Procesamiento de señales e imágenes

Docentes:

- Ing Sebastián Herrera
  sebaherrera152@gmail.com

- Ing Guillermo Bernasconi
  guillermobernasconi@gmail.com

Syllabus

- Introducción al análisis de señales y sistemas discretos.
- Transformada discreta de Fourier. Análisis en dominio del tiempo y frecuencia.
- Filtros.
- Sistemas de adquisición y registro industriales. Software y hardware. Características técnicas y selección.
- Registro y procesamiento de señales.
- Análisis de fallas y diagnóstico.
- Conceptos generales de procesamiento de imágenes.
- Imágenes en el espectro visible, infrarrojo y térmico.
- Adquisición de imágenes.
- Formatos de imagen más comunes. introducción al software para manejo de imágenes.
- Aplicaciones industriales.

Bibliografía

Señales y Sistemas -Seg. Edicion- Oppenheim-Willsky

Tratamiento de señales en tiempo discreto- Ter. Edicion-- Oppenheim-Schafer

Tratamiento Digital de Señales- J. Proakis, D. Manolakis.

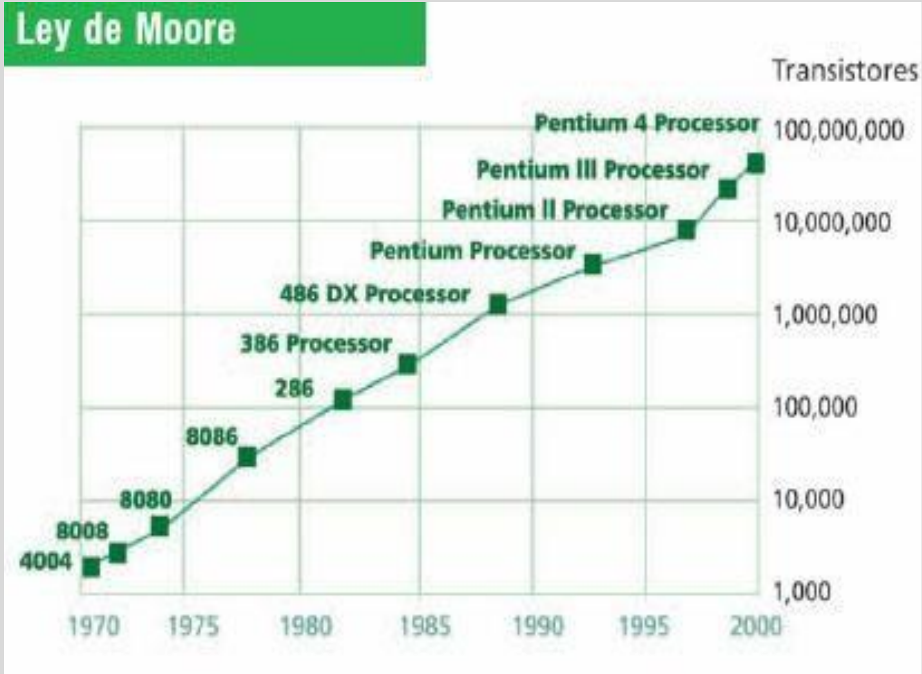
Señal-Definiciones

Es toda manifestación físicamente observable de un fenómeno generalmente eléctrico, acústico u óptico.

Es la representación física de la información que es llevada de una fuente a un destinatario.

Una señal contiene información sobre el comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno.

La información de una señal está contenida en un patrón de variaciones que presenta alguna forma determinada.

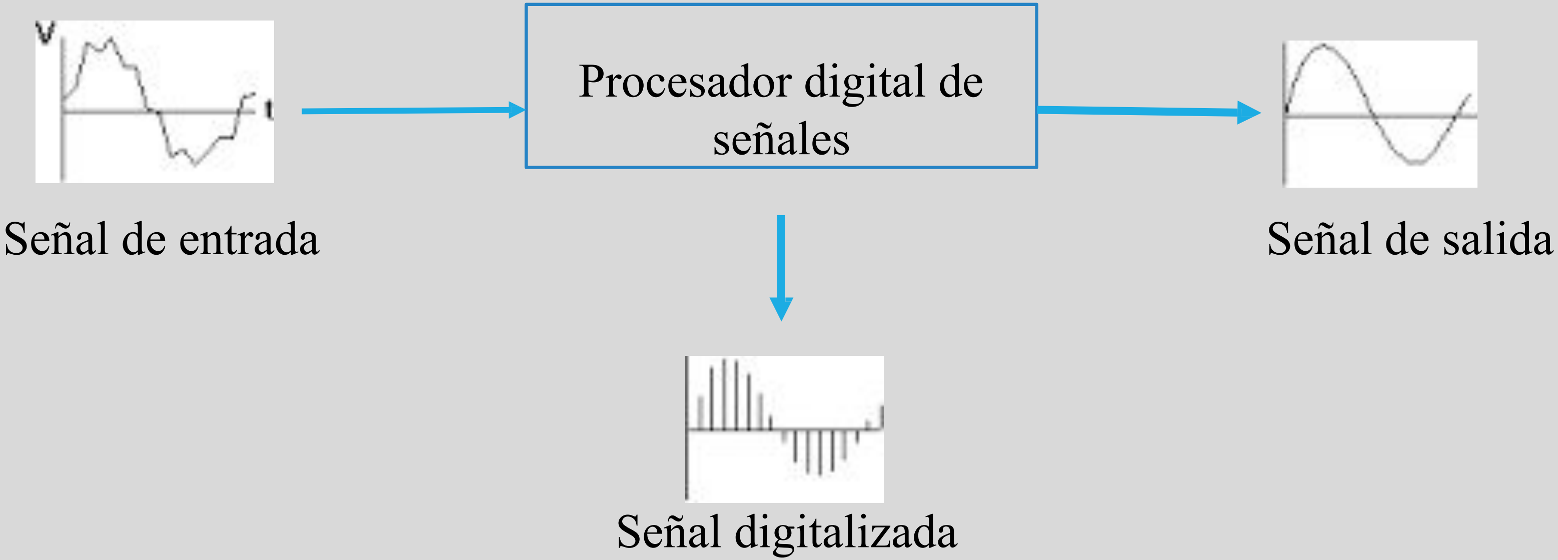

Ley de Moore
Transistores
Pentium 4 Processor
Pentium III Processor
Pentium II Processor
Pentium Processor
486 DX Processor
386 Processor
286
8086
8080
8008
4004
100,000,000
10,000,000
1,000,000
100,000
10,000
1,000
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000

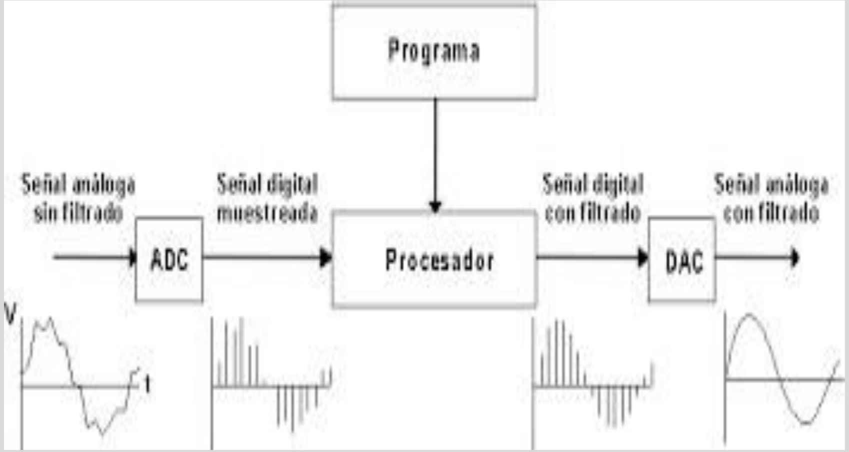

Patient Position Sensor (Accelerometer)
Airflow Sensor (Breathing)
Electrocardiogram Sensor (ECG)
Blood pressure sensor (Sphygmomanometer)
Electromyography Sensor (EMG)
Pulse and Oxygen in Blood Sensor (SPO2)
e-Health Sensor Shield for Arduino and Rasberry Pi
Body Temperature Sensor
Galvanic Skin Response Sensor (GSR - Sweating)

Las señales de voz, de un electrocardiograma y de un electroencefalograma son ejemplos de señales que contienen información y que varían como funciones de una sola variable independiente que, normalmente, es el tiempo. Un ejemplo de una señal que es una función de dos variables independientes es una señal de imagen.

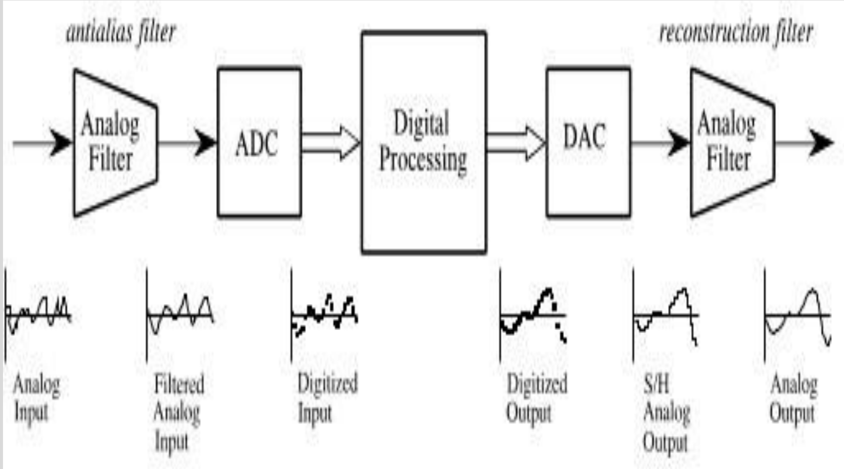
Asociados a las señales naturales se encuentran los medios con los que se generan. Por ejemplo, las señales de voz se generan al pasar el aire a través de las cuerdas vocales. Las imágenes se obtienen mediante la exposición de una película fotográfica ante una escena u objeto. Por tanto, normalmente la generación de señales está asociada con un sistema que responde a un estímulo o fuerza.
En una señal de voz, el sistema está formado por las cuerdas vocales y el tracto bucal, también conocido como cavidad bucal. El estímulo en combinación con el sistema es lo que se denomina fuente de señal.
Por tanto, existen fuentes de voz, fuentes de imágenes y muchos otros tipos de fuentes de señal.

Un sistema también se puede definir como un dispositivo físico que realiza una operación sobre una señal.


V
t
Procesador digital de señales
Señal de entrada
Señal de salida
Señal digitalizada



Sistema normal DSP



Sistema robusto DSP

Sistema digital es cualquier sistema que pueda generar, procesar, transmitir o almacenar señales mediante dígitos y que solo admite valores discretos, es decir, que solo admite un conjunto limitado de números o valores.

Sistema analógico es cualquier sistema cuyas señales se representan con valores continuos, es decir, que admite números o valores infinitos.

Sistema digital

Un sistema digital es cualquier sistema que permita crear, decodificar, transmitir o guardar información que se encuentra representada en cantidades tan restringidas que sus señales de entrada y salida sólo admiten valores discretos.

Los valores discretos son variables que no aceptan cualquier valor, sino solo aquellos que pertenezcan a su conjunto, por tanto, son finitos.

En este sentido, un sistema digital es todo dispositivo que manipule datos mediante dígitos que casi siempre están representados con el código binario. El sistema binario solo admite ceros (0) y unos (1) como valores, por lo tanto, se trata de valores discretos.

Tipos de sistemas digitales

Sistemas digitales combinacionales

En este caso, la transmisión de la señal depende de los valores que admiten las entradas.

Por ejemplo, no se puede ingresar código no binario en un sistema binario.

Sistemas digitales secuenciales

La salida de la señal depende tanto de los valores de las entradas como del estado total del sistema (entrada, salida, memoria).

Ventajas de los sistemas digitales

Los sistemas digitales tienen las siguientes ventajas:

- **Menor tamaño**: los dispositivos basados en sistemas digitales tienden a hacerse cada vez más pequeños.
- **Eficiencia**: la información digital se almacena rápidamente y en cantidades cada vez más grandes.
- **Precisión**: como los sistemas digitales solo admiten valores discretos, son mucho más precisos.
- **Diseño**: los dispositivos basados en sistemas digitales tienden a hacerse cada vez más fáciles de diseñar
- **Estabilidad**: los sistemas digitales son menos susceptibles al ruido, es decir, a todas las posibles perturbaciones de la señal.

Desventajas de los sistemas digitales

Aunque los sistemas digitales han contribuido en gran medida al desarrollo tecnológico, también tienen sus inconvenientes:

- **Conversión**: las naturaleza de las variables físicas es analógica (sonido, temperatura, distancia, peso) por lo tanto, es necesario usar un conversor para transformarlas en datos digitales.
- **Ancho de banda**: la transmisión de señales en un sistema digital requiere de un ancho de banda mucho mayor que un sistema analógico.
- **Alteración**: los sistemas digitales pueden alterarse o manipularse con relativa facilidad con respecto a los analógicos.

Sistema analógico

Un sistema analógico es aquel cuyas señales pueden admitir valores infinitos que pueden variar de forma continua.

Los datos que forman parte de la naturaleza son de origen analógico: la temperatura, la distancia, el sonido, voltaje, imágenes, etc. Si bien todas estas variables se pueden convertir a datos digitales son, originalmente, analógicas.

Ejemplos de sistemas analógicos

La temperatura ambiental es un ejemplo de un sistema analógico, ya que no tiene valores exactos, sino que puede fluctuar continuamente. Es decir, cuando sentimos frío es porque la temperatura descendió de manera lenta y continua. Esto porque no pasamos directamente de 30 grados a 10 grados, por ejemplo, sino que se admiten una serie de valores que van desde los 30 grados a los 10.

Otro ejemplo de sistema analógico es la música digital que se convierte a formato analógico mediante un proceso llamado conversión. Este proceso usa dispositivos que convierten los datos binarios de la información digital en señales análogas.

Ventajas de los sistemas analógicos

Si bien existe un interés creciente en la transformación digital porque en términos técnicos es superior a la tecnología analógica, esta también tiene sus ventajas:

- **Instantaneidad**: en los sistemas analógicos la señal se procesa en tiempo real, por ejemplo, cuando utilizamos un parlante o un micrófono.
- **Economía**: los dispositivos basados en sistemas analógicos son más baratos que los digitales.
- **Fidelidad**: la calidad de la señal es más fiel a la realidad y no es tan fácil de manipular. Las grabaciones de audio en antiguos sistemas análogos son un ejemplo de ello.

Desventajas de los sistemas analógicos

Los inconvenientes de utilizar dispositivos basados en sistemas analógicos son:

- **Ruido**: los sistemas analógicos son más susceptibles a las perturbaciones de la señal, y eso puede interferir en la calidad de los datos que transmiten.
- **Degradación:** a medida que se repite la transmisión de los datos, estos van perdiendo calidad.
- **Dificultades técnicas**: si se presenta alguna falla en un dispositivo analógico es mucho más difícil de reparar. Además, los sistemas análogos no pueden ser reparados de forma remota.

Señales -Definiciones

Señales : Es una función, típicamente variable con el tiempo y posiblemente de alguna otra variable(como ser coordenadas espaciales) que representa alguna magnitud de interés asociada con el sistema.

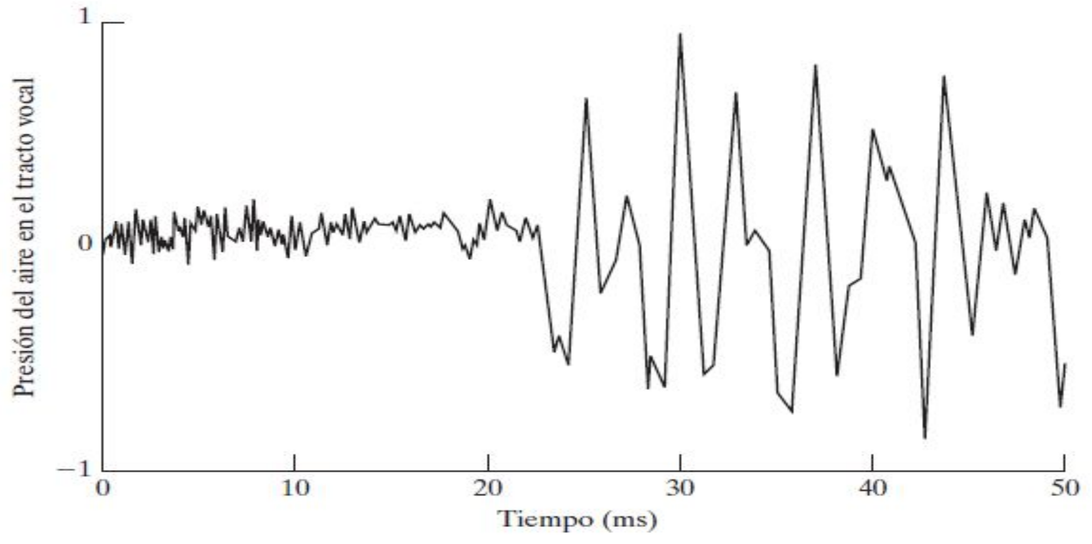


FIGURA 1.1
Segmento de diálogo.

Señal continua de la palabra should.

Señales de audio entre 20 Hz y 20 Khz

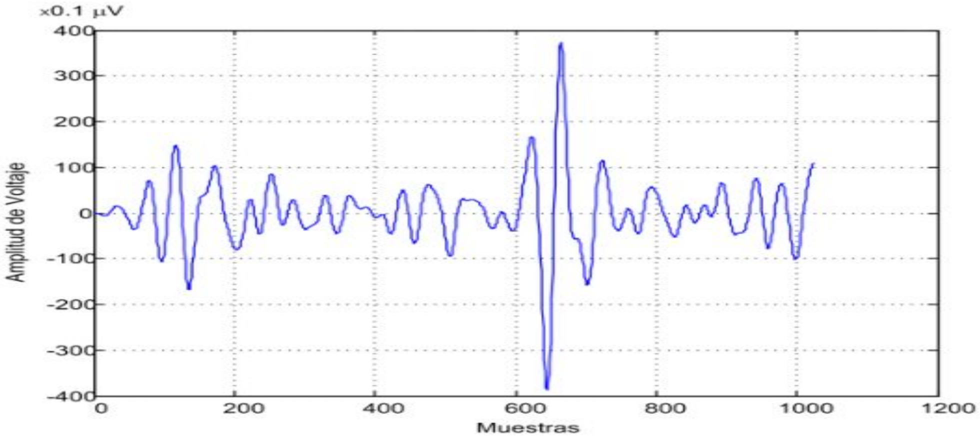


Figura 5. Onda Beta en estado de relajación.

