Топология. Лекция

19 октября 2024 г.

Def (X, τ) - тп. $B_x \subset \tau$ база окрестностей в точке x, если в каждой окр-ти точки x содержится некоторая окрестность из B_x

Def Тополог. прос-во удовлетворяет
1) 1-ой аскиоме счётности, если в каждой точке существует счетная база окр-ей
2) 2-ой аксиоме счетности, если в прос-ве существует счетная база

Ex (X, t_d) топология метрического пр-ва с метрикой d
$B_x = \{B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}$ - счётная база окр-тей в т. x

Def мн-во (X, τ) называется сепарабельным, если существует счетное множество A | $\overline{A} = X$

Def $A \subset (X, \tau)$ - всюдо плотное, если $\overline{A} = X$

Ex $(\mathbb{R}, \tau_0)$ - сепарабельно, т.к. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Th1 Просторанство удовлетворяющее 2-ой аксиоме счётности - сепарабельно
Proof $\Sigma = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - счётная база

$$\text{Пусть} A = \{a_n \mid a_n \in B_n \ \forall n\}$$

$$\text{Проверим } \overline{A} = X$$

$$\forall x \in X \ \forall U_x \implies \exists B_n \mid x \in B_n \subset U_x$$

$$\implies \exists a_n \in A \mid a_n \in B_n \implies U_x \cap A \supset \{a_n\} \implies U_x \cap \forall \neq \varnothing \implies \overline{A} = X$$

Ex (X, τ_z) - несчетное мн-во
Тогда любое счетное множество пересекается с каждым отрытым множеством
Тогда (X, τ_z) сепарабельно
Докажем, что в (X, τ_z) не выполнена 2-я акс. счетности
М. от противного

$$\text{Пусть существует счётная база } V_n, \ n \in \mathbb{N}$$

Пусть $M_0 \in X$

$$\bigcap_{i \in I} U_i, \ U_i \text{ - окр т. } M_0$$

Докажем, что

$$\bigcap_{i \in I} U_i = \{M_0\}$$

Пусть $M_1 \in \bigcap_{i \in I} U_i$. Пусть $U_{i_0} = X \setminus \{M_1\}$

$$\implies \bigcap_{i \in I} U_i = \{M_0\}$$

Пусть $\tilde{U}_i$ - эл-ты счетной базы, содержащие точку M_0

$$\implies \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \tilde{U}_j = \{M_0\}$$

$$C\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\tilde{U}_j\right) = C\{M_0\}$$

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(C\tilde{U}_j) = C\{M_0\}$$

$|C(M_0)|$ - несчётное мн-во

$$|C(\tilde{U}_j| < \infty$$

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(C\tilde{U}_j) = |\mathbb{N}|$$

<u>Def</u> Мн-во A называется нигде не плотным, если $Int\overline{A} = \varnothing$

<u>Ex</u> $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{R}, \tau_0)$
$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$
$Int\mathbb{Z} = \varnothing$

<u>Th.2</u> Мн-во A нигде не плотно $\iff \overline{C\overline{A}} = X$
<u>Proof</u> 1. $\implies$: Метод от противного
Пусть $\overline{C\overline{A}} \neq X$, т.е $\exists x \notin \overline{C\overline{A}}$

$$\implies \exists U_x \mid U_x \cap C\overline{A} = \varnothing \implies U_x \subset \overline{A} \implies x \in IntA$$

2. $\impliedby$: М. от противного
Пусть $Int\overline{A} \neq \varnothing$

$$\implies x \in Int\overline{A} \implies \exists U_x \subset \overline{A} \implies U_x \cap C\overline{A} = \varnothing \implies x \notin \overline{C\overline{A}}$$

<u>Th.3</u> A нигде не плотно $\iff \overline{Int(CA)} = X$
<u>Proof</u> Достаточно доказать $Int(CA) = C\overline{A}$
1. $Int(CA) \subset C\overline{A}$

$$\forall x \in Int(CA) \implies \exists U_x \subset CA \implies U_x \cap A = \varnothing \implies X \notin \overline{A} \implies x \in C\overline{A}$$

