УМФ. Лекция

who tf is this?

8 ноября 2024 г.

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = A\sin\omega t$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$u|_{t=0} = 0$$
$$u_t|_{t=0} = 0$$
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}$$
$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$$
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$
$$\omega_n = \frac{a\pi n}{l},\ n \in \mathbb{N}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)) X_n(t) = A\sin\omega t \mid \cdot \sin\frac{\pi m x}{l},\ \int_0^l dx$$
$$\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l} \cdot \sin\frac{\pi m x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{l}{2}, & n = m \end{cases}$$
$$T_m'' + \omega_m T_m(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi m x}{l} dx \cdot \sin\omega t$$
$$\frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi m x}{l} dx = \alpha_m$$
$$\begin{cases} T_m''(t) + \omega^2 T_m(t) = \alpha_m \sin\omega t \\ T_m(0) = 0 \\ T_m'(0) = 0 \end{cases}$$

Пусть:

$$\omega \neq \omega_m,\ m \in \mathbb{N}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$T_m^O = A_m \cos\omega_m t + B_m \sin\omega_m t$$
$$T_m^{\text{Н}} = C_m \sin\omega t$$
$$\underbrace{(\omega_m^2 - \omega^2)}_{\neq 0} C_m \sin\omega t = \alpha_m \sin\omega t$$
$$C_m = \frac{\alpha_m}{\omega_m^2 - \omega^2}$$
$$T_m(t) = A_m \cos\omega_m t + B_m \sin\omega_m t + \frac{\alpha_m}{\omega_m^2 - \omega^2}\sin\omega t$$
$$T_m(0) = A_m = 0$$
$$T_m'(0) = \omega_m B_m \cos\omega_m t + \frac{\alpha_m \omega \cos\omega t}{\omega_m^2 - \omega^2}$$

$$\omega_m B_m + \frac{\alpha_m \omega}{\omega_m^2 - \omega^2} = 0$$

$$B_m = -\frac{\alpha_m \omega}{(\omega_m^2 - \omega^2)\omega_m}$$

$$T_m(t) = -\frac{\alpha_m \omega \sin \omega_m t}{(\omega_m^2 - \omega^2)\omega_m} + \frac{\alpha_m \sin \omega t}{(\omega_m^2 - \omega^2)}$$

$$T_m(t) = \frac{\alpha_m(\omega_m \sin \omega t - \omega \sin \omega_m t}{(\omega_m^2 - \omega^2)\omega_m}$$

Пусть:

$$\omega \to \omega_{m_0}$$

$$\lim_{\omega \to \omega_{m_0}} T_{m_0}(t) = \lim_{\omega \to \omega_{m_0}} \frac{\alpha_m(\omega_m \sin \omega t - \omega \sin \omega_m t}{(\omega_m^2 - \omega^2)\omega_m} = \lim_{\omega \to \omega_{m_0}} \frac{\alpha_{m_0}(\omega_{m_0} t \cos \omega t - \sin \omega_{m_0} t)}{\omega_{m_0}(-2\omega)}$$

$$\lim_{\omega \to \omega_{m_0}} T_m(t) = \frac{\alpha_{m_0}(t\omega_{m_0} \cos \omega_{m_0} t - \sin \omega_{m_0} t)}{-2\omega_{m_0}^2}$$

Задача Штурма-Лиувилля

$$x \in [0; l]$$

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0 \tag{1}$$

$$\alpha X'(0) - \beta X(0) = 0 \tag{2}$$

$$\gamma X'(l) - \delta X(l) = 0 \tag{3}$$

$$\begin{gathered} p \in C^1([0; l]) \\ \rho \in C([0; l]) \\ q \in C([0; l]) \\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \delta \geq 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 > 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 > 0 \\ p(x) > 0,\ x \in [0; l],\ \rho(x) > 0,\ x \in [0; l] \end{gathered} \tag{4}$$

Задача Штурма-Луивилля (1) - (3) заключается в нахождении собственных значений и собственных функций. Собственными значениями называеются те значения параметра λ при которых уравение имеет хотя бы одно не тривиальное решение $X(x) \neq 0$. Сами эти нетривиальные решения называются собст. ф-ями задачи Ш-Л

$$\begin{aligned} &p \equiv 1 \\ &q \equiv 0 \\ &\rho \equiv 1 \\ &\alpha = 0\ (\beta \neq 0) \\ &\gamma = 0\ (\delta \neq 0) \end{aligned}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

$$X_1(x),\ X_2(x), \ldots, X_m(x) \text{ - с. ф-ии } \implies c_1 X_1(x) + \cdots + c_m X_m(x) \text{ - с. ф-я}$$

Вопрос из билета: Вещественность собственных значения задачи Ш-Л

При условиях (4) все собст. значения задачи Ш-Л вещественны и неограничивая общ-ти можно считать вещ-ми собственные функции

$$\lambda = Re\lambda + iIm\lambda$$

$$X(x) = ReX(x) + iImX(x)$$

$$(p(x) \cdot \overline{X}'(x))' + (\overline{\lambda} - \rho(x) - q(x))\overline{X}(x) = 0 \tag{5}$$

$$\alpha \overline{X}'(0) - \beta \overline{X}(0) = 0 \tag{6}$$

$$\gamma \overline{X}'(l) - \delta \overline{X}(l) = 0 \tag{7}$$

$$-\begin{cases}(1)\cdot\overline{X} \\ (5)\cdot X\end{cases}, \int_0^l$$

$$\int_0^l (p(x)X'(x))'\cdot\overline{X}dx - \int_0^l (p\overline{X}'Xdx + \lambda\int_0^l \rho X\overline{X}dx - \overline{\lambda}\int_0^l \rho\overline{X}Xdx - \int_0^l qX\overline{X}dx + \int_0^l q\overline{X}Xdx = 0$$

$$\int_0^l (p(x)X'(x))'\cdot\overline{X}dx - \int_0^l (p\overline{X}')Xdx = (\overline{\lambda}-\lambda)\int_0^l \rho|X|^2dx$$

$$p(x)X'(x)\overline{X}(x)\big|_0^l - \int_0^l pX'\overline{X}'dx - p\overline{X}'X\big|_0^l + \int_0^l p\overline{X}'X'dx$$

$$p(l)(\underbrace{X'(l)\overline{X}(l)-\overline{X}'(l)X(l)}_{\det\begin{cases}(3)\\(7)\end{cases}})$$

$$p(0)(X'(0)\overline{X}(0)-\overline{X}'(0)X(0))$$

Рассмотрим

$$\begin{cases}(2)\\(6)\end{cases} \qquad \begin{cases}(3)\\(7)\end{cases}$$

$$0 = (\overline{\lambda}-\lambda)\int_0^l \rho|X|^2dx$$

$$\Longrightarrow \overline{\lambda}-\lambda = 0$$

$$X(x) = ReX(x) + iImX(x)$$

Любую комплексную собственную функцию можно представить как лин комб вещественных собственных функций

Вопрос билета: Линейная зависимость собс ф-ий соотв. одному собств значению

Любые две собст ф-ии соотв. одному собств зн-ю линейно зависимы