Proof
Дана $u = u(x, y) \quad \exists v(x, y)$?
1)
$\frac{\partial v}{\partial y} = u'_x = Q(x, y)$
$\frac{\partial u}{\partial x} = -u'_y = P(x, y)$

$$u''_{xx} + u'_{yy} = 0 \quad -u'_{yy} = u'_{xx} \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\exists v(x, y) \text{ с точностью до аддитив. const}$$

2)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \iff Pdx + Qdy = d\psi(x, y) \iff Pdx + Qdy = dv(x, y) \implies \exists v(x, y)$$

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0}^{(x,y)} Pdx + Qdy + C = \int_{(x_0, y_0}^{(x,y)} (-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x}) + C$$

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy$$

1. Не зависит от Γ
2. $Pdx + Qdy = d\psi$
3. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
4. $\int_\Gamma Pdx + Qdy = 0$

Элементарные функции комплексного переменного

1. Показательная ф-ция

$$W = e^z \equiv \exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Св-ва
1. $u = e^x \cos y \quad v = e^x \sin y$
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \implies e^z \in H(\mathbb{C})$$

$$w = e^z \text{ целая}$$

$$(e^z)' = u'_x + iv'_x = e^z \cos x + i \sin y = e^z(\cos y + i \sin y) = e^z$$

2.

$$|e^z| = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = e^x$$

$$Arge^z = y = Imz$$

3. z_1, z_2

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2} = e^{z_1 + z_2}$$

4.

$$e^{i2\pi k} = \cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k) = 1$$

$$e^{z + i2\pi k} = e^z e^{i2\pi k} = e^z$$

$$w(z + i2\pi k) = w(z) \implies w = e^z \text{ - является переодической функцией } T = 2\pi i$$

2. Логарифмическая ф-ция

Def Логарифм z - число w: $e^w = z$ обозн $w = Ln(z)$, $e^{Lnz} \equiv z$

$$w = u + iv, \quad z = re^{i(\phi+i2\pi k}, z \neq 0$$
$$re^{\phi+2\pi k} = e^u \cdot e^{iv} \implies e^u \implies u = \ln r$$
$$v = \phi + 2\pi k$$
$$w \equiv Lnz = \ln r + i(\phi + 2\pi k) \equiv w_k(z)$$

Вывод Показательное ур-е $e^W = z$ при $z \neq 0$ имеет бесконечно много корней
Lnz - бесконечнозначная, $z \neq 0$
$w_k(z)$ - ветви логарифма $z = 0$ - точка ветвления

$$k = 0 \quad \ln z \equiv w_0(z) = \ln|z| + i\phi, \quad \phi = argz \text{ - главная ветвь}$$
$$Lnz = \ln z + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\ln z = \ln|z| + i \cdot argz$$
$$w = \ln z \quad w' = (\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \implies (\ln z)' = \frac{1}{z} \implies (Lnz)' = \frac{1}{z}$$
$$w_k(z) \text{ - регулярная } (z \neq 0,\ z \neq \infty)$$

Lnz - многозначная аналитическая функция

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$$
$$Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2$$

3. Общая степенная и общая показательная функция

$$a^b = e^{b \cdot Lna},\ a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$$

a) $w = z^\lambda = \lambda Lnz = e$
b) $w = a^z = zLna = e,\ a \neq 0$

$$i^i = e^{i \cdot Lni} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$$
$$Lni = \ln|i| + i\arg(i) + 2\pi ki,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$Lni = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

4. Тригонометрические и гиперболические ф-ции

$$z \in \mathbb{R} \quad e^{iz} = \cos z + i\sin z$$
$$e^{-iz} = \cos z + -i\sin z$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$z \in \mathbb{C} \quad w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Свойства
1) $z = x \in \mathbb{R}\ \cos x,\ \sin x$
2) $z \neq \infty\ \cos z,\ \sin z$ - целые
3) $(\cos z)' = -\sin z$
$(\sin z)' = \cos z$
4) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
$\sin(z + 2\pi) = \sin z$

5) $\cos(-z) = \cos z$
$\sin(-z) = -\sin z$
6) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
7) $\sin z = 0 \quad z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos z = 0 \quad z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$