Пуассоновский процесс

$\{X_t\},\ t \geq 0$

1) С целочисленными значениями

2) X_t - процесс с независимыми приращениями

3) $P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

Предположение

1) $p(h)$ - вероятность того, что ... ≥ 1

$p(h) = ah + o(h),\ h \to 0$

$$P_m(t) = P(X(t) = m)$$

$$p(h) = P_1(h) + P_2(h) + \dots$$

2) $\geq 2:\ P_2(h) + P_3(h) + \dots = o(h).$

Формула полной вероятности

$$P_0(t+h) = P_0(t)P_0(h)$$

$$P_0(h) + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(h) = 1$$

$$P_0(h) = 1 - p(h)$$

$$P_0(t+h) = P_0(t) - P_0(t)p(h)$$

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} \leftarrow \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -P_0(t)\frac{p(h)}{h} \to -aP_0(t)$$

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -P_0(t) \cdot a$$

....

$$P_m(t),\ m = 1, 2, \dots$$

$$P_m(t+h) = P_m(t) \cdot P_0(h) + P_{m-1}(t)P_1(h) + \sum_{j=2}^{\infty} P_{m-j}(t)P_j(h)$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} P_{m-j}(t)P_j(h) \leq \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) = o(h)$$

$$P_m(t+h) = P_m(t)(1 - p(h)) + P_{m-1}(t)ah + o(h)$$

$$\frac{P_m(t+h) - P(t)}{h} = -P_m(t)a + P_{m-1}(t)a + o(h)$$

При $h \to 0$

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -P_m(t)a + aP_{m-1}(t)$$

$$Q_m(t) = P_m(t)e^{-at}$$

$$P_m(0) = 0$$

$$Q'_m(t) = P'_m(t) \cdot e^{-at} + aP_m(t) \cdot e^{-at}$$

$$Q'_m(t) = aQ_{m-1}(t)$$

$$Q'_1(t) = -aQ_0(t)$$

$$Q_1(t) = at + c = at$$

$$Q'_2(t) = aQ_1(t) \quad Q(0) = 0$$

$$Q_2(t) = \frac{a^2t^2}{2} + c \implies c = 0$$

Процессы рождения и гибели

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \underbrace{\lambda_{k-1}}_{\text{рождение}} P_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \underbrace{\mu_{k+1}P_{k+1}(t)}_{\text{гибель}}$$

$$P_k(t+h) = \lambda_{k-1}hP_{k-1}(t) + (1 - \lambda_k h - \mu_k h)P_k(t) + \mu_{k+1}hP_{k+1}(t)$$