Типы случайных процессов

1) $t = 0, 1, 2, \dots$ $(t = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots)$ - временные ряды
Процессы с независ. значениями

$$X_0, X_1, X_2, \dots \text{ - послед-ть с.в.}$$

$$X_t \wedge X_s,\ t \neq s \text{ - независимы}$$

2) Процессы с независимыми приращениями

$$t \in [0, T]\ ([0, +\infty]$$

$X_t,\ t \in T$ процесс с независ. приращениями, если $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n,\ n \in \mathbb{N}$

$$X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_n, \dots \text{ - нез с.в.}$$

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \implies \{S_n\}_{n \geq 1} \text{ - процесс с незав приращ}$$

$t_1 < t_2$ $X_t,\ t \in T$ процесс с независимыми приращениями

$$X(t_2 + t_1) - X(t_2) \text{ - не зависит от } t_2$$

$$m_X(t_2 + t_1) = E(X(t_2 + t_1)) = E(X(t_2 + t_1) - X(t_2)) + E(X(t_2)) = m(t_1) + m(t_2)$$

$$t > s \quad E(X(t)) = 0$$

$$K(s, t) = E(X(t)X(s))$$

$$X(t) \cdot X(s) = (X(t) - X(s) + X(s))X(s) = (X(t) - X(s))X(s) + X^2(s)$$

$$K(s, t) = E((X(t) - X(s))X(s)) + E(X^2(s))$$

$$K(s, t) = \min(\sigma^2(s), \sigma^2(t))$$

$$E((X(t) - X(s))^2) = \sigma^2(t) + \sigma^2(s) - 2\sigma^2(s) = \sigma^2(t) - \sigma^2(s)$$

$$\sigma^2(t) = \sigma^2(s) + \sigma^2(t - s)$$

$$\sigma^2(t_1 + t_2) = \sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2)$$

Рассмотрим функциональное уравнение

$$y(t_1 + t_2) = y(t_1) + y(t_2)$$

$$t_1 = t_2 = 1$$

$$y(2) = y(1) + y(1) = 2y(1)$$

$$y(m + 1) = y(m) + y(1) = (m + 1)y(1)$$

$$y(n) = ny(1) = Bnm(t)$$

$$y\left(\frac{m}{n}\right) = m$$

Марковские процессы

Определение. Процесс называется Марковским, если

$$P(X_{t_{n+1}} \in B | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_{t_{n+1}} \in B | X_t = x_n) \text{ - переходная функция}$$

Показать: 1) Для процесса с незав. приращ определить конечномерные распределения
2) Процесс с нез. приращениями $\equiv$ марковский процесс

Стационарные процессы

Определение. $X_t, t \in T$ - стационарный, если

$$\forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n \ \forall n, \ \forall h > 0$$

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \wedge (X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}) \text{ одинаково распределены}$$

$$E(X(t_1)) = m(t_1)$$
$$E(X(t_2)) = m(t_2)$$
$$X(t_1) \wedge X(t_2) = X(t_1 + h) \text{ - одинаково расп } \implies$$
$$1) \ m(t_1) = m(t_1 + h) = const$$
$$2) \ \sigma^2(t) = const$$
$$E(X(t)) = 0$$
$$K(s,t) = E(X(t) \cdot X(s)) = E(X(s+h)X(s)) \quad h = t - s \text{ возьмем } s = 0 \implies$$
$$K(s+h, s) = K(h) = K(t-s) = K(|t-s|)$$

Замечание. 1-ое определение стационарного процесса называется стационарным процессом в узком смысле

Определение. Пусть $X_t, t \in T$ - процесс:
$\{m(t) = const, K(t,s) = K(|t-s|)$
Тогда $X_t, \ t \in T$ называется стационарным процессом в широком смысле

$$X(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad A, \omega \text{ - постоянные (неслучайные)}$$
$$\phi \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$$

Гауссовские процессы

Теорема. X_t - *стационарен в узком смысле* $\iff$ *он стационарен в широком смысле*

Доказательство. ■

$$X_t = f(\xi + t)$$
$$\xi \in \mathcal{R}[0, T), \ f \text{ - периодическая ф-ия с периодом T.}$$

Показать, что X_t - стационарный в узком смысле

Д-во

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$
$$E\left(\exp\left(in\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_{n_j} + h\right)\right) = \phi_{n_1+h, \ldots, n_n+h}$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} f(u_j + y)\right) dy = \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} f(u_1 + h, y)\right) dy$$
$$\frac{1}{T}\int_h^{T+h} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} f(u_1, y)\right) dy$$
$$\Phi_k \text{ - компл. число}$$

$$X_t = \sum_{k=-n}^{n} e^{i\lambda_k + \Phi_k}$$

$$E(\Phi_k) = 0 \implies m(t) = 0$$

$$E(\Phi_k \overline{\Phi}_k) = F_k$$

$$K(t,s) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i\lambda_k(t-s) + \Phi_k} = K(t-s)$$

Броуновское движение

1) X_t - имеет непрерывные траектории
2) $P(X_0 = 0) = 1$
3) Процесс с независимыми приращениями
4) Приращение $X_t - X_s \in \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)),\ t > s$

$$m(t) = E(X_t) = 0$$

$$K(t,s) = E(X_t X_s) = E((X_t - X_s)X_s) + E(X_s^2) = E(X_s) \cdot E(X_t - X_s) = 0$$

Д/з. Найти конечномерные распределения Броуновского движения

$$w(t) \text{ - Броуновское движение}$$

$$\tau_x = \inf\{t :\ w(t) = x\}$$

$$\widehat{w}(t) = \max_{u \in [0,t]} \{w(u) \le x\}$$

$$P(\widehat{w}(t) \le x) = 2P(w(t) \ge x)$$

$$P(w(t) \ge x) = \int_0^t P(w(t) \ge x | \tau(x) = y) f(y) dy = \int_0^t P(w(t) - w(y) \ge 0 | \tau(x) = y) f(y) dy$$

$$= \int_0^t P(w(t) - w(y) \ge 0) f(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^t f(y) dy$$

$$P(\tau(x) \le t) = 2P(w(t) \ge x) = 2\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-u^2}{2t}} du = 2\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2t}} dv$$

$$P(\tau(t)$$