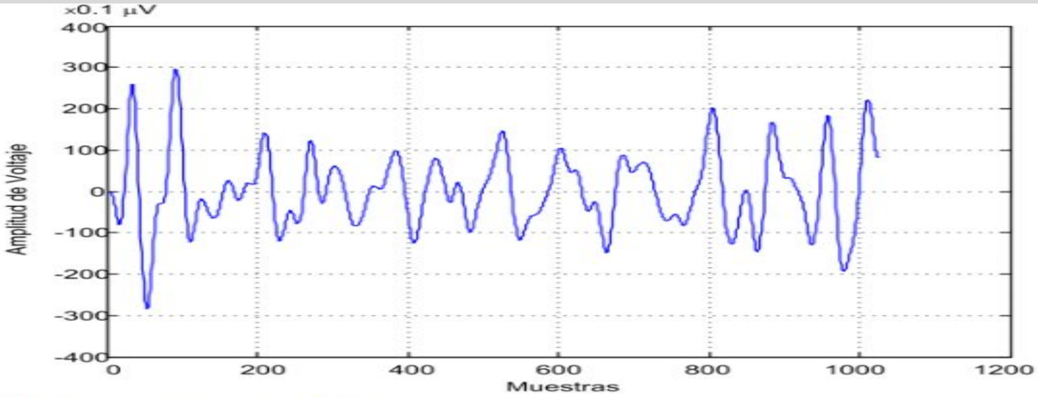


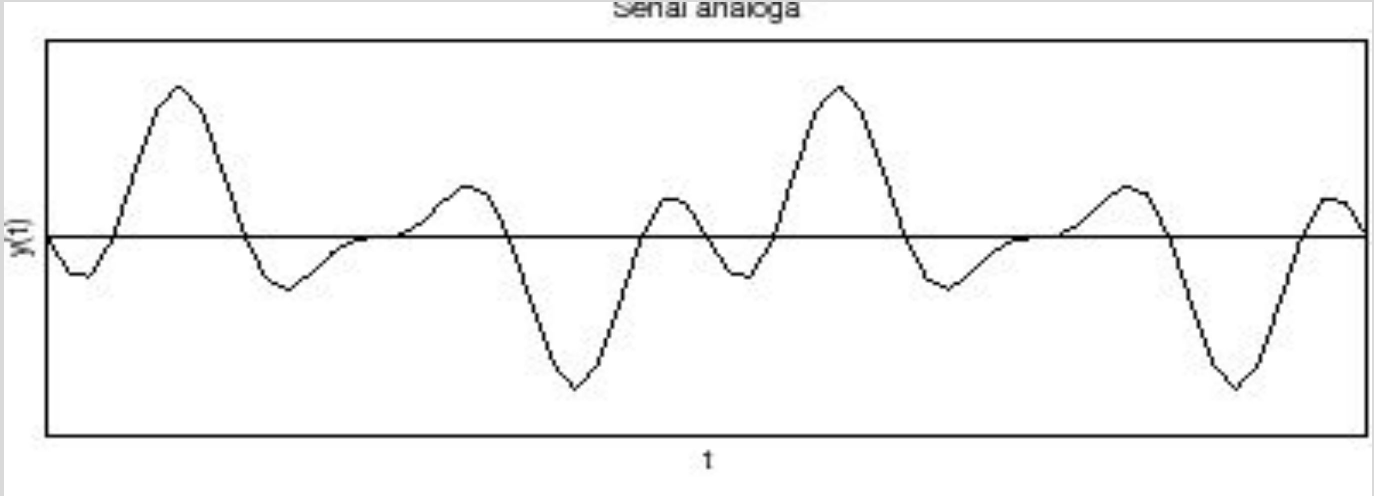
Figura 6. Onda Beta en respuesta a dolor.

Alfa 8- 14 Hz
beta 12- 30 Hz
gamma 25-100 hz
delta 1-3Hz
Theta 3,5-7,5 hz

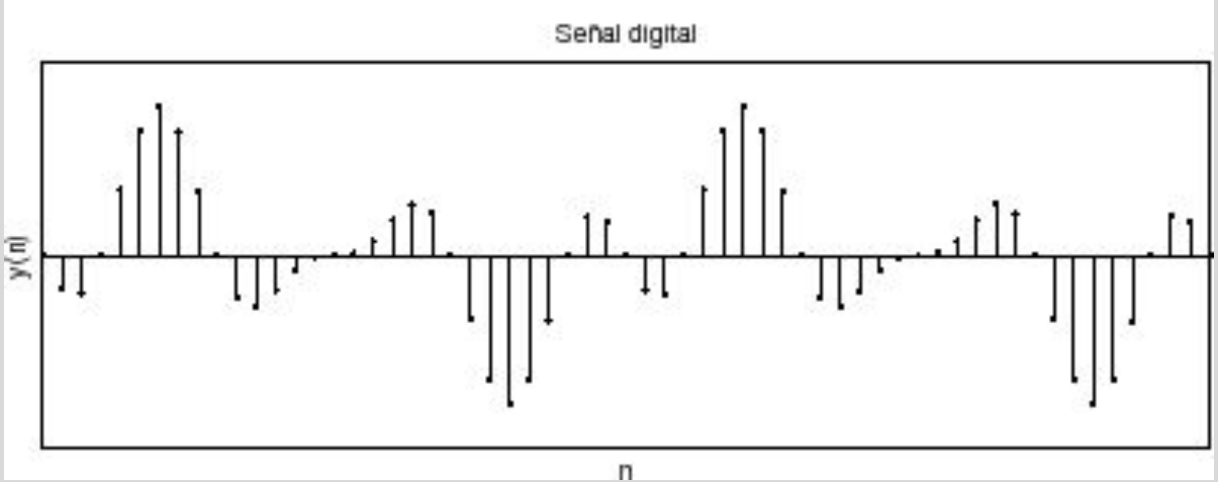
Señales continuas y discretas

Existen básicamente dos tipos de señales, en **tiempo continuo o señales analógicas** y **señales en tiempo discreto o señales digitales**.

Una **señal y(t) es una señal en tiempo continuo** si la variable independiente que es" t" es una variable continua, es decir que el valor de y(t) es especificado en todo instante "t" de un intervalo de tiempo dado, ya sea por una expresión matemática o gráficamente por una curva, en otras palabras la **variable "t" puede tomar cualquier valor real.**



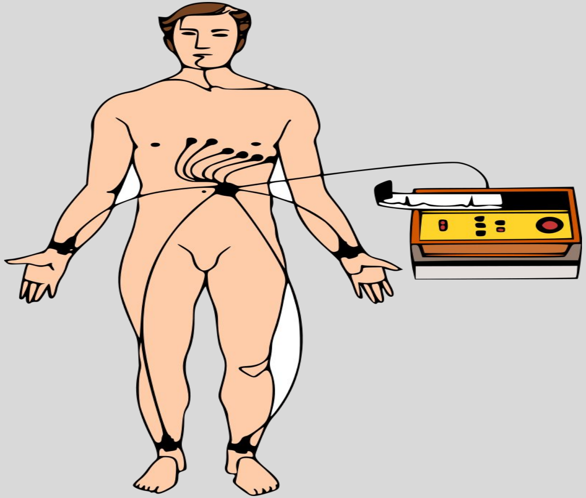
- Si la variable “t” es una variable discreta, es decir, y(t) está definida por puntos del tiempo discreto, entonces **y(t) es una señal de tiempo discreto**, a menudo generada por **muestreo** de una señal de tiempo continuo, como una señal de tiempo discreto está definida solamente en tiempos discretos, **con frecuencia se la identifica como una secuencia de números y[n], donde “n” es un entero**



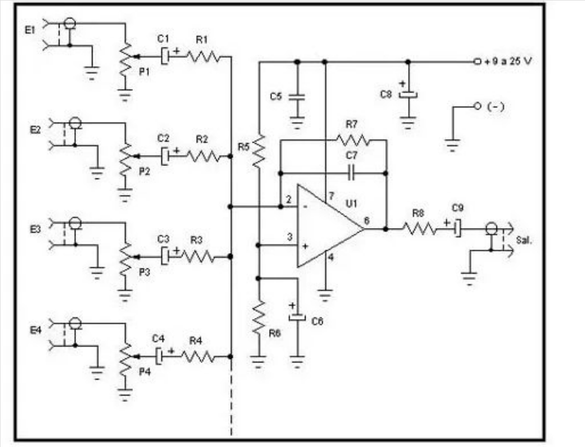
Señales-Clasificación

- Multicanal
- Multidimensionales
- Continuas
- Discretas
- De valor continuo o discreto
- Determinísticas
- Aleatorias

Señales Multicanal: Estas señales aparecen cuando se considera que existen múltiples sensores o fuentes. Por lo tanto cada fuente genera una señal que es en general independiente de las demás. Es posible considerar todas las señales en conjunto y formar un vector



ECG

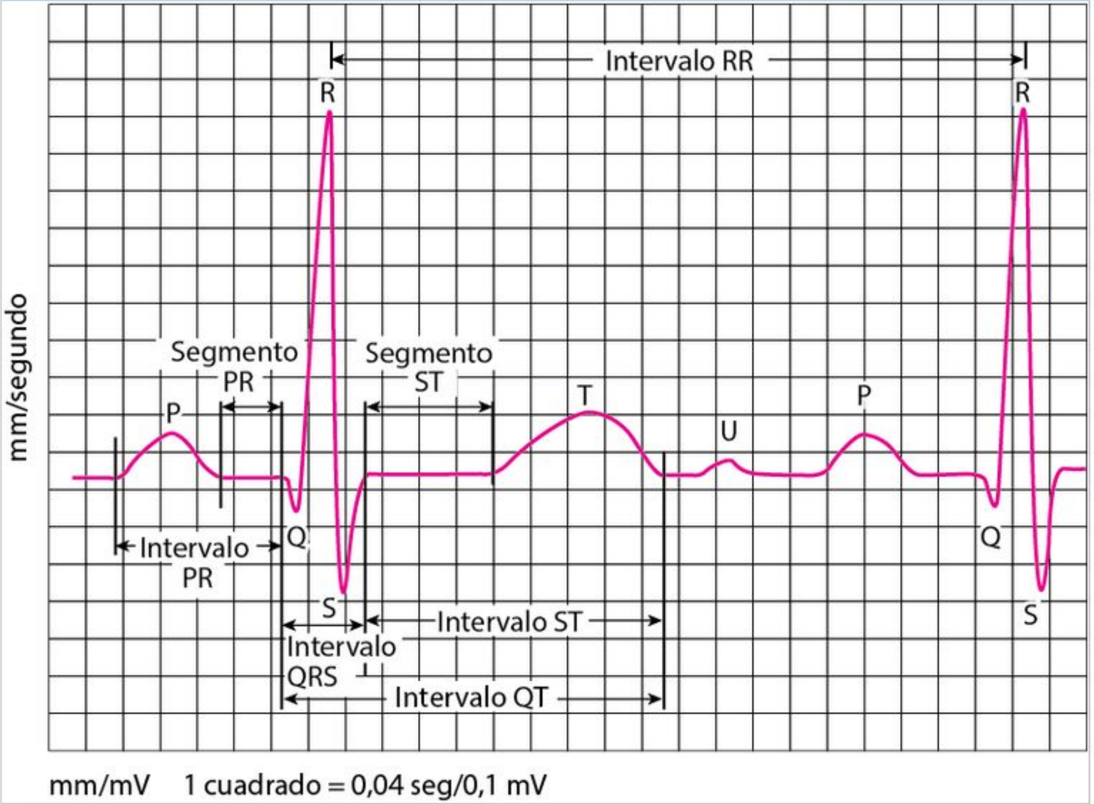


Mezclador de audio

Interpretación de señal de un electrocardiograma.

IMAGEN

Cerrar

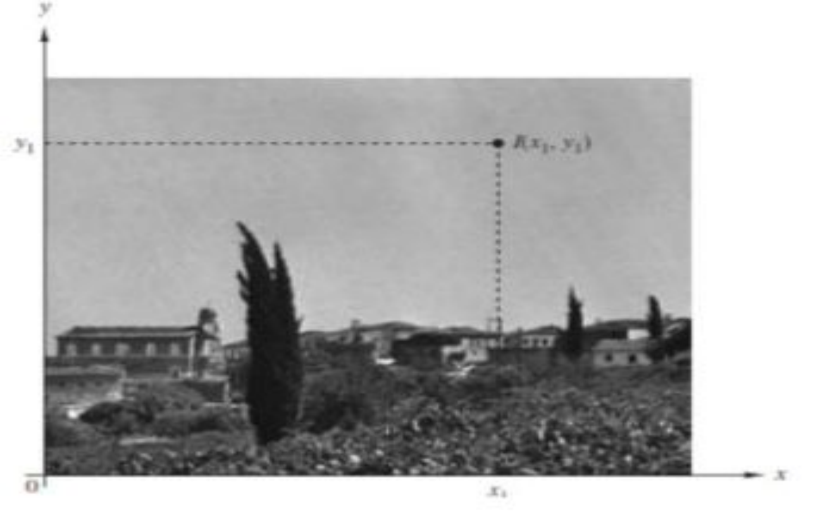


Ondas de electrocardiografía (ECG)

Onda P = activación (despolarización) de las aurículas. Intervalo PR = intervalo entre el comienzo de la despolarización auricular y la despolarización ventricular. Complejo QRS = depolarización de los ventrículos, contiene las ondas Q, R y S. Intervalo QT = intervalo entre el comienzo de la despolarización ventricular y el final de la repolarización ventricular. Intervalo RR = intervalo entre dos complejos QRS. Onda T = repolarización ventricular. Segmento ST más onda T (ST-T) = repolarización ventricular. Onda U = probablemente, después de la despolarización (relajación) de los ventrículos.

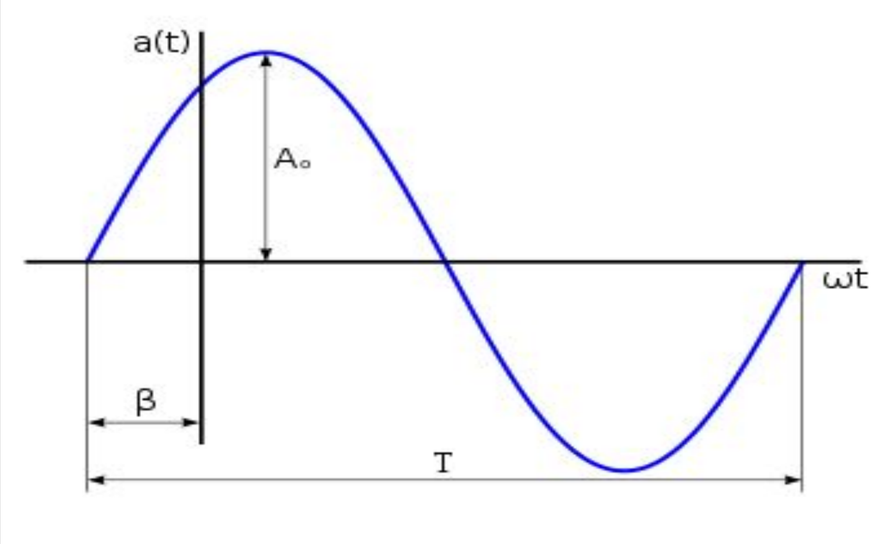
miembros y la pared torácica. Seis de estas derivaciones son verticales (emplean las derivaciones frontales I, II y III y las

Señales Multidimensionales: Si la señal es una función de una sola variable independiente es una señal unidimensional. Sin embargo, si una señal es Multidimensional su valor es una función de M variables dependientes. Un ejemplo es una fotografía, dado que la intensidad o brillo **I(x,y)** en cada punto es una función de dos variables independientes.
Otro ejemplo es una imagen de TV en blanco y negro que puede representarse como **I(x,y,t)**, puesto que el brillo es función del tiempo.
Una imagen de TV a color puede escribirse en tres funciones de intensidad de la forma ***Ir*** **(x,y,t)**, ***Ig*****(x,y,t)**, ***Ib*****(x,y,t)** (forma rgb) en función del tiempo.



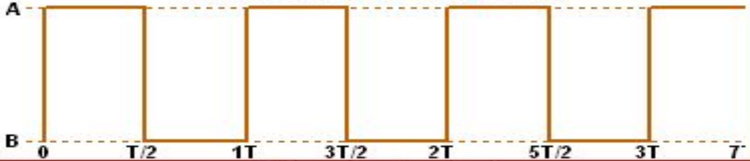
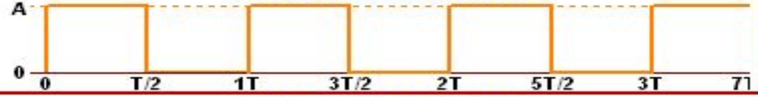
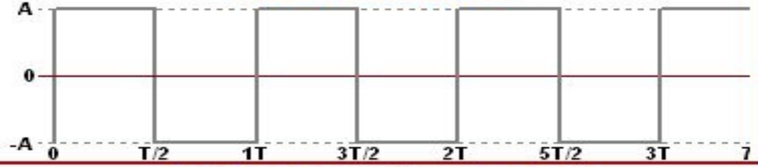
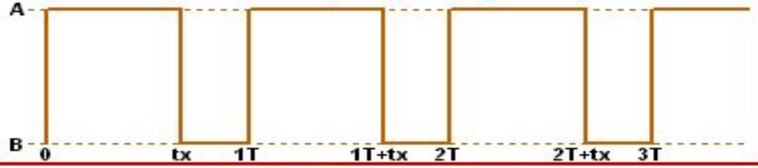
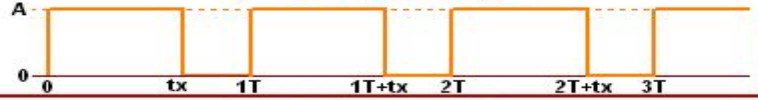
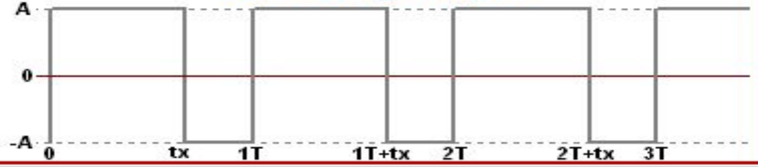
Señales Continuas: Las señales continuas en el tiempo (analógicas) están definidas por cada instante de tiempo y toman sus valores en un intervalo continuo (a,b), donde a puede ser -∞ y b puede ser ∞.
Matemáticamente, estas señales pueden describirse mediante funciones de una variable continua

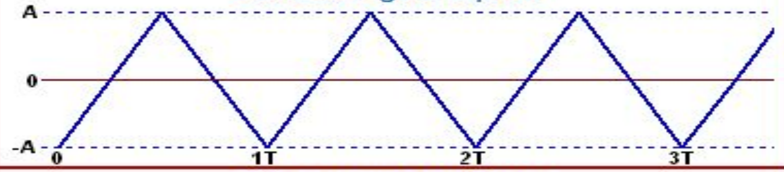
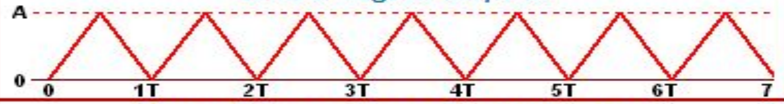
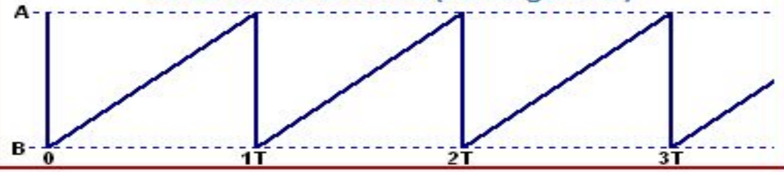
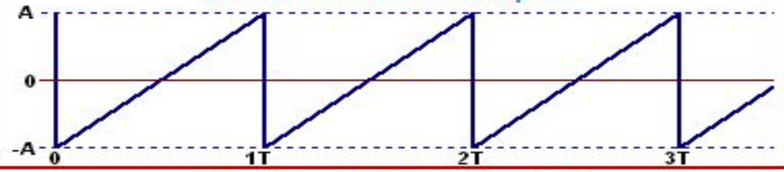
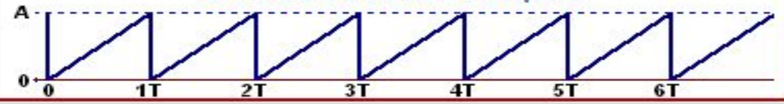
$$s1(t) = A sen 2\pi t + B$$



