Колебания грубой мембраны. Функция Бесселя

$$u_{tt}(x,y,t) - \Delta u(x,y,t) = 0 \tag{1}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$u(x,y,t)|_{x^2+y^2=l^2} = 0 \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x,y) \tag{3}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x,y) \tag{4}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \tag{5}$$

$$0 < r \le L \quad \phi \in [0; 2\pi]$$

$$\Delta u(x,y,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \phi^2}$$

Задача о радиальных колебаниях

$$u_0(x,y,t) \to \widetilde{u}_0(\rho,\phi,t)$$

$$u_1(x,y,t) \to \widetilde{u}_1(\rho,\phi,t)$$

$$\widetilde{u}|_{r=L} = 0$$

Рассмотрим радиальные колебания.
Предположим, что начальные данные $\widetilde{u_0}, \widetilde{u_1}$ не зависят от ϕ

$$\widetilde{u} \text{ не зависит от } \phi$$

Обозначим:

$$\widetilde{u}(r,\phi,t) = v(r,t)$$

$$v_{tt}(r,t) - a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r(r,t)) = 0 \tag{6}$$

$$v|_{t=0} = \phi(r) \tag{7}$$

$$v_t|_{t=0} = \psi(r) \tag{8}$$

$$v|_{r=L} = 0 \tag{9}$$

$$|v|_{r=0} < \infty \tag{10}$$

$$v(r,t) = R(r)\cdot T(t) \tag{11}$$

На первом этапе ищются все нетривиальные решения вида (11), удовлетворяющее уравнению (6) и граничным условиям

$$T''(t)R(r) - a^2T(t)\cdot\frac{1}{r}(rR'(r))' = 0 \mid \ : a^2T(t)R(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\frac{1}{r}(r\cdot R'(r))'}{R(r)} = -\lambda^2$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2T(t) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{r}(rR'(r))' + \lambda^2R(r) = 0 \tag{13}$$

Подставим (9) и (10) в (11):

$$T(t)R(L) = 0$$

$$R(L) = 0 \tag{14}$$

$$|R(L)| < \infty \tag{15}$$

(13) - (15) - Задача Штурма-Луивилля

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0$$

Замена:

$$x = \lambda r$$
$$R(r) = R\left(\frac{x}{\lambda}\right) = y(x) = y(\lambda r)$$
$$R'(r) = y'(x)\cdot\lambda$$
$$R''(r) = y''(x)\cdot\lambda^2$$
$$y''(x)\lambda^2 + \frac{\lambda}{x}\lambda y'(x) + \lambda^2 y(x) = 0$$
$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y(x) = 0 \tag{16}$$

Уравнение вида (16) называется уравнения Бесселя порядка n
Общее решение:

$$y(x) = CJ_n(x) + DY_n(x)$$

J_n, Y_n - лнз решения уравнения (16)
J_n - функция Бесселя первого рода порядка n. Y_n - функция Бесселя второго рода порядка n
J_n, Y_n - образуют ФСР

$$|Y_n(0)| = \infty$$

Функция Бесселя первого рода имеет счётное количество корней

$$J_n(\mu) = 0 \quad 0 < \mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \dots$$

$$\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

$$\int_0^L xJ_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}x}{4}\right)\cdot J_n\left(\frac{\mu_j^{(n)}x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{L^2}{2}(J_n'(\mu_i^{(n)}))^2, & i = j \end{cases} \tag{17}$$
$$R(r) = y(\lambda r) = CJ_0(\lambda r) + DY_0(\lambda r)$$

Из (15) следует $DY_0(\lambda r) = 0$
Из (14):

$$CJ_0(\lambda L) = 0$$
$$J_0(\mu) = 0$$
$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$$
$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{L}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{18}$$

$$R_k(r) = C_k J_0\left(\frac{\mu_k}{L}\right) \tag{19}$$

$$T_k''(t) + \left(\frac{a\mu_k}{L}\right)T_k(t) = 0$$
$$T_k(t) = A_k\cos\frac{a\mu_k}{L}t + B_k\sin\frac{a\mu_k}{L}t$$
$$v_k(r,t) = T_k(t)R_k(r) = \left(A_k\cos\frac{a\mu_k}{L}t + B_k\sin\frac{a\mu_k}{L}t\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{L}\right)$$