Топология. Лекция

whoo

9 ноября 2024 г.

<u>Th.5</u> $([a,b],\tau_0)$ компактен
<u>Proof</u> Let $[a,b]=\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha,\ U_\alpha \in \tau_{0[a,b]}$
Let $X=\{x\in(a,b] \mid [a,x]$ покрыв конечным числом $U_\alpha\}$
1. $X\neq\varnothing$. Let $a\in U_{\alpha_1}$

$$\implies \exists[a,a+\epsilon)\subset U_{\alpha_1} \implies [a,a+\frac{\epsilon}{2}]\subset U_{\alpha_1},\ a+\frac{\epsilon}{2}\in X$$

2. Let $v=\sup X$. Докажем, что $v\in X$
Let $V\subset U_\beta$

$$\implies \exists\ \epsilon \mid (v-\epsilon, v+\epsilon)\subset U_\beta$$

$$c\in(v-\epsilon,v+\epsilon)\cap X$$

$$[a,c]\subset U_{\alpha_1} cup \dots \cup U_{\alpha_n}$$

$$[a,v]\subset U_{\alpha_1} cup \dots \cup U_{\alpha_n} cup U_\beta$$

Докажем, что $v=b$

Let $v<b$

$$v\in U_\beta \implies v\in(v-\epsilon,v+\epsilon) \implies [a,v+\frac{\epsilon}{2}]=U_{\alpha_1}\cup\dots\cap U_{\alpha_n} cup U_\beta$$

<u>Th6</u> Компактное подмн-во в Хауздорфовом пр-ве замкнуто
<u>Proof</u> $(X,\tau)\in T_2$
A - комп подмн-во.
Докажем, что $CA\in\tau$

$$\forall p\in CA,\ \forall x\in A \implies \exists U_p, U_x \mid U_p\cap U_x=\varnothing$$

См. pic1

$$\forall x\in A\ U_p^x \mid U_p^x\cap U_x=\varnothing$$

$$\exists \text{ Конечное подпокр A окр-тями } U_{x_1},\dots U_{x_n}$$

$$U_p=U_p^{x_1}\cap\dots\cap U_p^{x_n}$$

Проверим, что $U_p\subset CA$

$$U_p\cap(\underbrace{U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_n}})=(U_p\cap U_{x_1})\cup(U_p\cap U_{x_n})=\varnothing$$

<u>Th7</u> непрерывный образ комп пр-ва компактен
<u>Proof</u> $f:(X,\tau)\to(Y,\omega)$ - непр отображение, f - сюрьекция
Let $V_{\alpha,\alpha\in A}$ - открытое покрытие Y

$$f^{-1}(V_\alpha)\in\tau$$

$$f^{-1}(V_\alpha) \text{ - покрытие X}$$

$$\exists \text{ конечное подпокрытие X мн-вами } f^{-1}(V_{\alpha_1}),\dots,f^{-1}(V_{\alpha_k})$$

$$\implies V_{\alpha_1},\dots,V_{\alpha_k} \text{ - конечное подпокр Y}$$

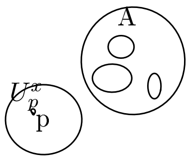

Рис. 1: pic1

Th.8 Произведение двух компактных пр-в компактно
Proof Let $(X, \tau),\ (Y, \omega)$

$$\forall Z \in \tau \times \omega$$

$$\forall (x, y) \in Z \implies \exists U_\alpha \in \tau,\ V_i \in \omega \mid (x, y) \in U_\alpha \times V_i \subset Z,\ U_\alpha \text{ - элемент базы } \tau\ \alpha \in A$$

$$V_i \text{ - эл-т базы } \omega,\ i \in I$$

Достаточно проверить, что из любого покрытия $X \times Y$ множествами вида $U_\alpha \times V_i$ можно выбрать конечное подпокрытие
Фиксируем $x_0 \in X$. $\{x_0\} \times Y$
Let $f : (Y, \omega) \to \{x_0\} \times Y : Y \to (x_0, Y)$
Тогда f непрерывна
Тогда по Th 7:

