УМФ. Практика

Why am i even here?

31 октября 2024 г.

Метод характеристик. Задача для бесконечной струны.

Тип

Записать формулы для закона движения точек струны и профиля струны
1) На Ox отмечаем точки где $\phi(x)$ меняет свой вид
2) Через эти точки проводим характеристики
3) Записываем решение волнового уравнения. Делим фазовую плоскость на области записываем решение в каждой
4) Фиксируем t $\to$ записываем решение как функцию от x
Фиксируем x $\to$ записываем решение как функцию от t

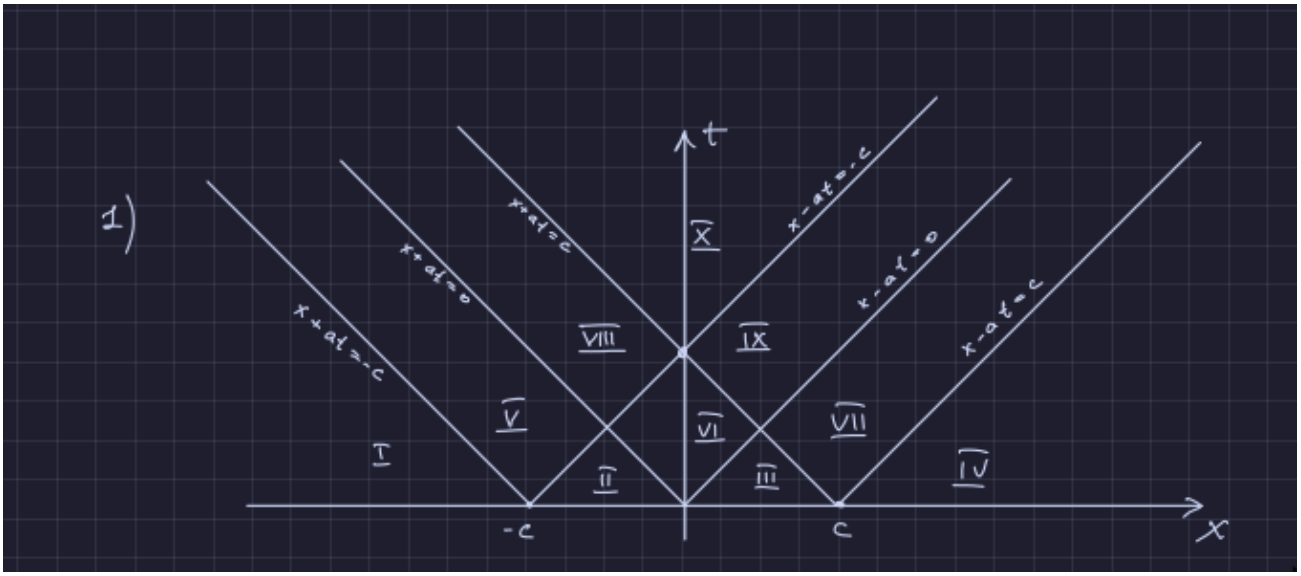
Пример

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

$$u|_{t=0} = \phi(x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x + h & x \in [-1, 0] \\ -\frac{h}{c}x + h & x \in [0, c] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

