Th В артиновом кольце любой простой идеал - max

Proof $P \lhd R$ - простой $\iff \overline{R} = {}^{R}/{}_{P}$ - обл. цел-ти. $\overline{R}$ - поле?

$$\overline{R} \text{ - артиново}$$

$$\forall \overline{0} \neq \overline{a} \in \overline{R}$$

$$(\overline{a}) \supset (\overline{a}^2) \supset \cdots \implies \exists n \mid (\overline{a}^n = (\overline{a}^{n+1}) \implies \overline{a}^n \overline{R} = \overline{a}^{n+1}\overline{R} \implies \overline{a}^n = \overline{a}^{n+1} \cdot \overline{r} \text{ для нек-го } \overline{r} \in \overline{R} \implies$$

$$\overline{a}^n \cdot (1 - \overline{ar}) = \overline{0} \implies \overline{ar} = \overline{1} \implies \overline{a} \text{ - обратим} \implies \overline{R} \text{ - поле} \implies P \text{ - max}$$

Пусть R - коммут кольцо, N - множество всех нильпотентных элементов, $N = \{a \in R \mid a^n = 0 \text{ для нек-го } n \in \mathbb{N}\}$

Lemma $N \lhd R$ и ${}^{R}/{}_{N}$ - не содержит ненулевых нильпотентов

Proof $\forall a, b \in N,\ a^n = 0,\ b^m = 0$

$$(a+b)^{n+m} = \sum_{i=1}^{n+m} C^i_{n+m} a^i b^{n+m-i}$$

$$1) \quad i < n \implies n + m - i > m \implies b^{n+m-i} = 0$$

$$2) \quad i \geq n \implies a^i = 0$$

$$\forall a \in N, \forall r \in R$$

$$3) \quad a^n = 0 \quad (ar)^n = a^n r^n$$

$$1), 2), 3) \implies N \lhd R$$

Пусть $\overline{0} \neq \overline{a} \in {}^{R}/{}_{N} \wedge \overline{a}^k = \overline{0} a^k + N = N \implies a^k \in N \implies \exists m \mid (a^k)^n = a^{km} = 0 \implies a \in N \implies \overline{a} = \overline{0}$

N - нильрадикал кольца R

Th $N = \bigcap P \quad$ P - простой идеал

Proof Пусть $a \in N \implies a^n = 0 \in P\ \forall$ простого идеала P $\implies a \in P\ \forall P \implies a \in \bigcap P \implies N \subseteq \bigcap P$

Пусть $r \in \bigcap P$ и пусть $r \notin N$ Рассмотрим $X = \{r^0 = 1, r^1, r^2, \dots\}$ И пусть P - max идеал отн-но св-ва $P \cap X = \varnothing$ ($\exists$ по лемме Цорна)

P - простой? Пусть $a \notin P \wedge b \notin P$ Тогда $aR + P \cap X \neq \varnothing,\ bR + P \cap X \neq \varnothing \implies \exists\, r^n \in (aR+P) \cap X \wedge r^m \in (bR+P) \cap X \implies r^{m+n} = r^n \cdot r^m \in (aR+P)(bR+P) = abR + aRP + bRP + P^2 \subseteq abR + Pb \implies r^{m+n} \in abR + P \implies ab \notin P \implies P$ - простой идеал. Противоречие с $r \in \bigcap P \subset P \implies r \in N \wedge \bigcap P \subseteq N$

Коммутативные области целостности

Def R- область целостности, если $ab \neq 0$, если $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Def R - ОГИ, если из $I \lhd R \implies I = (a) = aR$ для некоторого $a \in R$

Examples $\mathbb{Z},\ F[x]$ - ОГИ

Def О.ц. R, не являющаяся полем, называется евклидовым кольцом, если определено отображение $N : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ (наз-ое норма) со свой-ми:

$$1) \quad N(ab) \geq N(a) \quad \forall a, b \in R$$

$$(N(ab) = N(a) \iff b \in U(R))$$

$$2) \forall a, b \in R\ \exists\, q, r \in R \mid a = bq + r,\ q = 0 \text{ или } N(r) < N(b)$$

Ex $\mathbb{Z}, F[x]$ - евклидовы

$Z[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$N(a + ib) = a^2 + b^2$

$$1) \quad z = a + ib,\ w = c + id$$

$$N(zw) = N((ac - bd) + (ad + bc)i) = (ac - db)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2$$

$$N(z)N(w) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = N(zw) \implies N(zw) \geq N(z)$$

$U(\mathbb{Z}[i]) = ?$

$z \in U(\mathbb{Z}[i]),\ z = a + bi \implies zz^{-1} = 1 \implies N(z) \cdot N(z^{-1}) = N(1) = 1 \iff N(z) = 1 \iff a^2 + b^2 = 1 \iff$

$$a = \pm 1;\ b = 0 \vee a = 0;\ b = \pm 1 \implies U(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1;\ \pm i\}$$

$$2) \quad \forall 0 \neq z, w \in \mathbb{Z}[i],\ \text{Ищем ближайщие} q \in \mathbb{Z}[i] \text{ для } \frac{z}{w} \in \mathbb{Q}[i]$$

$$\left|\frac{z}{w} - q\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Положим $r = z - qw \in \mathbb{Z}[i]$

$$N(r) = |z - qw|^2 = \left|\frac{z}{w} - q\right|^2 \cdot |w|^2 \leq \frac{1}{2}|w|^2 \leq \frac{N(w)}{2} < N(w)$$

Theorem Евклидово кольцо - ОГИ.
Proof 1)

$$I \lhd R \wedge I = \{0\} \implies I = (0) = 0R$$

2) Если $I \neq (0)$, то выбираем $0 \neq a \in I$ с минимальной N(a). Тогда $I = (a) :\ \forall b \in I :\ b = aq + r,\ aq \in I,\ b \in I,\ r = 0 \vee N(r) < N(a) \implies r \in I \implies r = 0$

Note Обратное неверно: существуют ОГИ, которые не евклидовы
Например, $R = \{a + \sqrt{19}bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ - ОГИ, но не евклидово