Комплан. Лекция

djakadfaldfa

26 ноября 2024 г.

Последовательности и ряды

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$$
$$z_n = \alpha_n + i\beta_n$$
$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$
$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ сходится}$$
$$S_n = z_1 + \dots + z_n$$
$$\exists \lim_{n\to\infty} S_N = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S_n + r_n$$
$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$$
$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \iff \exists \lim_{n\to\infty} \overline{\alpha} = a \quad \exists \lim_{n\to\infty} \overline{\beta} = b$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} z_n \text{ сход} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ сход}, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \text{ сход}$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} z_n \text{ сход абс} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ сход}$$

<u>Пр Даламбера</u>

$$\exists \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) > 0\ \forall n > N \implies |s_n - s| < \epsilon$$

$$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty},\ z \in E$$
$$S(z) = \underbrace{f_1(z) + \dots + f_n(z)}_{S_n(z)} + f_{n+1}(z) + \dots \tag{1}$$

Область сходимости - множество $E_1 \subset E$ всех точек z, при которых числ ряд сходится

$$\forall z \in E_1\ \exists \lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$$

<u>Def</u> Ряд 1 сходится равномерно на $M \subset E_1$, если:
1) 1 сходится $\forall z \in M,\ S(z)$ - сумма ряда (1)
2)
$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon)\ \forall n > N(\epsilon) \implies |S_n(z) - S(z)| = |r_n(z)| = |f_{n+1}(z) + \dots| < \epsilon$$

Критерий Коши

$$\forall z \in M\ \forall n > N(\epsilon)\ |f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \epsilon\ \forall p = 1, 2, \dots$$

Th.1' (Признак Вейерштрасса)
Пусть члены ряда (1) $\forall z \in M\ |f_n(z)| \le u_n\ \forall n \ge n_0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_n \text{ сход. Тогда, ряд (1) на M сходится абс. и равномерно}$$

Th.2' (о непр)
Если $f_n(z)$ непрерывны на M, и ряд (1) на M сходится равномерно, то сумма $S(z)$ ряда (1) непрерывна на M

Th.3' (о почленном интегрировании)
Если $f_n(z)$ непрерывны на спрямляемой кривой L, и ряд (1) на L сходится равномерно, то $\int_L \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z) dz$

Th.4' Если над (1) сходится равномерно на M, то при умножении его на ограниченную на M функцию $\phi(z)$, полученный ряд также равномерно сходится на M

Степенные ряды

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{2}$$

Это степенной ряд, или ряд по степеням $(z - z_0)$, или ряд по системе степеней
z_0 - центр ряда
В точке $z = z_0$ ряд (2) сходится

Th.5 Пусть для ряда (2) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = A \tag{3}$$

Или

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = A \tag{4}$$

И

$$R = \frac{1}{A} \text{ - радиус сходимости}$$

Тогда, ряд (2) сходится в круге $|z - z_0| < R$ и расходится в $|z - z_0| > R$

Note Если оба предела (3) и (4) существуют, то они равны

Th (Коши-Адамара)
Радиус сходимости ряда (2) определяется формулой

$$R = \frac{1}{A}, \quad A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{5}$$

Proof 1) $0 < A < \infty$

$$\forall z = z_1 \quad |z_1 - z_0| < \frac{1}{A} \text{ ряд (2) сходится, } \forall z = z_2, \ |z_2 - z_0| > \frac{1}{A} \text{ расх}$$

2) $A = 0$
$R = \infty$, т.е. ряд (2) сходится в любой z
3) $A = \infty$
$R = 0$, т.е. ряд (2) расходится в $\forall z \neq z_0$

$$c_0 + c_1 \cdot z + \dots + c_n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{6}$$

1-ая Лемма Абеля Если ряд (6) сход в т $z_1 = 0$, то он абсолютно сходится $\forall z : \ |z| < |z_1|$
Proof

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z_1^n, \text{ сход } \implies c_n \cdot z_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies |c_n \cdot z_1^n| \leq M$$

$$\left| c_n \cdot z^n \cdot \frac{z_1^n}{z_1^n} \right| = |c_n \cdot z_1^n| \cdot \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq M \cdot q^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n \text{ - геом ряд, сходится}$$

(6) сходится абсолютно
След Если (6) расх в $z_2 \implies$ он расх $\forall |z| > |z_2|$
Let $\exists \ z_1 \neq 0$, where (6) сход, z_2 , where (6) расх
Тогда $R = \sup\{z_1\} = \inf\{z_2\}$
При $|z| < R$ ряд расх, при $|z| > R$ ряд расходится