Комплан. Лекция

dfaskjdaso

3 декабря 2024 г.

Proof 1) $0 < A < \infty$

$$\forall\ z = z_1 \quad |z_1 - z_0| < \frac{1}{A} \text{ ряд сход}$$

$$\forall z = z_2 \quad |z_2 - z_0| > \frac{1}{A} \text{ ряд расх}$$

$$\forall \epsilon\ \exists N = N(\epsilon)\ \forall n > N\ \ \sqrt[n]{|c_n|} < A + \epsilon$$

Найдется беск много эк-тов $\{\sqrt[n]{|c_n|}_{n=0}^{\infty}\}$ больших $A - \epsilon$

$$z = z_1,\ \epsilon = \frac{1 - A \cdot |z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|} > 0$$

$$|z_1 - z_0| < \frac{1}{A} \quad \sqrt[n]{|c_n|} < (A + \epsilon)|z_1 - z_0| = \left(A + \frac{1 - A \cdot |z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|}\right)|z_1 - z_0| = \frac{A|z_1 - z_0| + 1}{2} < q < 1$$

$$c_n \cdot |z_1 - z_0|^n < q^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n |z_1 - z_0|^n \text{ - сход}$$

$$z = z_2 \quad \epsilon = \frac{A|z_2 - z_0| - 1}{|z_2 - z_0|} > 0$$

$$|z_2 - z_0| > \frac{1}{A}$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_2 - z_0| > (A - \epsilon) \cdot |z_2 - z_0| = \left(A - \frac{A|z_2 - z_0| - 1}{|z_2 - z_0|}\right) \cdot |z_2 - z_0| = 1$$

2) $A = 0 \implies R = \infty\ \forall z$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon)\ \forall n > N\ \ \sqrt[n]{|c_n|} < \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{q}{|z - z_0|},\ \forall z,\ 0 < q < 1$$

$$|c_n \cdot (z - z_0)^n| < q^n \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \text{ сх}$$

3) $A = \infty \implies R = 0$. Расх $\forall z \neq z_0$

$$\forall M\ \ \sqrt[n]{|c_n|} > M$$

$$\forall z \neq z_0\ M|z - z_0| = q > 1$$

$$|c_n \cdot (z - z_0)^n| > 1 \implies \text{ ряд расходится } \forall z \neq z_0$$

Ряды аналитических функций

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \tag{1}$$

$$f_n(z) \in H(D) \quad n = 1, 2, \dots$$

1-ая теорема Вейерштрасса
Пусть 1) $f_n(z) \in H(D), \forall n \in \mathbb{N}$
2) (1) сх равномерно внутри D, т.е. он сходится равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве $\overline{G} \subset D$
Тогда 1) $f(z) \in H(D)$
2) ряд (1) можно почленно дифференцировать любое число раз

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \tag{2}$$

3) (2) сходится равномерно внутри D

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ |z - z_0| < R$$

$$f_n(z) = c_n (z - z_0)^n \text{ - аналит}$$

$$f(z) \text{ - регулярна}$$

Можно почленно дифференцировать

Ряды Тейлора

1)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ f(z) \text{ регулярна}$$

$$|z - z_0| < R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

$f_n(z)$ - целые. 2-ая Лемма Абеля
Ряд можно почленно дифф-ть любое количество раз

$$f^{(n)}(z) = c_n \cdot n! + c_{n+1}(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (z - z_0) + \dots$$

$$f^{(n)}(z_0) = c_n \cdot n! \implies c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

2) $f(z) \in H(z_0) \implies \{c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\}_{n=0}^{\infty}$ - коэф-ты Тейлора

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \text{ - ряд Тейлора ф-и} f(z)$$

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ с $R > 0$ является рядом Тейлора свой суммы
3) $f(z)$ регулярна в $|z - z_0| < R$

$$\gamma_\rho : \ |z - z_0| = \rho < R$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt \text{ - интегральные выражения для коэф Тейлора ф-ии f(z) в т } z_0$$

Th (Тейлора)

$$f(z) \in H(D) \text{ разлогается в сходящийся степенной ряд } \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ в } |z-z_0| < R_0$$

$$z_0 \in D,\ R_0 \text{ - наименьшее расстояние от } z_0 \text{ до } \partial D$$

Proof $|z-z_0| < R_0$ Зафиксируем точку z

$$\gamma_\rho:\ |t-z_0| = \rho < R_0$$

$$\frac{|z-z_0|}{\rho} \equiv q < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(t)dt}{t-z}$$

Разложим $\frac{1}{t-z}$ в ряд по степеням $(z-z_0)$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z+z_0-z_0} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{t-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}$$

$$= \frac{1}{t-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n$$

$$\frac{|z-z_0|^n}{|t-z_0|^{n+1}} = \frac{1}{\rho} \cdot q^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ сход } \implies \text{ по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно отн } t \in \gamma_\rho$$

$$\frac{1}{2\pi i} f(t) \text{ на } \gamma_\rho \text{ непр и огр}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(t)dt}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \quad \forall z:\ |z-z_0| < R_0$$

Th (О радиусе сходимости ряда Тейлора)
Радиус сх-ти R ряда Тейлора для f(z) $f(z) \in H(z_0)$, равен расстоянию $R_0 = |z' - z_0|$ от центра z_0 до ближайщей к ней особой точки z' суммы f(z) ряда
Proof
1) По теореме Вейерштрасса $|z-z_0| < R$ f(z) - регулярна, $R_0 \geq R$
2) По теорема Тейлора $|z-z_0| < R_0 \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ $R \geq R_0$
Тогда $R = R_0$

Note
1) В степенный ряды разлогаются только $f(z) \in H(z_0)$
2) $f(z)$ - целая, то $R_0 = \infty \implies |z-z_0| < \infty$
3) Существуют степенные ряды, у которых все точки окружности круга сходимости особые

Th (О единственности разложения функции в степенной ряд)
$\forall\, f(z) \in H(z_0)\ \exists! f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$