# Функан. Лекция (22.05.2025)

## Квадратный корень из оператора

$X$ - H - пр-во

$$A : X \to X$$

самосопряженный положительный оператор

$$B : X \to X$$

самосопряженный положительный оператор

$$B^2 = A$$

$$B := \sqrt{A}$$

$A$ - самосопряженный положительный оператор в H - пространстве, $m > 0$, тогда $A$ - положительно определен в B - пр-ве, $m > 0$, а $B = \sqrt{A}$ - положительно определен с $\sqrt{m}$

$$\|Bx\|^2 = (Bx, Bx) = (B^2 x, x) = (Ax, x) \geq m(x, x) = m \cdot \|x\|^2$$

$$\|Bx\| \geq \sqrt{m} \cdot \|x\|$$

$$\|Ax\| = \|B^2 x\| = \|B(Bx)\| \geq \sqrt{m}\ \|Bx\| \geq m \cdot \|x\|$$

## Ортогональные элементы

$x \perp y$, если $(x, y) = 0$

$$x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$e_1, e_2, ..., e_n, ...$

$$r \perp e_i\ \forall i \Longrightarrow r \perp \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

$$r \perp s_n,\ s_n \longrightarrow s \Longrightarrow r \perp s$$

$$r \perp e_n,\ \forall n \Longrightarrow r \perp \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n$$

**Определение**: $g_1, g_2, ..., g_n, ...$ - замкнутая относительно ортогональности, если

$$x \perp g_n\ \forall n \Longrightarrow x = 0$$

Можно проверить, что если система элементов полна, то она замкнута

$$l_n \to x \quad (x, x) = \left(x, \lim_n l_n\right) = \lim_n (x, l_n) = 0$$

**Определение**. Система элементов называется ортогональной, если все элементы попарно ортогональны.

**Определение**. Ортогональная система ненулевых элементов является линейно независимой

**Определение**.

$$e_1, e_2, ..., e_n, ...$$
$$e_i \perp e_k \quad \forall i \neq k$$
$$\|e_j\| = 1 \quad \forall j$$

ортонормальная (ортонормированная) система

**Определение.** Базис H - пр-ва - это полная ортонормированная система

**Утверждение.** *В сепарабельном гильбертовом пространстве существует конечный или счетный базис*

$X$ - сепарабельное H - пр-во

**Теорема 1.**

$$\forall x \in X \quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} (x, e_n) e_n \text{ - ряд Фурье}$$
$$\lambda_n = (x, e_n) \text{ - коэффициенты Фурье}$$
$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n \Leftrightarrow \lambda_n = (x, e_n)$$

*Данный ряд сходится по норме элементов пространства*

*Доказательство:*

**Лемма 1.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 \text{ - сх} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n \text{ - сходится}$$

*Доказательство:*

$$\|\sum_{i=n}^{m} \lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=n}^{m} \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=n}^{m} \lambda_i^2 \longrightarrow 0 \ (m > n \to +\infty)$$

■

**Лемма 2.** $\lambda_n = (x, e_n)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n = s \Longrightarrow s = x$$

*Доказательство:*

$$(s, e_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (e_n, e_k) = \lambda_k = (x, e_k)$$
$$(s, e_k) = (x, e_k)$$
$$(s - x, e_k) = 0 \quad \forall k$$
$$(s - x) \perp e_k \quad \forall k \Longrightarrow s - x = 0,\, s = x$$

■

*Доказательство теоремы:* $\lambda_n = (x, e_n)$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \quad r_n = x - s_n$$

$$n \geq k \quad (r_n, e_k) = (x - s_n, e_k) = (x, e_k) - (s_n, e_k) = \lambda_k - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (e_i, e_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$$
$$r_n \perp e_k \quad \forall k = 0, ..., n$$

тогда $r_n \perp$ линейной комбинации $(e_0, ..., e_n)$

$$r_n \perp s_n$$
$$x = s_n + r_n$$
$$\|x\|^2 = \|s_n\|^2 + \|r_n\|^2 \Rightarrow \|s_n\|^2 \leq \|x\|^2$$
$$\|s_n\| \leq \|x\|$$

$$\|s_n\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^2 \ \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq \|x\| \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \text{ - сходится}$$

Из лемм 1 и 2 следует утверждение теоремы

■

Эта теорема справедлива для унитарного пространства с счетным базисом

**Следствие.**

1. Минимальное свойство отрезка ряда Фурье:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$$
$$\lambda_i = (x, e_i)$$

$$l_n = \sum_{i=0}^{n} \mu_i e_i$$

$$\|x-l_n\|^2 = \|x-s_n+s_n-l_n\|^2 = \|x-s_n\|^2 + \|s_n-l_n\|^2$$
$$\|x-l_n\|^2 \geq \|x-s_n\|^2$$
$$\|x-l_n\| \geq \|x-s_n\|$$

$s_n - l_n$ - линейная комбинация $(e_0, ...e_n)$

2. Пусть $x = \sum x_n e_n, \quad x_n = (x, e_n)$. $y = \sum y_n e_n, \quad y_n = (y, e_n)$

$$(x,y) = \left(\sum x_n e_n, y\right) = \sum x_n (e_n, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$$

3. Равенство Персеваля - Стеклова

$$\|x\|^2 = (x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$$

4. Абстрактное H - пр-во (сепарабельное),

выбрав базис можем сопоставить конкретное пространство числовых последовательностей коэф-ов Фурье образующих сходящийся ряд - $l_2$