A5-Procesos Poisson

Rodolfo Jesús Cruz Rebollar

2024-10-15

Problema 1: Drive Thru

El tiempo de llegada a una ventanilla de toma de órdenes desde un automóvil de un cierto comercio de hamburguesas sigue un proceso de Poisson con un promedio de 12 llegadas por hora.

a) ¿Cuál será la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas sea a lo más de 20 minutos?

$$P(T \leq 20min) = P(T \leq 1/3)$$

$$\alpha = 3$$

$$\lambda_0 = 12$$

$$\beta = \frac{1}{12}$$

Para este primer inciso, se emplea una distribución Gamma, dado que nos interesa conocer la probabilidad del tiempo (variable continua), además de realizar dicho cálculo para 3 éxitos o personas.

```
# Calcular la probabilidad de que el tiempo de espera de 3 personas sea máximo de 20 min

cat("P(T <= 20 min) para 3 personas = ", pgamma(1/3, 3, 12))

## P(T <= 20 min) para 3 personas =  0.7618967
```

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera de una persona esté entre 5 y 10 segundos?

$$P\left(\frac{5}{3600} seg \leq T \leq \frac{10}{3600} seg\right) = ?$$

$$\lambda_0 = 12$$

Se usa una distribución exponencial puesto que la variable de interés es continua (tiempo de espera), además de que nos interesa realizar el cálculo para una sola persona.

```r
# Calcular la probabilidad de que el tiempo de espera de 1 persona se
sitúe entre 5 y 10
# segundos

# Nota: 5 segundos se dividen entre 3600 para convertirlos a horas

cat("P(5 <= T <= 10) para 1 persona = ", (pexp(10/3600, 12) -
pexp(5/3600, 12)))

## P(5 <= T <= 10) para 1 persona =  0.01625535
```

c) ¿Cuál será la probabilidad de que en 15 minutos lleguen a lo más tres personas?

$$P(X \leq 3) = ?$$

$$\lambda_0 = 12 * \frac{1}{4} = 3$$

Se usa una distribución Poisson, dado que se pregunta la probabilidad de que llegue un cierto número de personas (variable discreta) en un tiempo específico, en este caso de 15 minutos.

```r
# Calcular la probabilidad de que lleguen máximo 3 personas en 15 minutos

cat("P(X <= 3) en 15 min = ", ppois(3, 3))

## P(X <= 3) en 15 min =  0.6472319
```

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas esté entre 5 y 10 segundos?

$$P\left(\frac{5}{3600} \leq T \leq \frac{10}{3600}\right)$$

$$\alpha = 3, \lambda = 12$$

En este caso se utiliza una distribución Gamma, debido a que se desea calcular la probabilidad de la variable continua (tiempo) y además nos interesa saber dicho cálculo para más de 1 persona (más de 1 éxito), por lo que éste tipo de distribución es la más adecuada para resolver éste inciso.

```r
# Calcular la probabilidad de que 3 personas esperen entre 5 y 10 minutos

cat("P(5 min <= T <= 10 min) para 3 personas = ",
    pgamma(10/3600, 3, 12) - pgamma(5/3600, 3, 12))

## P(5 min <= T <= 10 min) para 3 personas =  5.258533e-06
```

e) Determine la media y varianza del tiempo de espera de tres personas.

$$\mu = \alpha\beta = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\mu^2 = \alpha\beta^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

```r
# Calcular la media del tiempo de espera de 3 personas, dividiendo el
alpha (3) entre
# la cantidad promedio de llegadas por hora (12)

miu = 3 / 12

# Mostrar el valor calculado de la media

cat("Media del tiempo de espera para 3 personas: ", miu)

## Media del tiempo de espera para 3 personas:  0.25

# Calcular la desviación estándar del tiempo de espera para 3 personas

std_dev = sqrt(3 / 12 ^ 2)

# Mostrar el valor de la desviación estándar del tiempo para 3 personas

cat("Desviación estándar del tiempo de espera para 3 personas: ",
std_dev)

## Desviación estándar del tiempo de espera para 3 personas:  0.1443376

# Calcular el valor de la varianza del tiempo de espera para 3 personas

varianze = std_dev ^ 2

# Mostrar el valor de la varianza del tiempo de espera para 3 personas

cat("Varianza del tiempo de espera para 3 personas: ", varianze)

## Varianza del tiempo de espera para 3 personas:  0.02083333
```

f) ¿Cuál será la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas exceda una desviación estándar arriba de la media?

