

Задача Коши для уравнения теплопроводности

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0$$

$$u_t(x, y, z, t) - a^2 \Delta u(x, y, z, t) = 0 \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$$

$$u \in C(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$$

$$\phi \in C(\mathbb{R}^3) \text{ и ограничена}$$

Рассмотрим:

$$F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}} \quad (3)$$

Эта функция как функция от переменных (x, y, z, t) является решением уравнения теплопроводности

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta, t) d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta, t) dx dy dz = 1 \quad (4)$$

Если $(\xi, \eta, \zeta) \neq (x, y, z)$, то

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = 0$$

Если $(\xi, \eta, \zeta) \equiv (x, y, z)$, то

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \infty$$

$$u(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta, t) \phi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (5)$$

(5) Является решением задачи Коши

$$F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta, t) \phi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \xrightarrow{t \rightarrow +0} \phi(x, y, z)$$

\mathbb{R}^2 :

$$u_t(x, y, t) - a^2 \Delta_{x,y} u(x, y, t) = 0$$

$$F(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}}$$

\mathbb{R}^1 :

$$F(x, \xi, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

$$u_t - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

F называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности

Теорема о максимуме и минимуме для уравнения теплопроводности

$$(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \Omega - \text{открытое и ограниченное}$$

$$t \in (0; T)$$

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$$

$$Q_T = \Omega \times (0; T)$$

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0; T]$$

Нижнее основание $\Sigma_0 = \bar{\Omega} \times \{0\}$, верхнее основание $\Sigma_T = \bar{\Omega} \times \{T\}$.

Боковая поверхность $\Gamma_{\text{бок}} = \Gamma \times [0, T]$

Классическим решением для уравнения теплопроводности будем называть функцию

$$u \in C^2(\Omega \times (0; T)) \cap C^1(\bar{Q}_T)$$

Теорема. Пусть u - классическое решение уравнения теплопроводности. Тогда u принимает свои наибольшие и наименьшие значения либо на нижнем основании цилиндра, либо на боковой поверхности

Доказательство. Предположим, что u своё наибольшее значение M на \bar{Q}_T принимает в некоторой точке (x_0, y_0, z_0, t_0) , $0 < t_0 \leq T$, $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$.

Пусть

$$m = \max_{\Sigma_0 \cup \Gamma_{\text{бок}}} u$$

Тогда $m < M$

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$v(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \frac{M - m}{6d^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]$$

Заметим, что если $(x, y, z, t) \in \Sigma_0 \cup \Gamma_{\text{бок}}$:

$$v(x, y, z, t) \leq m + \frac{M - m}{6d^2} \cdot d^2 = \frac{M + 5m}{6} < \frac{M + 5M}{6} < M$$

Также заметим, что

$$v(x_0, y_0, z_0, t_0) = u(x_0, y_0, z_0, t_0) = M$$

Построенная функция v так же не может принимать своё наибольшее значение на нижнем основании или боковой поверхности.

Тогда v принимает наибольшее значение в точке (x_1, y_1, z_1, t_1) , $0 < t_1 \leq T$, $(x_1, y_1, z_1) \in \Omega$

В точке (x_1, y_1, z_1, t_1)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leq 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \text{если } t_1 < T$$

Если $t_1 = T$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0$$

Получаем, что в точке (x_1, y_1, z_1, t_1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v \geq 0$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u}_{=0} - \frac{M - m}{d^2} < 0$$

Получили противоречие ■

Замечание. Док-во теоремы о наименьшем значении получается при замене u на $-u$

Теорема о единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t^i(x, y, z, t) - a^2 \Delta u^i(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \quad (6)$$

$$u^i(x, y, z, t)|_{t=0} = \phi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (7)$$

$$u^i, \quad i = 1, 2$$

$$u = u^1 - u^2$$

$$u_t(x, y, z, t) - a^2 \Delta u(x, y, z, t) = 0 \quad (8)$$

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = 0 \quad (9)$$

Докажем:

$$u(x, y, z, t) \equiv 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$