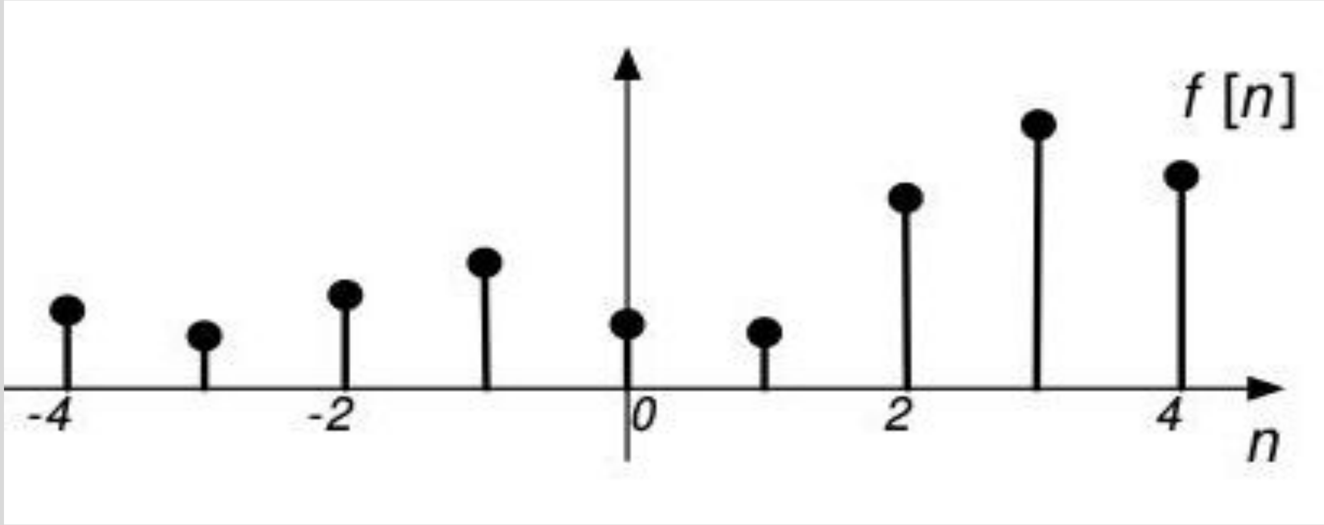
¿Qué tipo de señal senoidal conoce ?

https://www.geogebra.org/m/GmdMZyD9

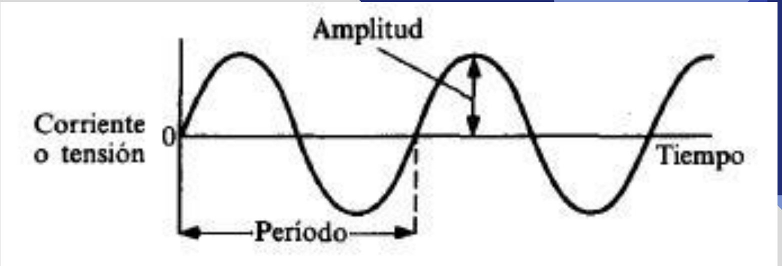
6	Señal cuadrada (forma general) 	$$A \geq B$$ $$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ B & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$	$$V_{med} = \frac{A+B}{2}$$ $$V_{ef} = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}}$$
7	Señal cuadrada unipolar 	$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$	$$V_{med} = \frac{A}{2}$$ $$V_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$
8	Señal cuadrada bipolar 	$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$	$$V_{med} = 0$$ $$V_{ef} = A$$
9	Señal rectangular (forma general) 	$$A \geq B$$ $$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq t_x \\ B & t_x \leq t \leq T \end{cases}$$	$$D = \frac{t_x}{T}$$ $$V_{med} = AD + B(1-D)$$ $$V_{ef} = \sqrt{A^2 D + B^2(1-D)}$$
10	Señal rectangular unipolar 	$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq t_x \\ 0 & t_x \leq t \leq T \end{cases}$$	$$D = \frac{t_x}{T}$$ $$V_{med} = AD$$ $$V_{ef} = A\sqrt{D}$$
11	Señal rectangular bipolar 	$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq t_x \\ -A & t_x \leq t \leq T \end{cases}$$	$$D = \frac{t_x}{T}$$ $$V_{med} = A(2D-1)$$ $$V_{ef} = A$$

12	Señal triangular (forma general) 	$A \geq B$ $$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2(A-B)t}{T} + B & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \\ \dfrac{2(B-A)t}{T} + 2A - B & \dfrac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$	$V_{med} = \dfrac{A+B}{2}$ $V_{ef} = \sqrt{\dfrac{A^2+AB+B^2}{3}}$
13	Señal triangular bipolar 	$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{4At}{T} - A & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \\ 3A - \dfrac{4At}{T} & \dfrac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$	$V_{med} = 0$ $V_{ef} = \dfrac{A}{\sqrt{3}}$
14	Señal triangular unipolar 	$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2At}{T} & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \\ 2A - \dfrac{2At}{T} & \dfrac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$	$V_{med} = \dfrac{A}{2}$ $V_{ef} = \dfrac{A}{\sqrt{3}}$
15	Señal diente de sierra (forma general) 	$$f(t) = \frac{(A-B)t}{T} + B \quad 0 \leq t \leq T$$	$V_{med} = \dfrac{A+B}{2}$ $V_{ef} = \sqrt{\dfrac{A^2+AB+B^2}{3}}$
16	Señal diente de sierra bipolar 	$$f(t) = \frac{2At}{T} - A \quad 0 \leq t \leq T$$	$V_{med} = 0$ $V_{ef} = \dfrac{A}{\sqrt{3}}$
17	Señal diente de sierra unipolar 	$$f(t) = \frac{At}{T} \quad 0 \leq t \leq T$$	$V_{med} = \dfrac{A}{2}$ $V_{ef} = \dfrac{A}{\sqrt{3}}$

Señales Discretas: Las señales discretas en el tiempo sólo están definidas en determinados instantes específicos de tiempo. Dichos instantes no tienen que ser equidistantes, aunque, en la práctica, normalmente están igualmente espaciados para facilitar los cálculos.
La señal $s_1 t_n = e^{-t_n}$, n = 0,1,2, ... es un ejemplo de una señal discreta. Con el fin de resaltar la naturaleza discreta al usar el índice n, se denota a dicha señal como $s_1[n]$.

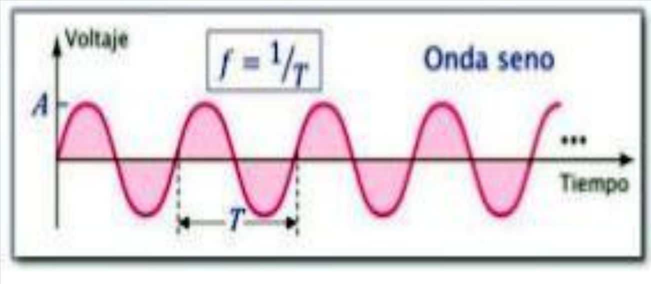


Repaso



Amplitud (A): es el valor máximo que tiene una señal, medida desde el valor "0"

Ciclo: la onda se repite con un mismo orden se dice que ha completado un patrón.



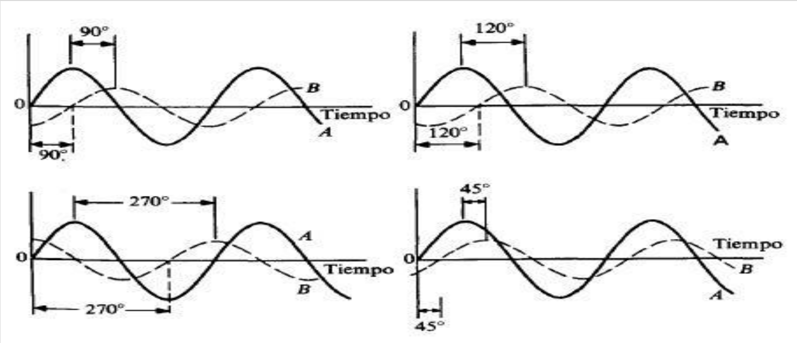
Período (T): es la cantidad de tiempo que necesita una señal para completar un

ciclo; se mide en "segundos", T=1/f.

Frecuencia (f): es la cantidad de períodos o ciclos en un segundo cuya magnitud

son los Hz. La frecuencia es la inversa del periodo. f=1/T

Fase: describe la posición de la forma de onda relativa al instante de tiempo 0.



Conceptos Claves

1) Las sinusoides juegan un papel importante en el procesamiento de señales.
   a) Se dan con frecuencia en los fenómenos físicos.
   b) Estamos familiarizados con la noción de frecuencia en el sonido, el mar , y otros fenómenos periódicos.
   c) Cualquier señal física puede representarse como una suma ponderada de sinusoides.

2) Las sinusoides de tiempo discreto y continuo se describen mediante una amplitud, frecuencia y fase.

3) La frecuencia de una sinusoide es la inversa del período.
   a) El período se mide en el número de muestras (tiempo discreto) o segundos (tiempo continuo) para un "ciclo" de la sinusoide.
   b) La frecuencia de una sinusoide de tiempo continuo se mide en ciclos/segundo (Hertz - Hz), o radianes/segundo.

   c) La frecuencia de una sinusoide de tiempo discreto se mide en radianes/muestra o radianes.

4) Las sinusoides de tiempo continuo con distintas frecuencias siempre son distintas

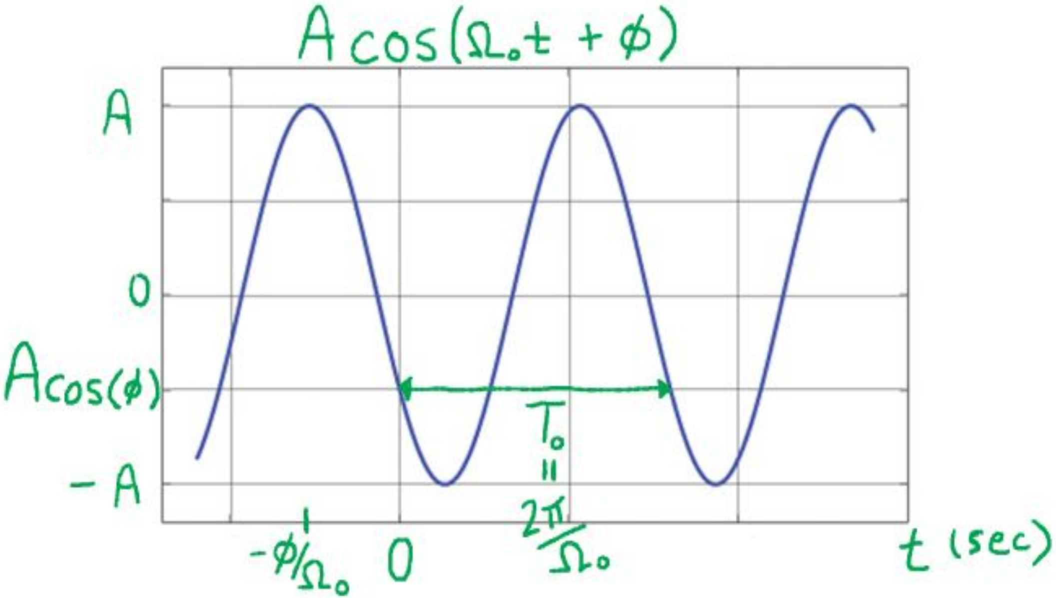
5) Sinusoides de tiempo discreto con frecuencias desplazadas por múltiplos enteros de 2π son idénticos.

6)La relación entre la frecuencia Ω rads/seg de un tiempo continuo sinusoide a la frecuencia ω rads de una sinusoide de tiempo discreto está dada por:

$\omega = \Omega T$ donde T es el intervalo de muestreo.

SEÑAL TIEMPO CONTINUO

$$x(t) = A\cos(\Omega_o t + \phi)$$

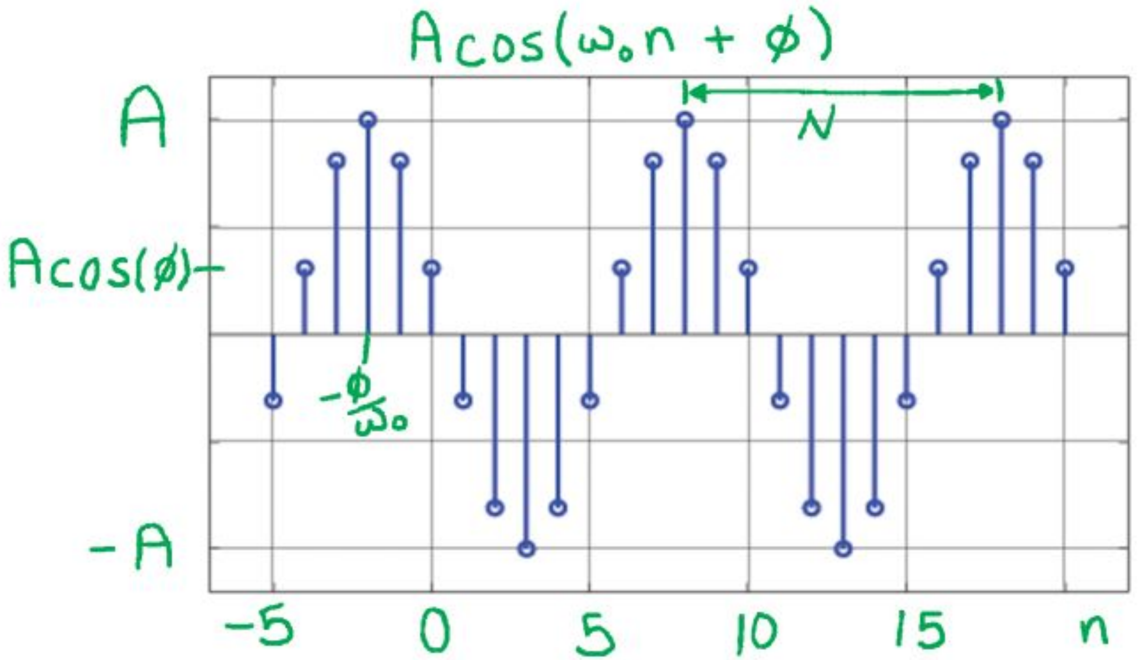


Amplitude: A
Phase Shift: ϕ
Frequency: Ω_o

Period: $T_o = \dfrac{2\pi}{\Omega_o}$

SEÑAL TIEMPO DISCRETO

$$x[n] = A\cos(\omega_o n + \phi)$$



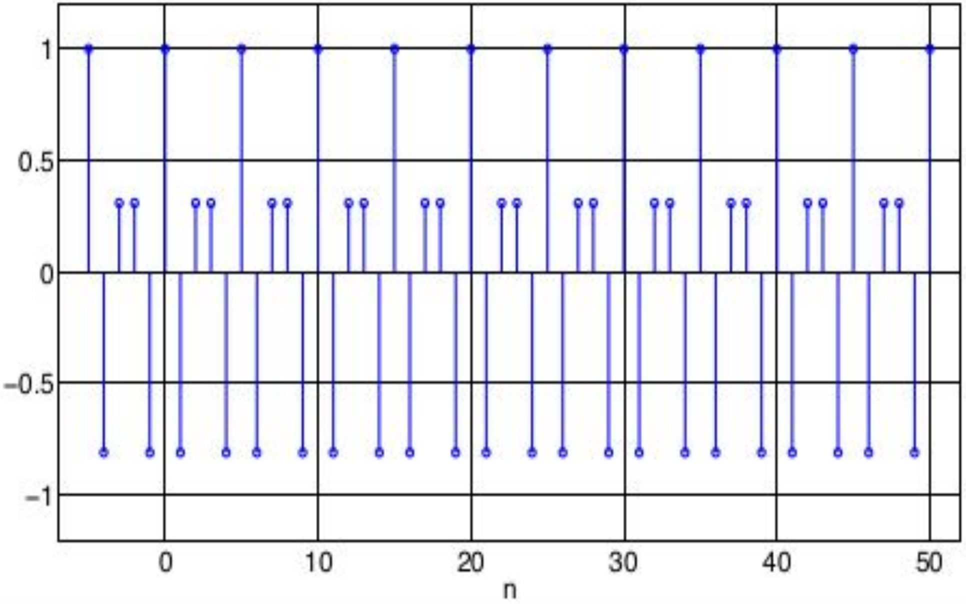
Amplitude: A

Phase Shift: ϕ

Frequency: ω_o

Period: N

$$x[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$



$$x[n] = A\cos(\omega_o n + \phi)$$

$$N,\ n \ \text{Integers}$$

$$\omega_o = \frac{2\pi m}{N} \ \text{integer } m$$

FRECUENCIA

- Frecuencia =1/Periodo
- En tiempo continuo (CT) el periodo se mide en segundos
- En tiempo discreto (DT) el periodo se mide en muestras

CT Period: T_o sec	DT Period: N samples
$f_o = \dfrac{1}{T_o}$ cycles/sec or Hz	$\dfrac{1}{N}$ cycles/sample
2π rads/cycle	$2\pi m$ rads/cycle
$\Omega_o = 2\pi f_o = \dfrac{2\pi}{T_o}$ rads/sec	$\omega_o = \dfrac{2\pi m}{N}$ rads/sample or rads

Tener en cuenta que:

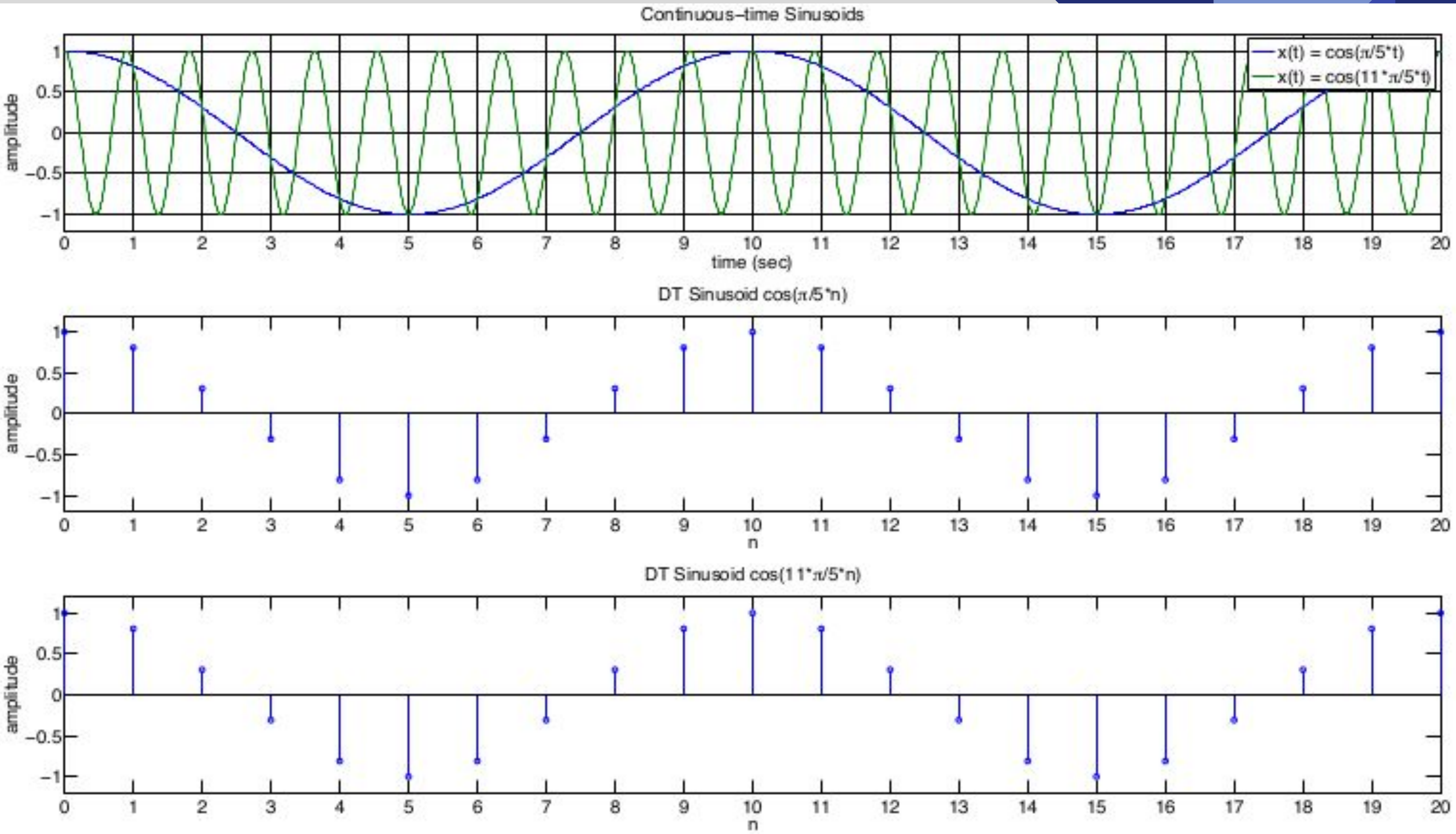
En el caso del tiempo continuo: **diferentes frecuencias -> diferentes sinusoides**

$$\textbf{Si } \Omega 1 \neq \Omega 2 \Rightarrow \textbf{sen}(\Omega 1 * t) \neq \textbf{sen}(\Omega 2 * t)$$

