概率论与数理统计

第一章　概率论的基本概念

关键词：

随机现象
随机试验
样本空间
随机事件
频率和概率
条件概率
事件的独立性

§1 随机试验

自然界与社会生活中的两类现象 $\begin{cases} \text{必然现象} \\ \text{随机现象} \end{cases}$

- 必然现象：结果确定
- 随机现象：结果不确定

例：

- 向上抛出的物体会掉落到地上 ——确定
- 买了彩票会中奖 ——不确定
- 明天天气状况 ——不确定

概率论的研究对象

- 概率论：是一门研究随机现象数量规律性的学科。
- 随机试验：对随机现象的观察、记录等过程活动。

  随机试验特点：

  1. 可以在相同条件下重复进行（重复性）；
  2. 事先知道所有可能出现的结果（确定性）；
  3. 试验前并不知道哪个结果会发生（随机性）。

- 例：
  - ✓ 抛一枚硬币，观察试验结果；
  - ✓ 对某路公交车某停靠站登记下车人数；
  - ✓ 对某批电子产品测试其输入电压；
  - ✓ 对听课人数进行点名登记。

§2　样本空间·随机事件

(一)样本空间

定义：随机试验E的所有结果构成的集合称为E的样本空间，记为$S=\{e\}$，并称S中的元素e为样本点，一个元素的单点集称为基本事件.

例：

- 一枚硬币抛一次　$S=\{$正面，反面$\}$
- 某公交站每天10时候车人数　$S=\{0, 1, 2, \cdots\}$
- 记录一批产品的寿命　$S=\{x \mid a\le x\le b\}$
- 一口袋中有10个大小相同的球，其编号为1～10，若取一球后，放回，再取一球，则取球情况如何？$S=\{(i,j) \mid i,j=1, 2, \cdots, 10\}$

  不放回：$S=\{(i,j) \mid i,j=1, 2, \cdots, 10, i<>j\}$

（二）随机事件

一般我们称S的子集A为E的**随机事件**A，当且仅当A所包含的一个样本点发生称**事件A发生**。

- 例：观察89路公交车浙大站候车人数，$S=\{0, 1, 2, \cdots\}$；

记 $A=\{$至少有10人候车$\}=\{10,11,12,\ldots\}\subset S$，

A为随机事件，A可能发生，也可能不发生。

如果将 S 亦视作事件，则每次试验 S 总是发生，故又称 S 为必然事件。

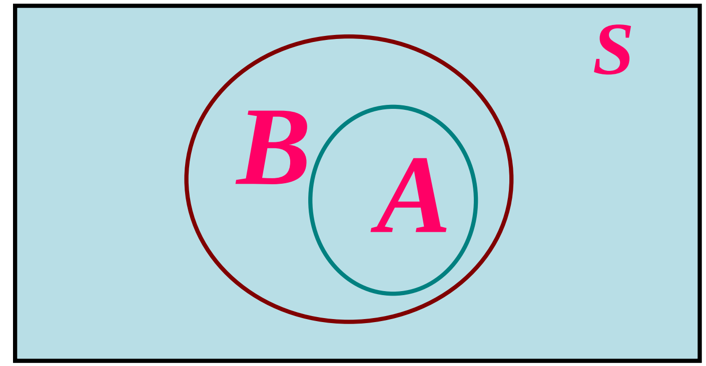
为方便起见，记$\varnothing$为不可能事件，$\varnothing$不包含任何样本点。

(三) 事件的关系及运算

✓ 事件的关系（包含、相等）

1° $A \subset B$：事件A发生一定导致B发生

2° $A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$



(维恩图)

- 例：

✓ 记***A***={明天天晴}，***B***={明天无雨} $\Rightarrow B \supset A$

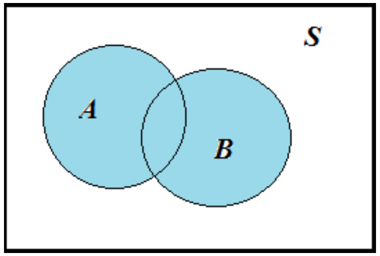
✓ 记***A***={至少有10人候车}，***B***={至少有5人候车} $\Rightarrow B \supset A$

✓ 一枚硬币抛两次，***A***={第一次是正面}，***B***={至少有一次正面} $\Rightarrow B \supset A$

(三) 事件的关系及运算

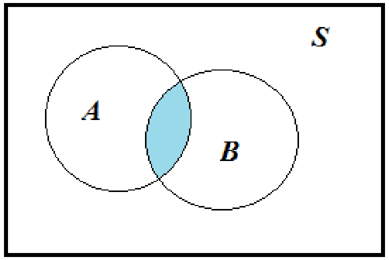
✓ **A与B的和事件，记为$A\cup B$**

$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$：$A$与$B$至少有一发生。



✓ **A与B的积事件，记为$A\cap B, AB, A\cdot B$**

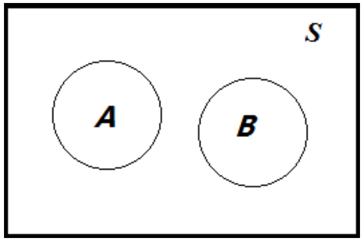
$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$：$A$与$B$同时发生。



$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \rightarrow$ 表示$A_1, A_2, \cdots A_n$至少有一发生

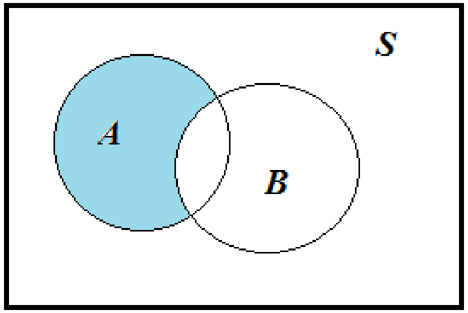
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \rightarrow$ 表示$A_1, A_2, \cdots A_n$同时发生

✓ **当$AB=\Phi$时，称A与B不相容或互斥。**



(三) 事件的关系及运算

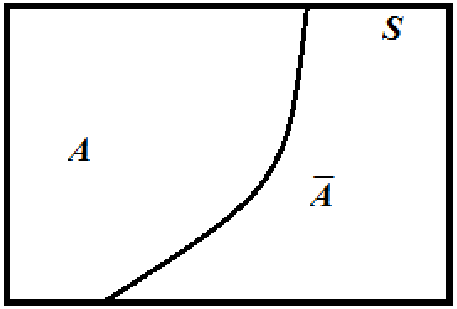
✓ A与B的差事件 $A-B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$



例：$S=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{1,2,3\}, B=\{1,3,5\}$

则 $A-B=\{2\}$ ，而 $B-A=\{5\}$

✓ A的逆事件记为$\overline{A}$, $\begin{cases} A\cup\overline{A}=S \\ A\overline{A}=\varnothing \end{cases}$，若$\begin{cases} A\cup B=S \\ AB=\varnothing \end{cases}$，



称A, B互逆、对立.

此时有：$B=\overline{A}$, $\overline{B}=\overline{\overline{A}}=A$

A与B的差事件可以表示为 $A-B=A\overline{B}=A\cup B-B=A-AB$

那么 $AB=A-\overline{B}$

(三) 事件的关系及运算

交换律：$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=(A\cup C)\cup B$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (德•摩根定律)

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

对偶律推广：$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$;

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$;

例1：设A={甲来听课}，B={乙来听课}，则：

$A\bigcup B=$ {甲、乙至少有一人来}

$A\bigcap B=AB=$ {甲、乙都来}

$\overline{A\bigcup B}=$ {甲、乙都不来} $=\overline{A}\overline{B}$

$\overline{A}\bigcup\overline{B}=$ {甲、乙至少有一人不来}

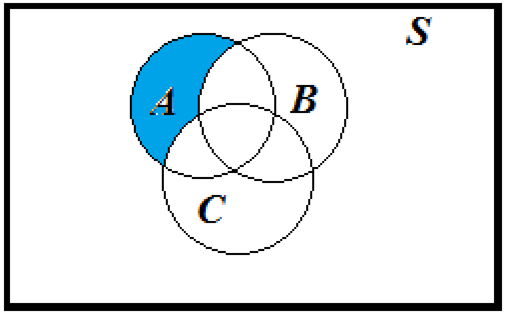
= {甲、乙中最多有一人来}

= {甲、乙两人不同时来} $=\overline{AB}$

例2：用A、B、C三个事件关系及运算表示下列各事件

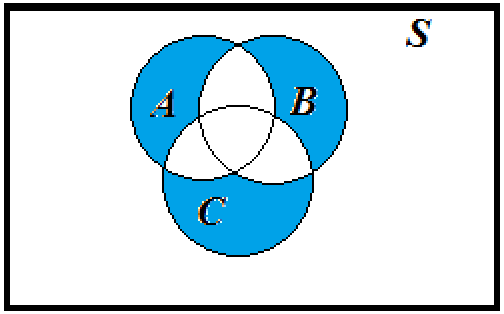
- A发生，B、C都不发生：

$$A\bar{B}\bar{C} = A - B - C$$



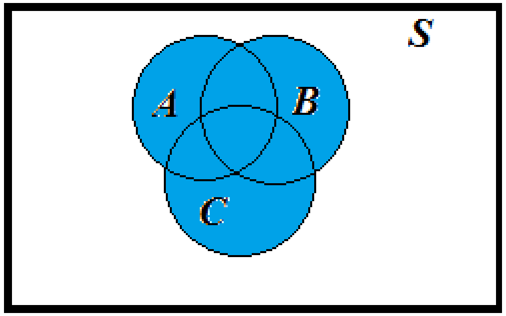
- 恰有一个发生：

$$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$$



- 至少有一个发生：

$$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$$



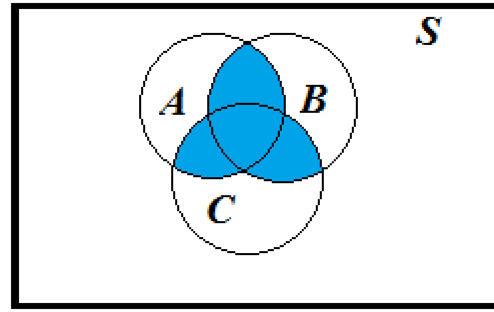
$$= (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (\bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C}) \cup ABC$$

