УМФ. Лекция

who de fq

22 ноября 2024 г.

Св-ва собственных зн-й и ф-й

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}X(x)\right) + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0$$
$$p(x) \geq p_0 > 0 \quad 0 \leq x \leq l$$
$$\rho(x) \geq \rho_0 > 0$$
$$q(x) \geq 0$$
$$\alpha X'(x)(0) - \beta X(0) = 0$$
$$\gamma X'(x)(l) - \delta X(l) = 0$$

Каждому собсвенному значению соответствует только одна линейно независимая собственная ф-я

$$||X_n(x)|| = \{\int_0^l \rho X_n^2 dx = 1\}$$
$$\int_0^l \rho X_n X_m dx = 0 \quad n \neq m$$
$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}X_n(x)\right) + (\lambda_n\rho(x) - q(x))X_n(x) = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(\rho\frac{d}{dx}X_m\right) + (\lambda_m\rho - q)X_m = 0$$
$$X_n\frac{d}{dx}(pX_n') - X_n\frac{d}{dx}(pX_m') + X_nX_m\rho(\lambda_n - \lambda_m) = 0$$
$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \rho X_n X_m dx = \int_0^l \left(X_n(pX_m')' - X_m(pX_n')'\right)dx = X_npX_m'\big|_0^l - \int_0^l pX_m'X_n'dx$$
$$-X_mpX_n'|_0^l + \int_0^l pX_m'X_n'dx$$
$$p(x)(X_n(x)X_m'(x) - X_m(x)X_n'(x))\big|_0^l$$
$$p(l)\left(-\frac{\delta}{\gamma}X_n(l)X_m(l) + \frac{\delta}{\gamma}X_m(l)X_n(l)\right)$$
$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \rho X_n X_m dx = 0$$
$$\sum \alpha_k X_k = 0 \mid \cdot X_n\rho,\ \int_0^l$$
$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}X_n(x)\right) + (\lambda\rho(x) - q(x))X_n(x) = 0$$
$$\alpha X_n'(x)(0) - \beta X_n(0) = 0$$
$$\gamma X_n'(x)(l) - \delta X_n(l) = 0$$

Умножим равенство на X_n и проинтегрируем от 0 до l

$$\int_0^l X_n\frac{d}{dx}(pX_n')dx + \lambda_n\int_0^l \rho X_n^2 dx - \int_0^l qX_n^2 dx = 0$$

$$\lambda_n = \int_0^l qX_n^2 dx - \int_0^l X_n \frac{d}{dx}(pX_n')dx$$

$$= \int_0^l qX_n^2 dx - pX_nX_n'\Big|_0^l + \int_0^l p(X_n')^2 dx$$

$$p(l)X_n(l)X_n'(l) - p(0)X_n(0)X_n'(0)$$

$$X_n'(l) = \frac{-\delta}{\gamma}X_n(l)$$

$$-p(l)\frac{\delta}{\gamma}(X_n(l))^2$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) \mid \cdot X_k(x)$$

$$\int_0^l \rho f(x) X_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_0^l \rho X_n(x) X_k(x) dx \quad n = k$$

Если собственные ф-ии нормированны:

$$f_n = \int_0^l \rho f X_n dx$$

Если нет, то делим интеграл на $||X_n||^2$

$$||\phi|| = \max_{x\in[0,l]} |\phi(x)|$$

$$||\phi||_2 = \left(\int_0^l \rho\phi^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$