Применение теоремы о максимуме и минимуме

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

$$\Delta u(x,y,z) = f(x,y,z) \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = U|_\Gamma(x,y,z),\ (x,y,z) \in \Gamma \tag{2}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - открытая ограниченная область
Предположим, что существует два решения $u^i,\ i = 1,2$
Рассмотрим $u = u^1 - u^2$

$$\Delta u(x,y,z) = 0$$

$$u(x,y,z)|_\Gamma = 0$$

$$0 \le u(x,y,z) \le 0 \implies u \equiv 0$$

Единственность решения основных краевых задач для уравнения Пуассона

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - открытая ограниченная область. $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,\ \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing,\ i \neq j$

$$u(x,y,z)|_{\Gamma_1} = u_\Gamma(x,y,z),\ (x,y,z) \in \Gamma_1 \tag{3a}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = q_\Gamma(x,y,z)\ (x,y,z) \in \Gamma_2 \tag{3b}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\right)\right|_{\Gamma_3} = T_\Gamma(x,y,z)\ (x,y,z) \in \Gamma_3 \tag{3c}$$

Предположим, что существует два решения $u^i,\ i = 1,2$
Рассмотрим $u = u^1 - u^2$

$$\Delta u(x,y,z) = 0 \tag{4}$$

$$u(x,y,z)|_{\Gamma_1} = 0 \tag{5a}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = 0 \tag{5b}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\right)\right|_{\Gamma_3} = 0 \tag{5c}$$

$$\underbrace{\iiint_\Omega u \cdot \Delta u dxdydz}_{=0} = \iint_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma - \iiint_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$\underbrace{\iiint_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)}_{\ge 0} = \underbrace{-\iint_{\Gamma_3} hu^2 d\Gamma}_{\le 0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$u(x,y,z) \equiv const \text{ в } \Omega$$

Пусть $\Gamma_1 \neq \varnothing \implies u(x,y,z) \equiv 0$
Пусть $\Gamma_3 \neq \varnothing$. Тогда:

$$\iint_{\Gamma_3} hu^2 d\Gamma = 0 \implies u|_{\Gamma_3} = 0 \implies u(x,y,z) \equiv 0$$

Пусть $\Gamma_1 \neq \varnothing,\ \Gamma_3 \neq \varnothing,\ \Gamma_2 = \Gamma$

$$\Delta u = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

В случае, когда на всей границе задаётся граничное условие Неймана, если решение существует, то оно не единственно. Все другие решения будет отличаться на константу.

Замечание (по поводу задачи Неймана).

$$\Delta u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = q_{\Gamma}(x,y,z)$$

$$\iiint_{\Omega} \Delta u dxdydz = \iiint_{\Omega} f dxdydz$$

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \iiint_{\Omega} f dxdydz$$

$$\iint_{\Gamma} q_{\Gamma} d\Gamma = \iiint_{\Omega} f dxdydz$$

Получили необходимое условие существования решения
Оно же является и достаточным условием (без доказательства)

Задача Дирихле для уравнений Пуассона в круге. Формула Пуассона

$$x^2 + y^2 < L^2$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$u\big|_{x^2+y^2=L^2} = u_{\Gamma}(x,y)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \qquad 0 < r \le L, \ \phi \in [0; 2\pi]$$

$$u(x,y) = \widetilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi)$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \widetilde{u}(r,\phi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{u}(r,\phi)}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \widetilde{u}(r,\phi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{u}(r,\phi)}{\partial \phi^2} = 0 \tag{6}$$

$$\widetilde{u}(r,\phi)\big|_{r=L} = f(\phi) \tag{7}$$

Будем считать $\phi \in (-\infty, \infty)$. $f(\phi) = f(\phi + 2\pi), \ \forall \phi \in \mathbb{R}$
Добавим условие

$$\widetilde{u}(r,\phi) = \widetilde{u}(r, \phi + 2\pi) \tag{8}$$

Так как преобразование вырожденно в точке $r = 0$. Потребуем

$$\left.|\widetilde{u}(r;\phi)|\right|_{r=+0} < \infty \tag{9}$$