ТВиМС. Лекция

14 февраля 2025 г.

$$X(t) = X(\omega, t), t - \text{ фикс, } X_t(\omega) - \text{ с.в.}$$
$$\{X(t_1), \ldots, X(t_n)\},\ t_1 < t_2 \cdots < t_n,\ \forall n$$

Числовые характеристики
1) Матем. ожидание $m(t) = E(X(t))$
2) Дисперсия $\sigma^2(t) = D(X(t))$
Корреляционная функция

$$K(t_1, t_2) = E((X(t_1) - m(t_1))(X(t_2) - m(t_2))) = E(X(t_1)X(t_2)) - m(t_1)m(t_2)$$
$$E(X(\omega, t_1)X(\omega, t_2))$$

Стационарный процесс:

$$\{X(t_1), \ldots, X(t_n)\} \wedge \{X(t_1 + h), \ldots, X(t_n + h)\} \text{ - одинаково распределены } \forall h \wedge \forall t_1 < \cdots < t_n$$

Если процесс стационарный, то $m(t) = const,\ \sigma^2 = const,\ K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(|t_2 - t_1|)$

$$K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_1, t_2 - t_1) = K_1(t_2 - t_1)$$

$$X(t) = \xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t$$

ξ_1, ξ_2 - независимые случайные величины
$P(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$

$$E(X(t)) = m(t) = E(\xi_1(\omega) \sin t + \xi_2(\omega) \cos t) = E(\xi_1(\omega) \sin t) + E(\xi_2(\omega) \cos t) = \sin t E(\xi_1) + \cos t E(\xi_2)$$
$$E(\xi_1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$
$$m(t) = 0$$
$$D(\xi_1) = E(\xi_1^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$
$$\sigma^2(t) = D(X(t)) = D(\xi_1 \sin t) + D(\xi_2 \cos t) + 2cov(\xi_1 \sin t, \xi_2 \cos t)$$
$$\sigma^2(t) = \sin^2 t D(\xi_1) + \cos^2 t D(\xi_2) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$
$$K(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X(t_2)) = E((\xi_1 \sin t_1 + \xi_2 \cos t_1) \cdot (\xi_1 \sin t_2 + \xi_2 \cos t_2)) = E(\xi_1^2 \sin t_1 \sin t_2 +$$
$$+ \xi_1 \xi_2 (\sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2) + \xi_2^2 \cos t_1 \cos t_2)$$
$$= \sin t_1 \sin t_2 + \cos t_1 \cos t_2 = \cos(t_2 - t_1)$$

Определение

X(t) называется стационарным в широком смысле, если

$$E(X(t)) = const \quad K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1)$$

$$X(t) = \xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t$$
$$m(t) = 0, \quad K(t_1, t_2) = \cos(t_2 - t_1)$$

1) $t = 0$
$X(0) = \xi_2$
$t = \frac{\pi}{4}$
$X(\frac{\pi}{4}) = \xi_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \xi_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 1 \implies$$

Пример

$$E(X(t)) = m_x(t) = 0$$

$$K_x(t_1, t_2) = 2\sin(t_1)\sin(t_2)$$

$$z(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau = \int_0^t X(\omega, \tau)d\tau$$

$$E(z(t)) = ? \quad D(z(t)) = ? \quad K(t_1, t_2) = ?$$

$$m_z(t) = E\left(\int_0^t X(\omega, \tau)d\tau\right) = \int_0^t E(X(\omega, \tau))d\tau = \int_0^t 0 \cdot d\tau = 0$$

$$K(t_1, t_2) = E(z(t_1)z(t_2)) = E\left(\int_0^{t_1} X(\omega, \tau_1)d\tau_1 \cdot \int_0^{t_2} X(\omega, \tau_2)d\tau_2\right) = E\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} X(\omega, \tau_1)X(\omega, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} E(X(\omega, \tau_1)X(\omega, \tau_2))d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} 2\sin(\tau_1)\sin(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = 2(-\cos(\tau_1)|_0^{t_1})(-\cos(\tau_2)|_0^{t_2})$$

$$= 2(1 - \cos(t_1))(1 - \cos(t_2))$$

$$\sigma^2(t) = 2(1 - \cos(t))^2$$

Марковские цепи

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = P(X_3 = k_3 | X_1 = k_1, X_2 = k_2) \cdot P(X_2 = k_2, X_1 = k_1) \overset{*}{=}$$

Если процесс Марковский

$$P(X_3 = k_3 | X_1 = k_1, X_2 = k_2) = P(X_3 = k_3 | X_2 = k_2)$$

$$\overset{*}{=} \underbrace{P(X_3 = k_3 | X_2 = k_2)}_{=P_{k_2,k_3}} \underbrace{P(X_2 = k_2 | X_1 = k_1)}_{=P_{k_1,k_2}} = a_{k_1} p_{k_1,k_2} p_{k_2,k_3}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

По формуле полной вероятности:

$$p_{k_1,k_2} = \sum_{j=1}^n p_{k_1 j} p_{j k_2}$$

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P}$$

$$\mathbb{P}^{m+n} = \mathbb{P}^m \cdot \mathbb{P}^n$$

$$\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}^n \mathbb{P}$$

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^n p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj} \tag{1}$$

$$p_{kj} > 0,\ \forall k, j \implies p_{ij}^n \to \pi_j$$

$$\pi_j = \sum_{k=1}^n \pi_k p_{kj} \tag{2}$$

Задача

Матрица перехода цепи Маркова имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$a^T = (0.7, 0.2, 0.1)$$

a) Найти распределения ... при $t = 2$
b) $t = 0, 1, 2, 3$ цепь находилась в состоянии 3 2 1 2
Найти стационарное распределение

$$a)\ p_{ij}^2$$

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.36 & 0.24 \\ 0.22 & 0.56 & 0.22 \\ 0.34 & 0.24 & 0.42 \end{pmatrix}$$

$$P(X = 3, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2) = a_3 p_{32} p_{21} p_{12} = 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.056$$

$$\begin{cases} \pi_2 = 0.5\pi 1 + 0.1\pi_2 + 0.7\pi_3 \\ \pi_3 = 0.3\pi 1 + 0.5\pi_2 + 0.1\pi_2 \\ \pi_1 = 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.2\pi_3 \end{cases}$$

$$\pi_3 = 1 \quad \pi_1 = \frac{23}{26} \quad \pi_2 = \frac{33}{26}$$