2. то же в обратном порядке

<u>Th.4</u> A нигде не плотно $\iff \forall U \in \tau\ \exists V \in \tau \mid V \subset U \mid V \cap A = \varnothing$ (1)
<u>Proof</u> 1. A нигде не плотно $\overset{?}{\implies}$ (1)

$$Int\overline{A} = \varnothing$$

М от противного

$$\exists U \in \tau \mid \forall V \in \tau,\ V \subset U \implies V \cap A \neq \varnothing$$

$$\forall x \in U \implies x \in \overline{A} \implies U \subset \overline{A} \implies x \in Int\overline{A}$$

2. (1) $\implies Int\overline{A} = \varnothing$
М. от противного
Пусть $\exists x \in Int\overline{A}$

$$\implies U_x \subset \overline{A} \implies \text{ противоречие с условием (1)}$$

§6. Аксиомы отделимости

<u>Def</u> Окр-тью мн-ва A в (X, τ) называется любое открытое мн-во, содержащие мн-во A

Def Говорят, что в т.п. выполняется аксиома отделимости:
1) T_0 - если для любой пары различных точек, по крайней мере у одной из них существует окрестность не содержащая вторую
2) T_1 - если для любой пары разл точек, у каждой из этих точек суеществует окр-ть не содержащая другую точку
3) T_2 - если для любой пары разл точек, существуют непересекающиеся окр-ти
T_2 - аксиома Хауздорфа
4) T_3 - если для любой точки из замкнутого мн-ва не содержащего данную точку существуют непересекаюищеся окрестности
5) T_4 - если для любых двух непересекающихся замкнутых мн-в существуют неперес. окр-ти
Обозн $(X,\tau) \in T_i$ - в (X,τ) выполнена T_i

Def $(X,\tau) \in T_1 \cap T_3$ - регулярные пространства

Def $(X,\tau) \in T_1 \cap T_4$ - нормальное пр-во

Th.1(Урнсон) Топ. пр-во со 2-ой акс. сч. метризуемо $\iff$ оно нормально

Ex $(\mathbb{R}, \tau_{(a,+\infty)})$

Th.1 $(X,\tau_d) \in T_2$
Proof Пусть $a \neq b,\ d(a,b) = d$

$$U_a = B_{d/3}(a)$$

$$U_b = B_{d/3}(b)$$

$$B_{d/3}(a) \cap B_{d/3}(b) = \varnothing$$

М от противного. Пусть $\exists c \in B_{d/3}(a) \cap B_{d/3}(b)$

$$d = d(a,b) \le d(a,b) + d(c,b) < \frac{d}{3} + \frac{d}{3} = \frac{2}{3}d$$

Th.2 В Хауздорфовом пр-ве сходящаяся пос-ть имеет единственный предел
Proof Пусть a_n - пос-ть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
$\lim_{n\to\infty} a_n = b$

$$\text{Пусть } U_a \cap U_b = \varnothing$$

$$\exists N_1 \mid \forall n > N_1 \implies a_n \in U_a$$

$$\exists N_2 \mid \forall n > N_2 \implies a_n \in U_b$$

$$\implies \forall n > \max\{N_1, N_2\} \text{ противоречие}$$

Th.3 Пусть $(X,\tau) \in T_1 \iff \forall$ точка замкнута
Proof 1) $\implies: (X,\tau) \in T_1$

$$a \in X\ \{a\} \text{ - замкуто } C\{a\} \text{ открыто}$$

$$\forall b \in C\{a\} \overset{T_1}{\implies} \exists U_b \not\ni \{a\} \implies U_b \subset C\{a\}$$

2) $\impliedby:$

$$\forall b \in C\{a\} \implies \exists U_b \subset C\{a\} \implies \begin{cases} U_b \not\ni a \\ C\{b\} \in \tau, C\{b\} = U_a \end{cases} \implies T_1$$