ОСА. Лекция

he's an idiot

26 ноября 2024 г.

<u>Proof</u> (continuation)
Рассмотрим $\mathcal{A}' = \{u \in \mathcal{A} \mid u^2 \leq 0\}$ - подпространство в $\mathcal{A}$

$$W \leq V_k :$$

$$1)\ w_1 + w_2 \in W \quad \forall w_1,\ w_2 \in W$$

$$2)\ \forall \lambda \in K\ \forall w \in W :\ \lambda w \in W$$

$$2)\ \forall \lambda \mathbb{R},\ \forall u \in \mathcal{A}' : \quad (\lambda u)^2 = \lambda^2 \cdot u^2 \leq 0 \implies \lambda u \in \mathcal{A}$$

$$1)\ \forall\ u, v \in \mathcal{A}' \implies u + v \in \mathcal{A}'\,?$$

а) Пусть $u = \lambda v$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(u+v)^2 = (\lambda v + v)^2 = (1+\lambda)^2 v^2 \leq 0 \implies u + v \in \mathcal{A}'$$

б) u, v - лз $\implies u = \alpha v + \beta$

$$u^2 = (\alpha v + \beta)^2 = \alpha v^2 + 2\alpha\beta v + \beta^2 \in \mathbb{R} \implies \alpha = 0 \lor \beta = 0$$

в) u, v - лнз $\to \{1, u, v\}$ - лнз; $u + v \notin \mathbb{R}, u - v \notin \mathbb{R}$
$\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ - конечное расширение $\implies$ $\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ - алгебраическое $\implies$ $u + v,\ u - v$ - алгебраичны над $\mathbb{R}$
$\implies \deg \mu_{u+v} = \deg \mu_{u-v} = 2 \implies (u+v)^2 = p(u+v) + q,\ (u-v)^2 = r(u-v) + s$

$$(u+v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2 = p(u+v) + q$$

$$(u-v)^2 = u^2 - uv - vu + v^2 = r(u-v) + s$$

$$(p+r)u + (p-r)v + 2u^2 + 2v^2 - q - s) = 0 \text{ - лин комбинация } \{1, u, v\}$$

$$\begin{cases} p + r = 0 \\ p - r = 0 \end{cases} \implies p = r = 0 \implies (u+v)^2 = q \in \mathbb{R} \implies q \leq 0 \implies u + v \in \mathcal{A}$$

$$\forall u \in \mathcal{A}' :\ u^2 = -q(u) \leq 0, \text{ where } q(u) \geq 0$$

Рассмотрим $\forall u, v \in \mathcal{A}' : f(u,v) = q(u+v) - q(u) - q(v) = -(u+v)^2 + u^2 + v^2 = -u^2 - uv - vu - v^2 + u^2 + v^2$

$$f(u,v) = -(uv + vu)$$

$f(u,v)$ - скалярное произведение на $\mathcal{A}'$:
1) $f(\lambda u, v) = -(\lambda uv + v\lambda u) = \lambda \cdot (-(vu + uv)) = \lambda f(u,v)$
2) $f(u+w, v) = -((u+w)v + v(u+w)) = -(uv + wv + vu + vw) = -(uv + vu) - (wv + vw) = f(u,v) + f(w,v)$
3) $f(u,v) = f(v,u)$
4) $f(u,u) = -(u^2 + u^2) = -2u^2 \geq 0$
Первый случай $[\mathbb{R}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_{\mathbb{R}}] = 1 \implies \mathcal{A} = \mathbb{R}$
Второй случай $\mathcal{A}' \neq \{0\} \implies \exists u \in \mathcal{A}' :\ u^2 = -r < 0,$ где $r > 0 \implies \frac{u^2}{r} = -1 \implies \left(\frac{u}{\sqrt{r}}\right)^2 = -1 \implies i^2 = -1$
Если $\mathcal{A}' = \mathbb{R} \cdot i \implies \mathcal{A} = \mathbb{C}$
Третий случай $\mathbb{R} \cdot i \subsetneq \mathcal{A}' \implies \mathcal{A}' = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}_i^{\perp}$, пусть $j \in \mathbb{R}_i^{\perp} \land j^2 = -1$

$$0 = f(i,j) = -(ij + ji) \implies ij = -ij$$

Обозначим $ij = k$

$$f(k,i) = -(ki+ik) = -(iji+iij) = -(-i^2j+i^2j) = 0 \implies k \perp i$$

$$f(k,j) = -(kj+jk) = -(ijj+jij) = -(ij^2-ij^2) = 0 \implies k \perp j$$

$$\implies \{1,i,j,k\} \text{ - базис } \mathcal{A} \text{ над } \mathbb{R}$$

$$k^2 = ijij = -i^2j^2 = -1 \implies \mathcal{A} = \mathbb{H}$$

Четвертый случай $\mathbb{H} \subsetneq \mathcal{A}$

$$\implies \mathcal{A}' = (\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k) \oplus (\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k)^{\perp}$$

$$\implies \exists l \in (\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k)^{\perp} \mid l^2 = -1 \land l \perp i,\ l \perp j,\ l \perp k \implies li = -il,\ lj = -jl,\ lj = -jl,\ lk = -kl$$

$$lk = l(ij) = (li)j = (-il)j = -i(lj) = -i(-jl) = (ij)l = kl$$