Гиперболические ф-ии

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cos z = ch(iz) \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$$
$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

Обратные тригонометрические ф-ии

$$\cos z = 5$$
$$z = Arccos5$$
$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 5 \mid 2e^{iz}$$
$$e^{2iz} - 10e^{iz} + 1 = 0$$
$$e^{iz} = t$$
$$t^2 - 10t + 1 = 0$$
$$t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 1}$$
$$t_1 = 5 - \sqrt{24}$$
$$t_2 = 5 + \sqrt{24}$$
$$e^{iz} = 5 - \sqrt{24}$$
$$iz = Ln(- \sqrt{24})$$
$$iz = \ln(5 - \sqrt{24}) + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$$
$$z = -i \cdot \ln(5 - \sqrt{24}) + 2k\pi$$
$$w = ? \quad z = \cos w$$
$$e^{iw} = t, \ t \neq 0$$
$$z = \frac{t + t^{-1}}{2} \mid \ \cdot 2$$
$$t^2 - 2zt + 1 = 0$$
$$t_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$
$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$
$$iw = Ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$
$$w \equiv Ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$
$$w \equiv Arccosz = \frac{1}{i} Ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \ z = \pm 1$$

Конформные отображения

$$w \equiv \Phi(z) = u + iv$$

<u>Th1</u> $w = \Phi(z)$ непр. в обл. Д и однолистная на $M = \Phi(D) \implies M$ - область
<u>Th2</u> при условии теоремы 1, то образом границы область D является граница области M (однако однозначности на границе может не сохранится)

Геометрический смысл производной ф-ии

$$w = f(z) - \text{ регулярна в т. z}$$

И будем предпологать:

