Test problem

Родионов Данила Олегович

26 октября 2023

Содержание

1 Аналитическая постановка

Имеем систему:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{x}{mL}T \\ \ddot{y} = -\frac{y}{mL}T - g \\ x^2 + y^2 = L^2 \\ g(t) = 9.81 + 0.05\sin(2\pi * t) \end{cases} \tag{1}$$

Перейдем к системе Коши, сделав замену:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ g(x, y, t) = x^2 + y^2 - L^2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Знаем начальные условия (x_0, y_0). Найдем v_{x_0} и v_{y_0} из следующей системы (условие на окружность и начальную скорость с учетом направления 'вниз и влево').

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = L^2 \\ \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Продифференцировав второе уравнение по t, получим:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = L^2 \\ 2x\dot{x}_0 + 2y\dot{y}_0 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Тогда с учетом направления начальной скорости получим :

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \\ \dot{x}_0 = -\sqrt{1-\dot{y}_0^2} \end{cases} \tag{5}$$

Численно $(v_{x_0}, v_{y_0}) = (-0.8, -0.6)$
В итоге мы получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \ddot{x} = -\frac{x}{mL}T \\ \ddot{y} = -\frac{y}{mL}T - g \\ x^2 + y^2 - L^2 \\ x_0 = 3 \\ y_0 = -4 \\ v_{x_0} = -0.8 \\ v_{y_0} = -0.6 \end{cases} \tag{6}$$

Теперь мы имеем дело с системой вида:

$$\begin{cases} D\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u_0} \end{cases} \tag{7}$$

где D - матрица системы.

2 Метод Розенброка-Ваннера. Решение полученной системы

Введем вектор $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \\ T \end{pmatrix}$
Матрица системы =

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор правых частей: $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \\ T \end{pmatrix}$

Метод Розенброка-Ваннера является расширенным аналогом метода Эйлера и позволяет свести полученную задачу к задаче вида:

$$\begin{cases} \vec{u}_{m+1} = \vec{u}_m + \tau Re(\vec{\omega_1}) \\ [D - \alpha\tau\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}]\vec{\omega_1} = \vec{f}(\vec{u}) \end{cases} \tag{8}$$

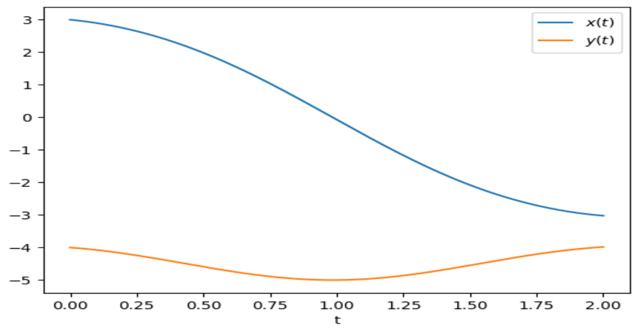
где $\alpha = 1 + i$ - параметр схемы, τ - шаг сетки, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}$- матрица Якоби

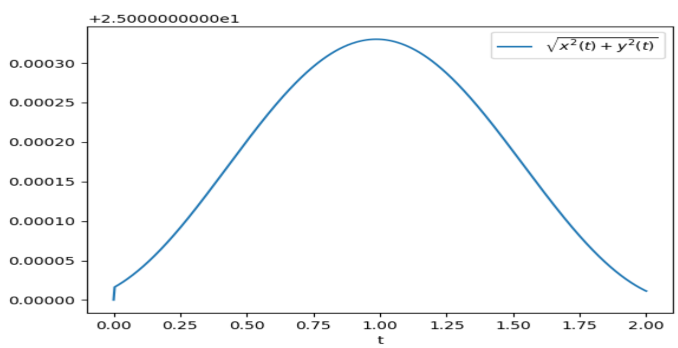
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-T}{Lm} & 0 & 1 & 0 & \frac{-x}{Lm} \\ 0 & \frac{-T}{Lm} & 0 & 1 & \frac{-y}{Lm} \\ 2x & 2y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Точность схемы $= O(\tau^2)$

3 Результаты на $[0; 2]$. Графики траекторий. Размер сетки $M = 1000$

3.1 Графики

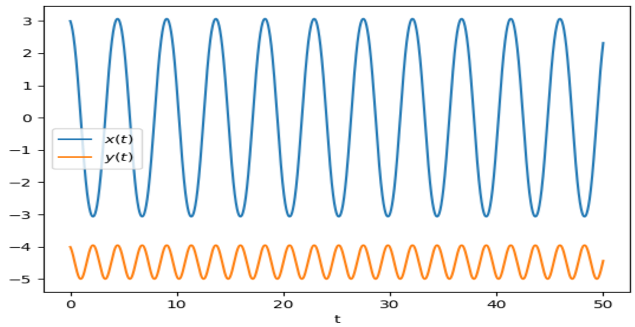


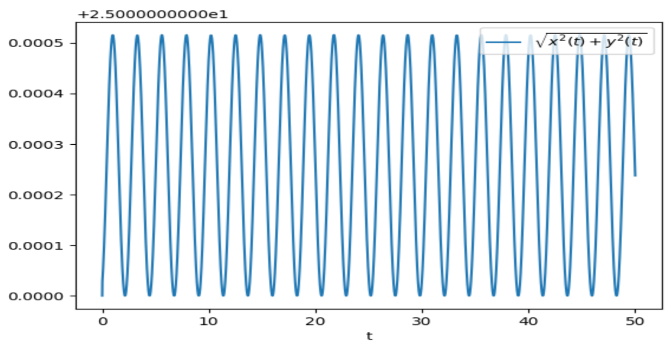


3.2 Выводы

График траекторий $x(t)$ **и** $y(t)$. В силу симметричности задачи траектории, очевидно, должны быть периодическими функциями, причем область достижимых значений для каждой координаты лежит в $|x| \leq x_0, |y| \leq y_0$.
График $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$
Фактически этот график иллюстрирует распределение ошибки аппроксимации решения, то есть распределение отклонения от $L^2 = 25$. Видим, что максимум достигается в окрестности $t = 1$. Из решения времени $t = 1$ соответствует точка $(-0.07073453788543577, -4.999507887630031)$, то есть точка, бесконечно близкая к положению равновесия. Визуально распределение похоже на нормальное, поэтому можно выдвинуть гипотезу, что ошибка аппроксимации будет представлена "нормальным"мультимодальным распределением возле времен прохождения положения равновесия.

4 Результаты на $[0, 50], M = 1e4$





5 Замечания

Изменение начальных условий/параметров происходит в соответствующей ячейке. Далее нужно лишь запустить все ячейки. Отрисовка графиков и анимации происходит в отдельных окнах.