Лекция. Матстат(11.10.24)

$$F(x;\theta) \quad F - \text{ известна, } \theta \text{ неизвестна}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

$$\lambda = \frac{L_x(\theta_0)}{\max_\theta L_x(\theta)} = \frac{L_x(\theta_0)}{L_x(\hat{\theta})}$$

Отвергается H_0 , если $\lambda \leq \lambda_\alpha$ α - уровень значимости

$$P(\lambda \leq \lambda_\alpha \mid H_0 \text{ верна}) \leq \alpha$$

$$X \in N(a, \sigma^2), \ \sigma^2 \text{ - известна}$$

$$H_0 : a = a_0$$

$$H_1 : a \neq a_0$$

$$\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x} - a_0|}{\sigma} > z_{1-\alpha/2}$$

$$F(x) \text{ - ф.р.}$$

$$H_0 : F(x) = F_0(x)$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$$

Гистограмма $p_{0_i} = F_0(a_i) - F_0(a_{i-1})$

Выборка объёма n

π_i - истенные вер. $(\pi_1 \ldots, \pi_k)$

$(m_1, \ldots, m_k$ - имеет полином p

$$p(x_1 = m_1, \ldots, x_k = m_k) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} \prod_{i=1}^{k} \pi_i^{m_i} = L_x(\pi_1, \ldots, \pi_k)$$

При $H_0 : \pi_i = p_{i0}, \ i = \overline{1, k}$

$\max_{\pi_1, \ldots, \pi_k} L_x(\pi, \ldots, \pi_k) =$ При $\pi_i = \frac{m_i}{n}$

$$\lambda = \frac{L_x(p_{10}, \ldots, p_{k0})}{L_x(\frac{m_1}{n}, \ldots, \frac{m_k}{n})} = \frac{\prod_{i=1}^{k}(p_{i_0}^{m_i})}{\prod_{i=1}^{k}(\frac{m_i}{n})^{m_i}} = \prod_{i=1}^{k}(\frac{p_{i_0}}{m_i})^{m_i}$$

$$-2\ln\lambda = 2\sum_{i=1}^{k} m_i \ln\frac{m_i}{np_{i_0}} = 2\sum_{i=1}^{k}((m_i - np_{i_0}) + np_{i_0})\ln(1 + \Delta_i) = ((m_i - np_{i_0} + p_{i_0})\,(\Delta_i - \frac{\Delta_i^2}{2})$$

$$\triangle_i = \frac{m_i - np_{i_0}}{np_{i_0}} = \frac{m_i}{np_{i_0}} - 1$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_{i_0}\Delta_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{m_i - np_{i_0}}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i - n\sum_{i=1}^{k} p_{i_0}\right) = 0$$

$$= 2(\chi^2 - \frac{1}{2}\chi^2) = 2\frac{\chi}{2} = \chi^2$$

$$n \to \infty \ -2\ln\lambda \sim \chi^2(k-1)$$

$$f(x;\theta_1,\theta_2)$$

$$H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$$

$$H_1 : \theta_1 \neq \theta_{10}$$

θ_2 - неизвестен (мешающий)

$$\lambda = \frac{\max_{\theta_2} L_x(\theta_{10}, \theta_2)}{\max_{\theta_1,\theta_2} L_x(\theta_1, \theta_2)}$$

$$\lambda \leq \lambda_2 \text{ - отв } H_0$$

ПОМОГИТЕ

$$X \in N(a, \sigma^2),\ \sigma^2 \text{ - неизв}$$
$$H_0 : a = a_0$$
$$H_1 : a \neq a_0$$
$$\theta = (a, \sigma^2)$$
$$L_x(\theta) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\right)$$

При гипотезе

$$\max_{\sigma^2} L_x(a_0, \sigma^2) = L_x(a_0.\tilde{\sigma^2})$$
$$\tilde{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2 = s^2 + (\overline{x} - a_0)^2$$
$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
$$\max_{a,\sigma^2} L_x(a, \sigma^2) = L_x(\overline{x}, s^2) = (2\pi s^2)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{n}{2})$$
$$\lambda = \left(\frac{s^2}{s^2 + (\overline{x} - a_0)^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 + \frac{(\overline{x}-a_0)^2}{s^2}}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n}{2}}$$
$$t = \frac{\sqrt{n}\ (\overline{x} - a_0)}{s}$$
$$\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x} - a_0|}{s} \geq c_\alpha = c_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x} - a_0|}{s} \in t(n-1)$$
$$\text{по } \alpha \text{ и } \nu = n - 1$$
$$t_{1-\frac{\lambda}{2}}(\nu) \text{ - квантиль пор } 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Диспресионный анализ $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_k$ (самим)

Доверительный интервал

$$\hat{\theta_n} \text{ - оценка}$$

Использовать неравенство Чебышева

$$E_\theta(\hat{\theta_n}) = \theta$$
$$D_\theta(\hat{\theta_n}) = \sigma^2$$
$$P(|\hat{\theta_n} - \theta_0| > 36) \leq \frac{1}{9}$$
$$|\hat{\theta_n} - \theta_0| \leq 36$$
$$X \in N(a, \sigma^2),\ \sigma^2 \text{ - изв}$$
$$P_{a_0}(\frac{\sqrt{n}\ |\overline{x} - a_0|}{\sigma} \geq z_{1-\alpha/2} \leq \alpha$$
$$P_{a_0}(\frac{\sqrt{n}\ |\overline{x} - a_0|}{\sigma} < z_{1-\alpha/2}) \geq 1 - \alpha$$
$$P_{a_0}(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a_0 < \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \geq 1 - \alpha$$

Def Доверительным интервалом с границами $(\hat{\theta_1}(x), \hat{\theta_2}(\theta))$
$P((\hat{\theta_1}(x), \hat{\theta_2}(x)) \ni \theta) \geq \gamma$

Качество статистических критериев