例2：用A、B、C三个事件关系及运算表示下列各事件

- 至少有两个发生：

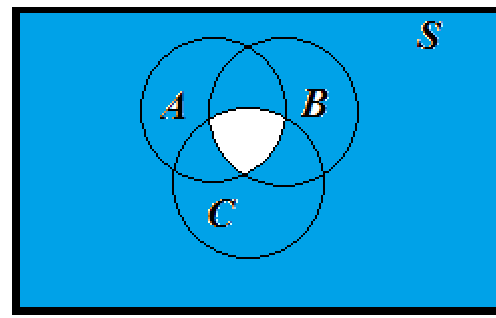
$$AB \cup AC \cup BC$$

$$=\bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup ABC$$



- 至少有一个不发生：

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \ = \overline{ABC}$$



$$= \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$$

事件运算总结

(1) $A\bigcup A=A,\ AA=A,\ A-A=\varnothing$

(2) 若$A\subset B$, 则$A\bigcup B=B, AB=A, A-B=\varnothing, \overline{A}\supset\overline{B}$

$$A\bigcup S=S, AS=A, A-S=\varnothing,\ S-A=\overline{A}$$

(3) 一般, $\overline{A}\,\overline{B}\neq\overline{AB}$, $\overline{A}\bigcup\overline{B}\neq\overline{A\bigcup B}$

(4) 对任意事件B, 均有 $A\supset AB$

(5) 若A与B不相容，则AC与BD也不相容

(6) 优先级/书写问题。$A\bigcup BC=A\bigcup(B\bigcap C)$

§3 频率与概率

（一）频率

定义：记$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$;其中n_A是A发生的次数（频数）；n是总试验次数。称$f_n(A)$为A在n次试验中发生的频率。

例：中国国家足球队,“冲击亚洲”共进行了n次，其中成功了一次，则在这n次试验中“冲击亚洲”这事件发生的频率为$1/n$

例：某人共听了**16**次“概率论与数理统计”课，有**2**次迟到，记$A=\{$听课迟到$\}$，则 $f_n(A)=2/16=12.5\%$

频率$f_n(A)$反映了事件A发生的频繁程度。

频率的性质：

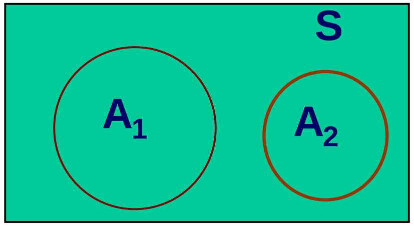
$1^\circ \quad 0 \le f_n(A) \le 1$

$2^\circ \quad f_n(S) = 1$

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$两两互不相容，则 $f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$

且$f_n(A)$随n的增大渐趋稳定，记稳定值为p.

证3° 若$k=2$，$f_n(A_1 \cup A_2) = \dfrac{n_{A_1 \cup A_2}}{n} \overset{\text{不相容}}{=} \dfrac{n_{A_1} + n_{A_2}}{n}$



$= f_n(A_1) + f_n(A_2)$

例：抛硬币出现的正面的频率

表 1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 2

实验者	n	$n_{\mathcal{H}}$	$f_n(\mathcal{H})$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

(二) 概率

定义1：$f_n(A)$的稳定值$\boldsymbol{p}$定义为$\boldsymbol{A}$的概率，记为$\boldsymbol{P(A)=p}$

定义2：将概率视为测度，且满足：

$1^\circ \quad P(A)\geq 0$

$2^\circ \quad P(S)=1$

3° 若$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$两两互不相容，

则$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

称$\boldsymbol{P(A)}$为事件$\boldsymbol{A}$的概率，以上为概率的三个公理。

概率的性质：

1° $P(\varnothing)=0$

证：$\because S\cup\varnothing=S$，$S\cap\varnothing=\varnothing$，即$S$与$\varnothing$不相容

由公理2及3：$1=P(S\cup\varnothing)=P(S)+P(\varnothing)=1+P(\varnothing)$

$\Rightarrow P(\varnothing)=0$

注意：若$P(A)=0$不能推出 $A=\varnothing$；

同理，若$P(B)=1$不能推出 $B=S$.

2° 设$A_iA_j=\varnothing, i, j=1,2,\ldots,n,$且$i\neq j,$则$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

证：令 $A_{n+k}=\varnothing(k=1,2,\ldots)$，$\Rightarrow A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i, j=1,2,\ldots.$

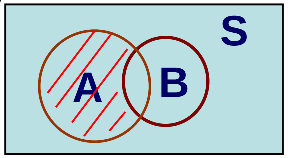
$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

3° 设A、B为任意两事件，$P\left(A-B\right)=P\left(A\right)-P\left(AB\right)$

特别地，当$A\supset B$时，则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

$\Rightarrow P(A)\geq P(B)$, 于是有 $P(A)\leq P(S)=1$

证：$\because A=(A-B)\bigcup AB \quad \Rightarrow P(A)=P(A-B)+P(AB)$



$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(AB)$

当$A\supset B$时, $P\left(AB\right)=P\left(B\right) \Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$

并由 $P\left(A-B\right)\geq 0 \quad \Rightarrow \ P(A)\geq P(B)$

$\because A\subset S, \quad \therefore P(A)\leq P(S)=1$

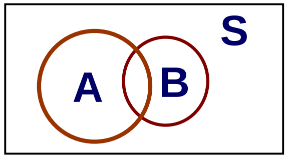
4° $P(A)=1-P(\bar{A})$

证：$\because A\bigcup \bar{A}=S \quad \Rightarrow P(A)+P(\bar{A})=1$

5° **概率的加法公式：** $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

证：$\because A\bigcup B=A\bigcup(B-A)\ \Rightarrow P(A\bigcup B)=P(A)+P(B-A)$

$$\Rightarrow P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



推广1：$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

证：$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A\bigcup B)+P(C)-P(AC\bigcup BC)$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

推广2（一般情形）：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例1：试比较以下事件的概率大小，

A：投1颗骰子 4次，至少得一次“6点”

B：投2颗骰子24次，至少得一次“双6点”

解：$P(A) = P(\text{投4次至少得一次6点}) = 1 - P(\bar{A})$

$$= 1 - P(\text{4次投掷中没有一次得6点})$$

$$= 1 - (5/6)^4 = 0.5177$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B})$$

$$= 1 - P(\text{24次投掷中没有一次得双6点})$$

$$= 1 - (35/36)^{24} = 0.4914$$

例2：在所有的两位数中任取一数，求此数能被2或3整除的概率。

解：设 $A=$"任取的数能被2整除"

$B=$"任取的数能被3整除"

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{45}{90}+\frac{30}{90}-\frac{15}{90}=\frac{2}{3}$$

（$16<\frac{99}{6}<17$ ，1～9中有一个“6”）

先问 $(1000,2000]$ 中有几个7的倍数？

$\because 2000/7\approx 285.71$，　$\therefore [1,2000]$中有285个7的倍数。

同理$1000/7\approx 142.86$，$\therefore [1,1000]$中有142个7的倍数。

$\therefore$ 在$(1000,2000]$ 中有$285-142=143$个7的倍数。

例3：已知 $P(AB)=P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)$, $P(A)=r$, **则** $P(B)=?$

解：$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=1-P\left(\overline{\overline{A}\overline{B}}\right)$

$$=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$\because P(AB)=P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)$

$\therefore P(B)=1-P(A)=1-r$

例4：已知$P(A)=0.5, P(B)=0.4$, 求$P(A\cup B)$的最大值与最小值。

解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$\therefore \max\{P(A\cup B)\}=P(A)+P(B)-\min P(AB)$$

$$=0.5+0.4-0=0.9$$

$$\min P(AB)=\begin{cases} P(A)+P(B)-1, & 若P(A)+P(B)>1 \\ 0 & ,若P(A)+P(B)\le 1 \end{cases}$$

也得：$\max P(AB)=\min\{P(A),P(B)\}=\begin{cases} P(A), & P(A)\le P(B) \\ P(B), & P(A)>P(B) \end{cases}$

$$\min\{P(A\cup B)\}=P(A)+P(B)-\max P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-\min\{P(A),P(B)\}$$

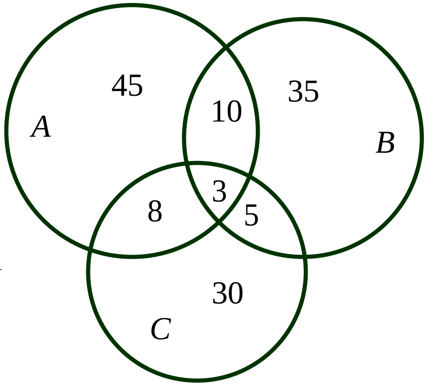
$$=P(A)=0.5$$

例5：某团体举行趣味运动，设有*A*、*B*、*C*三个项目，并设每人参加*A*、*B*、*C*项目的概率分别为45%、35%和30%，同时参加*AB*、*AC*、*BC*、*ABC*的概率分别为10%、8%、5%和3%. 从团体中任取一人，求

（1）他只参加*A*和*B*项目的概率；

（2）他只参加A项目的概率；

（3）他只参加一个项目的概率。



解：设用*A*、*B*、*C*表示参加相应项目的事件

(1) $P(AB\bar{C}) = P(AB - C) = P(AB) - P(ABC) = 10\% - 3\% = 7\%$

(2) $P(A\bar{B}\,\bar{C}) = P(A\,\overline{B \cup C}) = P(A - (B \cup C)) = P(A) - P(A(B \cup C))$

$$= P(A) - \big(P(AB) + P(AC) - P(ABC)\big) = 45\% - \big(10\% + 8\% - 3\%\big) = 30\%$$

(3) $P\left(A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C\right) = P\left(A\bar{B}\bar{C}\right) + P\left(\bar{A}B\bar{C}\right) + P\left(\bar{A}\bar{B}C\right)$

$$= 30\% + 23\% + 20\% = 73\%$$

以上均可画图直接得到。

例6：已知P(A)=P(B)=P(C)=0.4,且A、B、C至少有两个发生的概率为0.3， A、B、C都发生的概率为0.05，求以下概率（1） A、B、C至少有一个不发生 （2） A、B、C不多于一个发生（3） A、B、C不发生。

