Комплан. Лекция

Родион Иващенко - ХУЙ

5 ноября 2024 г.

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \quad \zeta_k = \xi_k + i\eta_k$$

f(z) непр на C

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k) = u_k + iv_k$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}(u_k + iv_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k)$$

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\left(\int_C u(x,y)dy + v(x,y)dx\right)$$

$$f(z) = u + iv \quad dz = dx + idy$$

Св-ва:
1. Ориентированность

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$$

2. Линейность

$$\int_C\left(\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(z)\right)dz = \sum_{k=1}^{n} A_k\int_C f_k(z)dz$$

3. Аддитивность по контуру

$$\int_{C_1\cup C_2} = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

4. Оценка модуля

$$\Delta s_k \text{ - длина дуги}$$

$$|\Delta z_k| \le \Delta s_k$$

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\Delta s_k$$

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds$$

<u>След</u>

$$|f(z)| \le M = const\ \forall z\in C \implies \left|\int_C f(z)dz\right| \le M\cdot \text{дл C}$$

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t\in[\alpha,\beta]$$

C - непрерывная дифф. (в част, гладкая) кривая. $x(t),\ y(t)$ - непр диф

$$\int_C P(x,y)dx = \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t))x'(t)dt$$

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t)))\cdot(x'(t) + iy'(t))dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt$$

$$C: z = z(t) \quad t\in[\alpha,\beta]$$

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt$$

Example

$$C=[0,2\pi] \quad \int_C = e^{iz}dz = \int_0^{2\pi} e^{ix}dx = \int_0^{2\pi}(\cos x + i\sin x)dx = 0$$

$$z = x \quad x\in[0,2\pi]$$

Note $\int_a^b f(z)dz = f(c)\cdot(b-a) \quad e^{ic}\neq 0$

Два важных примера

Задача 1

$$\int_C 1\cdot dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot(z_k - z_{k-1}) = \lim_{\lambda\to 0}(z_n - z_0) = b-a$$

$$\int_C 1\cdot dz = b-a$$

$$\int_a^b 1\cdot dz = b-a$$

В частности $a=b$

$$\oint_C 1\cdot dz = 0$$

Задача 2

$$C:\ |z-z_0| = \rho$$

$$\int_C (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi}\rho^n e^{in\phi}\cdot\rho i e^{i\phi}d\phi = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\phi}d\phi$$

1) $n+1=0$

$$\int_C \frac{1}{z-z_0}dz = i\int_0^{2\pi}d\phi = 2\pi i$$

2) $n+1\neq 0$

$$\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\phi}d\phi = \int_0^{2\pi}(\cos(n+1)\phi + i\sin(n+1)\phi)d\phi = 0$$

$$z-z_0 = \rho\cdot e^{i\phi},\ 0\le\phi\le 2\pi$$

$$dz = \rho i e^{i\phi}d\phi$$

$$\oint_{|z-z_0|=\rho}(z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n\neq -1 \end{cases}$$

Интегральная теорема Коши

1) Простую замкнутую гладкую (кусочно-гладкую) кривую L - замкнутый контур

$$IntL \equiv I(L)$$

$$ExtL \equiv E(L)$$

$$\overline{I(L)} = I(L)\cup L$$

2) Односвязность области D $\equiv$ односвязность отн $\mathbb{C}$

$$\forall\ L\subset D \implies \overline{I(L)}\subset D$$

L - замкнутый контур

<u>Th Коши</u> Пусть D - односвязная область $D \subset \mathbb{C}$ и $f(z)$ - однозначная аналит ф-ия
Тогда интеграл от неё по любой замкнутой спрямляемой кривой $L \subset D$ равен 0: $\oint_L f(z)dz = 0$ (Интеграл от регулярной в односвязной области D функциии f(z) не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точки)
<u>Proof</u> Допустим предположение $f(z)$ и $f'(z)$ непр. в D

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L (u+iv)(dx+idy) = \oint_L udx - vdy + i\oint vdx + udy =$$

$$\iint_{\overline{I(L)}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_{\overline{I(L)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

<u>Th Коши</u> (для многосвязной области)
Пусть $f(z) \in H(\overline{D})$ $\overline{D}$ ограничена n+1 замкнутым контуром: внешним контуром Γ_0 и внутр $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$
Тогда $\int_L f(z)dz = 0$

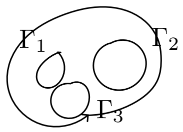

Рис. 1: pic2