$$f'(z) \neq 0$$

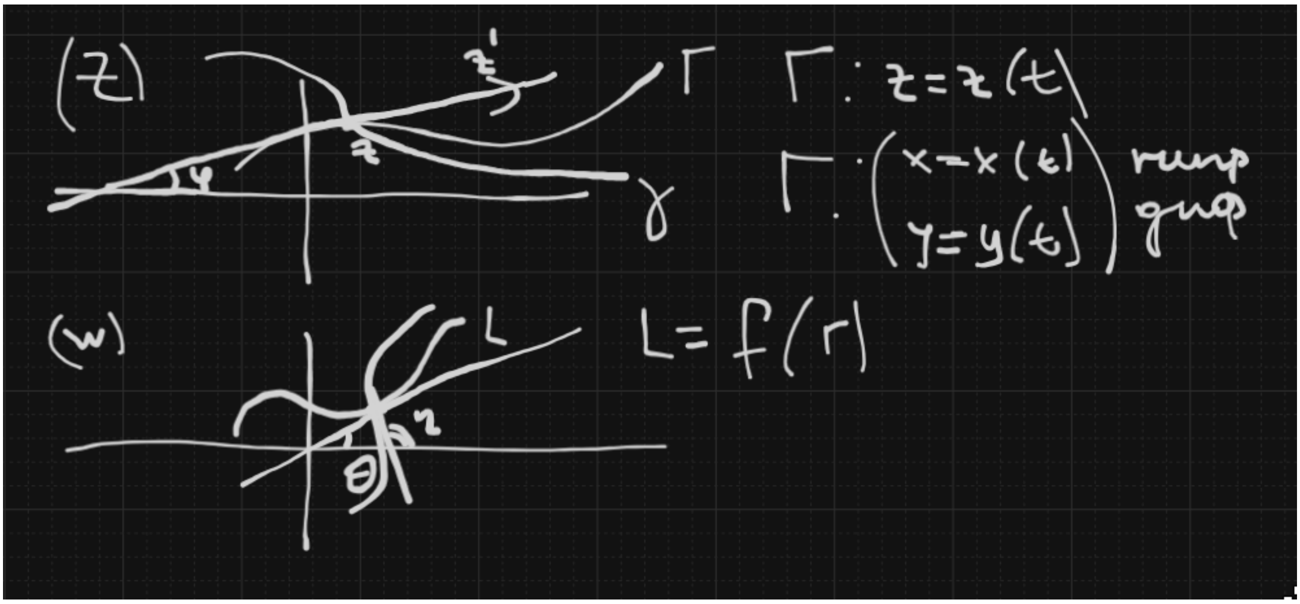

Рис. 1: Геом. смысл производной

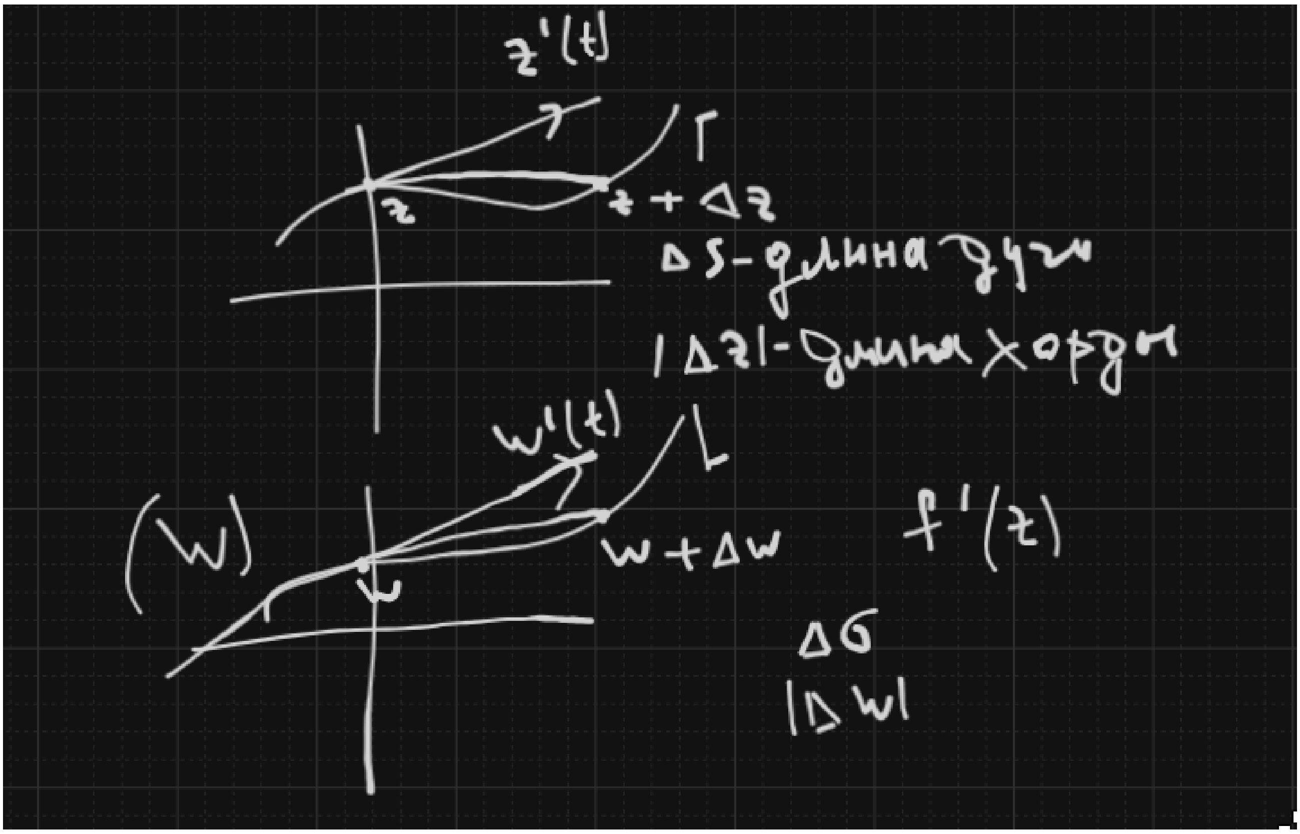

Рис. 2: Продолжения рис1

$$f'(z) = \rho \cdot e^{i\alpha}, \quad \rho = |f'(z)| \quad \alpha = \arg f'(z)$$

$$\Gamma \text{ - гладкая } \implies (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$$

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$$
$$\phi = \arg z'(t)$$
$$L: \ w \equiv w(t) = f(z(t))$$

$$w'(t) = f'(z) \cdot z'(t) \neq 0$$
$$\theta = \arg w'(t)$$
$$\arg w'(t) = \arg f'(z) + \arg z'(t)$$
$$\alpha = \theta - \phi$$

Вывод 1 $f'(z) \neq 0, \ \alpha = \arg f'(z) \implies$ Аргумент $f'(z)$ равен углу поворота касательной в точке z при отображении $w = f(z)$ (геометрический смысл аргумента производной)

Рассмотрим через точку z другую гладкую кривую γ

$$\gamma : \arg \gamma = \psi \quad l = f(\gamma) : \eta \implies \ldots \ \alpha = \eta - \psi$$
$$\alpha = \theta - \phi = \eta - \psi$$
$$\theta - \eta = \phi - \psi$$

Вывод 2 $f'(z) \neq 0 \implies$ при отображении $w = f(z)$ угол между Γ, γ проход. через точку z равен по величине и по направлению отсчёта углу между образами этих кривых L и l в соответствующей точке w (свойство консерватизма углов)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$
$$|f'(z)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$$
$$|f'(z)| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$$

Вывод 3 При отображении $w = f(z)$ модуль производной $\rho = |f'(z)|$ - коэф-т линейного расстяжения кривой Γ в точке z (коэф. расстяжения малых векторов выпущенных из точки z)

Def 1 Отбражение $w = f(z)$, при котором в данной точке z имеет место:
1) Консерватизм углов
2) Постоянство искажения линейного масштаба
Называется конформным или конформным первого рода отображением

Def 2 $w = f(z)$ области D на область $G = f(D)$ называется конф., если оно конформно в любой точке $z \in D$ и однолистно

Def 3 Если при отображении углы между кривыми сохраняются по величине, но направление отсчёта меняется на противоположное, то такое отображение называется конформным 2-го рода

Th $w = f(z) \in H(D)$ однозначная и аналитическая является конформной в каждой точке z, где $f'(z) \neq 0$

Th Римана
1) односвязная отсносительно расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ граница которой содержит более одной точки можно конформно отобразить на единичный круг $|w| < 1$
2) нельзя конформно отобразить на единичный круг плоскость с одной выколотой точкой, а также многосвязную область на односвязную

Теоремы единственности конформного отображения

1) заданную точку $z_0 \in D$ и направление ϕ отобразить в заданную точку $w_0 \in G$ и направление θ в этой точке
2) заданную внутренную точку $z_0 \in D$ и граничную точку $z_1 \in \partial D$ отобразить в заданную внутреннюю точку $w \in G$ и заданную граничкую $w_1 \in \partial G$
3) три заданные граничные точки $z_1, z_2, z_3 \in \partial D$ отобразить в три заданные граничные точки $w_1, w_2, w_3 \in \partial G$ при сохранении обхода по границе $w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2),\ w_3 = f(z_3)$

Линейное отображение