МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Интерполяция кубическим сплайном

Выполнил:
студент группы 381606-3
Ю.А Родимков
_______________ Подпись

Проверил:
К.ф.-м.н.,Старший преподаватель
А.И. Эгамов
_______________ Подпись

Нижний Новгород
2018

Введение

Пусть у вас имеются значения функции, измеренные в нескольких точках, возникает задача, как найти значения функции в промежуточных точках. Такая задача называется задачей интерполяции и часто возникает на практике. Дадим более подробное определение.

Интерполяция — способ приближенного вычисления значения величины, находящейся между двумя известными значениями. Данный способ часто используется в расчетах, где приходится оперировать наборами дискретных значений, полученных в результате эксперимента или методом случайной выборки. Сама по себе задача считается не из легких, и свое решение находит в большом объеме решений.

Обычно задача интерполирования ставится в следующей форме: найти многочлен $P(x)=P_n(x)$ степени не выше n, значения которого в точках x_i ($i=0,1,2,\ldots, n$) совпадают со значениями данной функции, т. е. $P(x_i)=y_i$.

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую вида $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i,y_i)$ ($i=0, 1, \ldots,n$) Рис.1

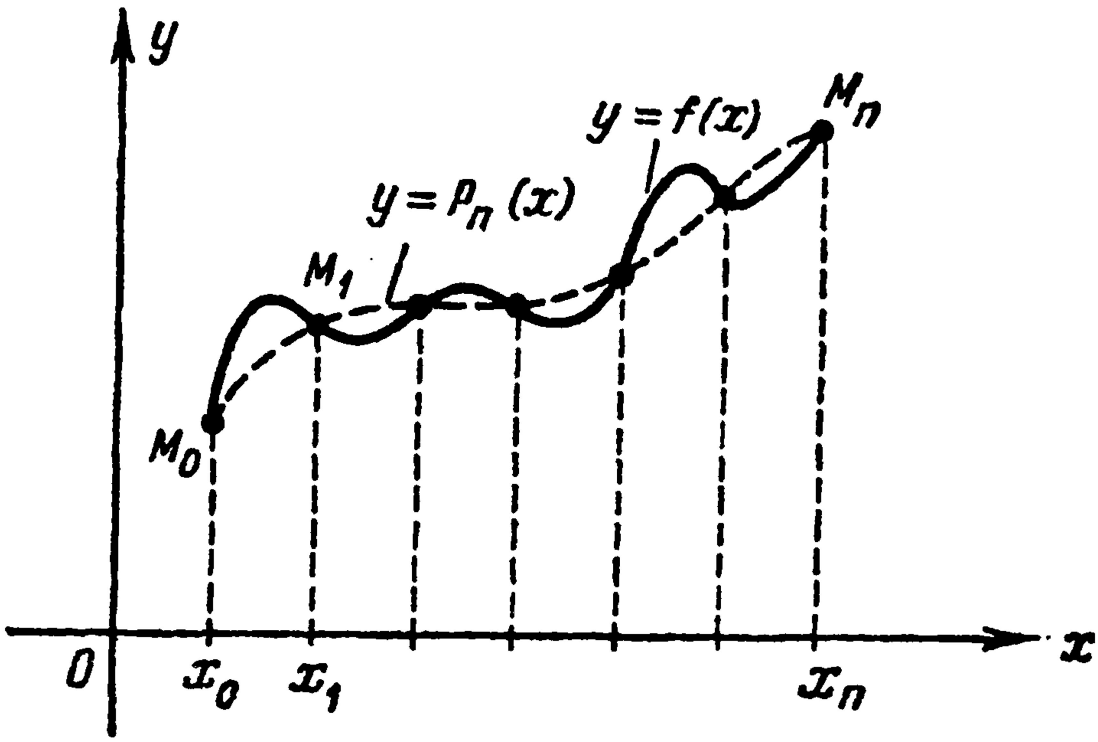

Рис.1 Геометрический смысл

В данной работе для интерполяции мы будем использовать кубический сплайн. Интерполяция сплайнами третьего порядка - это быстрый, эффективный и устойчивый способ интерполяции функций. В основе сплайн-интерполяции лежит следующий принцип. Интервал интерполяции разбивается на небольшие отрезки, на каждом из которых функция задается полиномом третьей степени.

Сплайн – функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке [a,b], а на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом. Степенью сплайна называется максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов

На практике наиболее часто используются кубические сплайны $S_3(x)$- сплайны третьей. Между двумя точками строиться многочлен третьей степени $S(x) = \sum_{k=0}^{3} a_{ik}x^k$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, который в точках интерполяции принимает значения интерполируемой функции и непрерывен вместе со своими (n-1) производными. Такой кусочно-непрерывный интерполяционный многочлен называется сплайном.