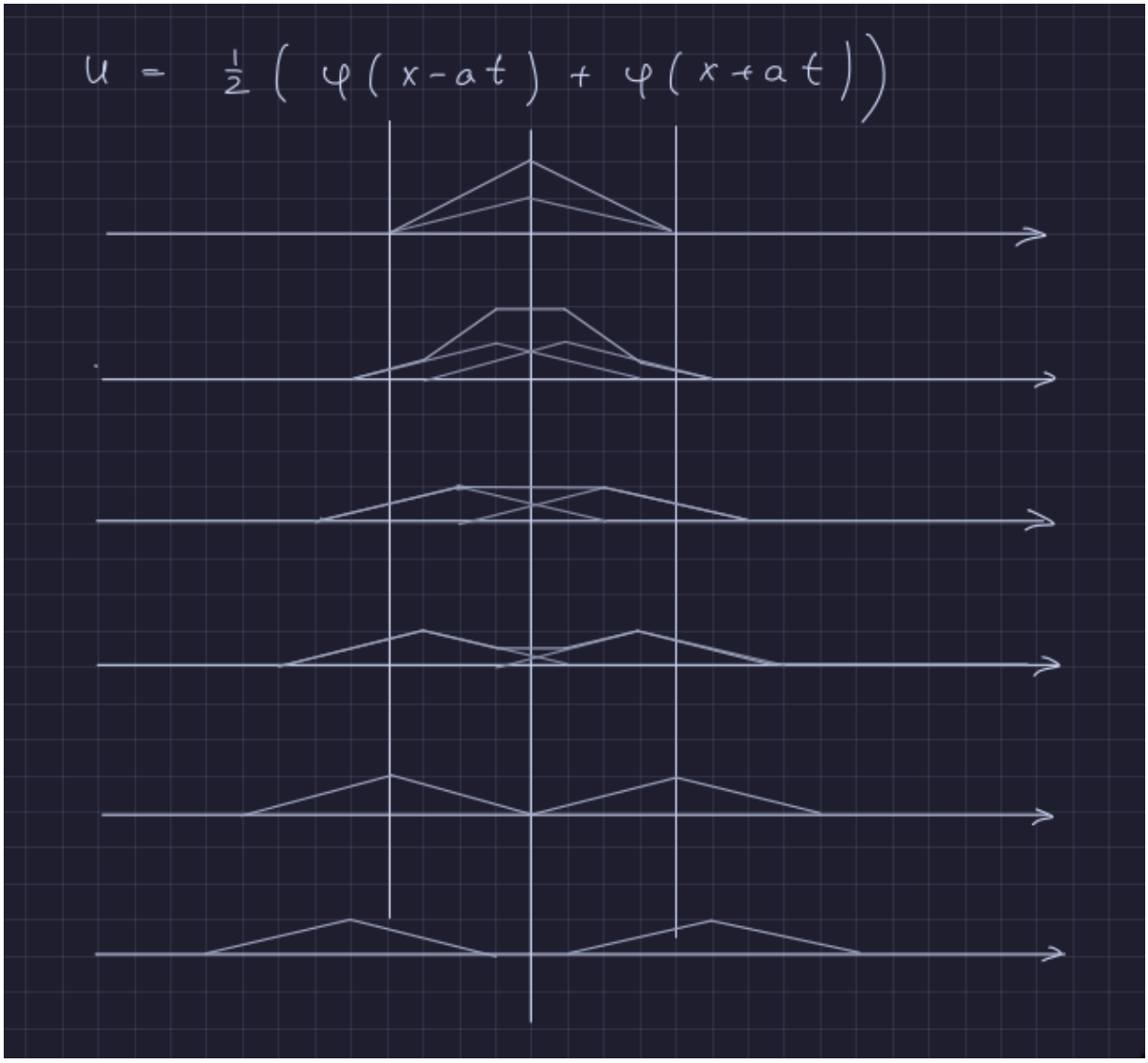
$$u_t|_{t=0} = 0$$

Записать законы движения и тд



i)

$$u \equiv 0$$



ii)

$$\begin{cases} -c < x - at < 0 \\ -c < x + at < 0 \end{cases} \quad u = \frac{1}{2}(\frac{h}{c}(x+at) + h + \frac{h}{c}(x-at) + h) = \frac{h}{c}x + h$$

iii)

$$\begin{cases} 0 < x + at < c \\ 0 < x - at < c \end{cases} \quad u = -\frac{h}{c} + h$$

iv) $u \equiv 0$

v)

$$\begin{cases} x - at < -c \\ -c < x - at < 0 \end{cases} \quad u = \frac{1}{2}(\frac{h}{c}(x+at) + h)$$

vi)

$$\begin{cases} -c < x - at < 0 \\ 0 < x + at < c \end{cases} \quad u = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{c}(x-at) + h - \frac{h}{c}(x+at) + h)\right) = -\frac{ah}{c}t + h$$

vii)

$$\begin{cases} 0 < x - at < c \\ c < x + at \end{cases} \quad u = \frac{1}{2}\left(-\frac{h}{c}(x-at) + h\right)$$

viii)

$$\begin{cases} 0 < x + at < c \\ x - at < -c \end{cases} \quad u = -\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{c}(x+at) + h\right)$$

ix)

$$\begin{cases} x+at>c \\ -c<x-at<0 \end{cases} \quad u=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{c}(x-at)+h\right)$$

