

## Однопараметрические подгруппы

**Теорема 1.**

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_i(0) &= 0 \\ F_i(x_1, \dots, x_n) &\text{ — гладкие в области } V \ni 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$\exists!$  решение задачи (1)  $x_i(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  гладкое решение

**Теорема 2.**  $F(X, Y)$  - векторное поле гладкое в области  $U \times V \subset \mathbb{R}^n$ , т.е.  $F(X, Y)$  - гладкое отображение  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\frac{dx}{dt} = F(X, Y) \quad x_i(0) = 0 \tag{2}$$

$y_0 \in V \quad \exists V' \quad y_0 \in V' \subset V : \forall y \in V'$  задача (2) имеет гладкое решение  $x(t, y), t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V'$

**Определение.** Пусть  $G$  - группа Ли,  $\theta : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$  - гладкий гомоморфизм.  $\theta$  называется однопараметрической подгруппой группы Ли.

$$\theta(t + s) = \theta(t)\theta(s)$$

$$\theta(0) = e$$

$\dot{\theta}$  - касательный вектор при  $t = 0$ . Обозначение  $\theta_e$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0}$$

Получаем соответствие однопараметрической подгруппы  $\theta(t) \mapsto \theta_e \in T_{e(G)}$

**Теорема 4.** Указанное соответствие взаимно однозначно

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\theta} & G \\ L_s \downarrow & & \downarrow L_{\theta(s)} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\theta} & G \end{array}$$

**Доказательство:**

$$L_{\theta(s)} \theta(t) = \theta(s) \cdot \theta(t)$$

$$t \rightarrow s + t \xrightarrow{\theta} \theta(s + t)$$

$$\begin{aligned}
dL_{\theta(s)} \frac{d\theta}{dt} &= d(\theta \circ L_s) \frac{d}{dt} \Big|_t = d\theta \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t+s} \right) = \frac{d\theta}{dt} \Big|_{t+s} \\
\frac{d\theta}{dt} \Big|_{t+s} &= (dL_{\theta(s)})_{\theta(t)} \frac{d\theta}{dt} \Big|_t \\
\frac{d\theta}{dt} \Big|_s &= dL_{\theta(s)}(\theta_e) \\
\frac{d\theta(t)}{dt} &= dL_{\theta(t)}(\theta_e) \\
\theta(0) &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

(3) - дифференциальное уравнение однопараметрической группы

Допустим  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  имеют одинаковые касательные вектора при  $t = 0$ , т.е.  $\theta_{1e} = \theta_{2e}$ . Тогда они решение одного и того же уравнения.

$$v \in T_{e(G)} \exists? \theta(t) \mid \theta_e = v$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta(t)}{dt} &= dL_{\theta(t)} \cdot v \\
\theta(0) &= e
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists! \theta(t), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Рассмотрим  $\varphi(t) = \theta(s) \cdot \theta(t)$ ,  $\psi(t) = \theta(s+t) \quad |s| < \frac{\varepsilon}{2}, |t| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$dL_{\theta(s)} \cdot \frac{d\theta}{dt} = dL_{\theta(s)} \cdot v = dL_{\theta(s)\theta(t)} \cdot v$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = L_{\varphi(t)} \cdot v$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\theta(s+t)}{dt} = \frac{d\theta(s+t)}{d(s+t)} = \frac{d\theta(u)}{du} \stackrel{(4)}{=} dL_{\theta(u)}v = dL_{\psi(t)} \cdot v$$

$$\frac{d\psi}{dt} = dL_{\psi(t)}v$$

$$\varphi(t) = \psi(t) \text{ для } |t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\theta(s)\theta(t) = \theta(s+t) \text{ для } |t| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad N \in \mathbb{N}$$

$$|\frac{t}{N}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lambda(t) = \left( \theta \left( \frac{t}{N} \right) \right)^N$$

надо доказать, что если  $|\frac{t}{N}| < \frac{\varepsilon}{2}$ , то

$$\theta \left( \frac{t}{N} \right)^N = \theta \left( \frac{t}{M} \right)^M$$

$$\underbrace{\frac{t}{NM} + \dots + \frac{t}{NM}}_M = \frac{t}{N}$$

$$\left| \frac{t}{NM} \right| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\theta\left(\frac{t}{NM}\right)^M = \theta\left(\frac{t}{N}\right) \Rightarrow \theta\left(\frac{t}{MN}\right)^{MN} = \theta\left(\frac{t}{N}\right)^n \Rightarrow \theta\left(\frac{t}{MN}\right)^{MN} = \theta\left(\frac{t}{M}\right)^M$$

□