Многомерная динамика мнений

Оглавление

1 Общая идея динамики

Данная динамика описывает изменение мнений агентов по различным темам.
Влияние агента на мнение другого зависит от близости, выражаемого "расстоянием" между векторами мнений, а также различия, выражаемого разностью векторов между двумя агентами.
Каждый агент как-то взаимодействует со всеми, чем ближе другой агент к нему, тем больший вклад в изменение мнения вносит их различие.
Чем больше людей, тем меньший вклад вносит каждый из них, относительно целого.

2 Формула для динамики

$$a_i(t+1) = a_i(t) + \frac{1}{|A \setminus \{a_i\}|} \sum_{a_j \in A \setminus \{a_i\}} (a_j(t) - a_i(t)) \cdot \frac{1}{1 + \|a_j(t) - a_i(t)\|^2}$$

- $a_i(t)$ - вектор-столбец размерности n, отражающий мнение i-ого агента в момент времени t
- A - множество агентов
- $\|v\|^2 = v^T G v$ - квадрат нормы вектора v, где G - матрица Грама(не очень легально ее так называть, возможно стоит использовать другое название)

3 Динамика в матричном виде

Объединим всех агентов одну матрицу.
Обозначим за e_i - вектор-столбец, на i-ом месте которого стоит 1, а на остальных 0.

$$\sum_{a_i \in A} a_i(t+1) \otimes e_i^T = \sum_{a_i \in A} \left(a_i(t) + \frac{1}{|A \setminus \{a_i\}|} \sum_{a_j \in A \setminus \{a_i\}} (a_j(t) - a_i(t)) \cdot \frac{1}{1 + \|a_j(t) - a_i(t)\|^2} \right) \otimes e_i^T \implies$$

$$\implies \sum_{a_i \in A} a_i(t+1) \otimes e_i^T = \sum_{a_i \in A} a_i(t) \otimes e_i^T + \frac{1}{|A \setminus \{a_i\}|} \sum_{a_i \in A} \left(\sum_{a_j \in A \setminus \{a_i\}} (a_j(t) - a_i(t)) \cdot \frac{1}{1 + \|a_j(t) - a_i(t)\|^2} \right) \otimes e_i^T$$

Результатом $\sum_{a_i \in A} a_i(t) \otimes e_i^T$ будет матрица, столбцами которой будут мнения агентов. Обозначим эту матрицу за $a(t)$. Тогда выражение можно записать в таком виде:

$$a(t+1) = a(t) + \frac{1}{|A \setminus \{a_i\}|} \sum_{a_i \in A} \left(\sum_{a_j \in A \setminus \{a_i\}} (a_j(t) - a_i(t)) \cdot \frac{1}{1 + \|a_j(t) - a_i(t)\|^2} \right) \otimes e_i^T$$

4 Подсчет расстояний в матричном виде

Пусть у нас есть матрица A, состоящая из k векторов-столбцов размерности n, и матрица B, состоящая из m векторов-столбцов размерности n, а также матрица G размерности n на n.
Обозначим квадрат расстояния между i-ым вектором из матрицы A и j-ым вектором из матрицы B за $SqrtDist_i^j$.

$$\implies SqrtDist_i^j = (A_i - B_j)^T G (A_i - B_j) = A_i^T G A_i + B_j^T G B_j - A_i^T G B_j - B_j^T G A_i \implies$$

$$\implies \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} SqrtDist_i^j \otimes e_i^T \right) \otimes e_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(A_i^T G A_i + B_j^T G B_j - A_i^T G B_j - B_j^T G A_i \right) \otimes e_i^T \right) \otimes e_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \big((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T + (B_j^T G B_j) \otimes e_i^T - (A_i^T G B_j) \otimes e_i^T - (B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \big) \right) \otimes e_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \big((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T \big) + (B_j^T G B_j) \otimes (1, \dots, 1) - \sum_{i=1}^{k} \big((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T + (B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \big) \right) \otimes e_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \big((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T \big) \otimes (1, \dots, 1)^T + \sum_{j=1}^{k} \big((B_j^T G B_j) \otimes (1, \dots, 1) \big) \otimes e_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \big((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T + (B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \big) \right) \otimes e_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \big((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T \big) \otimes (1, \dots, 1)^T + \sum_{j=1}^{k} \big((B_j^T G B_j) \otimes e_j \big) \otimes (1, \dots, 1) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \big((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T \big) \right) \otimes e_j - \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \big((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \big) \right) \otimes e_j$$

Лемма 4.1. $(Cv) \otimes u^T = C(v \otimes u^T)$

Доказательство.

$$((Cv) \otimes u)_i^j = \left(\left(\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \dots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^m & C_2^m & \dots & C_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \end{pmatrix} \right)_i^j = \sum_{q=1}^{n} C_q^j \cdot v^q \cdot u_i =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} C_q^j \cdot (v \otimes u_i)^q = \sum_{q=1}^{n} C_q^j \cdot (v \otimes u)_i^q = \left(\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \dots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^m & C_2^m & \dots & C_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \cdot u_1 & v^1 \cdot u_2 & \dots & v^1 \cdot u_k \\ v^2 \cdot u_1 & v^2 \cdot u_2 & \dots & v^2 \cdot u_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^n \cdot u_1 & v^n \cdot u_2 & \dots & v^n \cdot u_k \end{pmatrix} \right)_i^j =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \dots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^m & C_2^m & \dots & C_n^m \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \end{pmatrix} \right) \right)_i^j = (C \cdot (v \otimes u))_i^j$$