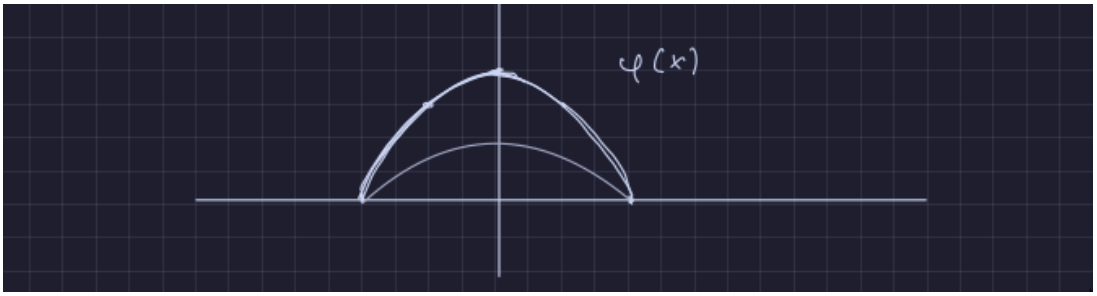
x)

$$\begin{cases} x+at>c \\ x-at<-c \end{cases} \quad u\equiv 0$$

Пример 2

$$\phi=\begin{cases} h\left(1-\frac{x^2}{c}\right) & x\in[-c;c] \\ 0 & x\notin[-c;c] \end{cases}$$

$$\psi=0$$



i)

$$\begin{cases} x+at<-c \\ x-at<-c \end{cases} \quad u=0$$

ii)

$$\begin{cases} -c<x+at<c \\ -c<x-at<c \end{cases} \quad u=\frac{1}{2}\left(h\left(1-\frac{(x+at)^2}{c^2}\right)+h\left(1-\frac{x-at)^2}{c^2}\right)\right)$$

iii)

$$\begin{cases} x-at>c \\ x+at>c \end{cases} \quad u=0$$

iv)

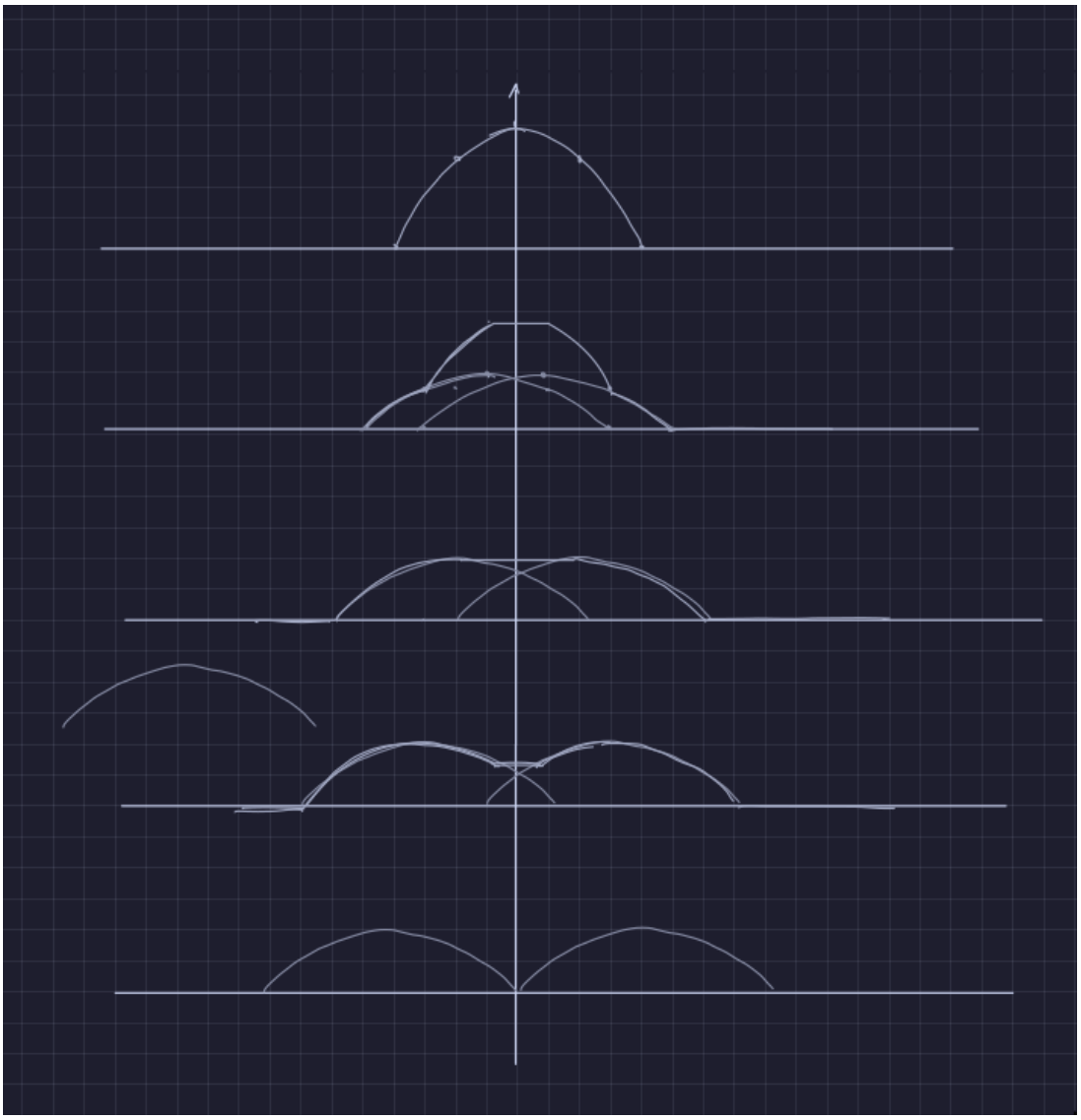
$$\begin{cases} -c<x+at<c \\ x-at<-c \end{cases} \quad u=\frac{1}{2}\left(h\left(1-\frac{(x+at)^2}{c^2}\right)\right)$$

