Теорема. *M - n-мерное гладкое ориентированное многообразие, то его край $(n-1)$-мерное гладкое ориентированное многообразие*

Определение. $f:\ M \to N$ - отображение, M - n-мерное гладкое многообразие, N - k-мерное. f называется гладким, если

$$\forall \phi \in AtlM,\ \forall \psi \in AtlN$$

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

гладкое отображение

Определение. $r \coloneqq \phi^{-1}:\ \mathbb{R}^n \to U$ - параметризация. (Пусть для простоты $U \subset \mathbb{R}^m$)
$r'_{x_i}(0),\ i = 1, \dots, n$

$$v(x_0) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} v_i r'_{x_i}(0)$$

касательный вектор точки $x_0 \in M$

$$T_{x_0}M \coloneqq \{v(x_0) = \sum v_i r'_{x_i}(0) \mid v_i \in \mathbb{R}\}$$

называется касательным пространством в точке x_0

$$TM \coloneqq \bigcup_{x_0 \in M} T_{x_0}M$$

тотальное касательное пространство или касательное расслоение многообразия M

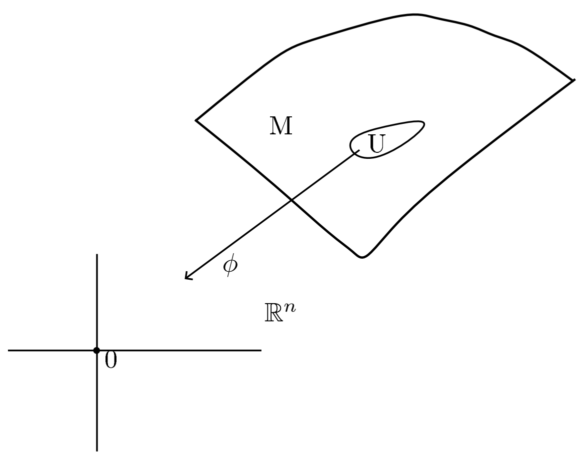

Рис. 1: Касательное пространство

§Объём многообразия

Примеры

1) Прямоугольник:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix}|$$

2) Параллелепипед

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Определение. В $\mathbb{R}^n$ пусть $e_1, \ldots, e_n$ - ортонормированный базис, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Ориентированным объёмом параллелепипеда, построенного на векторах $a_1, \ldots, a_n$ называется число $V(a_1, \ldots, a_n) := \det A$, где A - матрица, составленная из координат векторов $a_1, \ldots, a_n$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$

Замечание. 1) $a_1, \ldots, a_n$ и $e_1, \ldots, e_n$ дают одинаковую ориентацию пространства $\mathbb{R}^n \iff \det A > 0$
2) $G = (e_i, e_j)$ - матрица грама базиса $e_1, \ldots, e_n$

$$G = AA^T \implies |G| = |A|^2 \implies V(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\det G}$$

Объем многообразия

M n-мерное гладкое многообразие. $\phi: \ U \to \mathbb{R}^n$ - карта, $r = \phi^{-1}$

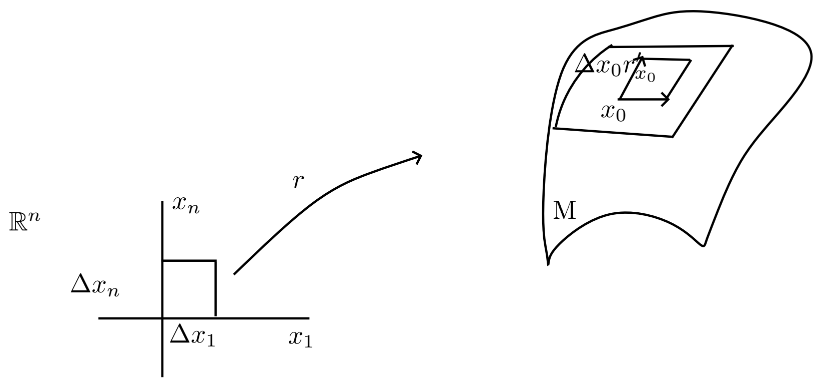

Рис. 2: Объем многообразия

Покроем $\mathbb{R}^n$ маленькими параллелепипедами $V_{x_0}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \approx \sqrt{\det(r'_{x_i} r'_{x_j}}$

$$V(U) = \int_U V_{x_0} dx_1 \ldots dx_n$$

$$V(M) = \int_M V(x) dx_1 \ldots dx_n \text{ - объём многообразия } M$$

§Внешняя алгебра

Определение. Пусть L - вещественное линейное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$.

$$\Lambda L = \bigcup_{k=0}^{n} \Lambda^n L,$$

где $\Lambda^0 L = \mathbb{R},\ \Lambda^1 L = L, \Lambda^k L$ - линейное пространство с базисом $(e_\alpha \coloneqq e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k})$, где $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_k \leq n$

$$\dim \Lambda^k = C_n^k$$

Введём операцию внешнего умножения в ΛL :

1. $\forall \lambda \in \Lambda^0\ \forall e_\alpha \in \Lambda^k L$

$$\lambda \wedge e_\alpha \coloneqq \lambda e_\alpha$$

2. $\forall e_\alpha, e_\beta,\ e_\alpha = e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k},\ e_\beta = e_{\beta_1} \in \Lambda^1 L$

$$e_\alpha \wedge e_\beta = e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_i} \wedge e_{\beta_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k} \cdot (-1)^{n-i},\ \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \beta_1 < \alpha_{i+1} < \dots < \alpha_k$$

$$\beta_1 \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$$

$$e_\alpha \wedge e_{\beta_1} = 0,\ \exists i \quad \alpha_i = \beta_1$$

Т.е. $\forall e_i, e_j \in \Lambda^1 L$

$$e_i \wedge e_j = \begin{cases} 0, & i = j \\ = -e_j \wedge e_i, & i \neq j \end{cases}$$

3. По ассоциативности внешнего умножения $\wedge$ и по линейности операция $\wedge$ продолжается на все ΛL.

ΛL называется внешней алгеброй, а её элементы называются внешними формами:

$$\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha e_\alpha \coloneqq \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n} \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}, \quad \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \in \mathbb{R}$$

Свойства $\wedge$

1. $\omega \in \Lambda^k$ (т.е. ω - это к-форма), $\eta \in \Lambda^m$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega$$

2. $k + m > n \implies \omega \wedge \eta = 0$
3. $\omega \wedge \omega = 0 \quad \forall \omega \in \Lambda^k L,\ k$ нечётно

Д-во

$$\left(\sum \omega_\alpha e_\alpha\right) \left(\sum \omega_\beta e_\beta\right) = \sum_{\alpha, \beta} \omega_\alpha \omega_\beta e_\alpha e_\beta = \sum (\omega_\alpha \omega_\beta - \omega_\beta \omega_\alpha) e_\alpha e_\beta = 0$$

Замечание (Значение внешней формы на векторах). L - линейное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n \implies L^\star$ - двойственное линейное пространство с базисом $e_1^\star, \ldots, e_n^\star$

$$\implies e_i^\star(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$$

$$\omega \in \Lambda^k L^\star,\ \omega = \sum_\alpha \omega_\alpha e_\alpha,\ v_1, \ldots, v_k \in L$$