解：(1) $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=1-P(ABC)=1-0.05=0.95$

(2) P(A、B、C不多于一个发生)=1−P(至少有两个发生)

$$=1-0.3=0.7$$

(3) $0.3=P(AB\cup AC\cup BC)$

$$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC)$$

$$\Rightarrow P(AB)+P(AC)+P(BC)=0.3+2*0.05=0.4$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-P(A)-P(B)-P(C)$$

$$+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

$$=1-0.4-0.4-0.4+0.4-0.05=0.15$$

***例7：把1,2,3,…,n共n个数写在n张卡片上，然后把卡片随机的排成一列，以A表示"至少有一张卡片上的数字与它在排列中的顺序号一致"，求事件A的概率。**

解：设$A_i=\{$第i张卡片上的数字与顺序号一致$\}$，则所求概率为：

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$=C_n^1P(A_1)-C_n^2P(A_1A_2)+C_n^3P(A_1A_2A_3)-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^nP(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$\boxed{C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}=\frac{A_n^k}{k!}}$$

其中：$P(A_1)=\dfrac{1}{n}$，$P(A_1A_2)=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$$

$$\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=1/n!$$

$$\because e^x=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}P(A)=1-e^{-1}$$

§4 等可能概型（古典概型）

定义：若试验E满足：

1. 有限性：样本空间S中样本点有限
2. 等可能性：出现每一样本点的概率相等

dfdbfd

$$P(A)=\frac{A\text{所包含的样本点数}}{S\text{中的样本点数}}$$

称这种试验为等可能概型（或古典概型）。

$$\because P(A)=P(\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cdots\cup\{e_{i_k}\})\overset{\text{不相容}}{=}P(\{e_{i_1}\}+P(\{e_{i_2}\})+\cdots P(\{e_{i_k}\})$$

$$\overset{\text{等可能}}{=}\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$$

注意判断等可能概型的两个条件

E_1：抛两枚硬币，观察正反面情况

E_2：抛两枚硬币，观察正面向上数

S_1={正正，正反，反正，反反}

S_2={0，1，2}

可见，两者样本空间中样本点均有限

S_1中的**4**个样本点是等可能发生的，易知为**1/4**

S_2中的**3**个样本点发生的可能性是不同的，其中“**1**”发生的概率为**2/4**

例1：一袋中有8个球，其中3个为红球，5个为黑球，求任取一球是红球（A）的概率。若从袋中不放回取两球，求两种颜色的球都被取到（B）的概率。

解：$S_1=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{1,2,3\}$，$P(A)=n_A/n_{S_1}=3/8$,

$$S_2=\left\{\begin{array}{l}(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),\\(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),\\(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),\\(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),\\(5,6),(5,7),(5,8),\\(6,7),(6,8),\\(7,8)\end{array}\right\}\quad B=\left\{\begin{array}{l}(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),\\(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),\\(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8)\end{array}\right\}$$

$n_{S_2}=28,\ n_B=15$ ， $P(B)=\dfrac{n_B}{n_{S_2}}=\dfrac{15}{28}$

例1：一袋中有8个球，其中3个为红球，5个为黑球，求任取一球是红球（A）的概率。若从袋中不放回取两球，求两种颜色的球都被取到（B）的概率。

不过，由于S_2有较多的元素，不宜一一列出.

这可用以下两方法计算$P(B)$.

- 分步法计算：$P(B)=\underset{红}{\frac{3}{8}}\times\underset{黑}{\frac{5}{7}}+\underset{黑}{\frac{5}{8}}\times\underset{红}{\frac{3}{7}}=\frac{15}{28}$

- 超几何分布概率公式：$P(B)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$

Hypergeometric distribution

$$\frac{C_a^kC_{N-a}^{n-k}}{C_N^n}\overset{Excel}{=}HYPGEOM.DIST(k,a,n,N,0)$$

例2：从一副扑克牌（52张）中任取13张牌，设A=“13张牌中恰有2张红桃、3张方块”，B=“13张牌中缺红桃”，C=“13张牌中至少有2张红桃”，D=“13张牌中缺红桃但不缺方块”，求以上事件的概率。

解：由超几何分布概率公式得：

$$P(A)=\frac{C_{13}^{2}C_{13}^{3}C_{26}^{8}}{C_{52}^{13}}\quad P(B)=\frac{C_{13}^{0}C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}\quad P(D)=\sum_{i=1}^{13}\frac{C_{13}^{0}C_{13}^{i}C_{26}^{13-i}}{C_{52}^{13}}$$

$$P(C)=\sum_{i=2}^{13}\frac{C_{13}^{i}C_{39}^{13-i}}{C_{52}^{13}}=1-\frac{C_{13}^{0}C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{13}^{1}C_{39}^{12}}{C_{52}^{13}}$$

设E=“13张牌中缺方块”，则 $D=B-E$

$$P(D)=P(B-E)\overset{\text{性质3}}{=}P(B)-P(BE)=\frac{C_{13}^{0}C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{13}^{0}C_{13}^{0}C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}}$$

例3：用0，1，2，3，4，5这六个数字组成三位数，求(1)没有相同数字的三位数的概率P(A)，(2)没有相同数字的三位偶数的概率P(B).

解：样本点总数 $n = 5*6*6$ (允许111等)

(1) 百位数上的数字有 5 种

十位数上的数字有 5 种

个位数上的数字有 4 种

$$P(A) = \frac{5*5*4}{5*6*6} = \frac{5}{9}$$

(2) 最后位为2的三位数有 4*4 种

最后位为4的三位数有 4*4 种

最后位为0的三位数有 5*4 种

$$P(B) = \frac{52}{5*6*6} = \frac{13}{45}$$

例4：将n个不同的球，随机地投入N个不同的盒中，求（1）第1盒为空（A）的概率 （2）第1盒或第2盒为空（B）的概率（3）设盒子多于球数，求n个球落入n个不同的盒子（C）的概率（也即盒子中最多有一个球的概率）。

解：样本空间中样本点的计算。对第一个球来说可以投入N个盒子中，有N种方法，同样对其余的球，每球均有N种方法，故 $n_s = N^n$

(1)n个球放入第2,3,...,N个盒子中共有$(N-1)^n$

$$P(A) = \frac{n_A}{n_S} = \frac{(N-1)^n}{N^n}$$

(2)设A_i =“第 i 盒为空”，i=1, 2, 则 $P(A_1) = P(A_2) = P(A) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$，

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-2}{N}\right)^n$$

例4：将n个不同的球，随机地投入N个不同的盒中，求（1）第1盒为空（A）的概率 （2）第1盒或第2盒为空（B）的概率（3）设盒子多于球数，求n个球落入n个不同的盒子（C）的概率（也即盒子中最多有一个球的概率）。

(3) 第1个球有N种落法，第2个球有$N-1$种落法,...，第n个球有$N-n+1$种落法，故

$$n_C = N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1) = A_N^n$$

$$P(C) = \frac{n_C}{n_S} = \frac{A_N^n}{N^n}$$

利用此模型可求出**50**个人中至少有两人生日相同的概率:

设$N=365$，$n=50$ 则所求概率为:

1−P(50个人生日均不相同) $=1-A_{365}^{50}/365^{50}=97\%$

例5：某接待站在某一周曾接待12次来访，已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的?

解：假设接待站的接待时间没有规定，而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么，12次接待来访者都是在周二、周四的概率为

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{12}=0.0000003$$

人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”(称之为实际推断原理)。

现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假设的正确性，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。

例6：（抽签问题）一袋中有***a***个红球，***b***个白球，今有***a***+***b***个人依次不放回地各取一球，求第***k***个人取到红球的概率。 ***k =1,2,…,a+b.***

解1：设 $A_k=$“第k个人取到红球” 记 $a+b=n$

可设想将***n***个球进行编号：① ② … ⓝ

其中 ①——ⓐ 号球为红球，将***n***个人也编号为1, 2, ⋯, ***n***.

$$\underset{1}{\_},\ \underset{2}{\_},\ \cdots\ \underset{k}{\overset{\otimes}{\_}},\ \cdots,\ \underset{n}{\_}$$

⊗ 可以是①，②… ⓐ
中的任意一红球

视 ①②… ⓝ 的任一排列为一个样本点，每点出现的概率相等。

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$ ----------与***k***无关

解2： 视哪几次摸到红球为一样本点： $\underset{1}{\_},\underset{2}{\_},\cdots\underset{k}{\overset{\otimes}{\_}},\cdots,\underset{n}{\_}$

总样本点数为 C_n^a ，每点出现的概率相等，而其中有 C_{n-1}^{a-1} 个样本点使 A_k 发生，

$$\therefore P(A_k)=C_{n-1}^{a-1}/C_n^a=\frac{a}{a+b}$$

解3： 将第k次摸到的球号作为一样本点：

S＝{ ①，②， …，ⓝ }， A_k ＝{ ①，②， …，ⓐ }

$$\Rightarrow P(A_k)=\frac{a}{n}=\frac{a}{a+b}$$

此值不仅与k无关，且与 a，b都无关，若a＝0呢？对吗？
为什么？

原来这不是等可能概型

解4： 记第k次摸到的球的颜色为一样本点：

S＝{红色, 白色}, A_k ＝{红色} $\Rightarrow P(A_k)=1/2$

- **结论：以上概率与第几次取球无关，也与放回、不放回取球无关，其概率均为原来红球的比例。**

几何概型*

古典概型是关于试验的结果为有限且每个结果出现的可能性相同的概率模型。

保留古典概型的等可能性, 并允许试验的所有可能结果为无限个，如直线上的一线段、平面上的一区域或一立体空间中的点数等情形，称具有这种性质的试验模型为**几何概型.**

定义 当随机试验的样本空间是某个区域,并且任意一点落在度量 (长度, 面积, 体积) 相同的子区域是等可能的,则事件 A 的概率可定义为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$$

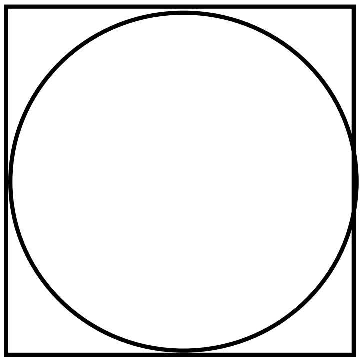
(其中$L(S)$是样本空间的度量,$L(A)$是构成事件A的子区域的度量)

这样借助于几何上的度量来合理规定的概率称为**几何概率**.