$$\{x_0\} \times Y \text{ - компактно}$$

Выберем конечное подпокрытие множества $\{x_0\} \times Y$ множествами $U_{\alpha_1} \times V_{i_1}, \dots, U_{\alpha_n} \times V_{i_n}$

$$U_{x_0} = U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \text{ - окр-ть т. } x_0 \implies U_{\alpha_1} \times V_{i_1}, \dots, U_{\alpha_n} \times V_{i_n} \text{ образуют конечное покрытие } U_{x_0} \times Y$$

$$\forall x \in X \text{ построим аналогично } U_x \text{ и конечное подпокрытие } U_x \times Y$$

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} U_x \times Y \implies \text{из компактности X} \implies \exists \text{ конечное подпокрытие } X \times Y$$

Сл1 $I^n = [a, b] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset (R^n, \tau_0)$ - компактен

Def Подмножество в $\mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если $\exists\ I^n$, содержащий это мн-во

Th.9 (Критерий компактности в $(\mathbb{R}^n, \tau_0)$)
Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно $\iff$ оно замкнуто и ограничено
Proof 1. $\Longleftarrow$: A замкнуто и ограничено

$$\implies \exists\, I^n \supset A$$

$$\text{В пр-ве } (I^n, \tau_{I^n}) \text{ A замкнуто, т.к. } A = A \cap I^n \overset{\text{Th.2}}{\implies} \text{ A компактно}$$

2. $\implies$: A компактно

$$U_n = \underbrace{(-m, m) \times \cdots \times (-m, m)}_{n} \quad m \in \mathbb{N}$$

U_m - покрытие A. Тогда:

$$\exists \text{ конечное подпокрытие}$$

$$\text{Let } m_0 = \max_{i=\overline{1,k}}\{m_i\}$$

$$U_{m_i},\ i = \overline{1,k} \text{ - образует конечное подпокрытие}$$

$$A \subset [-m_0, m_0] \times \cdots \times [-m_0, m_0] \implies \text{A огр}$$

$$A \subset I^n,\ \text{A компактно}$$

$$(I^n,\ \tau_{0,I^n}) \in T_2 \implies \text{A замкнуто}$$

Def Отображение одного т.п. в другое называется открытым(замкнутым), если образ каждого отрытого(замкнутого) множества открыт(замкнут)

Th.10 Непрерывное отображение компактного проствансва в Хауздорфово пр-во замкнуто
Proof $f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$
Let F замкнуто в (X, τ)

$$\overset{\text{Th.2}}{\implies} \text{F компактно}$$

$$f(F) \text{ компактно} \overset{Th.6}{\implies} f(F) \text{ замкнуто}$$

Th.11 Непрерыное биективное отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$ компактного пр-ва в Хауздорфово пр-во гомеоморфизм
Proof Достаточно доказать, что f^{-1} непрерывно
Let $f^{-1} = g$. $g : (Y, \omega) \to (X, \tau)$

$$\forall F \text{ замкнутое в } \tau$$

$$g^{-1}(F) = (f^{-1})^{-1}(F) = f(F) \implies f(F) \text{ замкнуто}$$

§8. Фактор-топология

Def Let X мн-во на котором задано отношение эквив. S
Обозначим X/S - мн-во классов эквивалентности
Отображение $\pi : X \to X/S : x \mapsto [x]$ - каноническая проекция

Def Let (X, τ) - т.п. и S - отношение экв. на X.
Фактор-топологией X/S называется семейство τ_S опред. условием:
$A \in \tau_S \iff \pi^{-1}(A) \in \tau$

Example Пусть на $(\mathbb{R}, \tau_0)$ задано отношение экв-ти: $x \sim y \iff$

$$\left[\begin{array}{l} x > 0, y > 0 \\ x < 0, y < 0 \end{array}\right.$$

$$\mathbb{R}/S = \{+1, -1, 0\}$$

$$\tau_S = \{\varnothing, \mathbb{R}/S$$