ТВиМС. Лекция (13.09.24)

$F \in \mathbf{F} \quad F(x;\theta)$ F - known θ - unknown

Опр. Оценкой будем называть измеримую ф-ию наблюдений, значения которой принимаются в качестве "истинного"значения неизвестного нам параметра
$T_n(x_1,\dots,x_n)$
с.в. $X = X(\omega)$ - измеримая ф-ия эл исх ω
$\{\omega : X(\omega) \in A\}$
1) Метод моментов (1894, Пирсон)
2) Метод макс. правдоподобия
$\theta \in \mathbb{R},\ \theta = (\theta_1,\dots,\theta_m)$
$\mu_j\theta = (\theta_1,\dots,\theta_m) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^j\, dF(x;\theta_1,\dots,\theta_m)$
Есть выборка $x_1,\dots,x_n$
$m_j = 1/n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^j$
$m_j = \mu_j(\theta_1,\dots,\theta_m)\ j = \overline{1,m}$

$$f(x,\alpha,\lambda) = \frac{x^{a-1}}{\lambda^a r(a)} e^{x/\lambda}, x > 0 E(x) = \int_0^\infty x f(x;\alpha,\lambda) = \lambda \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{x^a}{r(a)\lambda^a} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \frac{\lambda r(a+1)}{r(a)} = \frac{\lambda a r(a)}{r(a)} = \lambda a$$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i;\theta) = L_x(\theta)$$

X- неизв $f(x;\theta)$
$L_x(\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$
$l_x(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta)$
$\frac{dl_x(\theta)}{d\theta} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f'_\theta(x_i;\theta)}{f(x_i;\theta} = 0$

Распределение Бернулли:

$$P(X = x_i) = \Theta^x(1-\Theta)^{1-x},\ 0 < \Theta < 1,\ x = 0,1$$

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$$

$l_x(\theta) = m\ln\theta + (m-n)\ln(1-\theta)$
$l'x(\theta) = \frac{m}{\theta} - \frac{n-m}{1-\theta} = 0$

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta}, & x > \theta \\ 0, & x \le \theta \end{cases}$$

$L_x(\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} e^{-(x-\theta}$
$x_1,\dots,x_n \to \delta(x_1,\dots,x_n)$

ТУТ ЧТО-ТО БЫЛО ПРОСПАНО

$X \in N(\theta, \sigma^2) \quad (\theta, \sigma^2) - \text{неизв}$

$\bar{\sigma}^2 = \delta^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

$E(\delta^2) = \frac{1}{n}E(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2) = (x_i - a - (\bar{x} - a))^2 = E\left((x_1 - \bar{x})^2\right) = E\left((x_1 - a - (\bar{x} - a)\right)^2 = x_1$

$= E((x_1 - a)^2) + E((\bar{x} - a)^2) - 2E((x_1 - a)(\bar{x} - a))$

$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2(1 - 1/n) = \sigma^2\frac{n-1}{n} = E(s^2) \mid \frac{n}{n-1}$

$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

$P(X = j) = 1/\theta \quad P(X \leq k) = k/\theta$

$j = 1, \ldots, \theta$

$\max(X_1, \ldots, X_n) = X_n^{(n)}$

$P(X_n^{(n)} \leq k) = P(\bigcap\limits_{j=1}^{n}(X_j \leq k)) = P(X_n^{(n)} = k) = P((X_n^{(n)} \leq k) - (X_n^{(n)} \leq k-1))$

$= P((X_n^{(n)} \leq k) - P((X_n^{(n)} \leq k-1)) = \frac{k^n - (k-1)^n}{\theta}$