例1：向正方形区域任意投掷一点，求该点在此正方形内切圆内的概率。

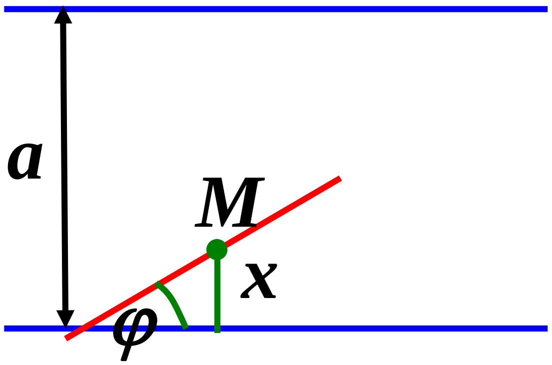
解：设圆半径为r

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{\pi r^2}{4r^2}=\frac{\pi}{4}$$



蒲丰投针试验

例2 1777年,法国科学家蒲丰(Buffon)提出了投针试验问题.平面上画有等距离为$a(>0)$的一些平行直线,现向此平面任意投掷一根长为$b(<a)$的针,试求针与任一平行直线相交的概率.



解: 以x表示针投到平面上时,针的中点M到最近的一条平行直线的距离,

φ表示针与该平行直线的夹角.

那么针落在平面上的位置可由(x,φ)完全确定.

投针试验的所有可能结果

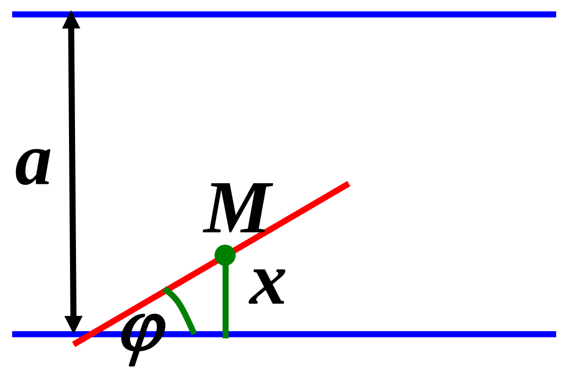
与矩形区域

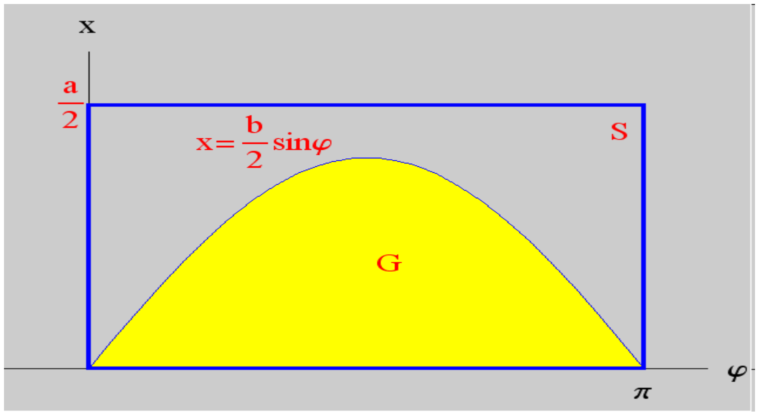
$$S=\{(x,\varphi)\mid 0\le x\le \frac{a}{2},0\le \varphi\le \pi\}$$

中的所有点一一对应.

由投掷的任意性可知,

这是一个几何概型问题.





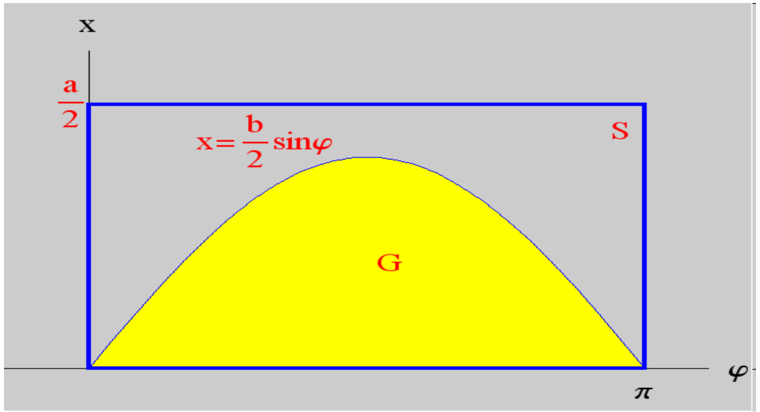
所关心的事件

$G=\{$针与任一平行直线相交$\}$

发生的充分必要条件为S中的点满足

$$P(G)=\frac{L(G)}{L(S)}=\frac{G\text{的面积}}{S\text{的面积}}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi}\frac{b}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{b}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{2b}{a\pi}.$$



设n次投针试验中针与平行直线相交了m次，根据频率的稳定性,当n很大时,频率值$m/n\approx P(G)$,即

$$\frac{m}{n}\approx\frac{2b}{a\pi},\qquad\Rightarrow\pi\approx\frac{2bn}{am}$$

利用此式可计算圆周率 π 的近似值.

历史上一些学者的计算结果(直线距离a=1)

试验者	年份	针长	投掷次数	相交次数	π的近似值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

§5　条件概率

- 引例：一袋中有a个红球，b个白球，现不放回地取球两次，设 A={ 第1次摸到红球 }，B ={ 第2次摸到红球 } 。求第1次摸到红球条件下第2次摸到红球的概率。

解：由前面的知识得A，B发生的概率为：

$$P(A)=\frac{a}{a+b} \qquad P(B)=\frac{a}{a+b}$$

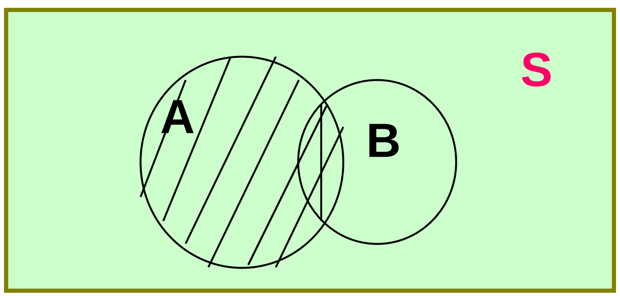
实际上我们也可以通过以下方法求得$P(B)$

$$P(B)=P\left(B\left(A\cup\overline{A}\right)\right)=P\left(AB\cup\overline{A}B\right)\overset{\text{不相容}}{=}P(AB)+P\left(\overline{A}B\right)$$

$$=\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1}=\frac{a}{a+b}$$

当首次摸到红球后，袋中各色球比例发生了变化，即有a-1个红球，b个白球，此时摸到红球的概率应不同于$P(B)$，因为当A发生后样本空间发生了变化。

我们若把“第1次摸到红球条件下第2次摸到红球的概率”记为$P(B|A)$，显然$P(B|A)=\dfrac{a-1}{a+b-1}$. 一般，由下图得



$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{n_{AB}/n_S}{n_A/n_S}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

一、条件概率

定义: $$\boldsymbol{P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}} \qquad P(A)\neq 0$$

由上面讨论知，**P(B|A)**应具有前面所述概率的所有性质。例如:

$$P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)$$

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$$

$$P(B-C|A)=P(B|A)-P(BC|A)$$

$$B\supset C\ \Rightarrow P(B|A)\geq P(C|A)$$

由$P(B|A)$的意义，其实可将$P(A)$记为$P(A|S)$，而这里的S常常省略而已，$P(A)$也可视为特殊的条件概率。

条件概率的计算有两种方法

1. 样本空间改变法，直接计算
2. 利用定义公式，$P(AB)\,/\,P(A)$

如前例中，

$$P(A)=\frac{a}{a+b}\quad, P(AB)=\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}$$

$$\therefore\ P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{a-1}{a+b-1}$$

例1：从一副**52**张的扑克牌中任取**13**张，若已知这**13**张牌中至少有一红桃，问恰有两张红桃的概率多少？

解：设A="所取13张牌中至少有一张红桃"，

B="所取13张牌中恰有两张红桃"

由于直接写出所求概率有难度，考虑用公式：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

其中，$P(A)=1-\dfrac{C_{13}^{0}C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}$ 那么， $P(AB)=?$

$$\because A\supset B \qquad \therefore \ P(AB)=P(B)=\frac{C_{13}^{2}C_{39}^{11}}{C_{52}^{13}}$$

$$\therefore \ P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{C_{13}^{2}C_{39}^{11}}{C_{52}^{13}-C_{39}^{13}}$$

例2：一盒中有5个红球，4个白球，采用不放回抽样，每次取一个，取4次，（1）已知前两次中至少有一次取到红球，求前两次中恰有一次取到红球的概率；（2）已知第4次取到红球，求第1，2次也取到红球的概率。

解: (1)*B*表示前两次中至少有一次取到红球，

***C*表示前两次中恰有一次取到红球。**

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{P(C)}{1-P(\bar{B})}=\frac{C_5^1C_4^1/C_9^2}{1-C_5^0C_4^2/C_9^2}=\frac{2}{3}$$

例2：一盒中有5个红球，4个白球，采用不放回抽样，每次取一个，取4次，（1）已知前两次中至少有一次取到红球，求前两次中恰有一次取到红球的概率；（2）已知第4次取到红球，求第1，2次也取到红球的概率。

解：**(2)**　A_i表示第i次取到红球，i=1,2,3,4

忽略A_3

$$P(A_1A_2|A_4)=\frac{P(A_1A_2A_4)}{P(A_4)}=\frac{C_5^3C_4^0/C_9^3}{5/9}=\frac{3}{14}$$