En Tiempo Discreto: **Una frecuencia Desplazada por m*2*π -> Igual sinusoide**

$$\textbf{Si } w2 = w1 + m*2*\pi \Rightarrow \textbf{sen}(w2*n + \phi) = \textbf{sin}(w1*n + \phi)$$

m siempre tiene que ser un número entero



Continuous–time Sinusoids
x(t) = cos(π/5*t)
x(t) = cos(11*π/5*t)
amplitude
time (sec)
DT Sinusoid cos(π/5*n)
amplitude
n
DT Sinusoid cos(11*π/5*n)
amplitude
n

Ejemplos de señales continuas y discretas en python

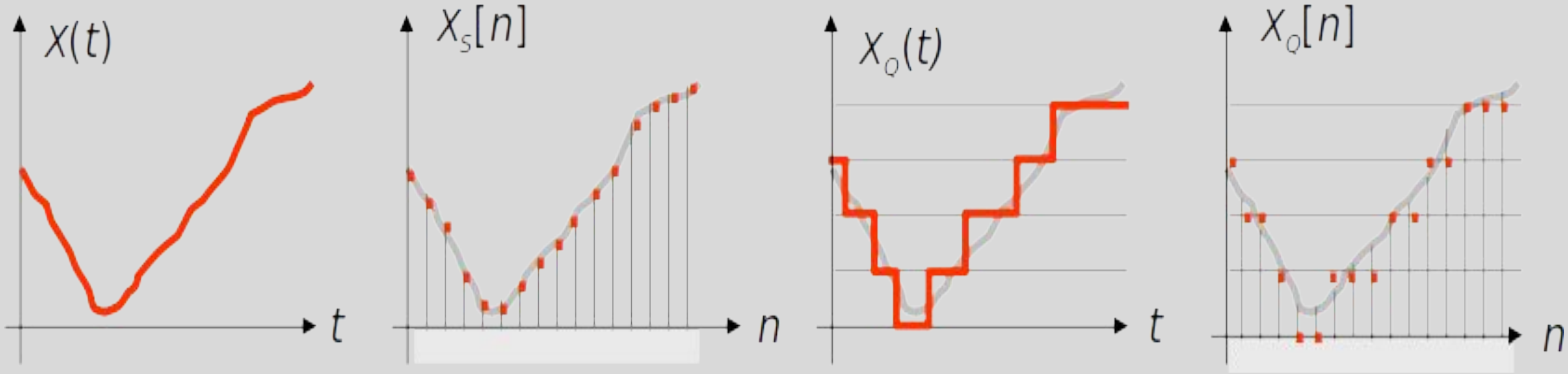
- Ver código

  cosenocontinua.py
  senocontinua.py

  senodiscreta.py
  cosenodiscreta.py

Otro concepto básico en PDS:

- **Analógicas, x(t): amplitud y tiempo continuos**
- **Muestreadas, xS[n]: tiempo discreto, amplitud continua**
- **Cuantizadas, xQ(t): tiempo continuo, amplitud discreta**
- **Digitales, xQ[n]: tiempo y amplitud discretos**



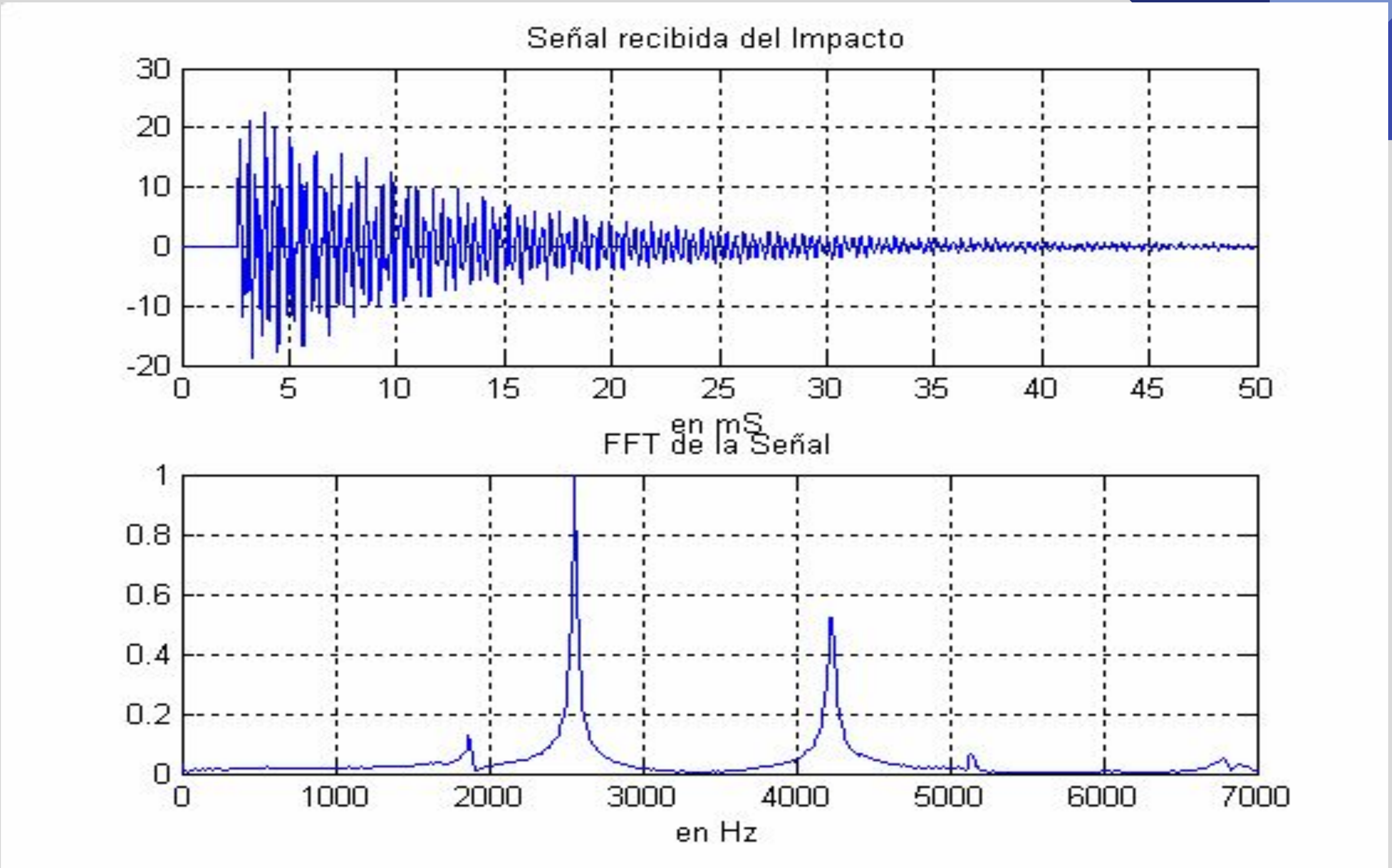
Señales Determinísticas: El procesamiento y análisis matemático de señales requiere disponer de una descripción matemática para la propia señal. Esta descripción matemática, a menudo se denomina modelo de señal. Cualquier señal que se puede describir mediante una expresión matemática explícita, una tabla de datos o una regla es determinista. Este término se emplea para destacar que todos los valores pasados, presentes y futuros de la señal se conocen de forma precisa.

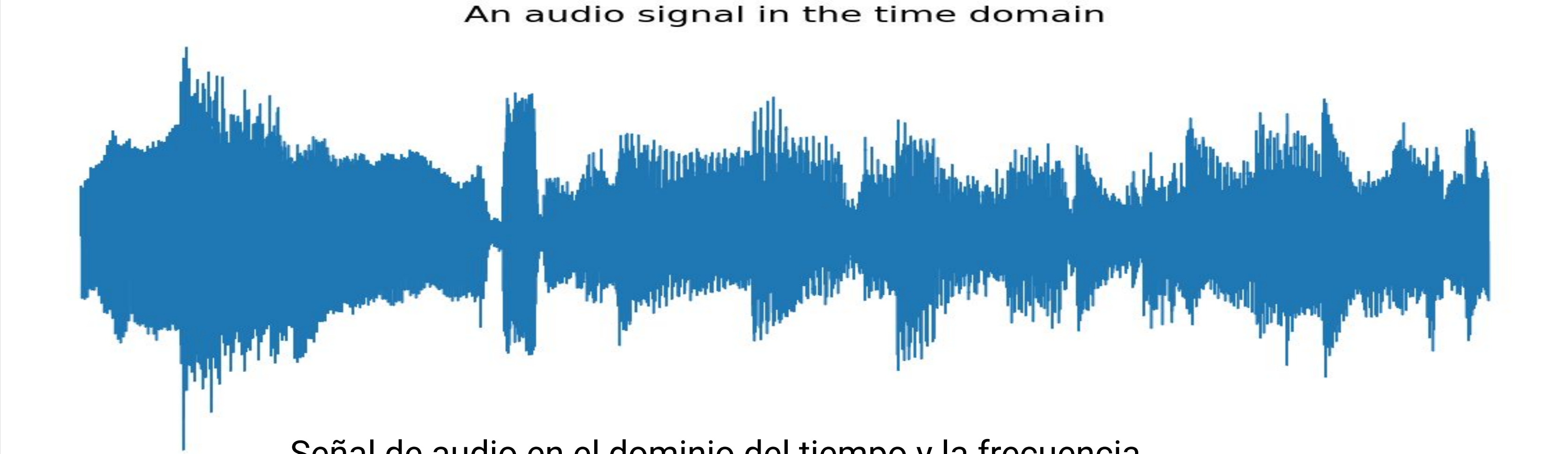
Señal Aleatoria: En otras aplicaciones prácticas, existen señales que o no se puede describir con un grado razonable de precisión mediante fórmulas matemáticas o una descripción resulta demasiado compleja. Con ello se puede decir que éstas señales evolucionan en el tiempo de manera no predecible, son consideradas aleatorias.
Es clasificación puede que en algunos casos no sea clara y puede provocar análisis y resultados erróneos.

Dominios de Representación

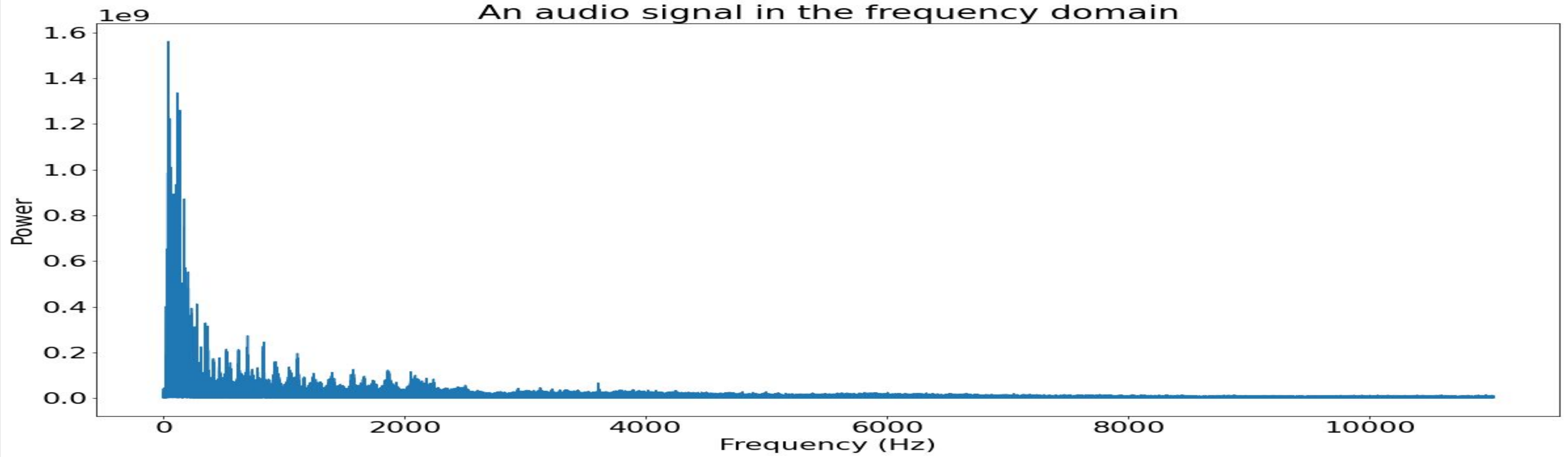
Dominio de tiempo: El análisis en el dominio del tiempo define una señal o función matemática en cada instante del tiempo.
Discreto: Se conoce en algunos puntos del eje temporal.
Continuo Se conoce para todos los números reales.

Dominio de la frecuencia: El análisis de las propiedades de una señal o función matemática respecto a su frecuencia.
Muestra las componentes de la señal según la frecuencia en la que oscilan dentro de un rango determinado.


Señal recibida del Impacto
30
20
10
0
-10
-20
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
en mS
FFT de la Señal
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
en Hz



Señal de audio en el dominio del tiempo y la frecuencia



Modelos matemáticos de una señal

Señales temporales

Ej. Voltaje,

$$v(t) = A\cos(2\pi ft + \theta) \qquad \forall t \in \Re$$

$$v(t) = A(t)\cos(2\pi ft + \theta(t)) \qquad A(t)\ y\ \theta(t)$$ representados como modelos probabilísticos

Señales espaciales

Ej. Imágenes fijas, $i(x, y) \quad i(x, y, z)$

Señales espacio-temporales

Ej. Video, $i(x, y, t)$

Procesamiento Digital de Señales

Convertidor analógico / digital y digital / analógico, CPU, DSP, ASIC, FPGA, SDR.

Ventajas:

- el ruido es fácil de controlar después de la cuantificación inicial
- altamente lineal (dentro del rango dinámico limitado)
- algoritmos complejos que se implementan en un solo chip
- flexibilidad, los parámetros se pueden variar fácilmente en el software
- el procesamiento digital es insensible a las tolerancias de componentes, envejecimiento, condiciones ambientales, interferencia electromagnética

Desventajas:

- artefactos de procesamiento de tiempo discreto (alias)
- puede requerir significativamente más energía (batería, enfriamiento)
- reloj digital y conmutación causan interferencia

https://www.youtube.com/watch?v=EErkgr1MWw0&t=124s

Señales Periódicas y No Periódicas

Una señal periódica continua tiene la propiedad de que su valor se repite luego de un desplazamiento de tiempo T.

$$x(t)=x(t+T)$$

El valor de T es conocido como el periodo de la señal.

La relación entre el periodo T y la frecuencia f se da por la ecuación:

$$f=1/T, \text{ en Hz}$$
$$\omega=2\pi f=2\pi/T, \text{ en rad/s}$$

otra forma de escribir la ecuación es:

$$x(t)=x(t+mT)$$

para cualquier valor de t y cualquier número entero m. El periodo fundamental T_0 de x(t) es el valor positivo más pequeño que hace posible la ecuación descrita.

ver código coseno.py

Señales Periódicas y No Periódicas

Se define semejante a las señales periódicas continuas como una secuencia discreta en el tiempo x[n]. La señal es periódica con periodo N si existe un número entero positivo para el que:

$$x[n+N]=x[n], \text{ para todo } n$$

$$x[n+mN]=x[n] \quad \text{para todo } n \text{ y cualquier entero } m$$

El período fundamental N_0 de x[n] es el valor positivo más pequeño para que se cumpla la ecuación en la secuencia de datos de la señal.

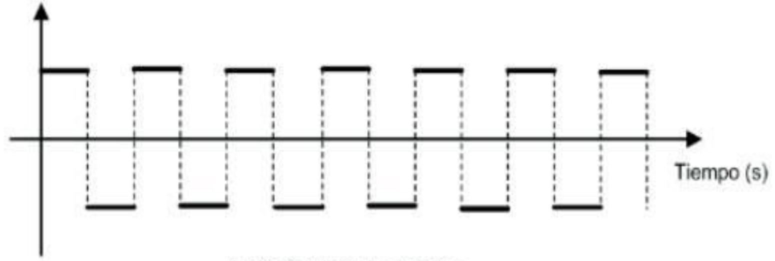
Señales No Periódicas

Una **señal aperiódica**, o **no periódica**, cambia constantemente sin exhibir ningún patrón o ciclo que se repita en el tiempo. Sin embargo, se ha demostrado mediante una técnica denominada transformada de Fourier, que cualquier señal aperiódica puede ser descompuesta en un número infinito de señales periódicas.

