

Многомерная динамика мнений

9 марта 2024 г.

Оглавление

1	Общая идея динамики	2
2	Формула для динамики	2
3	Динамика в матричном виде	2
4	Подсчет расстояний в матричном виде	2
5	Результаты моделирования	5
5.1	Нулевая матрица грама и 2 вершины	5

1 Общая идея динамики

Данная динамика описывает изменение мнений агентов по различным темам.

Влияние агента на мнение другого зависит от близости, выражаемого "расстоянием" между векторами мнений, а также различия, выражаемого разностью векторов между двумя агентами.

Каждый агент как-то взаимодействует со всеми, чем ближе другой агент к нему, тем больший вклад в изменение мнения вносит их различие.

Чем больше людей, тем меньший вклад вносит каждый из них, относительно целого.

2 Формула для динамики

$$a_i(t+1) = a_i(t) + \frac{1}{|A \setminus \{a_i\}|} \sum_{a_j \in A \setminus \{a_i\}} (a_j(t) - a_i(t)) \cdot \frac{1}{1 + \|a_j(t) - a_i(t)\|^2}$$

- $a_i(t)$ - вектор-столбец размерности n , отражающий мнение i -ого агента в момент времени t
- A - множество агентов
- $\|v\|^2 = v^T G v$ - квадрат нормы вектора v , где G - матрица Грама (не очень легально ее так называть, возможно стоит использовать другое название)

3 Динамика в матричном виде

Объединим всех агентов одну матрицу.

Обозначим за e_i - вектор-столбец, на i -ом месте которого стоит 1, а на остальных 0.

$$\begin{aligned} \sum_{a_i \in A} a_i(t+1) \otimes e_i^T &= \sum_{a_i \in A} \left(a_i(t) + \frac{1}{|A \setminus \{a_i\}|} \sum_{a_j \in A \setminus \{a_i\}} (a_j(t) - a_i(t)) \cdot \frac{1}{1 + \|a_j(t) - a_i(t)\|^2} \right) \otimes e_i^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{a_i \in A} a_i(t+1) \otimes e_i^T &= \sum_{a_i \in A} a_i(t) \otimes e_i^T + \frac{1}{|A \setminus \{a_i\}|} \sum_{a_i \in A} \left(\sum_{a_j \in A \setminus \{a_i\}} (a_j(t) - a_i(t)) \cdot \frac{1}{1 + \|a_j(t) - a_i(t)\|^2} \right) \otimes e_i^T \end{aligned}$$

Результатом $\sum_{a_i \in A} a_i(t) \otimes e_i^T$ будет матрица, столбцами которой будут мнения агентов. Обозначим эту матрицу за $a(t)$. Тогда выражение можно записать в таком виде:

$$a(t+1) = a(t) + \frac{1}{|A \setminus \{a_i\}|} \sum_{a_i \in A} \left(\sum_{a_j \in A \setminus \{a_i\}} (a_j(t) - a_i(t)) \cdot \frac{1}{1 + \|a_j(t) - a_i(t)\|^2} \right) \otimes e_i^T$$

4 Подсчет расстояний в матричном виде

Пусть у нас есть матрица A , состоящая из k векторов-столбцов размерности n , и матрица B , состоящая из m векторов-столбцов размерности n , а также матрица G размерности n на n .

Обозначим квадрат расстояния между i -ым вектором из матрицы A и j -ым вектором из матрицы B за $SqrtDist_i^j$.

$$\Rightarrow SqrtDist_i^j = (A_i - B_j)^T G (A_i - B_j) = A_i^T G A_i + B_j^T G B_j - A_i^T G B_j - B_j^T G A_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k SqrtDist_i^j \otimes e_i^T \right) \otimes e_j = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k (A_i^T G A_i + B_j^T G B_j - A_i^T G B_j - B_j^T G A_i) \otimes e_i^T \right) \otimes e_j =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T + (B_j^T G B_j) \otimes e_i^T - (A_i^T G B_j) \otimes e_i^T - (B_j^T G A_i) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j = \\
&= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T) + (B_j^T G B_j) \otimes (1, \dots, 1) - \sum_{i=1}^k ((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T + (B_j^T G A_i) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j = \\
&= \sum_{i=1}^k ((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T) \otimes (1, \dots, 1)^T + \sum_{j=1}^k ((B_j^T G B_j) \otimes (1, \dots, 1)) \otimes e_j - \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T + (B_j^T G A_i) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j = \\
&= \sum_{i=1}^k ((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T) \otimes (1, \dots, 1)^T + \sum_{j=1}^k ((B_j^T G B_j) \otimes e_j) \otimes (1, \dots, 1) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j - \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j
\end{aligned}$$

Лемма 4.1. $(Cv) \otimes u^T = C(v \otimes u^T)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
((Cv) \otimes u)_i^j &= \left(\left(\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \dots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^m & C_2^m & \dots & C_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \right) \otimes (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k) \right)_i^j = \sum_{q=1}^n C_q^j \cdot v^q \cdot u_i = \\
&= \sum_{q=1}^n C_q^j \cdot (v \otimes u_i)^q = \sum_{q=1}^n C_q^j \cdot (v \otimes u)_i^q = \left(\left(\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \dots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^m & C_2^m & \dots & C_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \cdot u_1 & v^1 \cdot u_2 & \dots & v^1 \cdot u_k \\ v^2 \cdot u_1 & v^2 \cdot u_2 & \dots & v^2 \cdot u_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^n \cdot u_1 & v^n \cdot u_2 & \dots & v^n \cdot u_k \end{pmatrix} \right) \right)_i^j = \\
&= \left(\left(\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \dots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^m & C_2^m & \dots & C_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \right) \otimes (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k) \right)_i^j = (C \cdot (v \otimes u))_i^j
\end{aligned}$$

