ОСА. Лекция(24.09.24)

R - кольцо
$I \subseteq R$ - правый(левый) идеал в R, если 1) $(I, +) \leq (R, +)$
2) $IR \subseteq I (RI \subseteq I)$
Если $IR \subseteq I$ and $RI \subseteq I \implies I$ двусторонний идеал(идеал)

Идеал I называется собственным, если $I \neq R$

Максимальные идеалы в кольцах

Def Идеал M в кольце R называется максимальным, если M - собственный идеал и не содержится ни в каком собственном идеале, т.е. если $M \subsetneq J \lhd R \implies J = R$
Сведения из теории множеств:
Множество X называется чум. если на X задано отношение порядка, т.е. задано бинарное отношение со свойствами:
1) $x \leq x \; \forall x \in X$
2) $x \leq y \; y \leq x \implies x = y$
3) $x \leq y \; y \leq z \implies x \leq z$
$(X, \leq)$ - чум

$(X, \leq)$ - лум(цепь), если $\forall x, x' \in X \implies x \leq x'$ или $x' \leq x$
Пусть $T \subseteq X$ элемент $x^\star \in X$ - верхняя грань для T, если $x^\star \geq T \; \forall t \in T$

$\hat{x}$ - max, если $x \geq \hat{x} \; x \in X \implies x = \hat{x}$

Lemma Цорна Пусть $\varnothing \neq X$ -чум, в к-ом любому подмн-ва существует верхяя грань
Тогда в X существует макс элемент
Th $\forall$ собственный идеал кольца содержится в нек-м макс идеале
Proof Пусть $(X, \subseteq)$ - чум идеалов, $I \lhd R, \; I \neq R$
Рассмотрим $Y = \{J \subseteq R \mid I \subseteq J\}$ - чум. J - собств.
1. $Y \neq \varnothing, \; I \in Y$
2. $\dots \subset J_{i_{k-1}} \subset J_{i_k} \subset J_{i_{k+1}} \subset \dots$ - лум, обозн Z. Тогда $\bigcup_{k \in K} J_{i_k} = \tilde{J} \lhd R, \; \tilde{J} Y \; \tilde{J}$ - верхняя грань для Y $\implies$ в $Y \; \exists$ max идеал

Ex 1) $R = \mathbb{Z}$

R - коммут. кольцо
Th $I \lhd R$ - max $\iff {}^{R}/_{I}$ - поле
Proof $\implies : \forall \overline{0} \neq \overline{r} \in {}^{R}/_{I}$

$$r + I \neq I \implies r \notin I \implies rR + I \supsetneq I = R \implies rx + i = 1 \text{ для нек-х } x \in R, \; i \in I$$
$$\overline{rx} + \overline{i} = \overline{1} \implies \overline{rx} = \overline{1} \implies \overline{x} = \overline{r}^{-1}$$
$$rR + I = \{rx + i \mid x \in R \; i \in I\}$$

$\impliedby$:
Против $I \subsetneq J \lhd R \quad J \neq R$
Let

$$x \in R \setminus I \implies \overline{x} \neq \overline{0} \implies \exists y^{-1} \in {}^{R}/_{I} \mid \overline{x} \cdot \overline{x}^{-1} = 1 \implies (x+I)(y+I) = 1 + I \implies xy + I = 1 + I \implies 1 \in xy + I \implies 1 \in J \implies J = R$$

Простые идеалы в коммутативных кольцах

Def Собственный идеал P комм кольца R называется простым, если из $ab \in P \implies a \in P$ или $b \in P$

<u>Th</u> $I \lhd R$ - простой $\iff$ $^R/_I$ - кольцо без делителей нуля(область целостности)
<u>Proof</u> $\implies$:

$$\text{Против } \exists\, \overline{0} \neq \overline{a},\ \overline{0} \neq \overline{b} \in {}^R/_I \mid \overline{a}\overline{b} = \overline{0} \implies (a+I)(b+I) = I$$

$$\implies ab + I = I \implies ab \in I \implies a \in I \ \vee\ b \in I \implies \overline{a} = \overline{0} \ \vee\ \overline{b} = \overline{0}$$

$\impliedby$:

$$\text{Пусть } ab \in I,\ a \notin I \text{ и } b \notin I \implies \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$$

<u>Def</u> Кольцо R называется артиновым, если $\forall$ убывающая цепь идеалов обрывается, т.е. $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$, то $\exists n \in \mathbb{N} \mid I_n = I_{n+1} = \dots$

<u>Утверждение</u> В артиновом кольце любой простой идеал является максимальным
<u>Proof</u> R - арт. кольцо, P - простой идеал $^R/_P$ - о.ц. $\overset{?}{\implies}$ $^R/_P$ - поле