□

Лемма 4.2. $v \otimes u^T = u^T \otimes v$

Доказательство. Обозначим за T_q^p тензоры типа (p, q)

$$u^T \in T_0^1; v \in T_1^0 \implies v \otimes u^T \in T_1^1 \wedge u^T \otimes v \in T_1^1$$

Возьмем $x \in V, f \in V^*$. По определению тензорного произведения $(u^T \otimes v)(x, f) = u^T(x) \cdot v(f)$, но и $(v \otimes u^T)(x, f) = u^T(x) \cdot v(f)$. Следовательно $v \otimes u^T = u^T \otimes v$.
Это также можно проверить, написав произведение Кронекера, но этим заниматься я не буду. □

Лемма 4.3. $(v^T C) \otimes u = (v^T \otimes u)C$

Доказательство. Воспользуемся **Леммой 4.1**, а также свойством произведения Кронекера:

$$(C^T v) \otimes u^T = C^T (v \otimes u^T) \implies$$
$$\implies (C^T v)^T \otimes u = (v \otimes u^T)^T C \iff$$
$$\iff (v^T C) \otimes u = (v^T \otimes u) C$$

□

Теорема 4.4.

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T \right) \right) \otimes e_j = B^T G^T A$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{k} ((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T = \sum_{i=1}^{k} \left(A_i^T G B_j \right)^T \otimes e_i^T = \sum_{i=1}^{k} \left(B_j^T G^T A_i \right) \otimes e_i^T =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(B_j^T G^T \right) \left(A_i \otimes e_i^T \right) = \left(B_j^T G^T \right) A$$

A_i можно вынести из произведения по **Лемме 4.1**.
Дальше воспользуемся **Леммой 4.3**.

$$\implies \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T \right) \right) \otimes e_j = \sum_{j=1}^{k} (B_j^T G^T A) \otimes e_j = \sum_{j=1}^{k} (e_j \otimes B_j^T)(G^T A) =$$

$$= B^T G^T A$$

□

Теорема 4.5.

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \right) \right) \otimes e_j = B^T G A$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{k} \left((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \right) = \sum_{i=1}^{k} \left((B_j^T G)(A_i \otimes e_i^T) \right) = B_j^T G A$$

$B_j^T G$ вынести из произведения по **Лемме 4.1**.

$$\implies \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \right) \right) \otimes e_j = \sum_{j=1}^{k} B_j^T (GA) \otimes e_j = \sum_{j=1}^{k} e_j \otimes B_j^T (GA) = B^T G A$$

Переставили местами по **Лемме 4.2** □

$$SqrtDist = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} SqrtDist_i^j \otimes e_i^T \right) \otimes e_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T \right) \otimes (1, \ldots, 1)^T + \sum_{j=1}^{k} \left((B_j^T G B_j) \otimes e_j \right) \otimes (1, \ldots, 1) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T \right) \right) \otimes e_j - \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \right) \right) \otimes e_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T \right) \otimes (1,\dots,1)^T + \sum_{j=1}^{k} \left((B_j^T G B_j) \otimes e_j \right) \otimes (1,\dots,1) - B^T G A - B^T G^T A$$

Обозначив вектор-строку $\sum\limits_{i=1}^{k} \left((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T \right)$ за $diag(A^T G A)$, а вектор-столец $\sum\limits_{j=1}^{k} \left((B_j^T G B_j) \otimes e_j \right)$ за $(diag(B^T G B))^T$, мы можем упростить выражение:

$$SqrtDist = diag\left(A^T G A\right) \otimes (1,\dots,1)^T + (diag\left(B^T G B\right))^T \otimes (1,\dots,1) - B^T G A - B^T G^T A$$

Мы знаем, что матрица Грама должна быть симметрична. С учетом этого выражение приобратает вид:

$$SqrtDist = diag\left(A^T G A\right) \otimes (1,\dots,1)^T + (diag\left(B^T G B\right))^T \otimes (1,\dots,1) - 2 \cdot B^T G A$$

В библиотеке numpy при сложении элементов с разными размерностями просходит broadcasting, при котором элементы неподходящих размерностей "растягиваются" по определенным правилам(на самом деле копирования не происходит и используются те же данные). Также, для удобства чтения кода, вектора мнений записываются строчками, поэтому A и B меняются местами с A^T и B^T соответственно. Вызывая метод reshape(-1,1), мы превращаем вектор-строку в вектор-столбец. В итоге программа вычисляющая $SqrtDist$ принимает такой вид.

```
def dist(self, A, B, GramMatrix):
    return (
        np.diag(np.matmul(
            np.matmul(A, GramMatrix),
            A.T)).reshape(-1, 1) +
        np.diag(np.matmul(
            np.matmul(B, GramMatrix),
            B.T)) -
        2 * (np.matmul(
            np.matmul(B, GramMatrix),
            A.T)))
```

5 Результаты моделирования

5.1 Нулевая матрица грама и 2 вершины

При $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $a(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$