Топология. Лекция

jdfalkj

12 октября 2024 г.

<u>Ex.</u> $(\mathbb{R}, \tau_{(a,+\infty)})$
$\Sigma = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$
$\forall$ подмн-во связно
М. от противного. Пусть $\exists\ S \subset \mathbb{R}$
S несвязно $\implies S = U \cup V,\ U, V \in \tau$

$$U \cap V \neq \varnothing,\ U, V \neq \varnothing \implies U \text{ - открыто-замкнутое в } \tau_s \implies \exists\ \tilde{U} \in \tau \mid U = \tilde{U} \cap S \text{ Пусть } U = (a, +\infty)$$

$$\exists \tilde{V} \in \tau \mid U = C\tilde{V} \cap S,\ \text{где } V = (b, +\infty)$$

$$C\tilde{V} = (-\infty, b]$$

$$U = \tilde{U} \cap S = C\tilde{V} \cap S \implies \forall s \in S \implies a < s \leq b \implies S \subset (a, b]$$

$$U = U \cap S = C\tilde{V} \cap S = S \implies U = S$$

<u>Def</u> Связной компонентой K_x точки x, называется наибольшее связное множество, содержащие точку x
Наибольшее связное множество содержит любое связное множество, содержащие точку x

<u>Th.8</u> Компонента связности - замкнутое множество
<u>Proof</u>

$$x \in X,\ K_x \text{ - компонента связности} \overset{?}{\implies} K_x \text{ - замкнутое множество}$$

$$\overset{\text{Th.5}}{\implies} \overline{K_x} \text{ связно} \implies \overline{K_x} \subset K_x \implies \overline{K_x} = K_x$$

<u>Note</u> Если пространство состоит из конечного числа компонент связности, то каждая компонента связности является открытым множеством

<u>Def</u> Непрерывное отображение $f : ([0, 1], \tau_0 \to (X, \tau)$ называется путем. $f(0)$ - начало пути. $f(1)$ - конец пути.
<u>Def</u> (X, τ) линейно связно, если любые две точки можно соединить путем.

<u>Th.9</u> Если пространство линейно связно, то оно связно
<u>Proof</u> Пусть (X, τ) линейно связно
М. от противного
Пусть (X, τ) несвязно

$$\implies \exists\ U, V \in \tau \mid U \cap V = \varnothing,\ U, V \neq \varnothing,\ X = U \cap V$$

$$\text{Пусть } a \in U,\ b \in V$$

$$\exists\ f : ([0, 1], \tau_0) \to (X, \tau),\ f(0) = a,\ f(1) = b$$

$$f([0, 1], \tau_0) \cap U = \tilde{U}$$

$$f([0, 1], \tau_0) \cap V = \tilde{V}$$

$$f^{-1}(\tilde{U} \cup \tilde{V}) = [0, 1] = f^{-1}(\tilde{U}) \cup f^{-1}(\tilde{V})$$

$$\tilde{U} \text{ открыто в } f([0, 1], \tau_0),\ \tilde{V} \text{ открыто в } f([0, 1], \tau_0) \implies f^{-1}(\tilde{U}) \in \tau_{0[0,1]},\ f^{-1}(\tilde{V}) \in \tau_{0[0,1]}$$

$$f^{-1}(\tilde{U}) \cap f^{-1}(\tilde{V}) = \varnothing,\ [0, 1] = f^{-1}(\tilde{U}) \cup f^{-1}(\tilde{V})$$

Противоречие со связностью $[0, 1]$

Th.10 Открытое связное подмн-во в $(\mathbb{R}^n, \tau_0)$ - линейно связно
Proof Пусть $A \subset \mathbb{R}^n,\ A \in \tau_0$, A связно
M от противного

Пусть A не является линейно связным. Пусть a и b, $(a, b \in A)$ нельзя соединить путём

Обозначим B - множество точек, которые нельзя соединить путем с точкой a

Докажем, что B открыто-замкнуто

$b \in B$. Пусть $B_r(b) \subset A,$ такой шар $\exists$ т.к. $A \in \tau_0$

$B_r(b)$ - линейно связное пространство, т.к. любые две точки шара можно соединить отрезком

$$\implies B_r(b) \subset B \implies B \in \tau_A$$

Докажем замкнутость B. Для этого мы докажем, что $CB \in \tau_A$

Аналогично предыдущему проверяется, что $CB \in \tau_A$

$\exists B$ - открыто замкнутый. Т.е. противоречие со связностью A

Ex Связное пр-во, которое не является лин. связным.
Пусть $S = \{(x, sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} \subset (\mathbb{R}, \tau_0)$
S линейно связно

$$\forall\ (0, a),\ a \in [-1, 1]$$

$$a_n = \left(\frac{1}{\arcsin a + 2\pi n}, a\right) \in S$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (0, a)$$

$$(0, a) \in \overline{S}$$

$$S \text{ лин связно} \overset{\text{Th.9}}{\Longrightarrow} S \text{ связно} \overset{\text{Th.5}}{\Longrightarrow} \overline{S} \text{ связно}$$

Докажем, что $\overline{S}$ не явз лин. связным

Метод от противного

Пусть $\exists$ путь из $(0, 0)$ в т. $A \in S$

$$\text{Пусть } f : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [0, 1],\ x(t),\ y(t) \text{ непр}$$

Пусть $B = X^{-1}\{0\}$ - прообраз 0

$\{0\}$ - замкнут $\implies$ B замкнутое подмножество в $[0, 1]$

Пусть $b_0 = \sup X^{-1}\{0\} \implies b_0 \in B$

Все точки не принадлежащие $[0, b_0]$ отображаются в S

$$(b_0, 1] \longrightarrow S$$

Переобозначим $[b_0, 1] \longrightarrow [0, 1]$

$$f : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ x(t) > 0,\ \forall t > 0$$

$x(t), y(t)$ непр

Построим последовательность $t_n \to 0 \mid \lim\limits_{n\to\infty} y(t_n) \nexists$

Фиксируем n

Выберем $u \mid 0 < u < x(\frac{1}{n}) \mid \sin\frac{1}{u} = (-1)^n$

$u = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}$ для достаточно большого k

Определим t_n из условия: $x(t_n) = u$