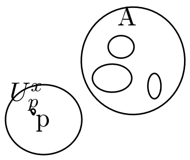

Рис. 1: pic1

<u>Th.8</u> Произведение двух компактных пр-в компактно
<u>Proof</u> Let $(X, \tau),\ (Y, \omega)$

$$\forall Z \in \tau \times \omega$$

$$\forall (x,y) \in Z \implies \exists U_\alpha \in \tau,\ V_i \in \omega \mid (x,y) \in U_\alpha \times V_i \subset Z,\ U_\alpha \text{ - элемент базы } \tau\ \alpha \in A$$

$$V_i \text{ - эл-т базы } \omega,\ i \in I$$

Достаточно проверить, что из любого покрытия $X \times Y$ множествами вида $U_\alpha \times V_i$ можно выбрать конечное подпокрытие
Фиксируем $x_0 \in X$. $\{x_0\} \times Y$
Let $f : (Y, \omega) \to \{x_0\} \times Y : Y \to (x_0, Y)$
Тогда f непрерывна
Тогда по Th 7:

$$\{x_0\} \times Y \text{ - компактно}$$

Выберем конечное подпокрытие множества $\{x_0\} \times Y$ множествами $U_{\alpha_1} \times V_{i_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \times V_{i_n}$

$$U_{x_0} = U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n} \text{ - окр-ть т. } x_0 \implies U_{\alpha_1} \times V_{i_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \times V_{i_n} \text{ образуют конечное покрытие } U_{x_0} \times Y$$

$$\forall\, x \in X \text{ построим аналогично } U_x \text{ и конечное подпокрытие } U_x \times Y$$

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} U_x \times Y \implies \text{из компактности X} \implies \exists \text{ конечное подпокрытие } X \times Y$$

<u>Сл1</u> $I^n = [a, b] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset (R^n, \tau_0)$ - компактен

<u>Def</u> Подмножество в $\mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если $\exists\ I^n$, содержащий это мн-во

Th.9 (Критерий компактности в $(\mathbb{R}^n, \tau_0)$)
Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно $\iff$ оно замкнуто и ограничено
Proof 1. $\Longleftarrow$: А замкнуто и ограничено

$$\implies \exists\, I^n \supset A$$

$$\text{В пр-ве } (I^n, \tau_{I^n}) \text{ А замкнуто, т.к. } A = A \cap I^n \overset{\text{Th.2}}{\implies} \text{ А компактно}$$

2. $\implies$: А компактно

$$U_n = \underbrace{(-m, m) \times \dots \times (-m, m)}_{n} \quad m \in \mathbb{N}$$

U_m - покрытие А. Тогда:

$$\exists \text{ конечное подпокрытие}$$

$$\text{Let } m_0 = \max_{i=\overline{1,k}} \{m_i\}$$

$$U_{m_i},\ i = \overline{1,k} \text{ - образует конечное подпокрытие}$$

$$A \subset [-m_0, m_0] \times \dots \times [-m_0, m_0] \implies \text{А огр}$$

$$A \subset I^n,\ \text{А компактно}$$

$$(I^n,\ \tau_{0,I^n}) \in T_2 \implies \text{А замкнуто}$$

Def Отображение одного т.п. в другое называется открытым(замкнутым), если образ каждого отрытого(замкнутого) множества открыт(замкнут)

Th.10 Непрерывное отображение компактного проствانства в Хауздорфово пр-во замкнуто
Proof $f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$
Let F замкнуто в (X, τ)

$$\overset{\text{Th.2}}{\implies} \text{F компактно}$$

$$f(F) \text{ компактно} \overset{Th.6}{\implies} f(F) \text{ замкнуто}$$

Th.11 Непрерыное биективное отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$ компактного пр-ва в Хауздорфово пр-во гомеоморфизм
Proof Достаточно доказать, что f^{-1} непрерывно
Let $f^{-1} = g$. $g : (Y, \omega) \to (X, \tau)$

$$\forall F \text{ замкнутое в } \tau$$

$$g^{-1}(F) = (f^{-1})^{-1}(F) = f(F) \implies f(F) \text{ замкнуто}$$

§8. Фактор-топология

Def Let X мн-во на котором задано отношение эквив. S
Обозначим ${}^{X}\!/_{S}$ - мн-во классов эквивалентности
Отображение $\pi : X \to {}^{X}\!/_{S} : x \mapsto [x]$ - каноническая проекция

Def Let (X, τ) - т.п. и S - отношение экв. на X.
Фактор-топологией ${}^{X}\!/_{S}$ называется семейство τ_S опред. условием:
$A \in \tau_S \iff \pi^{-1}(A) \in \tau$

Example Пусть на $(\mathbb{R}, \tau_0)$ задано отношение экв-ти: $x \sim y \iff$

$$\left[\begin{array}{l} x > 0, y > 0 \\ x < 0, y < 0 \end{array}\right.$$

$${}^{\mathbb{R}}\!/_{S} = \{+1, -1, 0\}$$
$$\tau_S = \{\varnothing, {}^{\mathbb{R}}\!/_{S}$$