Un ejemplo de este tipo de señal es : x(t)=t^2

ver código senalaperiodica.py

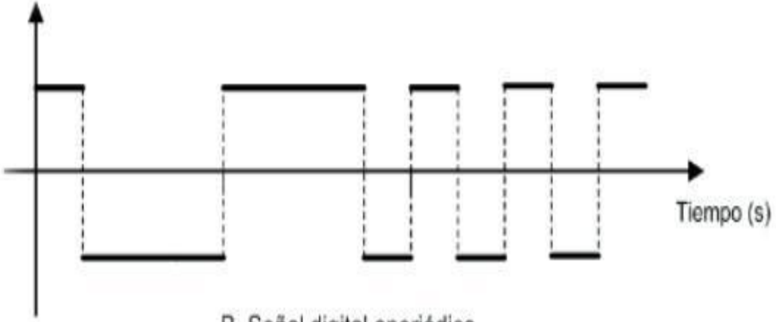
Señales digitales periódicas y no periódicas



A. Señal digital periódica

Por ejemplo una señal de reloj que se utiliza como señal de temporización básica para sincronizar otras señales.

ver código senaldigcuadpeiodica.py



B. Señal digital aperiódica

Por ejemplo podría una transmisión serie de bits

Señales periódicas compuestas sumas

Cualquier señal x(t) que sea igual a la suma de dos señales periódicas, x1(t) y x2(t), con períodos fundamentales T1 y T2 respectivamente, será periódica si se cumple la siguiente relación:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad T = nT_1 = mT_2 \quad m,n \in enteros$$

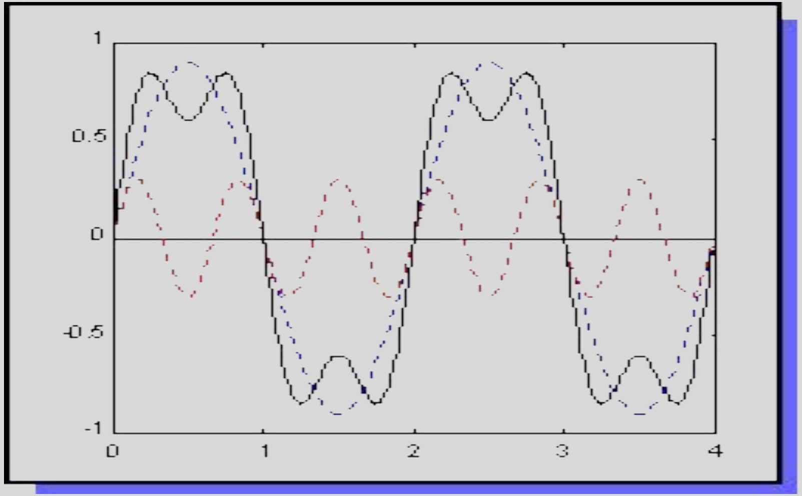
Ejemplo de una suma Periódica

$$x_1(t) = 0.9 Sen(\pi t) \qquad T_1 = 2$$

$$x_2(t) = 0.3 Sen(3\pi t) \qquad T_2 = \frac{2}{3}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{1}$$

$$x(t)\ es\ periódica \qquad T = 1T_1 = 3T_2 = 2$$



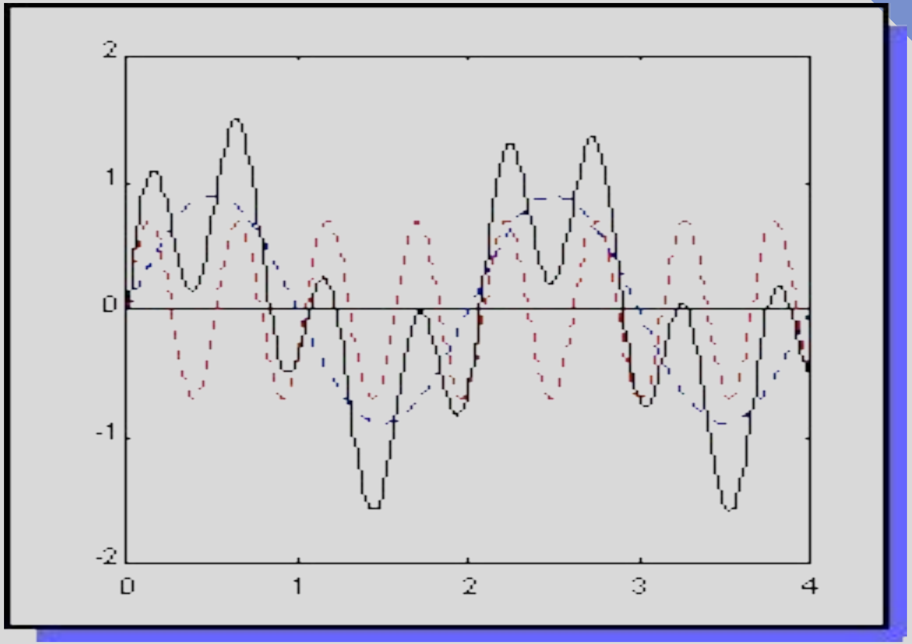
Ejemplo de una suma Aperiódica

$$x_1(t) = 0.9 Sen(\pi t) \qquad T_1 = 2$$

$$x_2(t) = 0.7 Sen(12t) \qquad T_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\frac{\pi}{6}} = \frac{12}{\pi}$$

$$x(t)\ no\ es\ periódica \qquad m, n \notin enteros$$



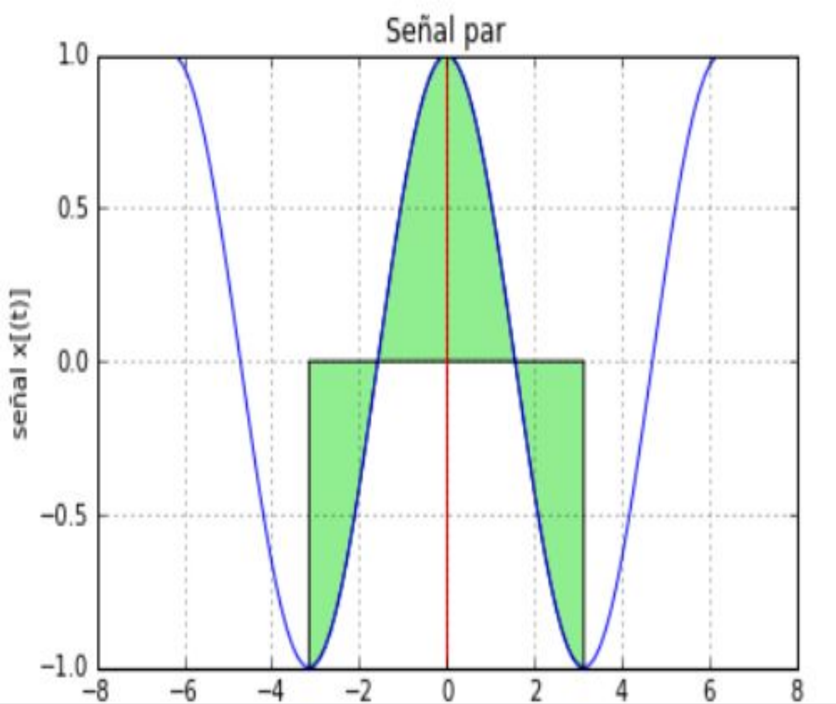
Señales Pares

Una señal x(t) ó x[n] es **par** si se «refleja» en el eje vertical u ordenadas.

$$x(t)=x(-t)$$
$$x[n]=x[-n]$$

La señal tiene los mismos valores para el lado positivo o negativo de |t|.

Es como si se aplicara el valor absoluto de **t** antes de hacerlo en la ecuación.

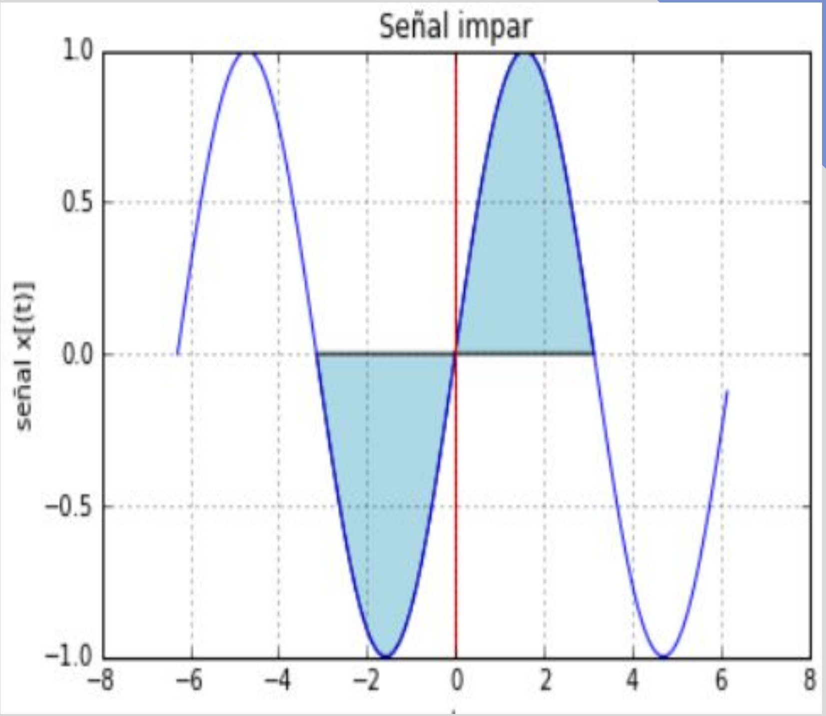


Señales Impares

Una señal **x**(t) ó **x**[n] es **impar** si se cumple que:

$$x(t) = -x(-t)$$
$$x[n] = -x[-n]$$

Una señal impar debe ser necesariamente 0 en **t**=0 o **n**=0.



- Una forma de reconocer una función par, es cuando es simétrica con respecto al eje de las ordenadas.

- Para una función impar las mismas dos imágenes son un espejo negativas una de otra .

Ni Par Ni Impar

✓ Cualquier función g(t), incluso si no es par ni impar, puede expresarse como la suma de sus partes par e impar:

$$g_e(t) = \frac{g(t) + g(-t)}{2} \qquad g_o(t) = \frac{g(t) - g(-t)}{2}$$

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

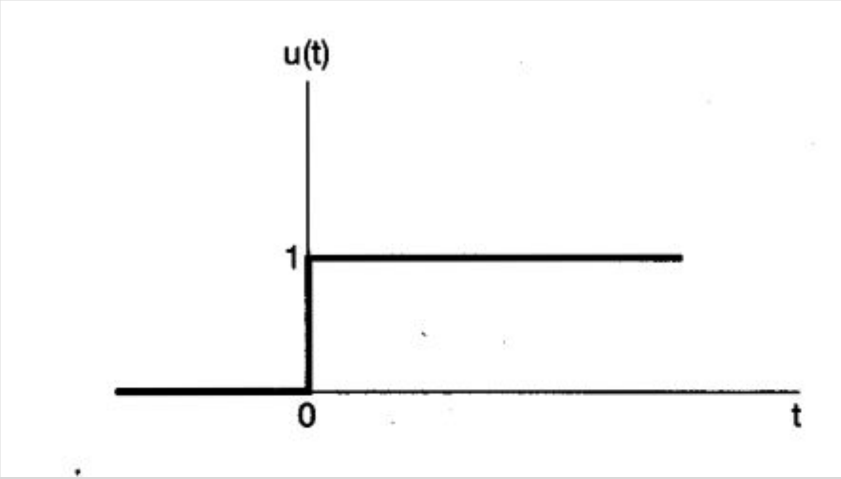
ver código de señal exponencial.py

Señal Escalón

La función escalón de Heaviside, también llamada función escalón unitario o de causalidad a la derecha del cero. Es una función discontinua cuyo valor es 0 para cualquier argumento negativo, y 1 para cualquier argumento positivo, incluido el cero.

Algunas señales pueden convenientemente ser descritas usando términos de una función μ(t).

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases},$$



ver código escalon.py

Posee dos propiedades importante

1) Puede convertir una señal cualquiera a causal, que inicie en t=t0, cuando se multiplica la señal por μ(t).

Por ejemplo, $x(t)=e^{-\alpha t}$ se puede convertir a una señal causal si se escribe como:

$$x(t)=\mu(t)xe^{-\alpha t}$$

Ver código escaloncausal.py

1) Permite realizar descripciones matemáticas sobre diferentes segmentos del tiempo para cualquier función.
Por ejemplo, una señal rectangular se puede representar como la suma de dos señales μ(t) desplazadas.

Ver código escalonrectangular.py

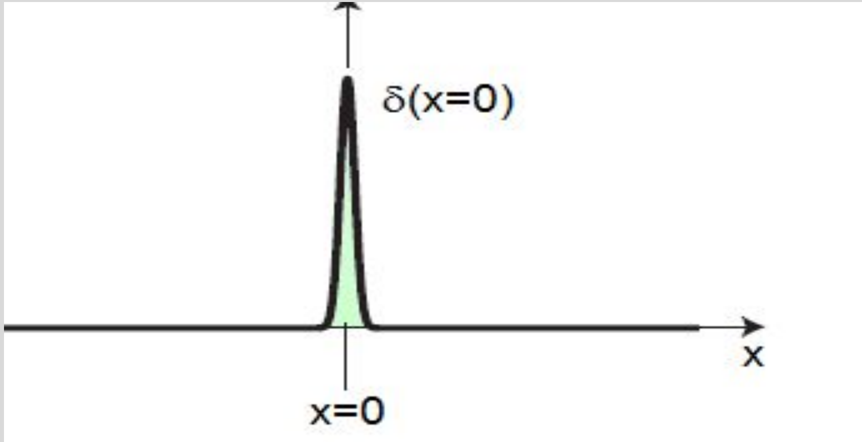
Impulso unitario δ(t)

El impulso unitario δ(t) es una función definida primero por Paul Dirac de la forma:

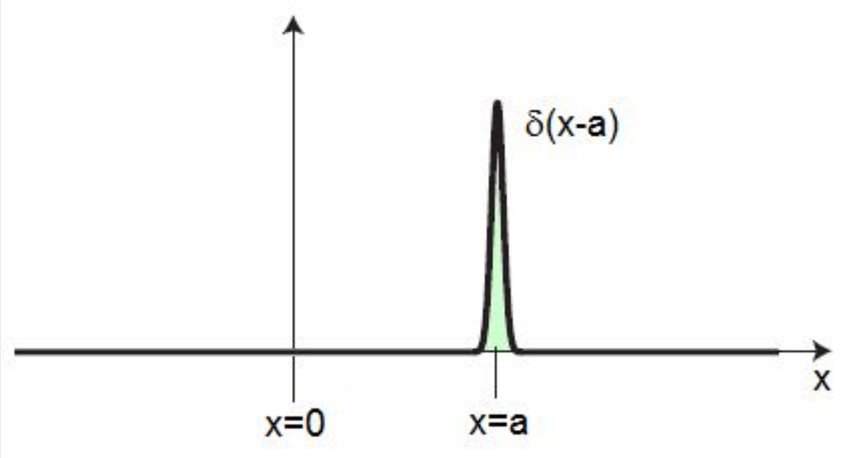
$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

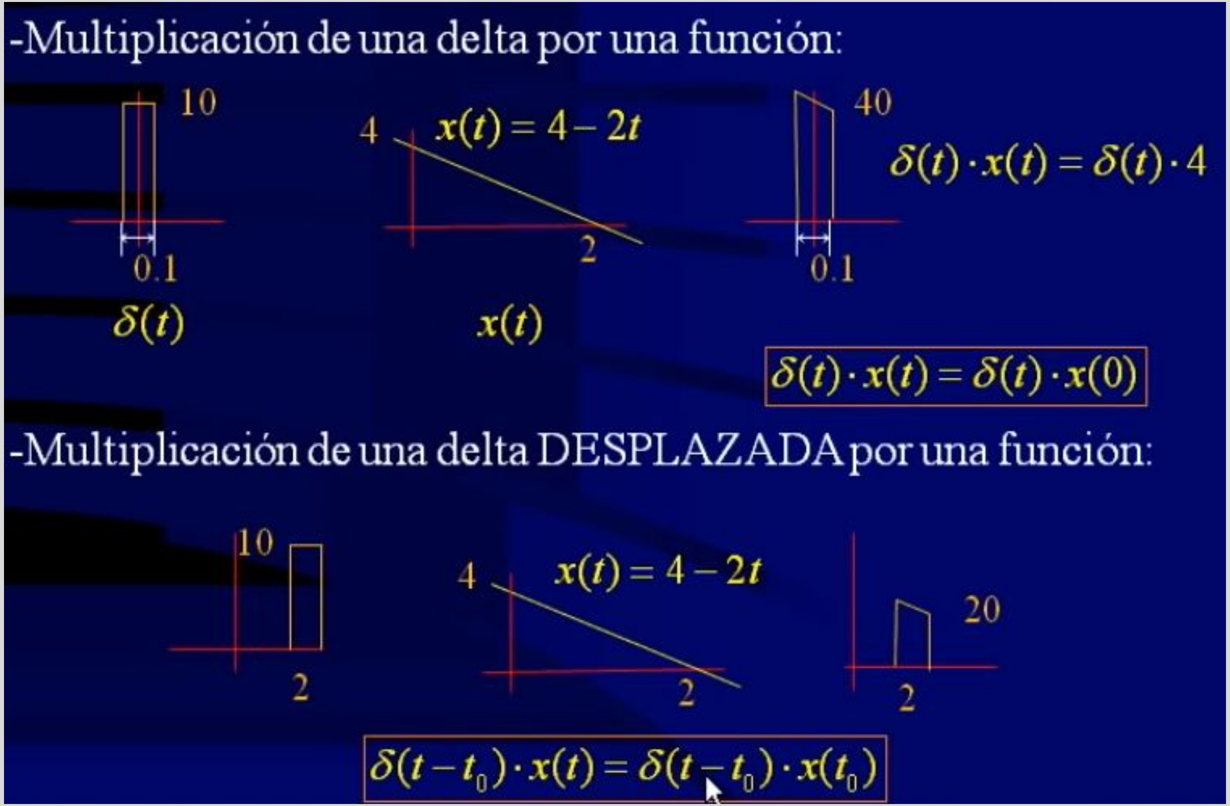
Se puede ver al impulso como un pulso rectangular muy pequeño de área unitaria. El ancho del pulso rectangular es muy pequeño.



Gráfica de Delta de dirac
centrada en 0

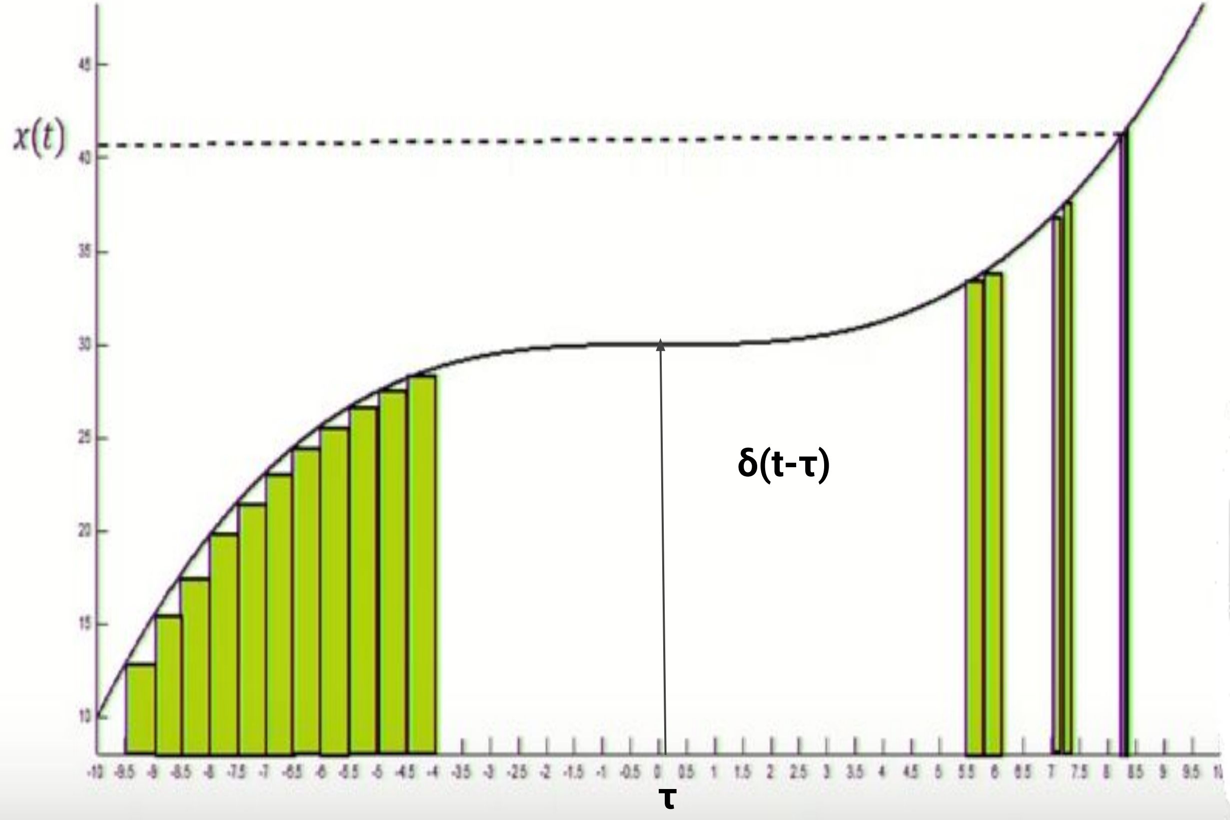


Gráfica de Delta de dirac
centrada en a



Esta propiedad es la mas importante de la función Delta
.Porque permite describir cualquier función como una suma infinitesimal de infinitas deltas de DIRAC ponderadas y desplazadas en el tiempo

- Caso tiempo continuo:
  - La convolución se fundamenta en la capacidad de poder descomponer cualquier señal como suma ponderada de deltas de Dirac.