或$$P(A_1A_2A_4)=P(A_1A_2(A_3\cup\overline{A_3})A_4)$$

$$=P(A_1A_2A_3A_4)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)$$

用（2）的表示法来解（1）的问题

所求概率为：$P(A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1 A_2 \mid A_1 \cup A_2)$

$$= \frac{P((A_1\overline{A}_2 \bigcup \overline{A}_1 A_2)(A_1 \bigcup A_2))}{P(A_1 \bigcup A_2)}$$

$$= \frac{P(A_1\overline{A}_2 A_1 \bigcup A_1\overline{A}_2 A_2 \bigcup \overline{A}_1 A_2 A_1 \bigcup \overline{A}_1 A_2 A_2)}{P(A_1 \bigcup A_2)}$$

$$= \frac{P(A_1\overline{A}_2 \bigcup \overline{A}_1 A_2)}{P(A_1 \bigcup A_2)}$$

$$\overset{\text{不相容}}{=} \frac{P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2)}{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)} = \frac{\frac{5}{9} * \frac{4}{8} + \frac{4}{9} * \frac{5}{8}}{\frac{5}{9} + \frac{5}{9} - \frac{5}{9} * \frac{4}{8}} = \frac{2}{3}$$

二、概率的乘法公式

对条件概率公式变换一下就可得到下面的乘法公式（假设条件概率都有意义）：

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A) \qquad \text{或} \qquad P(AB)=P(B)\cdot P(A\mid B)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$$

注意：

$$P(ABC)=P(AB)P(C\mid AB)$$

$$=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$$

$$P(ABC)=P(A)P(BC\mid A)$$

$$=P(A)P(B\mid A)P(C\mid B\mid A)$$

$$=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$$

例1：设袋中有*r*只红球，*t*只白球，每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入*a*只与所取出的那只球同色的球，若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解： 设A_i="第 i 次取到红球"， i=1, 2, 3, 4

则 $\overline{A_i}$ 就表示"第 i 次取到白球"

由乘法公式，

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(\overline{A_4}|A_1A_2\overline{A_3})$$

$$= \frac{r}{r+t} \times \frac{r+a}{r+t+a} \times \frac{t}{r+t+2a} \times \frac{t+a}{r+t+3a}$$

例2：某厂生产的产品能直接出厂的概率为70%，余下的30%的产品要调试后再定，已知调试后有80%的产品可以出厂，20%的产品要报废。求该厂产品的报废率。

解：设 $\boldsymbol{A}$={生产的产品要报废}

$\boldsymbol{B}$={生产的产品要调试}

已知$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$=0.3，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$=0.2

$$A \subset B, A = AB$$

$$P(A) = P(AB) = P(B)P(A|B) = 0.3 \times 0.2 = 6\%$$

例3： 某行业进行专业劳动技能考核，一个月安排一次，每人最多参加3次；某人第一次参加能通过的概率为50%；如果第一次未通过就去参加第二次，这时能通过的概率为60%；如果第二次再未通过，则去参加第三次，此时能通过的概率为70%。求这人能通过考核的概率。

解：设 A_i={第i次通过考核}，i=1, 2, 3

B={通过考核}，

$$B=A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3 \overset{?}{=} A_1\cup A_2\cup A_3$$

$$P(B)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2|\bar{A}_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=0.5+0.5\times0.6+0.5\times0.4\times0.7=0.94$$

$$P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)=1-P(A_2|\bar{A}_1)=1-0.6=0.4$$

另解：

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=1-0.5\times0.4\times0.3=0.94$$

例4：有10把钥匙，其中2把钥匙能打开一锁，随机地取一把试开，若不能打开，则不放回再取一把试开. 设A_1、A_2分别表示第1、2次能打开该锁，以下概率：

(1) 第1次能打开 $P(A_1) = 2/10$

(2) 第2次能打开 $P(A_2) = 2/10$ （抽签问题，第1次不知发生了什么）

(3) 第1次不能打开情况下第2次能打开 $P(A_2 \mid \bar{A}_1)$ =2/9

(4) 第2次才打开 $P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1) P(A_2 \mid \bar{A}_1) = \frac{8}{10} * \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$

(5) 2次内打开的概率

$$P(A_1 \cup \bar{A}_1 A_2) \overset{\text{不相容}}{=} P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{2}{10} + \frac{8}{45} = \frac{17}{45}$$

$$\text{或} P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} - \frac{2}{10} * \frac{1}{9} = \frac{17}{45}$$

$$\text{或} 1 - P(\text{2次内没打开}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) = 1 - \frac{8}{10} * \frac{7}{9} = \frac{17}{45}$$

三、全概率公式与贝叶斯公式

定义：设S为试验E的样本空间，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为E的一组事件。若：

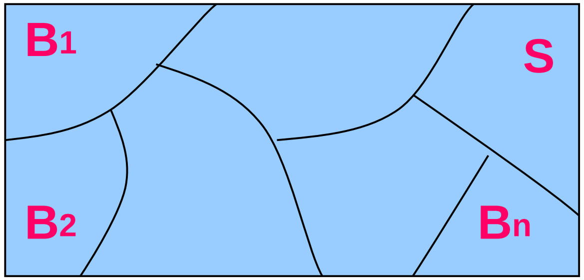
(1) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$(不漏)

(2) $B_i B_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n$(不重)

则称$B_1, B_2, \ldots, B_n$为样本空间的一个划分,

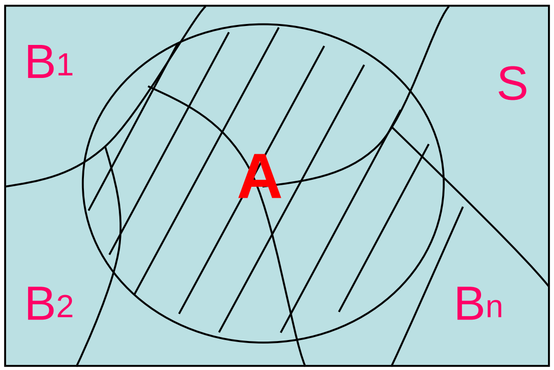
或称为一组完备事件组。

即$B_1, B_2, \ldots, B_n$有一个发生是必然的，两两同时发生又是不可能的。



定理：设试验E的样本空间为S，A为E的事件。$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分，$P(B_i)>0$，$i=1, 2, \cdots, n$；

则称：$$\boxed{P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)\cdot P(A|B_j)\ \text{为全概率公式}}$$



证明：$$P(A)=P(AS)=P(A(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n))$$

$$\overset{\text{不相容}}{=}\sum_{j=1}^{n}P(AB_j)\overset{\text{乘法公式}}{=}\sum_{j=1}^{n}P(B_j)\cdot P(A|B_j)$$

一般取$B_1,B_2,\ldots,B_n$为A的前导事件组

定理：接上定理条件，$$\boxed{P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}}$$

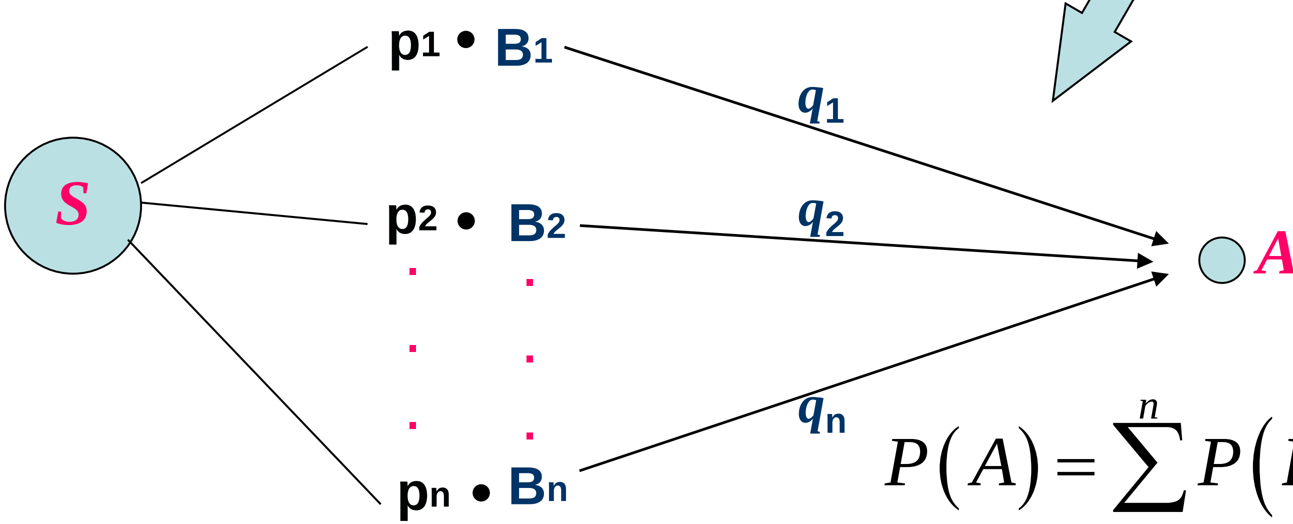
称此式为贝叶斯(**Bayes**)公式。

* 全概率公式可由以下框图表示：

设 $P(B_j)=p_j$，$P(A|B_j)=q_j$，$j=1, 2, \cdots, n$

易知：

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$



$$P(A)=\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)$$

$P(B_j)$称为先验概率，而$P(B_j|A)$称为后验概率。

例1：甲、乙盒中均有2个红球、3个白球，现从甲中任取一球放入乙中，求（1）从乙中任取一球为红球的概率；（2）从乙中不放回任取2球为不同色的概率。

解：设$A=$"从乙中任取一球为红球"，

$B=$"从乙中不放回任取2球为不同色"，

C_1, C_2分别表示从甲中任取1球为红及白球。

(1)C_1, C_2是A的前导事件组，由全概率公式：

$$P(A)=P(C_1)P(A|C_1)+P(C_2)P(A|C_2)$$

$$=\frac{2}{5}*\frac{3}{6}+\frac{3}{5}*\frac{2}{6}=\frac{2}{5}$$ （可由抽签问题直接得到）

例1：甲、乙盒中均有2个红球、3个白球，现从甲中任取一球放入乙中，求（1）从乙中任取一球为红球的概率；（2）从乙中不放回任取2球为不同色的概率。

解：设$A=$"从乙中任取一球为红球"，

$B=$"从乙中不放回任取2球为不同色"，

C_1, C_2分别表示从甲中任取1球为红及白球。

(2)C_1, C_2是B的前导事件组，由全概率公式：

$$P(B)=P(C_1)P(B|C_1)+P(C_2)P(B|C_2)$$

$$=\frac{2}{5}*\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}+\frac{3}{5}*\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{14}{25}$$

例2：有一活动，记甲、乙、丙参加为事件A、B、C，已知甲参加时乙一定参加，$P(A)=0.5, P(B)=0.6,$ $P(C\mid A)=0.8, P(\bar{C}\mid \bar{A})=0.6,$ 求 $P(C)$ 及 $P(ABC)$.