Интерполяция функции кубическими сплайнами

Пусть некоторая функция f(x) задана на отрезке [a,b] , разбитом на части $[x_i, x_{i+1}]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N$. Кубическим сплайном называется функция $S(x)$, которая:

- на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ является многочленом степени третьей;
- имеет непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке [a,b];
- в точках x_i выполняется равенство $S(x_i) = f(x_i)$,т.е. сплайн $S(x)$ интерполирует функцию f(x) в точках x_i.

Также для однозначного задания сплайна мы будем использовать естественные граничные условия.

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

Теорема: Для любой функции f(x) и любого разбиения отрезка [a,b] существует ровно один естественный сплайн $S(x)$, удовлетворяющий перечисленным выше условиям.

Построение сплайнов

Обозначим: $h_i = x_i - x_{i-1}$

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x)$ есть полином третьей степени $S_i(x)$, коэффициенты которого надо определить. Запишем для удобства $S_i(x)$ в виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

тогда $S_i(x_i) = a_i, \quad S_i^{'}(x_i) = b_i, \quad S_i^{''}(x_i) = c_i$

Условия непрерывности всех производных до второго порядка включительно записываются в виде:

$$S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1})$$

$$S_i^{'}(x_{i-1}) = S_{i-1}{'}(x_{i-1})$$

$$S_i^{''}(x_{i-1}) = S_{i-1}{''}(x_{i-1})$$

Условия интерполяции в виде: $S_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, т. е. значения в точках f(x) и её приближения должны совпадать.

Отсюда получаем формулы для вычисления коэффициентов сплайна:

$a_i = f(x_i)$ **(1)**

$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i})$ **(2)**

$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}$ **(3)**

$b_i = \frac{1}{2}h_i c_i - \frac{1}{6}h_i^2 d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$ **(4)**

Если учесть, что $c_0 = c_n = 0$, то вычисление c можно провести с помощью метода прогонки для трёхдиагональной матрицы.

Метод прогонки

Метод прогонки (алгоритм Томаса) используют для решения СЛУ типа *Ax=F*, где *A* — трёхдиагональная матрица. Трёхдиагональная матрица выглядит следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix} C_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & C_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & C_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n & C_n \end{pmatrix},$$

Уравнение $h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i})$ **(2)** можно решить методом прогонки, представив в виде системы линейных алгебраических уравнений вида $Ax = F$, где вектор x соответствует вектору $\{c_i\}$, вектор F поэлементно равен правой части уравнения.

где $A_i = h_i, i = 2, \dots, n, B_i = h_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$ и $C_i = 2(h_i + h_{i+1}), i = 1, \dots, n$

Данный метод основан на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением: $x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}$ $i = 1, \dots, n-1$. Используя это соотношение, выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в i-е уравнение:

$$(A_i a_i a_{i+1} + C_i a_{i+1} + B_i)x_{i+1} + A_i a_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0$$

Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать

$$A_i a_i a_{i+1} + C_i a_{i+1} + B_i = 0$$

$$A_i a_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0$$

Отсюда следует:

$$\alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i \alpha_i + C_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + C_i}$$

Из первого уравнения получим:

$$\alpha_2 = \frac{-B_1}{C_1}, \quad \beta_2 = \frac{F_1}{C_1}$$

После нахождения коэффициентов α и β получим решение системы:

$$x_n = \frac{F_n - A_n\beta_n}{C_n + A_n\alpha_n} = c_n$$

Руководство пользователя

Реализованная программа позволяет интерполировать функцию по точкам.

Приведем пример. Пусть даны точки (-3;4),(-1;2),(1;2),(3;4), необходимо построить кубический сплайн для интерполяции.

Программа предоставляет пользователю возможность выбора шага построения сплайна.

Результат работы программы выводится в виде графика, который отображает интерполированную функцию, и точки, которые были заданы.

Заключение

В результате была написана программа, которая строит кубический сплайн по заданным точкам. Также был реализован дружественный интерфейс, отображение на графике заданных точек и сохранение коэффициентов сплайна в файл. Работа программы протестирована на нескольких примерах, в частности на примере приведенном выше.

Список литературы

1. Костомаров Д. П., Фаворский А. П. Вводные лекции по численным методам

2. Самарский А.А. “Введение в численный методы”, Наука, 1982 г.