$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Operaciones con Señales

- Desplazamiento en el tiempo.

$$f(t)=x(t +/- k)$$

- Compresión o expansión en el tiempo

$$f(t)=x(kt)$$

- Reflexión

$$f(t)=x(-t)$$

Ver ejemplos en python

Señales de Energía y Potencia

Señal de Energía finita (continua)

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < +\infty$$

Señal de potencia finita (continua)

$$0 < \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt < +\infty$$

De Energía finita (Discreta)

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Señal de potencia finita(Discreta)

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=+N} |x(n)|^2$$

Una condición necesaria para que la señal sea finita es que su amplitud → 0 cuando |t|→ ∞. En cualquier otro caso la integral no converge.

Si en x(t) la amplitud no tiende → 0 al mismo tiempo que |t|→ ∞, la energía de la señal será infinita.

Una mejor medida de la señal en este caso es promedio de energía en un intervalo de tiempo T, si és periódica, existe T.

Cálculo de la potencia de una señal senoidal

$$P = \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} |sin(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - cos(2t))dt$$

$$= \frac{1}{4\pi} (t - \frac{1}{2} sin(2t))\Big|_{t=0}^{t=2\pi}$$

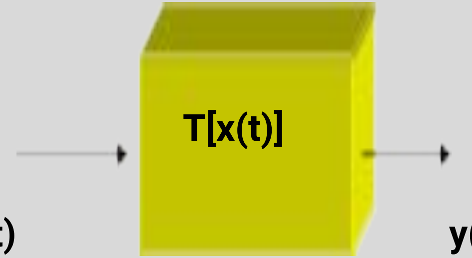
$$= \frac{1}{4\pi} (2\pi) \quad = \frac{1}{2}$$

ver código potenciaseno.py

Sistemas

Un sistema es cualquier conjunto físico de componentes que actúan en una señal, tomando una o más señales de entrada, y produciendo una o más señales de salida

Señal de Entrada
o
excitación

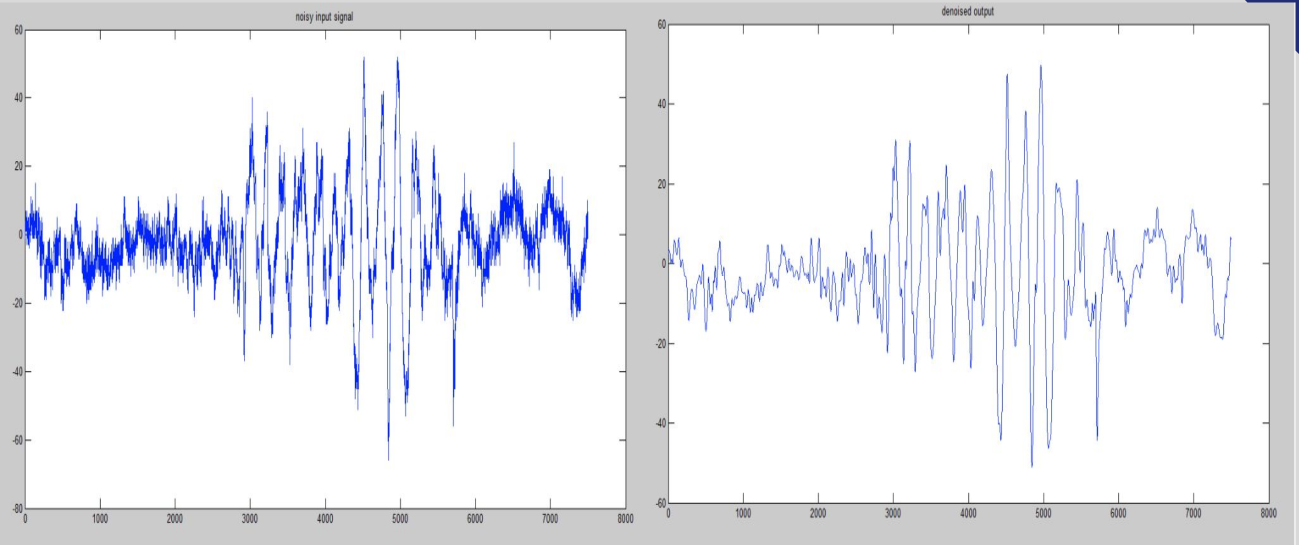


Señal de salida o
Respuesta

x(t)

y(t)

Es válido tanto para sistemas continuos, como para discretos.



Señal de entrada ruidosa-Señal de salida procesada sin ruido-Mediante hardware

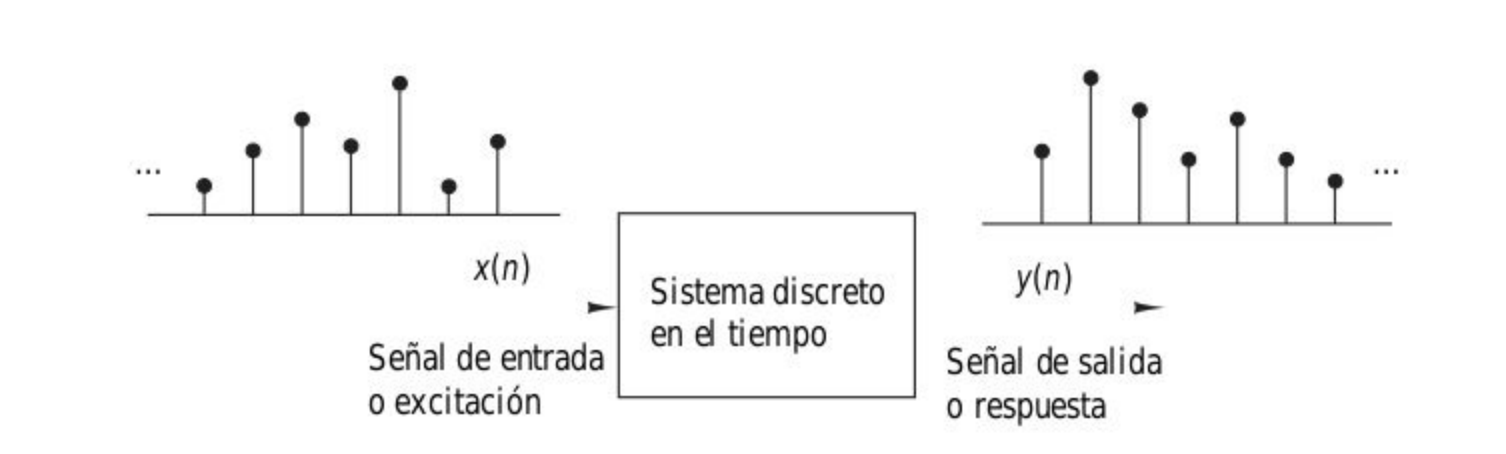
Señal de entrada (o imagen de entrada) sin focaliza-Señal de salida focalizada-Mediante Software

Entradas y salidas de un sistema

Los sistemas pueden tener.

– Una entrada y una salida (SISO – Single Input, Single output)

– Varias entradas, varias salidas (MIMO – Multiple Input, Multiple output)



Propiedades de los sistemas

Sistema estático ó sin memoria : si su salida en cualquier valor de la variable independiente (t ó n), depende a lo sumo de la entrada en ese mismo instante.

$$y(t)=Ax(t)$$

$$y[n]=x**2[n]+x[n]$$

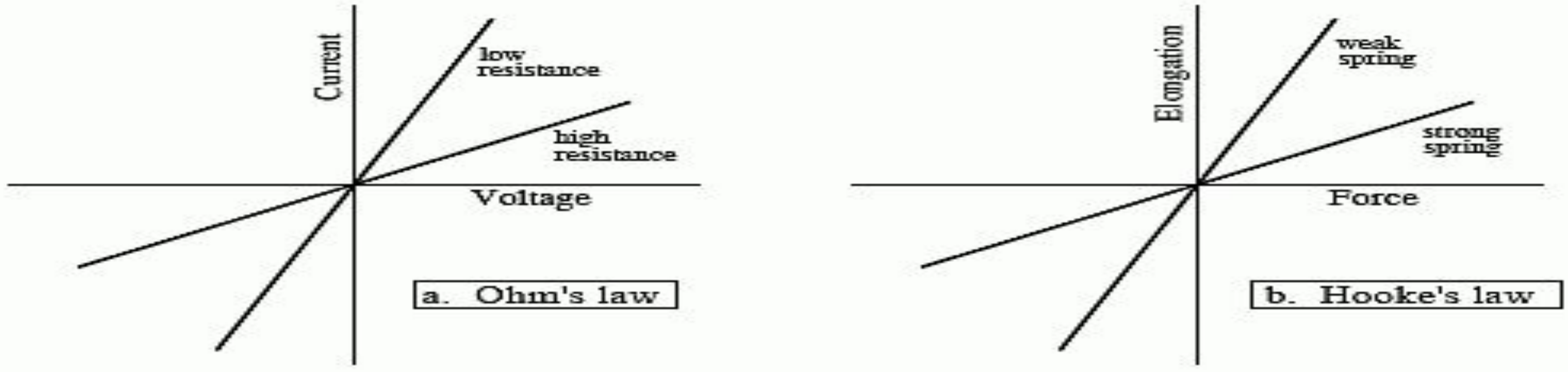


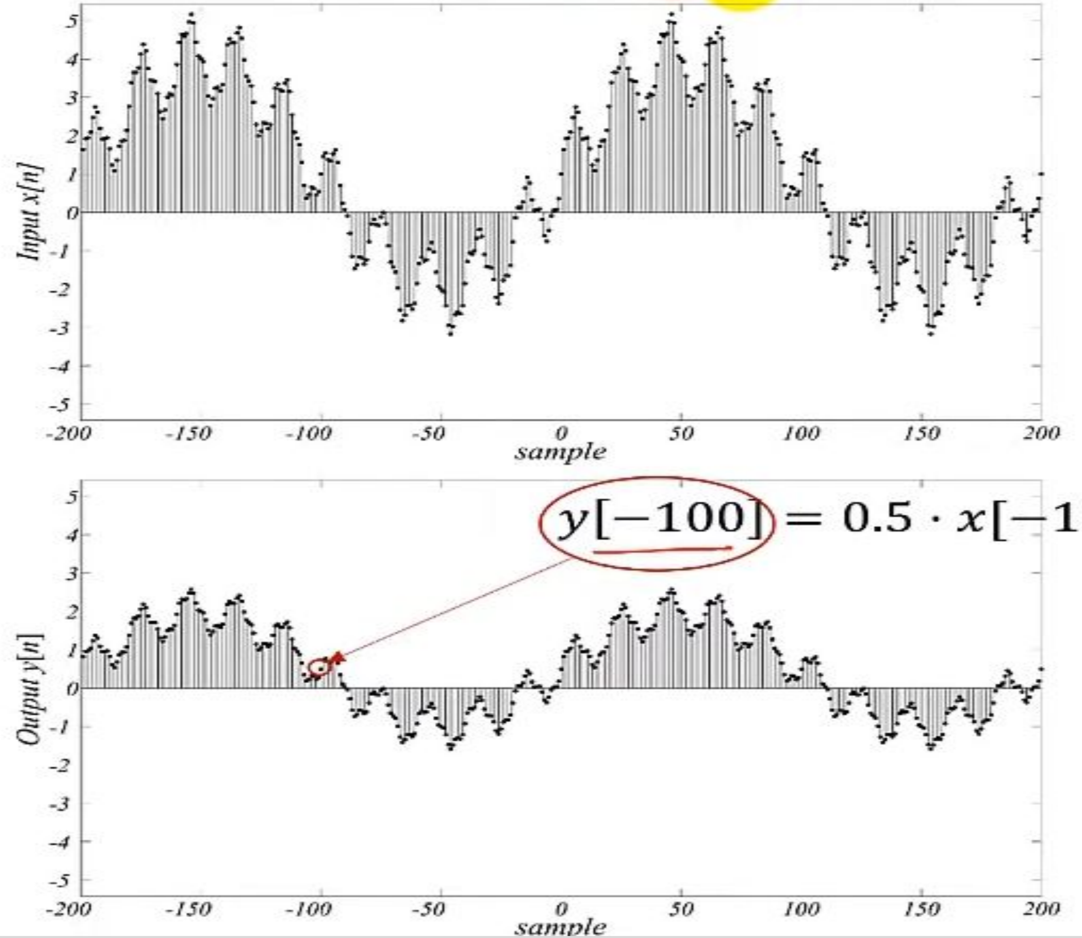
FIGURE 5-5
Two examples of static linearity. In (a), Ohm's law: the current through a resistor is equal to the voltage across the resistor divided by the resistance. In (b), Hooke's law: The elongation of a spring is equal to the applied force multiplied by the spring stiffness coefficient.

Sistema dinámico ó con memoria : cuando su salida en un instante depende del valor de la entrada en otros instantes.

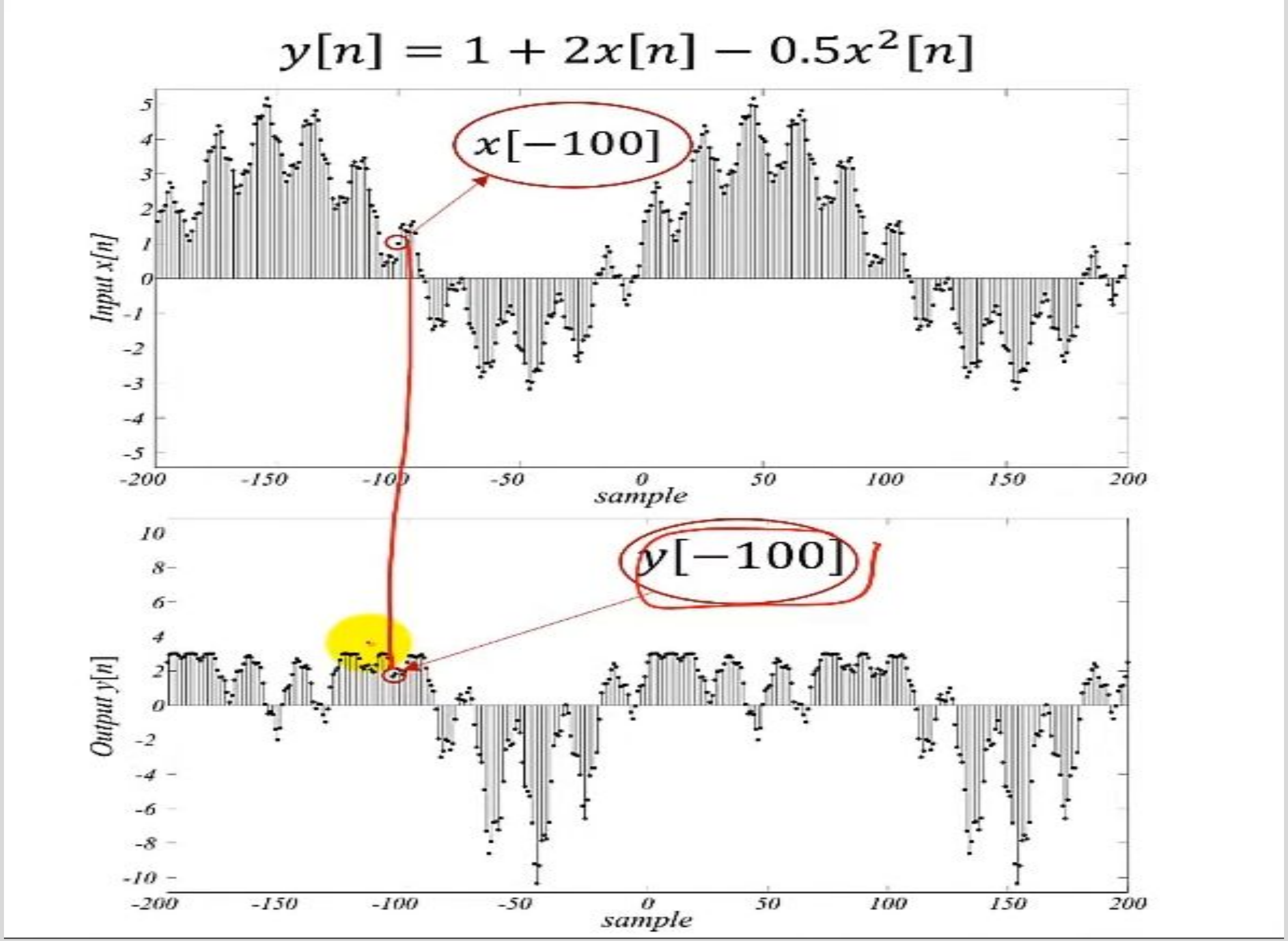
$$y(t)=1/C\int x(t)dt$$ **tensión en un Capacitor**

