Комплан. Лекция

AAAAAAA, kill me

20 декабря 2024 г.

$$res_{z=z_0} f(z) = c_{-1}^{(z_0)}$$

<u>Note</u> Вычет в конечной устранимой особой точке z_0 равен нулю

z_0 - полюс порядка m

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$$

$$(z-z_0)^m \cdot f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \dots$$
$$((z-z_0)^m \cdot f(z))' = c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1} \cdot (m-1)(z-z_0)^{m-2} + \dots$$
$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m \cdot f(z)) = c_{-1}(m-1)! + c_0 m!(z-z_0) + \dots$$

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m \cdot f(z))$$

$m = 1$, z_0 - простой полюс

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \quad \psi(z_0) = 0,\ \phi(z_0) \neq 0,\ \psi'(z_0) \neq 0$$

$$resf(z_0) = \lim_{z \to z_0}((z-z_0) \cdot \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z)}{\frac{\psi(z)}{z-z_0}} = \lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}$$

$$resf(z_0) = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

<u>Note</u> Нахождение вычета в существенно особой точке обычно находят через Лорановское разложение

Th (Основная теорема Коши о вычетах)
Если $f(z)$ регулярна на замкнутом контуре Γ и регулярна внутри этого контура, кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} f(z)$$

Proof Рассмотрим окружности $\Gamma_k : \ |z - z_k| = \rho_k, \ I(\Gamma_k) \subset int\Gamma$.
Тогда по теореме Коши для многосвязной области:

$$L = \Gamma \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \cdots \cup \Gamma_n^-$$

$$\int_L f(z)dz = 0$$

$$\oint_\Gamma f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k^-} f(z)dz = 0$$

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \cdot res_{z=z_k} f(z)$$

Вычет f(z) в ∞

Пусть $f(z)$ регулярна в $R < |z| < \infty$

Def $res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)dz$, где $C^- : \ |z| = \rho > R$, проходимая по часовой стрелки

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}, \ R < |z| < \infty$$

Проинтегрируем почленно данный ряд:

$$\oint_{C^-} f(z)dz = C_{-1} \cdot (-2\pi i)$$

$$res f(\infty) = -C_{-1}^{(\infty)}$$

Note Если $z = \infty$ - устранимая особая точка

$$res f(\infty) \text{ может быть отличен от нуля}$$

Th (О сумме всех вычетов) Если $f(z)$ регулярна в $\overline{\mathbb{C}}$ кроме конечного числа особых точек, то сумма её вычетов относительно всех особых точек, включая $z = \infty$, равна 0
Proof $z_0 = \infty, \ z_1, z_2, \ldots, z_n$. окружность C содержит внутри себя эти особые точки

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} f(z) + res f(\infty) \implies$$

$$\sum_{k=0}^{n} res_{z=z_k} f(z) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} f(z) = -res f(\infty) = c_{-1}^{\infty}$$

Применение вычетов к вычеслению некоторых определенных интегралов

$$1)\ \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$$

$R(u,v)$ - рациональная непрерывная на $[0,2\pi]$, $u=\sin x,\ v=\cos x$

$$z=e^{ix} \quad |z|=1,\ 0\le x\le 2\pi,\ 0\le \arg z = x \le 2\pi$$

z пробегает окружность $|z|=1$ против часовой стрелки

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$dz = i\cdot e^{ix}dx \implies dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} res_{z=z_k} f(z)$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx \quad R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$$

1. $P(x)\ne 0 \quad \forall x: -\infty < x < \infty$
2. $\deg P(x) \ge \deg Q(x) + 2$

Пусть z_k все особые точки $R(z)$

Рассмотрим замкнутый контур $C_R = L_R \cup [-R,R],\ R > R_0 = \max_k |z_k|$, состоящий из верхней полуокружности и отрезка действительной оси

$$\oint_{C_R} R(z)dz = \int_{L_R} R(z)dz + \int_{-R}^{R} R(x)dx$$

$$R\longrightarrow\infty$$

$$\oint_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum resR(z)$$

$$\int_{L_R} R(z)dz \longrightarrow 0$$

$$\int_{-R}^{R} R(x) = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} res_{z=z_k} R(z)$$

<u>Лемма Жордана</u> Пусть на пос-ти $(n=1,2,\dots)$ дуг окружностей $C_{R_n} = \{|z|=R_n,\ Imz \ge -a\}$ при $R_n\to\infty$ выполняется

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0 \text{ равномерно отнистельно } \arg z = \phi$$

Тогда

$$\forall\lambda>0 \quad \lim_{R_n\to\infty}\int_{C_{R_n}} g(z)\cdot e^{i\lambda z}dz = 0$$

$$3) A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos\beta x dx$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\sin\beta x dx$$

$$\beta > 0$$

1. $f(x)$ непрерывна на действительной оси.
$f(z)$ регулярна в $Imz > 0$, кроме $z_k,\ k = \overline{1,n}$
2. $\lim_{z\to\infty} = 0$ равномерно относительно $\arg z \in [0,\pi]$

$$I = A + iB = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx \tag{1}$$

Th При условиях 1 и 2 (1) сходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\beta x} dx = \sum_{Imz_k>0} res_{z=z_k}(f(z) \cdot e^{i\beta x})$$

Proof

$$C_R = L_R \cup [-R, R]$$

$$\int_{C_R} f(z) e^{i\beta z} dz = \int_{L_R} f(z) \cdot e^{i\beta z} dz + \int_{-R}^{R} f(x) e^{i\beta x} dx$$

$$R \to \infty$$

$$A = Re\left(2\pi i \sum_{Imz_k>0} res_{z=z_k}(f(z) \cdot e^{i\beta z})\right)$$

$$B = Im\left(2\pi i \sum_{Imz_k>0} res_{z=z_k}(f(z) \cdot e^{i\beta z})\right)$$