解：A与$\bar{A}$是S的一个划分，所以

$$P(C)=P(C(A\cup\bar{A}))=P(AC\cup\bar{A}C)$$
$$=P(AC)+P(\bar{A}C)$$
$$=P(A)P(C\mid A)+P(\bar{A})P(C\mid\bar{A})$$
$$=0.5*0.8+0.5*0.4=0.6$$

因为已知甲参加时乙一定参加，所以$B\supset A$

$$P(ABC)\overset{B\supset A}{=}P(AC)=P(A)P(C\mid A)$$
$$=0.5*0.8=0.4$$

例3：某商店整箱出售某种产品，设每箱有10只，箱中有0、1、2只次品的概率分别为0.8、0.1、0.1，开箱后商家允许顾客随机地取2只进行检查，若未发现次品，就得买下，现有一个顾客随机地取一箱，求：（1）顾客买下该箱的概率　（2）买下的一箱确实没有次品的概率。

解：设$C=$"顾客买下整箱产品"

$A_i=$"箱子中有i个次品"，$i=0,1,2$

(1) 由全概率公式：$P(C)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(C\mid A_i)$

$$=0.8*\frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}+0.1*\frac{C_1^0C_9^2}{C_{10}^2}+0.1*\frac{C_2^0C_8^2}{C_{10}^2}=0.942$$

例3：某商店整箱出售某种产品，设每箱有10只，箱中有0、1、2只次品的概率分别为0.8、0.1、0.1，开箱后商家允许顾客随机地取2只进行检查，若未发现次品，就得买下，现有一个顾客随机地取一箱，求：（1）顾客买下该箱的概率 （2）买下的一箱确实没有次品的概率。

解： 设$C=$“顾客买下整箱产品”

$A_i=$“箱子中有i个次品”，$i=0,1,2$

(2)由贝叶斯公式：

$$P(A_0|C)=\frac{P(A_0C)}{P(C)}=\frac{P(A_0)P(C\,|\,A_0)}{\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(C\,|\,A_i)}$$

$$=\frac{0.8*1}{0.942}=0.849$$

例4：盒中有8只乒乓球，其中3只是新球，第1次比赛时，从中任取2只，用后放回，第2次比赛时再从中任取3球，求第2次所取3球中恰有2只新球的概率；若已知第2次所取3球中恰有2只新球，则第1次所取的2球全是旧球的概率是多少？

解： 设A=“第2次所取3球中恰有2只新球”

B_i=“第1次所取的2球中有 i 只新球”，i=0，1，2

显然B_0,B_1,B_2是S的一个划分，是A的前导事件组

(1) 由全概率公式：$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)$

$$=\frac{C_3^0C_5^2}{C_8^2}\times\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}+\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}\times\frac{C_2^2C_6^1}{C_8^3}+\frac{C_3^2C_5^0}{C_8^2}\times\frac{C_1^2C_7^1}{C_8^3}\qquad (C_1^2=0)$$

(2) 由贝叶斯公式：$P(B_0|A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)}$

例5：根据以往的临床记录，某种诊断一种疾病的试验具有5%的假阳性及5%的假阴性, 若设A={试验反应是阳性}，C={被诊断患有该种疾病}, 已知某一群体 $P(C)$=0.005，问这种方法能否用于普查？

解: $P(A|\bar{C}) = 5\%, P(\bar{A}|C) = 5\%$

这种方法能否用于普查，要考察$P(C|A)$的值

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{P(C)\cdot P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})} = 0.087$$

若用于普查，100个阳性人中被诊断患有这种疾病的大约有8.7个，所以不宜用于普查。

若$P(C)$较大，不妨设$P(C)$=0.8
推出$P(C|A)$=0.987
说明这种试验方法可在医院用

***例6**：一盒中装有n只球，其中装有白球只数是等可能的，已知球的颜色只有白与黑，若有放回地取k次，没有取到黑球，求盒中只装有白球的概率。**

解：一般把试验的最后结果先用事件表示出来，故设

A="有放回地取k次，没有取到黑球"，再考虑引起A发生的前导事件组，

B_i="盒中装有i只白球"，i=0，1，2，…，n　　则 $P(B_i)=\dfrac{1}{n+1}$

由全概率公式：$P(A)=\sum\limits_{i=0}^{n}P(B_i)P(A|B_i)=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n}P(A|B_i)$

$$=\frac{1}{n+1}[0+(1/n)^k+(2/n)^k+\cdots+(n/n)^k]=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(i/n)^k$$

由贝叶斯公式：$P(B_n|A)=\dfrac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum\limits_{i=0}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}=\dfrac{n^k}{1+2^k+\cdots n^k}$

***例7：一盒中装有两枚硬币，其中一枚是正常币，另一枚是错版币，其两面均为正面，现在任取一枚，向上抛了3次，结果均为正面，问所取这枚硬币是错版硬币的概率是多少？**

解：*A*="硬币抛了3次均为正面"

***B*="所取的硬币是正常硬币"**

由全概率公式：$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\times 1=\frac{9}{16}$$

由贝叶斯公式：$P(\bar{B}|A)=\dfrac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(A)}=\dfrac{8}{9}$

例8：甲袋中装有10只球，其中7只红球，3只白球，而乙袋中原来是空的，现从甲袋中任取三球放入乙袋，

（1）求从乙袋中任取一球是红球的概率；

（2）从乙袋中任取一球后，放回，求再取一球是红球的概率；

（3）从乙袋中任取一球后，不放回，求再取一球是红球的概率；

（4）从乙袋中任取一球是红球，不放回，求再取一球是红球的概率.

解：(1)(2)(3)的答案是一样的，可用全概率公式求解，但注意本题乙袋原是空的，就是说乙袋中红球比例成份同甲袋！　所以(1)(2)(3)的答案均为0.7

(4) 设 A_i="第i次从乙袋中取得红球"，i=1,2　　$P(A_1)$=0.7

B_i="从甲袋中取的3球中有i只红球"，i=0,1,2,3

$$P(A_1)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A_1|B_i)=\frac{C_7^0C_3^3}{C_{10}^3}\times 0+\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}\times\frac{1}{3}+\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}\times\frac{2}{3}+\frac{C_7^3C_3^0}{C_{10}^3}\times 1=\frac{7}{10}$$

$$P(A_1A_2)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A_1A_2|B_i)=\frac{C_7^0C_3^3}{C_{10}^3}\times 0+\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}\times 0+\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{C_7^3C_3^0}{C_{10}^3}\times 1=\frac{7}{15}$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{2}{3}$$

其实有公式$P(A_2|A_1)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i\mid A_1)P(A_2\mid B_iA_1)$

本小题也可按(1)~(3)方法解：因为甲乙两袋中的红球比例一样的，

所以可以直接从甲袋中考虑：$P(A_2|A_1)=\dfrac{7-1}{10-1}=\dfrac{2}{3}$

*条件概率的全概率公式

设试验E的样本空间为S，A和C为E的事件。$B_1, B_2, \ldots, B_n$为S的一个划分，$P(C)>0$，$P(B_iC)>0$，$i=1, 2, \ldots, n$；则称

$$P(A|C)=\sum_{j=1}^{n}P(AB_j|C)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j|C)\cdot P(A|B_jC)$$

为条件概率的全概率公式。

证明：$P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}=\dfrac{P(A(B_1\bigcup B_2\bigcup\cdots B_n)C)}{P(C)}$

$$=\frac{P(AB_1C\bigcup AB_2C\bigcup\cdots\bigcup AB_nC)}{P(C)}$$

$$\overset{\text{不相容}}{=}\sum_{j=1}^{n}\frac{P(AB_jC)}{P(C)}\qquad=\sum_{j=1}^{n}P(AB_j|C)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{P(B_jC)P(A|B_jC)}{P(C)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}P(B_j|C)P(A|B_jC)$$

*例8：有三个箱子，第1箱装有5件正品2件次品，第2箱装有4件正品2件次品，第3箱装有3件正品2件次品。现从第一箱中随机取1件放到第2箱，再从第2箱中随机取1件放到第3箱，然后从第3箱中随机取1件，求最后取到的是次品的概率。

解：设A, B, C分别表示从第1，2，3箱取到次品，

因为A与$\bar{A}$是S的一个划分(前导事件)，所以

$$P(C)=P(C(A\cup\bar{A}))=P(A)P(C|A)+P(\bar{A})P(C|\bar{A})$$

$\because B$与$\bar{B}$是C的前导事件组，

$\therefore$由条件概率的全概率公式：

$$P(C|A)=P(B|A)P(C|AB)+P(\bar{B}|A)P(C|A\bar{B})$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{17}{42}$$

	正+次
第1箱：	5 + 2
第2箱：	4 + 2
第3箱：	3 + 2

$$P(C\mid\bar{A}) = P(B\mid\bar{A})P(C\mid\bar{A}B) + P(\bar{B}\mid\bar{A})P(C\mid\bar{A}\bar{B})$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{8}{21}$$

	正+次
第1箱：	$5 + 2$
第2箱：	$4 + 2$
第3箱：	$3 + 2$

$$P(C) = P(A)P(C\mid A) + P(\bar{A})P(C\mid\bar{A})$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{17}{42} + \frac{5}{7}\cdot\frac{8}{21} = \frac{19}{49}$$