$$y[n]=x[n-1]$$ **retardo**

$$y[n] = 0.5 \cdot x[n]$$

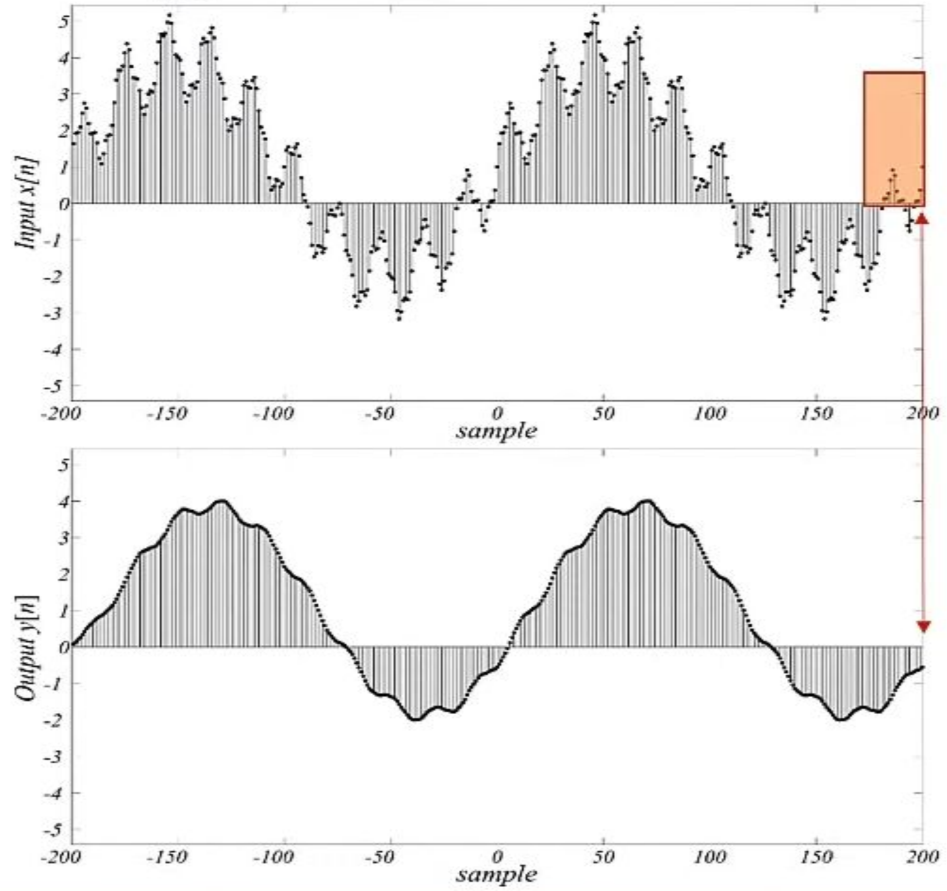


$$y[-100] = 0.5 \cdot x[-100]$$

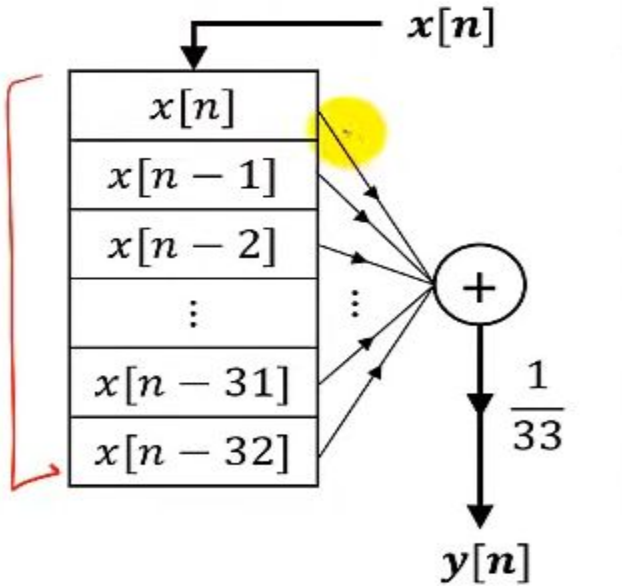


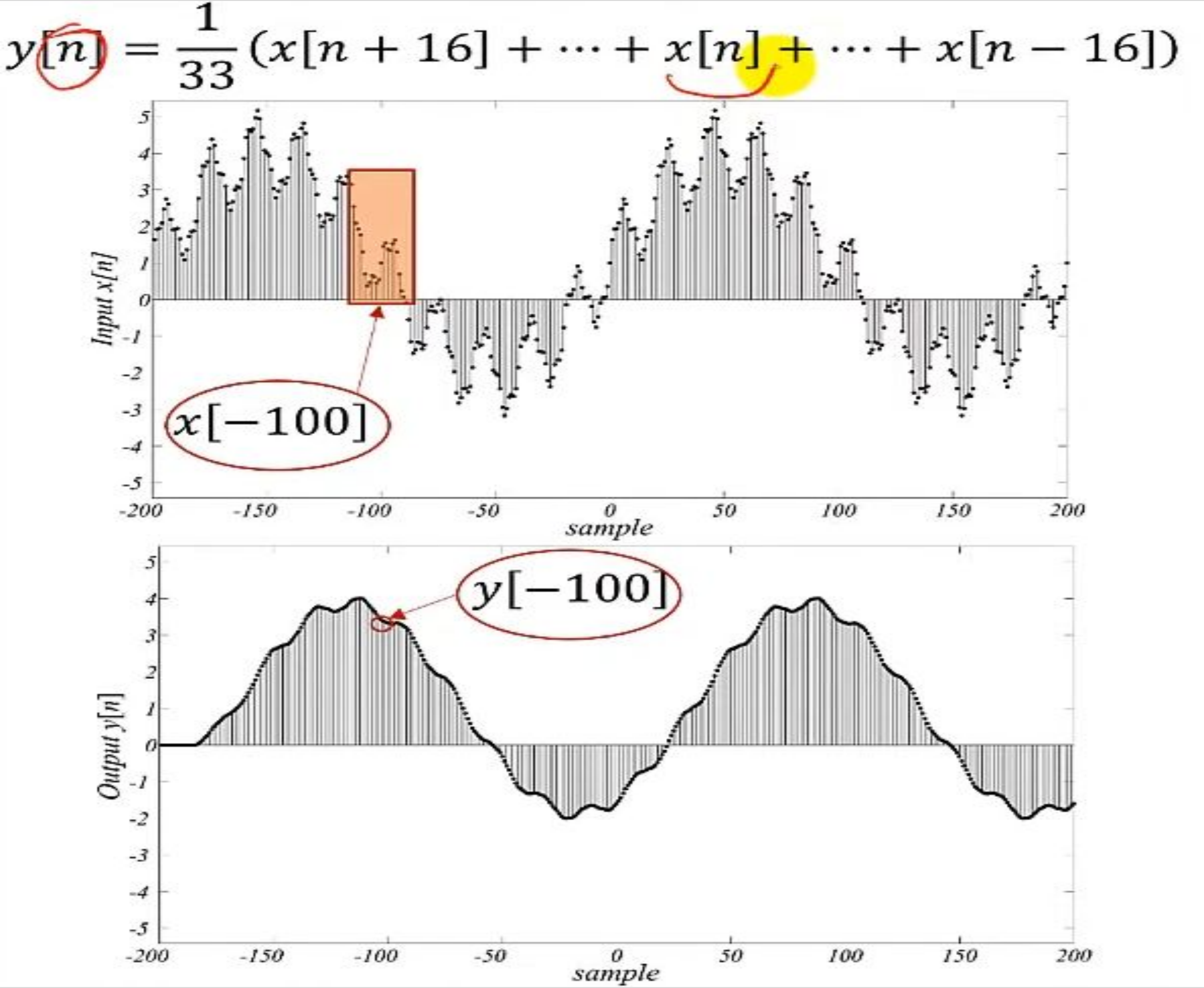
$y[n] = 1 + 2x[n] - 0.5x^2[n]$
$x[-100]$
Input x[n]
sample
$y[-100]$
Output y[n]
sample

$$y[n] = \frac{1}{33}(x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-32])$$



Filtro pasabajo- Promediado Móvil





¿Qué sistema conviene?

Menos memoria: Más barato y más sencillo el sistema y además más rápido.

Sistemas Lineales y no lineales

Un sistema es lineal si cumple con 2 propiedades matemáticas.

HOMOGENEIDAD

ADICIÓN

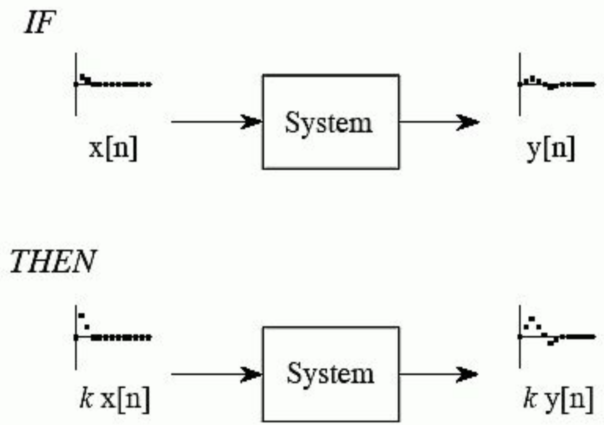


FIGURE 5-2
Definition of homogeneity. A system is said to be *homogeneous* if an amplitude change in the input results in an identical amplitude change in the output. That is, if $x[n]$ results in $y[n]$, then $kx[n]$ results in $ky[n]$, for any signal, $x[n]$, and any constant, k.

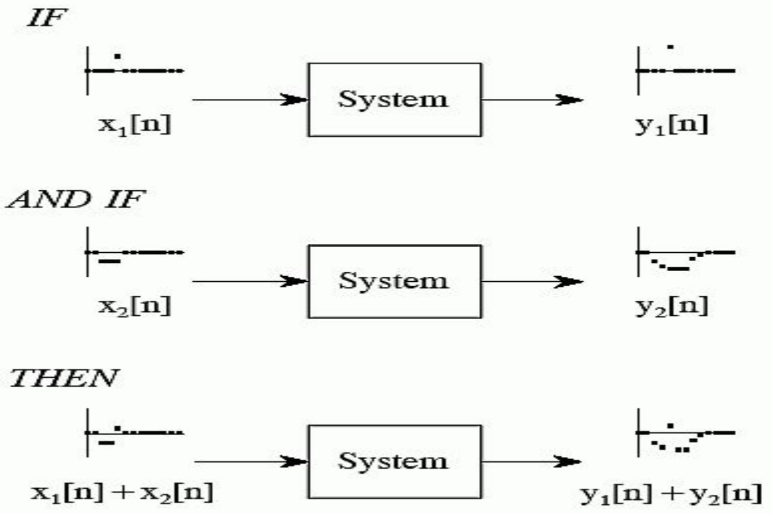
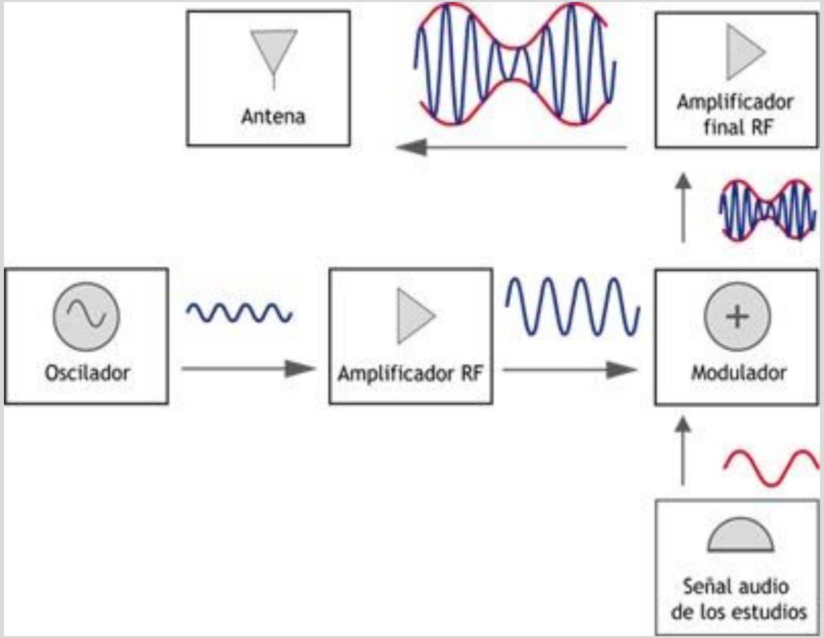


FIGURE 5-3
Definition of additivity. A system is said to be *additive* if added signals pass through it without interacting. Formally, if $x_1[n]$ results in $y_1[n]$, and if $x_2[n]$ results in $y_2[n]$, then $x_1[n]+x_2[n]$ results in $y_1[n]+y_2[n]$.

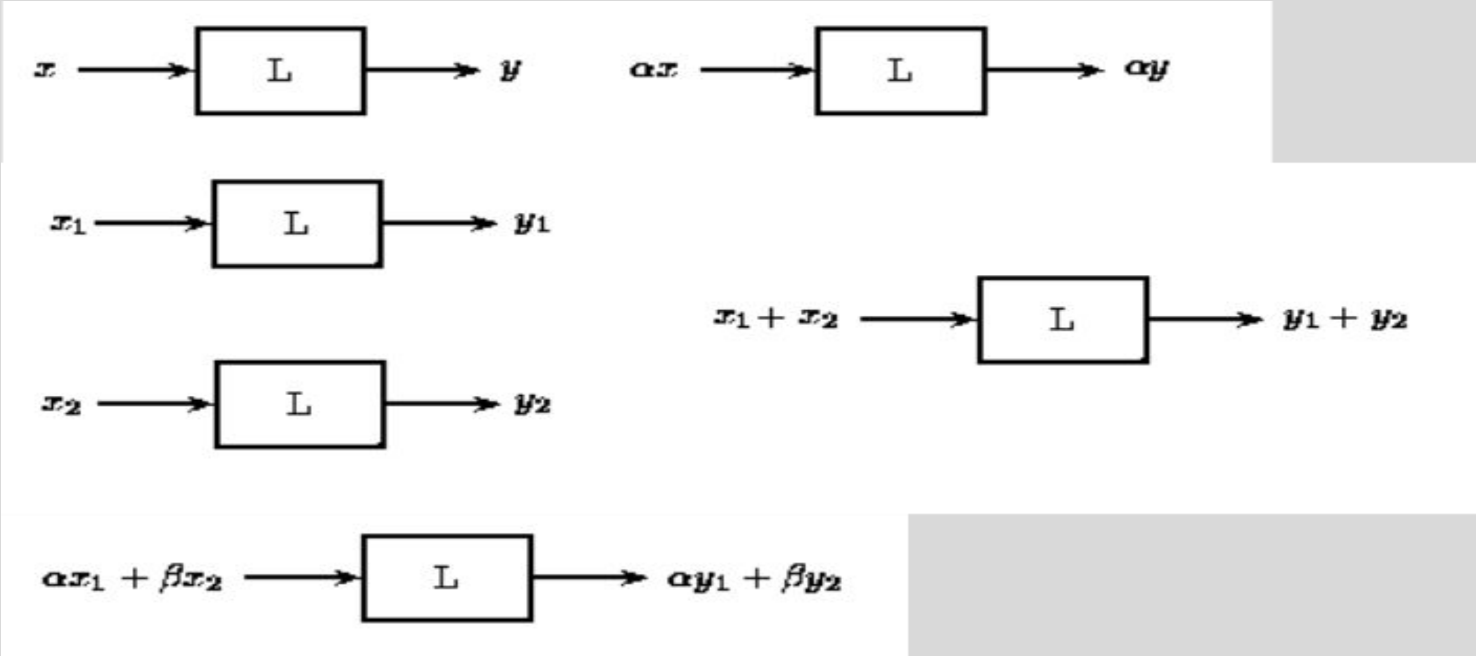
Sistemas Lineales y no lineales



Ejemplo de un circuito no lineal

Sistemas Lineales y no lineales

Un sistema es lineal es aquel que satisface el principio de **superposición.**



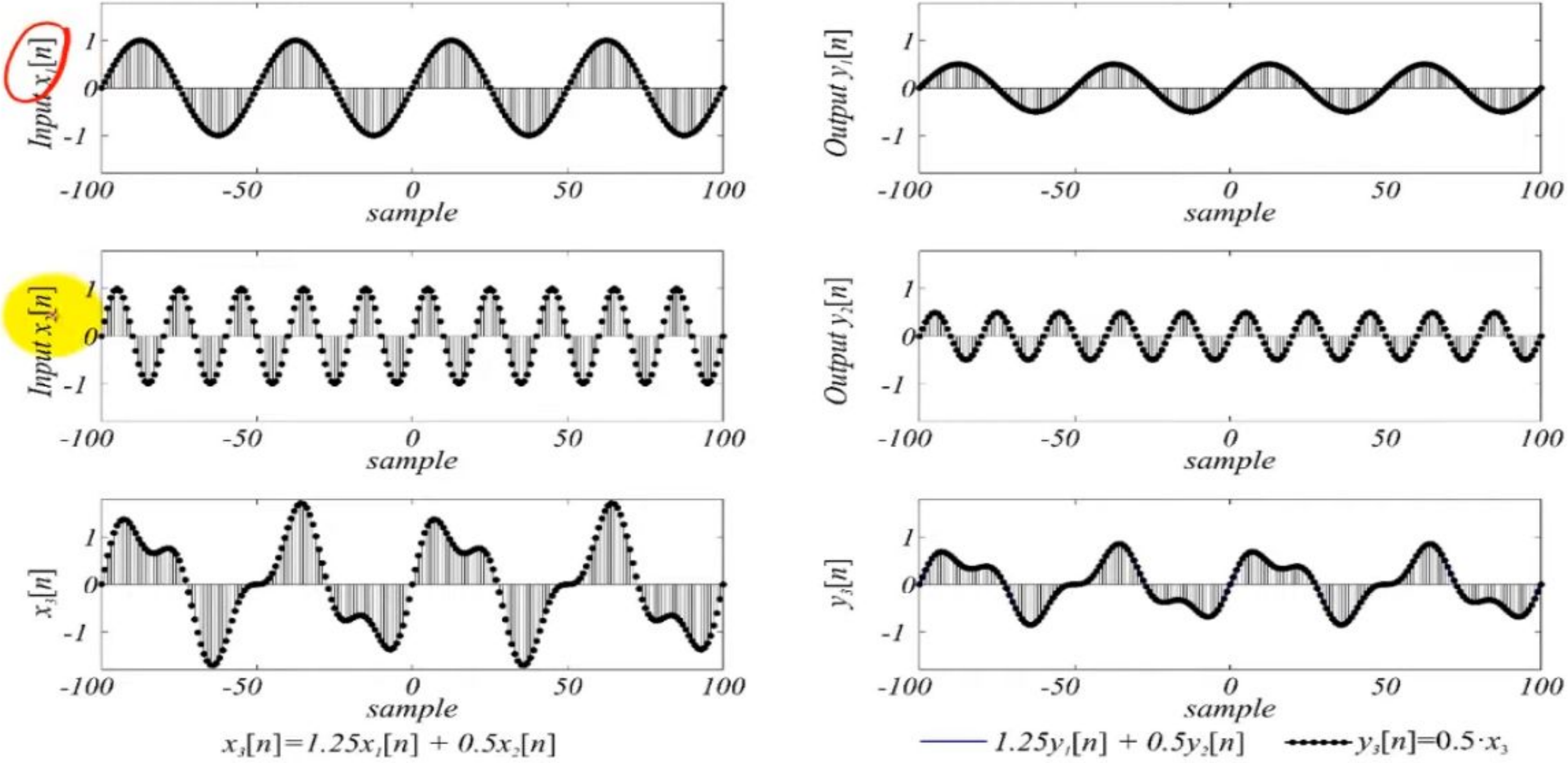
Sistemas Lineales

- Propagación de ondas como el sonido y una onda electromagnética
- Circuitos Eléctricos compuestos por Resistencias, capacitores e inductores
- Circuitos electronicos como amplificadores y filtros
- Movimiento mecánico de la interacción de masas, resortes y amortiguadores.
- Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales como redes de Resistencias, C e I.
- Multiplicación por una constante para el caso de amplificación o atenuación de la señal
- Cambios de señal como ecos, resonancias y desenfoque de imagen
- Diferenciación e integración y las operaciones analógicas de la primera diferencia y la suma acumulada de señales discretas
- Pequeñas perturbaciones en un sistema no lineal, por ejemplo, una pequeña señal amplificada por un transistor correctamente polarizado
- Convolución una operación matemática donde cada valor en la salida se expresa como la suma de los valores en la entrada multiplicada por un conjunto de coeficientes de peso
- Recursividad una técnica similar a la convolución excepto que los valores previamente calculados en la salida se usan además de los valores de la entrada

