

ProofДана $u = u(x, y) \quad \exists v(x, y)?$

1)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = u'_x = Q(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u'_y = P(x, y)$$

$$u''_{xx} + u'_{yy} = 0 \quad - u'_{yy} = u'_{xx} \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

 $\exists v(x, y)$ с точностью до аддитив. const

2)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \iff Pdx + Qdy = d\psi(x, y) \iff Pdx + Qdy = dv(x, y) \implies \exists v(x, y)$$

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) + C$$

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

1. Не зависит от Γ 2. $Pdx + Qdy = d\psi$ 3. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 4. $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0$

Элементарные функции комплексного переменного

1. Показательная ф-ция

$$W = e^z \equiv \exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Св-ва1. $u = e^x \cos y \quad v = e^x \sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \implies e^z \in H(\mathbb{C})$$

$$w = e^z \text{ целая}$$

$$(e^z)' = u'_x + iv'_x = e^z \cos x + i \sin y = e^z(\cos y + i \sin y) = e^z$$

2.

$$|e^z| = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = e^x$$

$$\operatorname{Arg} e^z = y = \operatorname{Im} z$$

3. z_1, z_2

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

4.

$$e^{i2\pi k} = \cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k) = 1$$

$$e^{z+i2\pi k} = e^z e^{i2\pi k} = e^z$$

$$w(z + i2\pi k) = w(z) \implies w = e^z \text{ - является периодической функцией } T = 2\pi i$$

2. Логарифмическая ф-ция

Def Логарифм z - число w : $e^w = z$ обозн $w = \operatorname{Ln}(z)$, $e^{\operatorname{Ln} z} \equiv z$

$$\begin{aligned}w &= u + iv, \quad z = re^{i(\phi + 2\pi k)}, z \neq 0 \\re^{\phi + 2\pi k} &= e^u \cdot e^{iv} \implies e^u \implies u = \ln r \\&v = \phi + 2\pi k \\w &\equiv \operatorname{Ln} z = \ln r + i(\phi + 2\pi k) \equiv w_k(z)\end{aligned}$$

Вывод Показательное ур-е $e^W = z$ при $z \neq 0$ имеет бесконечно много корней

$\operatorname{Ln} z$ - бесконечнозначная, $z \neq 0$

$w_k(z)$ - ветви логарифма $z = 0$ - точка ветвления

$$k = 0 \quad \ln z \equiv w_0(z) = \ln |z| + i\phi, \quad \phi = \arg z - \text{главная ветвь}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln z = \ln |z| + i \cdot \arg z$$

$$w = \ln z \quad w' = (\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \implies (\ln z)' = \frac{1}{z} \implies (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$$

$$w_k(z) - \text{регулярная } (z \neq 0, z \neq \infty)$$

$\operatorname{Ln} z$ - многозначная аналитическая функция

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$$

$$\operatorname{Ln} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

3. Общая степенная и общая показательная функция

$$a^b = e^{b \cdot \operatorname{Ln} a}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

$$\text{a) } w = z^\lambda = \lambda \operatorname{Ln} z = e$$

$$\text{b) } w = a^z = z \operatorname{Ln} a = e, \quad a \neq 0$$

$$i^i = e^{i \cdot \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln |i| + i \arg(i) + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i \frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. Тригонометрические и гиперболические ф-ции

$$z \in \mathbb{R} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$z \in \mathbb{C} \quad w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Свойства

$$1) \quad z = x \in \mathbb{R} \quad \cos x, \sin x$$

$$2) \quad z \neq \infty \quad \cos z, \sin z - \text{целые}$$

$$3) \quad (\cos z)' = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$4) \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z$$

$$5) \cos(-z) = \cos z$$

$$\sin(-z) = -\sin z$$

$$6) \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$7) \sin z = 0 \quad z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos z = 0 \quad z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$