Алгебра и Модули(10.09.24)

Лит-ра

1. Ламбек И. "Кольца и модули"
2. Каш Ф. "Кольца и модули"
3. Passman D. "The course of ring theory" Выбор Любимцева

Основные опр

1. Группы

Множество G - группа, если на G определена операция $\cdot$ со св-ми:
1) $(ab)c = a(bc)\ \forall a, b, c \in G$
2) $\exists e \in G\ |\forall a \in G : ae = ea = a$ /e обозн. 1/
3) $\forall a \in G\ \exists b \in G \mid ab = ba = 1$ /b обозн a^{-1}/

Если вып-но 4) $ab = ba \forall a, b \in G \Rightarrow G$ - коммутативная (абелева) группа

2. Кольца

Всё тоже самое, что было неделю назад

Классы колец

Всё тоже самое, что было неделю назад дубль 2

Примеры 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - ∞ комм. кольцо

3. Модули

Пусть $(M, +)$ - абелева группа, R - кольцо. Тогда M называется левым модулем над R (левым R-модулем), если определено умножения эл-тов из R на эл-ты из M слева со свойствами:

M1) $(r + s)m = rm + rs \quad \forall r, s \in R,\ \forall m \in M$
M2) $r(m + m') = rm + rm' \quad \forall r \in R,\ \forall m, m' \in M$
M3) $(rs)m = r(sm) \quad \forall r, s \in R,\ minM$
M4) $1 \cdot m = m \quad \forall m \in M$

Ан-но определяется правый R-модуль

Примеры

1) Вект. пр-во - модуль над полем
2) Абелевы группы - $\mathbb{Z}$ - модули
3) ${}_RR$ - левый регулярный модуль
4) Подмодуль N в ${}_RM$ (т.е.
   1) $(N, +)$ - подгруппа в $(M, +)$
   2) $\forall r \in r\ \forall n \in N : r \cdot n \in N$

Гомоморфизмы

1) Абелевых групп

A,B - абелевы группы

$f : A \to B$ - гомоморфизм (абелевых групп), если

$f(a, a') = f(a) + f(a') \quad \forall a, a' \in A$

$\mathrm{Hom}(A, B) = \{f : A \to B$ - гомо$\}$ Hom - абелева группа

$\forall f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$

$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \quad \forall a \in A$

$0 = f_0$

$(-f)(a)=-f(a)$
$A=B \to Hom(A,A)=\mathrm{End}A$ - кольцо эндоморфизмов группы A
$(f\cdot g)(a)=f(g(a)) \quad \forall a \in A$
f - изом-зм, если f - гомо-зм и биекция
2) Гомо-змы колец
R,S - кольцо; $f: R \to S$ - гомо-зм(колец), если
1) $f(a+b)=f(a)+f(b)$
2) $f(ab)=f(a)f(b)$
3) $f(1_R)=1_S$
3) Гомо-змы модулей
M,N - модули над R $f: M \to N$ - гомо-зм(модулей) (R- гомо-зм), если
1) $f(m+m')=f(m)+f(m') \quad \forall m,m' \in M$
2) $f(rm)=rf(m)$ $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ - подгруппа в Hom(M,N)

Упр
$f: M \to N -$ R - homo
а) $Kerf=\{m \in M \mid f(m)=0\}$ - подмодуль в M
б) $Imf=\{n \in N \mid \exists m \in M:\ n=f(m)\}$ - подмодуль в N
в) $f -$ иньетивно $\Leftrightarrow Kerf=0$

2. (Эквив. опр-е модуля)
Пусть M - аблева группа, R - кольцо
M - R-модуль $\Leftrightarrow \exists$гомо-зм колец $f: R \to EndM(r \to \phi_r$, где $\phi_r(m)=rm \quad \forall m \in M)$
3. A,B - абелевы группы
Hom(A.B) - левый EndB и правый EndA - модуль

Фактормодуль

M - R-модуль, N - подмодуль в M
$(M/N,+)$ - факторгруппа M по подгруппе N
$M/N=\{m+N \mid m \in M\}-\Phi/$гр
с операцией: $(m+N)+(m'+N)=(m+m')+N$
M/N - R-модуль с операцией:
$\forall r \in R, \forall m+N \in M/N:\ r(m+n)=rm+N$
Корр-ть Если $m+n=m'+N \Rightarrow r(m'+N)=rm'+N \overset{?}{\equiv} rm+N$
$r(m'+N)=rm'+N=r(m+n)+N=rm+rn+N=rm+N$