Группы и Алгебры Ли. Лекция

$$0 \in U \subset T_e(G)$$
$$e \in W \subset G$$
$$\exp : U \to W \text{ - диффеоморфизм}$$

$\{e_1, ..., e_n\}$ - базис $T_e(G)$. $v = x_1, e_1 + ... + x_n e_n$
$\forall g \in W \ \exists! v \in U \mid g = \exp v$.

Введём на W координаты $y_1, ..., y_n$, получая $y_i(g) = y_i(\exp(x_1 e_1 + ... + x_n e_n)) = x_i$

$$(W, y_1, ..., y_n) \text{ - координатная карта}$$

Определение. $\{y_1, ..., y_n\}$ называется каноническими координатами в окрестности W

Лемма. *Пусть V - координатная окрестность точки e, с координатами $\{x_1, ..., x_n\}$, с условием $x_i(e) = 0$. Тогда для достаточно близких к e элементов $g_1, g_2 \in V / g_1 \cdot g_2 \in V/$*

$$x_i(g_1 g_2) = x_i(g_i) + x_i(g_2) + o(r(x(g_1), x(g_2)))$$

Доказательство:

$$F_i = x_i(\mu(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)) = x_i(0) + \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0,0)x_j + \sum \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0)y_j + ...$$
$$x_i(g_1 \cdot g_2) = \sum_j c_j x_j(g_1) + \sum_j b_j x_j(g_2) + ...$$
$$g_2 = e \Rightarrow c_j = 0, \, i \neq j, \quad c_j = 1, \, i = j$$
$$g_1 = e \Rightarrow b_j = 0, \, i \neq j, \quad b_j = 1, \, i = j$$

$$x(g_1 g_2) = x(g_1) + x(g_2) + o(r(x(g_1), x(g_2)))$$

G - абелева группа

$g_1 = \exp v_1, \, g_2 = \exp v_2$

Если $v_1, v_2 \in V$ достаточно малы (близки к нулю)

$$v_1, v_2 \in V' \subset U$$
$$\exp v_i \in W, \, i = 1, 2$$
$$\exp v_1 \cdot \exp v_2 \in W$$
$$\exp(v_1) \exp(v_2) = \exp(v_3)$$

По лемме

$$v_3 = v_1 + v_2 + o(r(v_1, v_2))$$

Для достаточно малых v_1, v_2
Для других v_1, v_2

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \frac{v_1}{N}, \frac{v_2}{N} \text{ - достаточно малые}$$

$$\exp\left(\frac{v_1}{N}\right)\exp\left(\frac{v_2}{n}\right) = \exp\left(\frac{v_1}{N}+\frac{v_2}{N}+o\left(\frac{1}{N}\right)\right) \Longrightarrow \left(\exp\left(\frac{v_1}{N}\right)\cdot\exp\left(\frac{v_2}{N}\right)\right)^N$$

$$= \left(\exp\left(\frac{v_1}{n}\right)\right)^N \cdot \left(\exp\left(\frac{v_2}{n}\right)\right)^N = \exp\left(\frac{v_1}{N}+\frac{v_2}{N}+o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N \Longrightarrow$$

$$\exp v_1 \cdot \exp v_2 = \exp(v_1+v_2+o(1)) \Longrightarrow \exp v_1 \cdot \exp v_2 = \exp(v_1+v_2)$$

Допустим, что G - связная. Тогда она порождается любой окрестностью еденицы

$e \in U$ - откр. $U^2 = U \cdot U$ - открытое

$$U = U^{-1}$$

$$H = \bigcup_n U^n \text{ - открытая подгруппа в } G$$

$$G = \bigcup_\alpha H \cdot g_\alpha$$

$H \cdot g_\alpha$ - открытое

$$G = H \cup \left(\bigcup_{Hg_\alpha \neq H} Hg_\alpha\right) \Longrightarrow H = G \setminus \left(\bigcup_{Hg_\alpha \neq H} Hg_\alpha\right) \text{ - замкнутое}$$

$$G = H \cup \left(\bigcup_{Hg_\alpha \neq H} Hg_\alpha\right)$$
$$G = H \cup M$$
$$H \cap M = \emptyset, H \neq \emptyset \Rightarrow M = 0$$

$$g = \exp(v_1)...\exp(v_s) = \exp(v_1+...+v_s) \Rightarrow$$
$$\exp : T_e(G) \longrightarrow G \text{ - сюр. гомоморфизм}$$