Тождество А. Вальда

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

τ - момент остановки

$$(\tau = n) \in \mathcal{F}_n$$

$$s_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,\ s_\tau = s_n,\ (\tau = n)$$

$$E(|\xi_i|) < \infty$$

$$E(s_\tau) = E(\tau)E(\xi_i) = a \cdot E(\tau)$$

$$a = E(\xi_i)$$

$$E(\xi_i) = a_i = a,\ i = 1, 2, \dots$$

Равенство Абеля

$$B_k = b_k + b_{k+1} + \dots + b_{n-1},\ b_n = 0$$

$$A_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,\ a_0 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} B_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} B_k(A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} B_k A_k - \sum_{k=1}^{n} B_k A_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1}(B_k - B_{k+1} A_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k A_k$$

$$E(\tau)\underbrace{E(\xi_i)}_{a} = \sum_{k=1}^{\infty} KP(\tau = k)a = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(\tau = k)}_{b_k}(a_1 + \dots + a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k A_k = \sum_{k=1}^{\infty} B_k a_k = \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau \geq k)E(\xi_k)$$

$$\overline{(\tau = k)} = (\tau < k) = (\tau = k-1) \in \mathcal{F}_{k-1}$$

$$(\tau \geq k) \in \mathcal{F}_{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\tau \geq k)E(\xi_k | \tau \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\tau \geq k)} \xi_k dP \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \int_{(\tau = m)} \xi_m dP \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} \int_{(\tau = m)} \xi_m dP = \int_{k=1}^{\infty} \int_{(\tau = m)} s_\tau dP = E(s_\tau)$$

Теорема (1)**.** $\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ *- субмартингал*

$$\lambda P(\max_{k \leq n} S_k > \lambda) \leq E(S_n I(\max_{k \leq n} s_k > \lambda))$$

Доказательство.

$$B = (\max_{k \leq n} s_k > \lambda) = \bigcup_{i=1}^{n} (s_i > \lambda,\ \max_{1 \leq j \leq i-1} s_j \leq \lambda) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

$$P(B) \leq \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} E(I(B_i))$$

$$\lambda P(B) \leq \sum_{k=1}^{n} E(s_k I(B_k)) \leq \sum_{k=1}^{n} E(E(s_n | \mathcal{F}_k I(B_k)) = \sum_{k=1}^{n} E(E(S_n I(B_k) | \mathcal{F})) = E(s_n I(b))$$

■

$\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ - мартингал
$p \geq 1$:

$$\lambda^p P(\max_{1 \leq k \leq n} S_n) \leq E(|S_n|^p)$$

Теорема (закон больших чисел).

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ - \textit{мартингал}}$$

$$X_{nk} = X_k \cdot I(|X_k| \le b_n) \quad b_n \to \infty,\ n \to \infty$$

Условия:
1)

$$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \ge b_n | \mathcal{F}_{k-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2)

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} E(X_{nk} | \mathcal{F}_{k-1} \xrightarrow{p} 0$$

3)

$$\frac{1}{b_n^2} E(X_{nk}^2 | \mathcal{F}_{k-1}) - E(E(X_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема (центральная предельная теорема).

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ - \textit{мартингал}}$$

$$X_{nk} = X_k \cdot I(|X_k| \le b_n) \quad b_n \to \infty,\ n \to \infty$$

Условия:
1)

$$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \ge b_n | \mathcal{F}_{k-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2)

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} E(X_{nk} | \mathcal{F}_{k-1} \xrightarrow{p} 0$$

3)

$$\frac{S_n - \sum E(X_{nk} | \mathcal{F}_{k-1})}{\sqrt{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Задача о разорении

Рассмотрим "монету".

1 выпадает с вероятность p. 0 - с вероятностью $q = 1 - p$.

1 $\sim$ второй игрок платит первому 1 рубль

0 $\sim$ первый платит второму 1 рубль

1 игрока капитал A, второго - B. $N = A + B$

$$f(n) = P(\text{выигрыш, если на руках капитал } n), \quad 0 \le n \le N$$

$$f(n) = pf(n+1) + qf(n-1)$$

$$f(0) = 0 \quad f(N) = 1$$

$$pf(n+1) - f(n) + qf(n-1) = 0 \mid : p$$

$$f(n+1) - \frac{1}{p} f(n) + \frac{q}{p} f(n-1) = 0$$

$$f(n+1) + af(n) + bf(n-1) = 0 \tag{1}$$

$$f(n) = \lambda^n,\ 0 < \lambda \le 1$$

$$\lambda^{n+1} + a\lambda^n + b\lambda^{n-1} = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$1)\lambda_1, \lambda_2$$
$$2)D = 0$$
$$3)D < 0$$

$$f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

$$f(n+1) - \frac{1}{p}f(n) + \frac{q}{p}f(n-1) = 0$$

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{q}{p} = 0,\ \ \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{q}{p}$$

$$f(n) = C_1 + C_2\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + C_2\left(\frac{q}{p}\right)^N = 0 \end{cases}$$

$$C_2\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right) = 1$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

$$f(n) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

$m(n)$ - средняя продолжительность игры

$$m(n) = 1 + pm(n+1) + qm(n-1)$$