# Случайные процессы

$$(\Omega, A, P) \text{ - вер. прос-во}$$
$$X : \omega \to X(\omega) \in R^1$$
$$A = X^{-1}(B) - \{\omega \in B : \; X(\omega \in B\} \in A \to P(A)$$

СлоП (Случайный процесс?)

$$X(t, \omega) \text{ - ф-ия двух аргументов}$$

a) t - фикс. $X_t(\omega)$ - с.в.
b) $\omega$ - фикс. $X_\omega(t)$ - траектория
Взгляд: мн-во траекторий (?)

$$\{X(t,\omega)\}_{t \in T}$$

i) $X(t, \omega)$ принимает значения $\{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ - считающий процесс
ii) $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ - послед-ть случайных величин
$T = [0, 1] \quad T = [0, +\infty] \ni t$ - временной ряд

$$\forall \, t_1 < t_2 < \dots < t_n \quad \forall \, n$$

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})^T \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})|_{x_{n+1} = \infty} = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ - функция распределения}$$

2)

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\pi(X_1, \dots X_n)}(\pi(x_1, \dots x_n))$$

Th (Колмогоров А. Н.)

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}(\mathbb{R}^n), P^n)_{n \geq 1}$$
$$x_\omega(t) \text{ - траектория} \to X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$$
$$(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty))$$

Существует мера ...........................................

Случайный процесс - согласованное семейство случайных величин

Example

$$\{X_t\}_{t \geq 0} \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = C \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - \mu_i)$$

Модификация процесса

$$\{X_t\}_{0 \leq t \leq 1}$$

Случайные величины $X, \widetilde{X}$ эквив-ны

$$F_{\widetilde{X}}(x) = F_X(x), \; \forall \, x \in \mathbb{R}^1$$

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ совпадает с распределением
$(\widetilde{X}_{t_1}, \dots, \widetilde{X}_{t_n})$, то $\widetilde{X}$ модификаия $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$

## Типы случайных процессов

### Процесс с независимыми значениями

$$X_1, X_2, \dots X_n \text{ - с.в. независимы}$$

$$\{X_t\}_{t \geq 0} \qquad \underbrace{X_t \wedge X_s}_{\text{независимы?}}, \; t \neq s$$

**Марковские (или Мартовские, или хз) процессы**

$$\{X_t\}_{t\geq 0} \quad X_t \text{ принимая усл зн-я}$$

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$$

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n)$$

$$P(a \leq X_{t_{n+1}} \leq b | X_{t_n} = x_n) = P([a,b), t_{n+1}; t_n, x_n) \text{ - переходная вероятность}$$

**Стационарные процессы**

## Математическое ожидание

Def t - фикс $E(X_t) = m(t)$

$$\forall t \quad \{m(t)\},\ t \geq 0 \text{ - мат ожидание}$$

Def Дисперсия

$$D(X_t) = \sigma^2(t),\ \forall t - \text{ дисперсия}$$

$$K(t,s) = E((X_t - m(t))(X_s - m(s)))$$

$$K(t,s) = K(s,t)$$

$$\{X_t\}_{t\geq 0} \text{ - стационарный процесс}$$

$$E(X_t) = const$$

$$D(X_t) = const$$

$$K(t,s) = R(|t-s|) = R_1(t-s)$$

Def Процесс $\{X_t\}_{t\geq 0}$ - стационарный в широком смысле, если $m(t) = const,\ K(t,s) = R(t-s)$

Lemma $\{X_t\}_{t\geq 0}$ - гауссовский процесс стационарен в узком смысле $\iff$ он стационарен в широком смысле

Example $\xi_1, \xi_2$ - независимые с.а.

$$P(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

$$E(\xi_i) = \sum x_k p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$D(\xi_i) = E(\xi_i^2) - E^2(\xi_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 0^2 = 1$$

$$cov(\xi_1, \xi_2) = 0 \text{ т.к. независимы}$$

$$\xi_t = \xi_1 \cos t + \xi_[ \sin t$$

$$E(\xi_t) = \cos t E(\xi_1) + \sin t E(\xi_2) = 0$$

$$D(\xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$K(t,s) = E((\xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t)(\xi_1 \cos s + \xi_2 \sin s)) = \cos t \cos s + \sin t \cos t = \cos(t-s)$$