问题：直接可以用全概率公式吗？

设用$D_1 \sim D_4$分别表示：

从第1、2 箱取出的产品“正正、正次、次正、次次”

	正+次
第1箱：	5 +2
第2箱：	4 +2
第3箱：	3 +2

由全概率公式：

$$P(C)=\sum_{i=1}^{4}P(D_i)P(C\mid D_i)$$

$$=\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{19}{49}$$

还可用以下方法：

$$P(C)=P(S\bigcap C)=P((AB\bigcup \bar{A}B\bigcup A\bar{B}\bigcup \bar{A}\bar{B})\bigcap C)$$

$$=P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}\bar{B}C) \quad =\frac{19}{49}$$

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)=\frac{2}{7}\frac{3}{7}\frac{3}{6}=\frac{18}{294}$$

$$P(\bar{A}BC)=P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})P(C\mid \bar{A}B)=\frac{5}{7}\frac{2}{7}\frac{3}{6}=\frac{30}{294}$$

$$P(\bar{A}BC)=P(A)P(\bar{B}\mid A)P(C\mid A\bar{B})=\frac{2}{7}\frac{4}{7}\frac{2}{6}=\frac{16}{294}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C)=P(\bar{A})P(\bar{B}\mid \bar{A})P(C\mid \bar{A}\bar{B})=\frac{5}{7}\frac{5}{7}\frac{2}{6}=\frac{50}{294}$$

§6 独立性

- 引例：有10件产品，其中8件为正品，2件为次品。从中取2次, 每次取1件，设A_i={第i次取到正品}，i=1, 2

- 不放回抽样时，$P(A_2 \mid A_1)=\frac{7}{9} \neq P(A_2)=\frac{8}{10}$
- 放回抽样时，$P(A_2 \mid A_1)=\frac{8}{10}=P(A_2)$

若$P(A_2 \mid A_1)=P(A_2)$，可证$P(A_1 \mid A_2)=P(A_1)$

$$P(A_1 \mid A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2 \mid A_1)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_2)}=P(A_1)$$

即放回抽样时，A_1的发生对A_2的发生概率不影响；
同样，A_2的发生对A_1的发生概率不影响.
称A_1与A_2是独立的.

独立定义 设A，B为两随机事件，若$P(AB)=P(A)P(B)$时，称A，B相互独立.

等价于：若$P(A)>0$，$P(B|A)=P(B)$；
等价于：若$P(B)>0$，$P(A|B)=P(A)$.

$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立定义：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个随机事件，若对$2 \le k \le n$,均有：$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两独立定义：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个随机事件，若对$i \ne j$ 均有：$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$,

注意

1° 两两独立不能推出相互独立

2° 相互独立的判断需要检验$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - n - 1$个等式

3° 实际问题中，常常不是用定义去验证事件的独立性，而是由实际情形来判断其独立性。

例1：设$S=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，$P(e_i)=0.25$，$i=1,2,3,4$

$A_1=\{e_1,e_2\}$, $A_2=\{e_2,e_3\}$, $A_3=\{e_1,e_3\}$

验证A_1，A_2，A_3两两独立，但不是相互独立。

解：$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=0.5$

$P(A_1A_2)=P(\{e_2\})=0.25 = P(A_1)P(A_2)$

$P(A_1A_3)=P(\{e_1\})=0.25 = P(A_1)P(A_3)$

$P(A_2A_3)=P(\{e_3\})=0.25 = P(A_2)P(A_3)$

由以上三等式知A_1，A_2，A_3两两独立 ,但是

$$P(A_1A_2A_3)=P(\varnothing)=0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

所以A_1，A_2，A_3不是相互独立的。

问$P(A_1A_2|A_3)=P(A_1|A_3)P(A_2|A_3)$成立吗？

$$0 \neq 0.5*0.5$$

必然事件及不可能事件与任何事件均独立

设A为任意一个事件，则

$P(AS)=P(A)=P(A)P(S)$，故A与S独立。

$P(A\varnothing)=P(\varnothing)=P(A)P(\varnothing)$，故$A$与$\varnothing$独立。

$$A,B\text{相互独立}\Leftrightarrow \bar{A},B\text{相互独立}\Leftrightarrow A,\bar{B}\text{相互独立}\Leftrightarrow \bar{A},\bar{B}\text{相互独立}$$

证：(1)设A,B相互独立，即$P(AB)=P(A)P(B)$

$$\therefore P\left(\overline{A}B\right)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)\left[1-P(A)\right]=P\left(\overline{A}\right)P(B)$$

根据独立性定义，得知$\overline{A}$与B是独立的

(2) $P\left(A\bar{B}\right)=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)\left[1-P(B)\right]=P(A)P\left(\bar{B}\right)$

$\therefore A$与$\bar{B}$是独立的

(3) $P(\overline{A}\overline{B})=1-P\left(A\cup B\right)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=[1-P(A)]-P(B)[1-P(A)]$$

$$=[1-P(A)][1-P(B)]$$

$$=P(\overline{A})P(\bar{B})$$

$\therefore \overline{A}$与$\bar{B}$是独立的

若$P(A)>0, P(B)>0$，则“A和B独立”与“A和B不相容”不会同时成立

证明：

$\Rightarrow$ 设A, B独立，则$P(AB)=P(A)P(B)>0$，$AB \neq \varnothing$

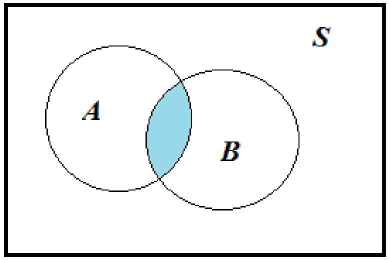
$\Leftarrow$ 设A, B互不相容，即$AB=\varnothing$，则$0=P(AB)=P(A)P(B|A)$

$\because P(A)>0 \quad \therefore P(B|A)=0 \quad \therefore 0<P(B) \neq P(B|A)$，即$A, B$不独立#

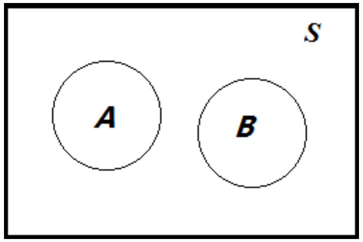
说明：

对A, B两个事件，$P(A)>0, P(B)>0$

若A, B独立，则两者一定有交集；$P(AB)=P(A)P(B)$



若A, B不相容，则两者一定不独立；



$0=P(AB) \neq P(A)P(B)$

若A与B有交集，或A与B相容，则A与B可能独立也可能不独立。

若$P(A)>0, P(B)>0$，则“A和B独立”与“A和B不相容”不会同时成立

在上例中，$S=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，$P(e_i)=0.25,\ i=1,2,3,4$

$A_1=\{e_1,e_2\}$, $A_2=\{e_2,e_3\}$, $A_3=\{e_1,e_3\}$

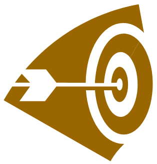
由于$P(A_1A_2)=0.25=P(A_1)P(A_2)$，所以说$A_1$，$A_2$独立

但$A_1A_2=\{e_2\}$不为空，即A_1，A_2是相容的．

注意：
$$P(A\cup B)=\begin{cases} P(A)+P(B)-P(AB), & A、B\text{为任意事件} \\ P(A)+P(B), & A、B\text{为不相容事件} \\ P(A)+P(B)-P(A)P(B), & A、B\text{为独立事件} \\ 1-P(\overline{A})P(\overline{B}), & A、B\text{为独立事件} \end{cases}$$

$$P(AB)=\begin{cases} P(A)P(B\mid A), & A、B\text{为任意事件} \\ 0, & A、B\text{为不相容事件} \\ P(A)P(B), & A、B\text{为独立事件} \end{cases}$$

例2：甲、乙两人同时向一目标射击，甲命中率为0.8，乙命中率为0.7，求目标被命中的概率。



解：设 $\boldsymbol{A}$=｛甲命中｝, $\boldsymbol{B}$=｛乙命中｝

所求概率为$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\because$ 甲、乙同时射击，其结果互不影响，

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$相互独立 $\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=0.8+0.7-0.8*0.7=0.94$$

或$P(A\cup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-0.2*0.3=0.94$

例3：有4个独立元件构成的系统(如图)，设每个元件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率。

解：设$A_i=\{第i个元件运行正常\}, i=1,2,3,4$

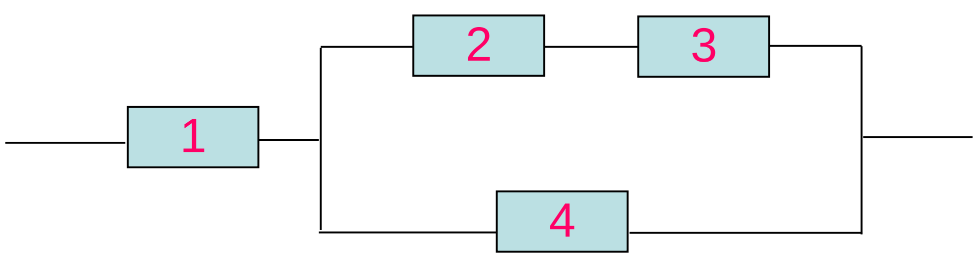
$A=\{系统运行正常\}$，则：$A=A_1(A_2A_3\cup A_4)$

$$P(A)=P(A_1(A_2A_3\cup A_4))\overset{独立}{=}P(A_1)\cdot P(A_2A_3\cup A_4)$$

$$=P(A_1)[P(A_2A_3)+P(A_4)-P(A_2A_3A_4)]$$

$$\overset{独立}{=}P(A_1)[P(A_2)P(A_3)+P(A_4)-P(A_2)P(A_3)P(A_4)]$$

$$=p(p^2+p-p^3)$$



注意：这里系统的概念与电路中的系统概念不同

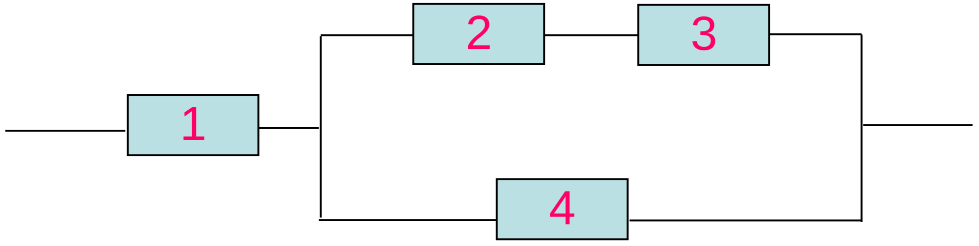
例3：有4个独立元件构成的系统(如图)，设每个元件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率。