$$P(T > \mu + \sigma) = ?$$

Para este inciso, se utiliza una distribución Gamma, dado que se necesita calcular la probabilidad de la variable tiempo (continua), además de que también nos interesa saber dicha probabilidad para más de 1 éxito o persona, por lo cual la distribución mencionada (Gamma) es la más adecuada para este caso.

```
# Calcular la probabilidad de que el tiempo de espera de 3 personas sobrepase una
# desviación estándar por encima de la media

cat("P(T > miu + sigma) para 3 personas = ",
    pgamma(miu + std_dev, 3, 12, lower.tail = FALSE))

## P(T > miu + sigma) para 3 personas =  0.1491102
```

Respuesta: 0.7619, 0.0163, 0.6472, 0.00000525, 0.25, 0.1443, 0.1491

Problema 2: Entre partículas

Una masa radioactiva emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson con una razón promedio de 15 partículas por minuto. En algún punto inicia el reloj.

$$\lambda_0 = 15$$

T: tiempo en minutos.

X: Cantidad emitida de partículas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en los siguientes 3 minutos la masa radioactiva emita 30 partículas?

$P(X = 30)$ en los siguientes 3 minutos (probabilidad a calcular).

Se utiliza distribución de Poisson, ya que se pide calcular la probabilidad de la variable discreta (número de partículas emitidas) en un tiempo específico de 3 minutos posteriores añ momento actual.

```
# Calcular la probabilidad puntual de que la masa radioactiva emita exactamente 30
# partículas en los próximos 3 minutos

cat("P(X = 30) en los próximos 3 min = ", dpois(30, 45))

## P(X = 30) en los próximos 3 min =  0.00426053
```

b) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran cinco segundos a lo más antes de la siguiente emisión?

$P(T \leq 5seg) =?$ antes de la próxima emisión.

Se usa una distribución exponencial, dado que se necesita calcular la probabilidad de la variable continua (tiempo para la emisión de partículas), además de que solamente nos interesa saber la probabilidad para una sola emisión y no más.

```
# Calcular probabilidad de que trascurran máximo 5 segundos antes de la siguiente emisión
```

```r
# de partículas de la masa radioactiva

cat("P(T <= 5 seg) antes de próxima emisión = ", pexp(5, 0.25))

## P(T <= 5 seg) antes de próxima emisión =  0.7134952
```

c) ¿Cuánto es la mediana del tiempo de espera de la siguiente emisión?

Para el tercer inciso, se utiliza una distribución exponencial, ya que se requiere calcular un cierto valor de la variable continua que en este caso es nuevamente el tiempo, el cual se ubica exactamente en el 50% de todos los valores de tiempo, además de que solamente estamos interesados en realizar el cálculo para una sola emisión (un únìco evento o éxito).

```r
# Calcular el valor del tiempo situado exactamente en el 50% de todos los
datos de tiempo

med = qexp(0.5, 15)

# Mostrar la mediana del tiempo de espera de la próxima emisión

cat("Mediana del tiempo de espera de la próxima emisión = ", med)

## Mediana del tiempo de espera de la próxima emisión =  0.04620981
```

d) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran a lo más cinco segundos antes de la segunda emisión?

$P(T \leq 5seg) =?$ antes de la 2da emisión.

Para este caso, se utiliza una distribución Gamma, ya que se desea calcular la probabilidad de la variable continua (tiempo), además de que en este caso, nos interesa realizar dicho cálculo probabilístico para 2 éxitos (emisiones), por lo que resulta conveniente la distribución Gamma para este caso.

```r
# Calcular la probabilidad de que transcurran máximo 5 segundos previo a
la 2da emisión de
# partículas

cat("P(T <= 5 seg) antes de 2da emisión = ", pgamma(5, 2, 0.25))

## P(T <= 5 seg) antes de 2da emisión =  0.3553642
```

e) ¿En que rango se encuentra el 50% del tiempo central que transcurre antes de la segunda emisión?

Para este último inciso, es necesario utilizar una distribución Gamma, dado que se requiere calcular los valores (límite inferior y superior) que conforman el rango dentro del cual se ubica el 50% del tiempo central que transcurre antes de que suceda la 2da emisión de partículas, además también nos interesa realizar el cálculo para 2 emisiones o éxitos, no para 1 solo, por lo que Gamma es la distribución más adecuada para éste propósito.

```r
# Calcular el rango en el cual se encuentra el 50% central del tiempo transcurrido previo
# a la 2da emisión de partículas

cat("Entre", qgamma(0.25, 2, 15),
    "y",qgamma(0.75, 2, 15), "minutos")
```

```
## Entre 0.06408525 y 0.179509 minutos
```

Respuesta: 0.004261, 0.7135, 0.0462, 0.3554, entre 0.0641 y 0.1795