Комплан. Лекция

Хуй

8 октября 2024 г.

Линейная функция

$$w = az + b,\ a, b \in \mathbb{C} \text{ - линейная ф-ия}$$

$$w' = a \neq 0 \text{ конф на всей комп пл-ти}$$

1. Преобразование переноса (сдвига)

$$w = z + c,\ c = c_1 + ic_2$$

$$z = x + iy,\ w = u + iv$$

$$u + iv = x + iy + c_1 + ic_2$$

$$\begin{cases} u = x + c_1 \\ v = y + c_2 \end{cases}$$

2. Преобразование поворота (вращения)

$$w = z \cdot e^{i\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha > 0 \text{ против}$$

$$\alpha < 0 \text{ по}$$

$$z = re^{i\phi}$$

$$w = re^{i(\phi+\alpha)}$$

$$|w| = r = |z| \quad \arg w = \phi + \alpha = \arg z + \alpha$$

$$e^{i(\phi+\alpha)} = r\cos(\phi+\alpha) + i\sin(\phi+\alpha)$$

$$\begin{cases} u = r\cos(\phi+\alpha) \\ v = r\sin(\phi+\alpha) \end{cases}$$

3. Преобразование подобия (гомотетия)

$$w = kz,\ k > 0$$

$$w = k \cdot re^{i\phi},\ |w| = k|z|,\ \arg w = \phi = \arg z$$

$$k > 1 \text{ - растяжение},\ k < 1 \text{ - сжатие}$$

$$w = az + b,\ a = ke^{i\alpha},\ k = |a| > 0,\ \alpha = \arg a$$

$$w = ke^{i\alpha}z + b$$

$$1)\ w_1 = ze^{i\alpha}$$

$$2)\ w_2 = w_1 \cdot k$$

$$3)\ w_3 \equiv w = w_2 + b$$

Дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \equiv L(z)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\delta = 0 = ad - bc \implies ad = bc$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda \implies a = \lambda b,\ b = \lambda d$$

$$w = \frac{\lambda cz + \lambda d}{cz+d} \equiv \lambda$$

1 Пусть c $= 0,\ a \neq 0,\ d \neq 0$

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \equiv a_1 z + b_1$$

Def Точки $z_1,\ z_2$ называются симметричными относительно $C: |z - z_0| = R$, если
1) Лежат на одном луче, исходящем из центра окружности
2) Произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса. $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$
$|z_1 - z_0| < R \implies |z_2 - z_0| > R$
$z_1 \to z_0 \implies z_2 \to \infty$
$z_1 = z_0,\ z_2 = \infty$

Def Преобразование переводящие точки z в симметричные с ними относительно окружности С точки ξ, называется симметрией (инверсией) относительно окружности

4.

$$w = \frac{R^2}{z}$$

$$z = |z|e^{i\phi},\ w = |w|e^{i\theta}$$

$$|w|e^{i\theta} = \frac{R^2}{|z|}e^{i\phi}$$

$$|w| = \frac{R^2}{|z|} \implies |z||w| = R^2$$

$$\theta = -\phi$$

$$1)\ w_1 = \frac{R^2}{\overline{z}} \quad \overline{z} = |z|e^{-i\phi}$$

$$w_1 = \frac{R^2}{|z|}e^{i\phi} \iff |w_1||z| = R^2,\ \arg w_1 = \phi = \arg z$$

w_1 - симметрия. $|z| = R$

$$2)\ w = \overline{w_1}$$

$w = \dfrac{R^2}{z}$ - симметрия отн $|z| = R$ с последующем зеркальным отражением относительно действ. оси

Th (Конформность дробно-линейного преобразования)
Дробно-линейное преобразование $w = \frac{az+b}{cz+d}$ $(\delta \neq 0)$ отображает конформно расширенную компл. пл-ть z на расш. комп. пл-ть w (др. линейное преобр. конформно на всей расш компл. пл-ти)
Proof
1. Взаимнооднозначность
1) $c \neq 0$

$$\forall\, z = -\frac{d}{c} \text{ соотв ! } w \neq \infty$$

$$w(cz+d) = az+b$$

$$wcz - az = b - wd$$

$$z = \frac{b-wd}{wc-a}$$

$$\forall\, w \neq \frac{a}{c} \text{ соотв ! } z \neq \infty$$

$$L(-\frac{d}{c}) = \infty,\ L(\infty) = \frac{a}{c}$$

$$\overline{\mathbb{C}}_z \overset{\text{вз-одн}}{\leftrightarrow} \overline{\mathbb{C}}_w$$

2) $c = 0$

$$w = a_1 z + b_1,\ a_1 \neq 0$$

$$\forall z \neq \infty \text{ соотв ! } w \neq \infty$$

$$z = \frac{w}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}$$

$$\forall w \neq \infty \text{ соотв !} z \neq \infty$$

$$L(\infty) = \infty$$

2. Конформность
1) $c \neq 0$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} \frac{ab-bc}{(cz+d)^2}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \neq 0, & z \neq \infty \\ \neq \infty, & z \neq -\frac{d}{c} \end{array}\right.$$

a) $z = \infty$

$$z = \frac{1}{t},\ z = \infty \to t = 0$$

$$w(t) = \frac{a\frac{1}{t} + b}{c\frac{1}{t} + d}$$

$$w(t) = \frac{a+bt}{c+}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} \frac{a}{c} \neq 0$$

b) $z = \frac{-d}{c} \to w = \infty$

$$w = \frac{1}{\zeta}$$

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{az+b}{cz+d} \implies \zeta$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z}|_{z=\frac{-d}{c}} \neq 0$$

2) $c = 0$

$$w = a_1 z + b_1 \quad \frac{dw}{dz} = a_1 \neq 0$$

$$L(\infty) = \infty$$

$$z = \frac{1}{t},\ w = \frac{1}{\zeta}$$

$$z = \infty \to t = 0, w = \infty \to \zeta = 0$$

$$\frac{d\zeta}{dt}|_{t=0} \neq 0$$

Def Окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ или окружность в широком смысле называется всякая кривая определяемая уравнением:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,\ A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

$$A = 0 \text{ - прямая },\ A \neq 0 \text{ - окружность}$$