УМФ. Лекция

20 Февраля 2025 г

$$v(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{L}\right)\left(A_i \cos\frac{a\mu_i^{(0)}t}{L} + B_i \sin\frac{a\mu_i^{(0)}t}{L}\right) \tag{1}$$

Условие ортогональности функции Бесселя

$$\int_0^L xJ_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}x}{L}\right)\cdot J_0\left(\frac{\mu_j^{(0)}x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{L^2}{2}(J_0'(\mu_i^{(0)}))^2, & i = j \end{cases} \tag{2}$$

$$v(r,t)|_{r=0} = \phi(r) \implies \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}x}{L}\right)\cdot A_i = \phi(r) \mid \ \cdot rJ_0\left(\frac{\mu_0 r}{L}\right),\ \int_0^L$$

$$v_t(r,t)|_{r=0} = \psi(r) \implies \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}x}{L}\right)\frac{a\mu_i^{(0)}}{L}B_i = \psi(r)$$

$$\frac{L^2}{2}(J_0'(\mu_j))^2 A_j = \phi(r)rJ_0\left(\frac{\mu_j r}{L}\right)$$

$$A_j = \frac{1}{\frac{L^2}{2}(J_0'(\mu_j))^2}\cdot\int_0^L \phi(r)\cdot r\cdot J_0\left(\frac{\mu_j r}{L}\right) \tag{3}$$

$$B_j = \frac{1}{\frac{a\mu_j^{(0)}}{L}\frac{L^2}{2}(J_0'(\mu_j))^2}\cdot\int_0^L \psi(r)\cdot r\cdot J_0\left(\frac{\mu_j r}{L}\right) \tag{4}$$

Параболические уравнения. Уравнения теплопроводности

Вопрос из билета: Вывод уравнения теплопроводности

$u(x,y,z,t)$ - температура в точке наблюдения в момент времени t

$$V \subset \mathbb{R}^3,\ t \in [t_1; t_2]$$

$$dV = dxdydz$$

$$\iiint_V C\rho u(x,y,z,t)dV$$

C - удельная теплоёмкость $\quad \rho$ - объёмная плотность вещества

$$\iiint_V \rho(x,y,z,t)dV = m_V$$

$$\iiint_V C\rho u(x,y,z,t_2)dV - \iiint_V C\rho u(x,y,z,t_1)dV$$

Пусть существует функция, называемая объёмная ...

$\iiint_V F(x,y,z,t)dxdydz$ - количество тепла, выделенное внутренними источниками в еденицу времени

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V F(x,y,z,t)dxdydzdt + \text{приход тепла через границу}$$

$\vec{J}(x, y, z, t)$ - плотность потока тепла

$(\vec{J} \cdot \vec{n})dS$ - количество тепла, проходящего через площадку dS в направлении n за еденицу времени

Пусть S - поверхность, ограничивающия объём V

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S (\vec{J} \cdot \vec{n}) dS dt$$

$$\iiint_V C\rho u(x, y, z, t_2) dV - \iiint_V C\rho u(x, y, z, t_1) dV = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(x, y, z, t) dxdydzdt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S (\vec{J} \cdot \vec{n}) dS dt$$

Закон Фурье

$$\vec{J}(x, y, z, t) = -\lambda \operatorname{grad} u(x, y, z, t)$$

$$(\vec{J}, \vec{n}) = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$\iiint_V C\rho u(x, y, z, t_2) dV - \iiint_V C\rho u(x, y, z, t_1) dV = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(x, y, z, t) dxdydzdt - \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left(-\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS dt$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z}\right) \right) = \iint_S \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \iint_D (P \cos \hat{nx} + Q \cos \hat{ny} + R \cos \hat{nz})$$

$$= \iint_s \lambda (\operatorname{grad}(u \cdot \vec{n})) ds$$

$$\iiint_V C\rho u(x, y, z, t_2) dV - \iiint_V C\rho u(x, y, z, t_1) dV = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(x, y, z, t) dxdydzdt -$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z}\right) \right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V C\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt$$

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t)$$