УМФ. Лекция

29 ноября 2024 г.

Вопросы из экзамена:

1. Вещ-ть с.з. и с.ф.

2. Линейная зависимость собственных функций соответсвующих одному собственному значению

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0$$
$$\alpha X'(0) - \beta X(0) = 0$$
$$\gamma X'(l) - \delta X(l) = 0$$

Пусть нек-му $\lambda \to X_1(x),\ X_2(x)$ - лнз

$$X(x) = c_1X_1(x) + c_2X_2(x) \text{ - общее решение}$$
$$(p(x)X_i'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X_i(x) = 0$$
$$\alpha X_i'(0) - \beta X_i(0) = 0$$
$$\gamma X_i'(l) - \delta X_i(l) = 0 \quad i = 1, 2$$

Оно должно удовлетворять:

$$\alpha X'(0) - \beta X(0) = 0$$
$$c_1(\alpha X_1'(0) - \beta X_1(0)) + c_2(\alpha X_2'(0) - \beta X_2(0)) = 0$$

Но есть решения, которые не попадают в класс решений

$$X(0) = a$$
$$X'(0) = b$$

3. Ортогональность

$$X_1(x) \leftarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \to X_2(x) \text{ - с.з.}$$
$$\int_0^l \rho X_1X_2dx = 0$$

4. Неотрицательность собственных значений

Теорема Стеклова

Th Пусть коэфф-ты удовлетворяют условиям (в предыдущих лекциях)
Рассмотрим $K = \{U \in C^2(0,l) \cap C^1([0;l]) \mid \alpha u'(0) - \beta u(0) = 0,\ \gamma u'(l) + \delta u(l) = 0\}$
Существует счетное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty\ \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots,\ \lambda_k \to \infty$
Любая функция $u \in K$ может быть предствленна в виде равномерно сходящегося ряда $u = \sum_{k=1}^\infty c_kX_k(x)$, где

$$c_k = \frac{\int_0^l \rho(x)u(x)X_k(x)dx}{\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx}$$

$$u = \sum_{k=1}^\infty c_kX_k(x) \mid \rho X_n(x) \quad \int_0^l$$

$$\int_0^l \rho u(x)X_n(x)dx = \sum_{k=1}^\infty c_k \int_0^l \rho X_k(x)X_n(x)dx$$

$$\int_0^l \rho uX_ndx = c_n\int_0^l \rho X^2(x)dx$$

Метод разделения Фурье

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(p(x)u_x(x,t)) + q(x)u(x,t) = 0 \tag{1}$$

$$\alpha u_x(0,t) - \beta u(0,t) = 0 \tag{2}$$

$$\gamma u_x(0,t) + \delta u(0,t) = 0 \tag{3}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x) \tag{4}$$

$$u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x) \tag{5}$$

Первый этап

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{6}$$

$$\rho X(x)T''(t) - T(t)(pX'(x))' + qT(t)X(x) = 0 \mid\ : \rho T(t)X(x)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{(pX'(x))'}{\rho X(x)} + \frac{q}{\rho} = 0$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{(p(x)X'(x))' - qX(x)}{\rho(x)X(x)} = -\lambda$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0$$

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0$$

$$T(t)(\alpha X'(0) - \beta X(0)) = 0$$

$$T(t)(\gamma X'(0) + \delta X(0)) = 0$$

$$(\alpha X'(0) - \beta X(0)) = 0$$

$$(\gamma X'(0) + \delta X(0)) = 0$$

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \to \{X_k\}_{k=1}^{\infty}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t)X_k(x)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \phi(x), \quad A_k = \frac{\int_0^l \rho\phi X_n(x)dx}{\int_0^l \rho X_k^2 dx}$$

$$u_t(x,t)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} B_k X_k(x) = \psi(x), \quad B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{\int_0^l \rho\psi X_n(x)dx}{\int_0^l \rho X_k^2 dx}$$

Волновые уравнения в пространстве