□

Лемма 4.2. $v \otimes u^T = u^T \otimes v$

Доказательство. Обозначим за T_q^p тензоры типа (p, q)

$$u^T \in T_0^1; v \in T_1^0 \implies v \otimes u^T \in T_1^1 \wedge u^T \otimes v \in T_1^1$$

Возьмем $x \in V, f \in V^*$. По определению тензорного произведения $(u^T \otimes v)(x, f) = u^T(x) \cdot v(f)$, но и $(v \otimes u^T)(x, f) = u^T(x) \cdot v(f)$. Следовательно $v \otimes u^T = u^T \otimes v$.

Это также можно проверить, написав произведение Кронекера, но этим заниматься я не буду. □

Лемма 4.3. $(v^T C) \otimes u = (v^T \otimes u)C$

Доказательство. Воспользуемся **Леммой 4.1**, а также свойством произведения Кронекера:

$$\begin{aligned} (C^T v) \otimes u^T &= C^T (v \otimes u^T) \implies \\ \implies (C^T v)^T \otimes u &= (v \otimes u^T)^T C \iff \\ \iff (v^T C) \otimes u &= (v^T \otimes u) C \end{aligned}$$

□

Теорема 4.4.

$$\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j = B^T G^T A$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k ((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T) &= \sum_{i=1}^k (A_i^T G B_j)^T \otimes e_i^T = \sum_{i=1}^k (B_j^T G^T A_i) \otimes e_i^T = \\ &= \sum_{i=1}^k (B_j^T G^T) (A_i \otimes e_i^T) = (B_j^T G^T) A \end{aligned}$$

A_i можно вынести из произведения по **Лемме 4.1**.

Дальше воспользуемся **Леммой 4.3**.

$$\begin{aligned} \implies \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j &= \sum_{j=1}^k (B_j^T G^T A) \otimes e_j = \sum_{j=1}^k (e_j \otimes B_j^T) (G^T A) = \\ &= B^T G^T A \end{aligned}$$

□

Теорема 4.5.

$$\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j = B^T G A$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^k ((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T) = \sum_{i=1}^k ((B_j^T G) (A_i \otimes e_i^T)) = B_j^T G A$$

$B_j^T G$ вынести из произведения по **Лемме 4.1**.

$$\implies \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j = \sum_{j=1}^k B_j^T (G A) \otimes e_j = \sum_{j=1}^k e_j \otimes B_j^T (G A) = B^T G A$$

Переставили местами по **Лемме 4.2**

□

$$\begin{aligned} SqrtDist &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k SqrtDist_i^j \otimes e_i^T \right) \otimes e_j = \\ &= \sum_{i=1}^k ((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T) \otimes (1, \dots, 1)^T + \sum_{j=1}^k ((B_j^T G B_j) \otimes e_j) \otimes (1, \dots, 1) - \\ &- \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((A_i^T G B_j) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j - \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k ((B_j^T G A_i) \otimes e_i^T) \right) \otimes e_j = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^k ((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T) \otimes (1, \dots, 1)^T + \sum_{j=1}^k ((B_j^T G B_j) \otimes e_j) \otimes (1, \dots, 1) - B^T G A - B^T G^T A$$

Обозначив вектор-строку $\sum_{i=1}^k ((A_i^T G A_i) \otimes e_i^T)$ за $\text{diag}(A^T G A)$, а вектор-столбец $\sum_{j=1}^k ((B_j^T G B_j) \otimes e_j)$ за $(\text{diag}(B^T G B))^T$, мы можем упростить выражение:

$$SqrtDist = \text{diag}(A^T G A) \otimes (1, \dots, 1)^T + (\text{diag}(B^T G B))^T \otimes (1, \dots, 1) - B^T G A - B^T G^T A$$

В библиотеке `numpy` при сложении элементов с разными размерностями просходит [broadcasting](#), при котором элементы неподходящих размерностей "растягиваются" по определенным правилам (на самом деле копирования не происходит и используются те же данные). Также, для удобства чтения кода, вектора мнений записываются строчками, поэтому A и B меняются местами с A^T и B^T соответственно. Вызывая метод `reshape(-1,1)`, мы превращаем вектор-строку в вектор-столбец. В итоге программа вычисляющая $SqrtDist$ принимает такой вид.

```
def dist(self, A, B, GramMatrix):
    return (
        np.diag(np.matmul(
            np.matmul(A, GramMatrix),
            A.T)).reshape(-1, 1) +
        np.diag(np.matmul(
            np.matmul(B, GramMatrix),
            B.T)) -
        (np.matmul(
            np.matmul(B, GramMatrix.T),
            A.T)) -
        (np.matmul(
            np.matmul(B, GramMatrix),
            A.T)))
```

5 Результаты моделирования

5.1 Нулевая матрица грама и 2 вершины

При $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $a(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