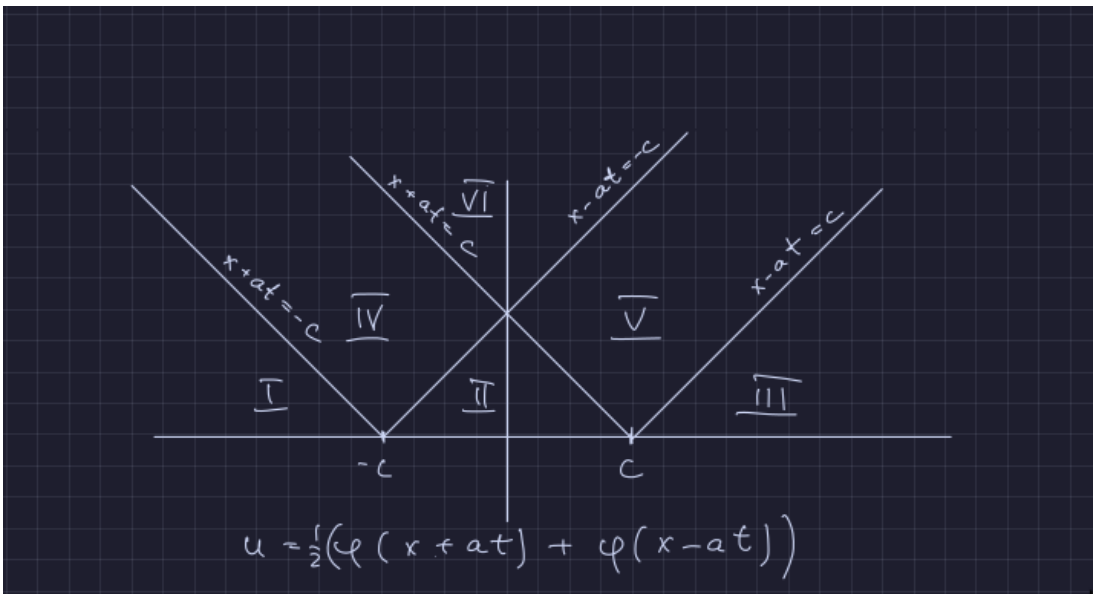
v)

$$\begin{cases} -c<x-at<c \\ x+at>c \end{cases} \quad u=\frac{1}{2}\left(h\left(1-\frac{(x-at)^2}{c^2}\right)\right)$$

vi)

$$\begin{cases} x+at>c \\ x-at<-c \end{cases} \quad u=0$$




x+at=-c
x+at=c
x-at=-c
x-at=c
I
II
III
IV
V
VI
-c
c
u = ½(φ(x+at) + φ(x-at))