另解，$P(A)=P(A_1A_2A_3\cup A_1A_4)$

$$=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P(A_1A_2A_3A_1A_4)$$

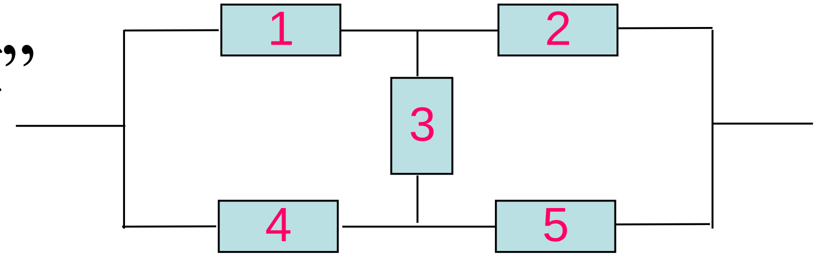
$$=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$\overset{\text{独立}}{=}p^3+p^2-p^4$$



注意：这里系统的概念与电路中的系统概念不同

例4：有5个独立元件组成的如下系统，设每个元件运行正常的概率为*p*，求系统运行正常（事件*A*）的概率。



解：设A_i = "第i个元件正常工作"

则$A = A(A_3 \cup \overline{A_3})$

$$P(A) = P(A_3)P(A \mid A_3) + P(\overline{A_3})P(A \mid \overline{A_3})$$

$$P(A \mid A_3) = P((A_1 \bigcup A_4)(A_2 \bigcup A_5))$$

$$= P(A_1 \bigcup A_4)P(A_2 \bigcup A_5) = (2p - p^2)^2$$

$$P(A \mid \overline{A_3}) = P(A_1A_2 \bigcup A_4A_5) = 2p^2 - p^4$$

或$P(A) = P(A_1A_2 \bigcup A_1A_3A_5 \bigcup A_2A_3A_4 \bigcup A_4A_5)$

$$= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

例5：甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为p，$p \geq \frac{1}{2}$，对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利？ 设各局胜负相互独立。

解：设$A_i = \{第i局甲胜\} \Rightarrow P(A_i) = p,\ i = 1, 2, \cdots, 5$

$B = \{甲在3局2胜制比赛中获胜\}$ $C = \{甲在5局3胜制比赛中获胜\}$

$$P(B) = P\left(A_1A_2 \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3\right) \overset{不相容}{=} P(A_1A_2) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3)$$

$$\overset{独立}{=} p^2 + 2p^2(1-p)$$

$$P(C) = P\left\{\begin{array}{l} A_1A_2A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3A_4 \cup A_1\overline{A_2}A_3A_4 \cup A_1A_2\overline{A_3}A_4 \\ \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4A_5 \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4A_5 \cup \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}A_5 \\ \cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4A_5 \cup A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}A_5 \cup A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5 \end{array}\right\}$$

$$\overset{不相容及独立}{=} p^3 + C_3^2 p^2(1-p) \cdot p + C_4^2 p^2 (1-p)^2 \cdot p$$

$$P(C) - P(B) = 3p^2(p-1)^2(2p-1) \geq 0$$

所以对甲而言，

采用5局3胜制有利！

例6：一袋中有编号为1,2,3,4共四个球，每回从袋中有放回地取两次(一次一个球)，记录号码之和，这样独立重复进行试验，求“和等于3”出现在“和等于5”之前的概率。

解：设*A*表示“和等于3”出现在“和等于5”之前,

**　*B*表示第一回两球号码之和为3,**

**　*C*表示第一回两球号码之和为5,**

**　*D*表示第一回号码之和既不为3也不为5**

显然 $B \cup C \cup D = S$

$$B=\{(1,2),(2,1)\},C=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$$

$$P(B)=\frac{2}{16},P(C)=\frac{4}{16},P(D)=1-P(B)-P(C)=\frac{10}{16}$$

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)+P(D)P(A|D)$$

$$=\frac{2}{16}\times\quad 1+\quad\frac{4}{16}\times\quad 0+\quad\frac{10}{16}\times P(A|D)$$

在第一次和不等于3或5的情况下求*A*的条件概率，

相当于重新考虑*A*的概率，所以有$P(A|D)=P(A)$.

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{3}$$

例7：甲乙两人比赛射击，每进行一轮，胜者得一分。在一次射击中，甲胜的概率是*a*，乙胜的概率是*b* =1−*a*,当独立地进行到有一个人超过对方两分时停止，多得两分者为胜，求甲获胜的概率。

解1: 以下“A”表示甲赢，“B”表示甲输

$2:0$ AA

$3:1$ $BAAA$

$ABAA$

$4:2$ $BABAAA$

$BAABAA$

$ABBAAA$

$ABABAA$

$5:3$ $BABABAAA$

$BABAABAA$

$BAABBAAA$

$BAABABAA$

$ABBABAAA$

$ABBAABAA$

$ABABBAAA$

$ABABABAA$

$$P = a^2 + 2a^3b + 4a^4b^2 + 8a^5b^3 + \cdots + a^2(2ab)^i + \cdots$$

$$= a^2 / (1 - 2ab)$$

例7：甲乙两人比赛射击，每进行一轮，胜者得一分。在一次射击中，甲胜的概率是*a*，乙胜的概率是*b* =1−*a*,当独立地进行到有一个人超过对方两分时停止，多得两分者为胜，求甲获胜的概率。

解2：设A表示甲获胜

B_1="前两轮比赛甲两次均输", B_2="前两轮比赛甲先输后赢"

B_3="前两轮比赛甲先赢后输", B_4="前两轮比赛甲两次均赢"

$$P(A) = P(A(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A|B_i)$$

$$= b^2 * 0 + abP(A|B_2) + abP(A|B_3) + a^2 * 1$$

$$= b^2 * 0 + abP(A) + abP(A) + a^2 * 1$$

$$= 2abP(A) + a^2$$

$$\Rightarrow P(A) = a^2 / (1 - 2ab)$$

例8：某篮球运动员在整场比赛中发挥正常时投篮命中率为0.4，发挥超常时命中率为0.8，发挥失常时命中率为0.2。按以往数据分析，他整场比赛发挥正常的概率为0.6，发挥超常或失常的概率均为0.2，求（1）比赛开始后他第一次投篮命中的概率（2）前两次投篮都命中的概率。

解：设 $A_i = \text{"第}i\text{次投篮命中"},\ i = 1, 2$

B_1、B_2、B_3分别为整场比赛发挥正常、超常和失常

$$(1)\quad P(A_1) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A_1 \mid B_i) = 0.6*0.4 + 0.2*0.8 + 0.2*0.2 = 0.44$$

$$(2)\quad P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \left[P(A_1)\right]^2 = 0.44^2 = 0.1936 \quad \text{对吗？}$$

注意，题中所问的问题一定是同一场比赛的2次投篮！

$$\therefore P(A_1A_2) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A_1A_2 \mid B_i)$$

$$= 0.6*0.4^2 + 0.2*0.8^2 + 0.2*0.2^2 = 0.232$$

复习思考题 1

1. “事件A不发生，则$A=\Phi$ ”, 对吗？试举例证明之。
2. “两事件A和B为互不相容，即$AB=\Phi$, 则A和B互逆”，对吗？
   反之成立吗？试举例说明之。
3. 设A和B为两事件, $A\cup B=\bar{A}B\cup A\bar{B}\cup AB$,即“$A,B$至少有一发生”事件为“$A,B$恰有一发生$\left(\bar{A}B\cup A\bar{B}\right)$”事件与“$A,B$同时发生$\left(AB\right)$”事件的和事件。此结论成立吗?
4. 甲、乙两人同时猜一谜，设A={甲猜中}，B={乙猜中}，则$A\cup B$={甲、乙两人至少有1人猜中}。若$P(A)=0.7$, $P(B)=0.8$, 则“$P(A\cup B)=0.7+0.8=1.5$”对吗？
5. 满足什么条件的试验问题称为古典概型问题？
6. 一口袋中有10个球,其中有1个白球及9个红球。从中任意取一球设$A=\{$取到白球$\}$,则$\bar{A}=\{$取到红球$\}$,且设样本空间为S, $S=\{A,\bar{A}\}$, S中有两个样本点,而A是其中一个样本点,问$P\left(A\right)=\frac{1}{2}$对吗?

7. 如何理解样本点是两两互不相容的？

8. 设A和B为两随机事件，试举例说明*P(AB)=P(B|A)*表示不同的意义。

9. 设A和B为随机事件,$P(A)\neq 0$,问$P(B|A)=P(B)-P(\bar{B}|A)$是否成立？

$P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)$是否成立？

10. 什么条件下称两事件A和B相互独立？

什么条件下称n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立？

11. 设A和B为两事件，且$P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$, 问A和B相互独立、A和B互不相容能否同时成立？试举例说明之。

12. 设A和B为两事件，且$P(A)=a, P(B)=b$,问：

（1） 当A和B独立时, $P(A\cup B)$为何值？

（2） 当A和B互不相容时，$P(A\cup B)$为何值？

13. 当满足什么条件时称事件组$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样为本空间的一个划分？

14. 设A,B,C为三随机事件，当$A\neq B$，且$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$时，$P(C|A)+P(C|B)$有意义吗？试举例说明。

15. 设A,B,C为三随机事件, 且$P(C)\neq 0$,
问$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$是否成立？
若成立，与概率的加法公式比较之。

- 排列组合-教育视频 http://www.iqiyi.com/edu/20121025/ca312b55cfc226ae.html#vfrm=4_5_0_1