Sistemas no lineales

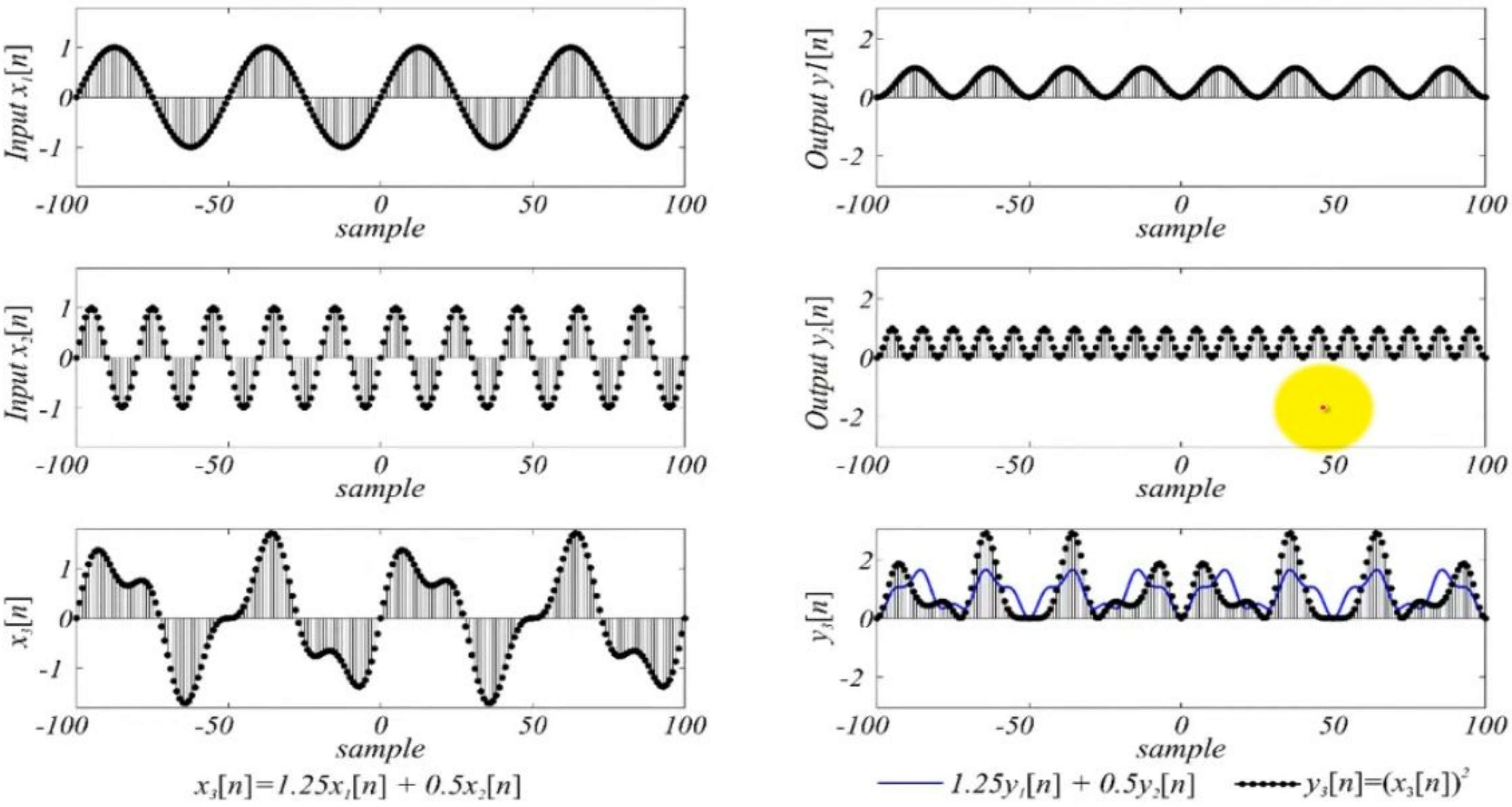
- Sistemas que no tienen linealidad estática, por ejemplo, la potencia en un resistor, la energía de radiación de un objeto caliente que depende de la temperatura, la intensidad de luz transmitida a través de un material translúcido,etc.
- Sistemas que no tienen fidelidad sinusoidal como circuitos electrónicos para : detección de picos, cuadrantes, dobladores de frecuencia,etc
- MUltiplicación de una señal con otra señal como modulación por amplitud y controles de ganancia automáticos
- Fenómenos con Histéresis como densidad de flujo vs intensidad de campo magnético en el hierro

$$y[n] = 0.5 \cdot x[n]$$



Input $x_1[n]$
Output $y_1[n]$
Input $x_2[n]$
Output $y_2[n]$
$x_3[n]$
$y_3[n]$
1
0
-1
-100
-50
0
50
100
sample
$x_3[n]=1.25x_1[n] + 0.5x_2[n]$
$1.25y_1[n] + 0.5y_2[n]$
$y_3[n]=0.5\cdot x_3$

$$y[n] = x^2[n]$$



No Lineal , es una modulación

Síntesis y Descomposición: Cuando se trata de sistemas lineales, la única forma en que se pueden combinar las señales es por escala(multiplicación de las señales por constantes) seguida de suma

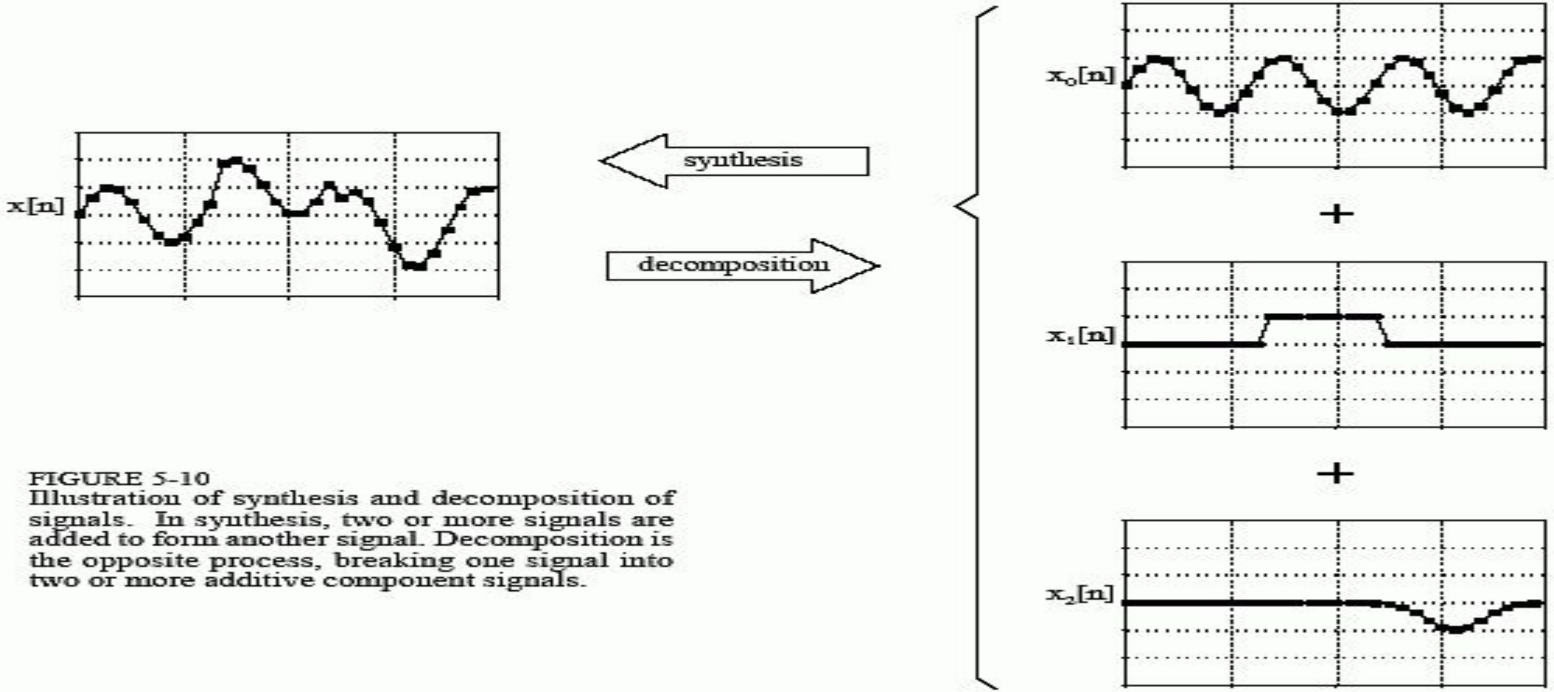


FIGURE 5-10
Illustration of synthesis and decomposition of signals. In synthesis, two or more signals are added to form another signal. Decomposition is the opposite process, breaking one signal into two or more additive component signals.

The Fundamental Concept of DSP

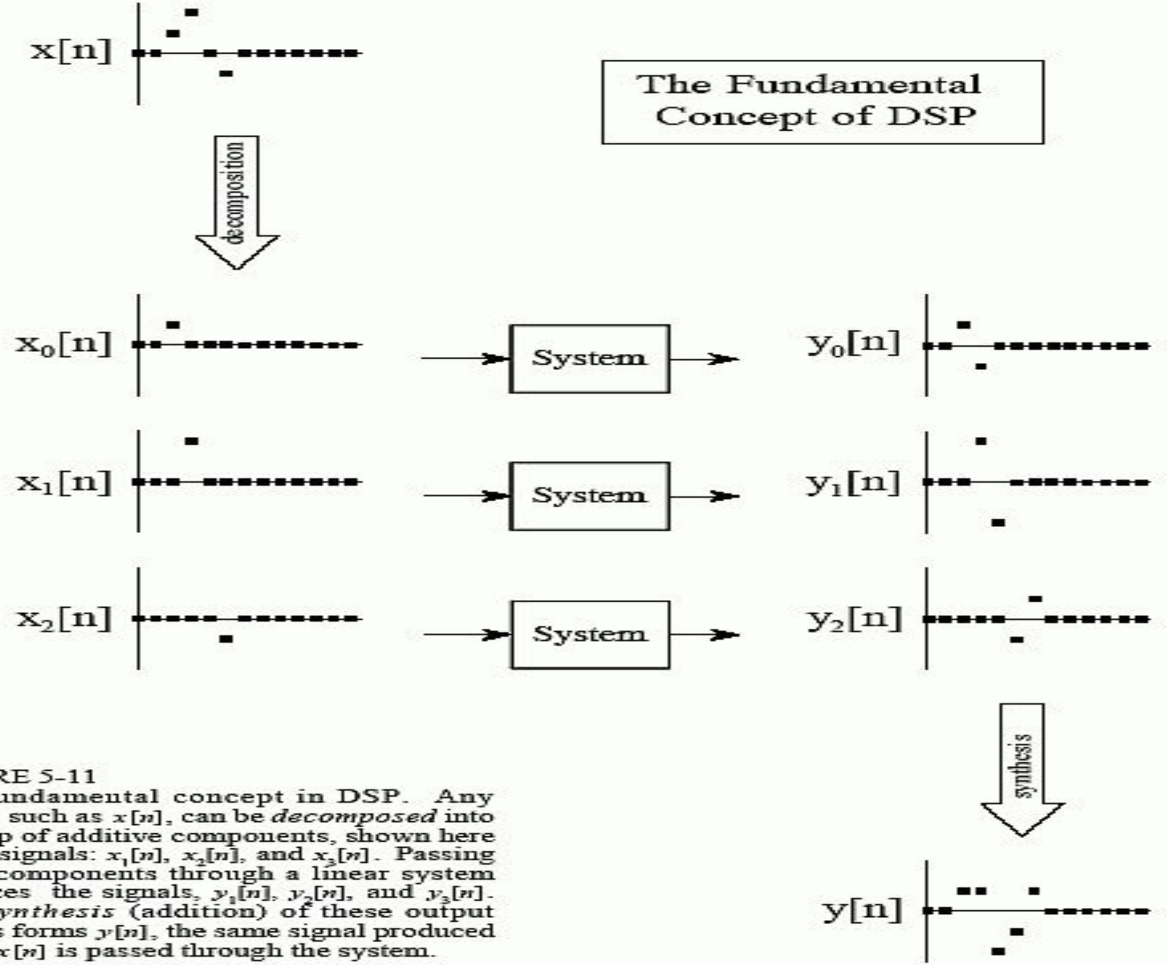


FIGURE 5-11
The fundamental concept in DSP. Any signal, such as $x[n]$, can be *decomposed* into a group of additive components, shown here by the signals: $x_1[n]$, $x_2[n]$, and $x_3[n]$. Passing these components through a linear system produces the signals, $y_1[n]$, $y_2[n]$, and $y_3[n]$. The *synthesis* (addition) of these output signals forms $y[n]$, the same signal produced when $x[n]$ is passed through the system.

Descomposición de señales

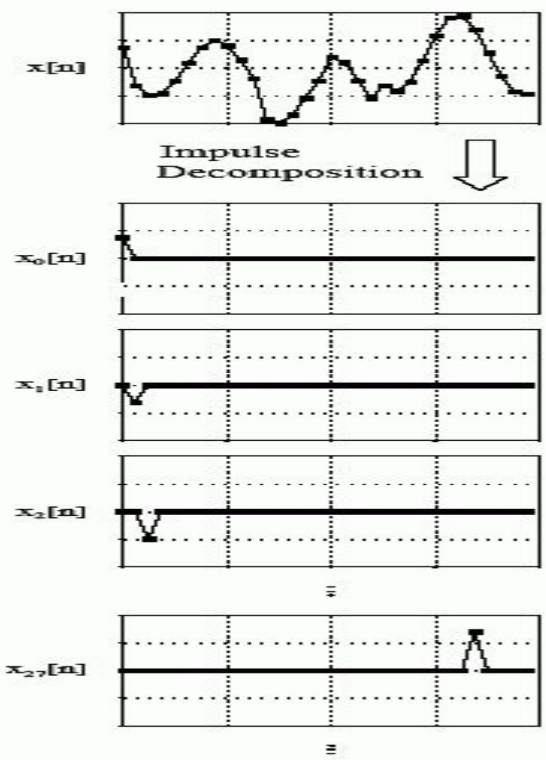


FIGURE 5-12
Example of impulse decomposition. An *N* point signal is broken into *N* components, each consisting of a single nonzero point.

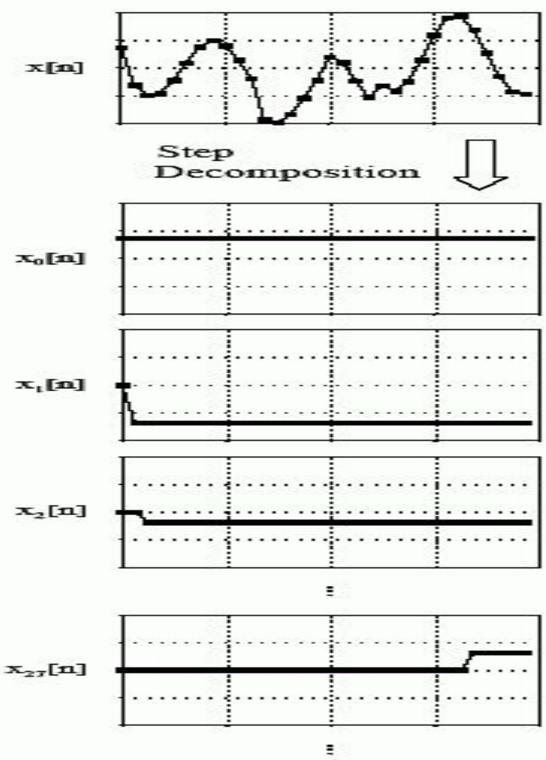


FIGURE 5-13
Example of step decomposition. An *N* point signal is broken into *N* signals, each consisting of a step function

Descomposición de señales por Fourier

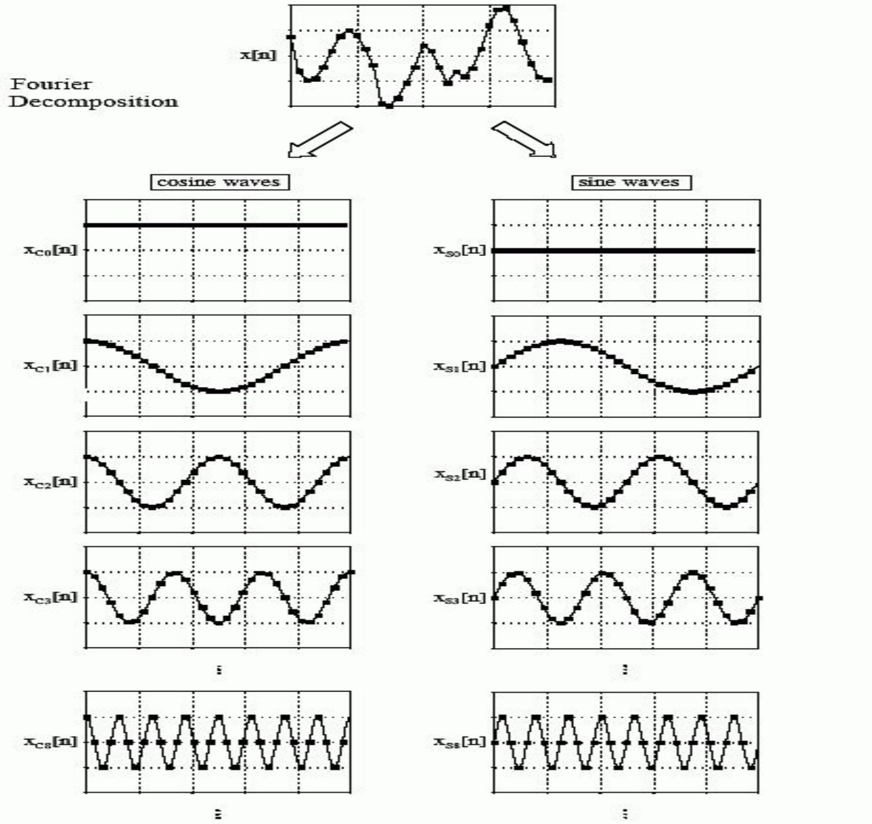


FIGURE 5-16
Illustration of Fourier decomposition. An N point signal is decomposed into $N+2$ signals, each having N points. Half of these signals are cosine waves, and half are sine waves. The frequencies of the sinusoids are fixed; only the amplitudes can change.

- Amplia variedad de señales a partir de sinusoides superpuestas
- Los sistemas lineales responden a sinusoides de una manera única
- La descomposición de fourier es la base de una área amplia y poderosa de las matemáticas llamada analisis de Fourier

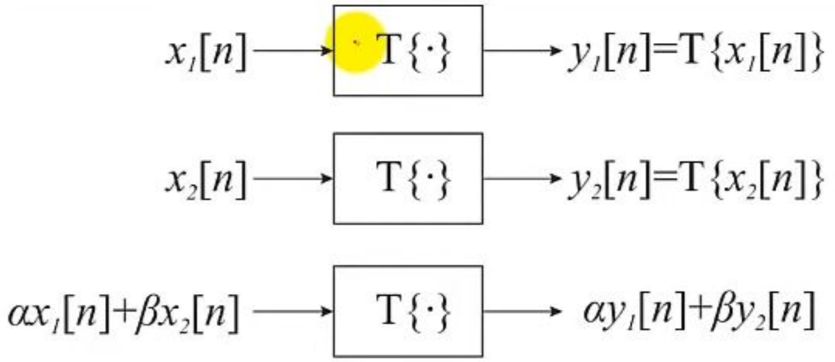
Sistemas Lineales y no lineales

Un sistema es lineal es aquel que satisface el principio de **superposición.**

▪Linearity:

•**Linear:** When a linear combination of input sequences results in the same linear combination of the respective output sequences.

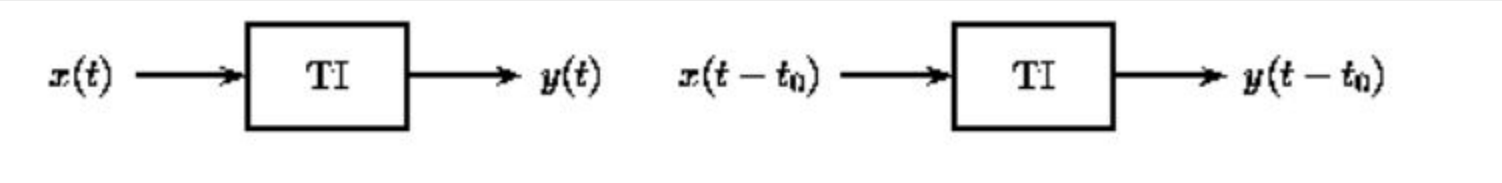
•Otherwise system would be **non-linear**.



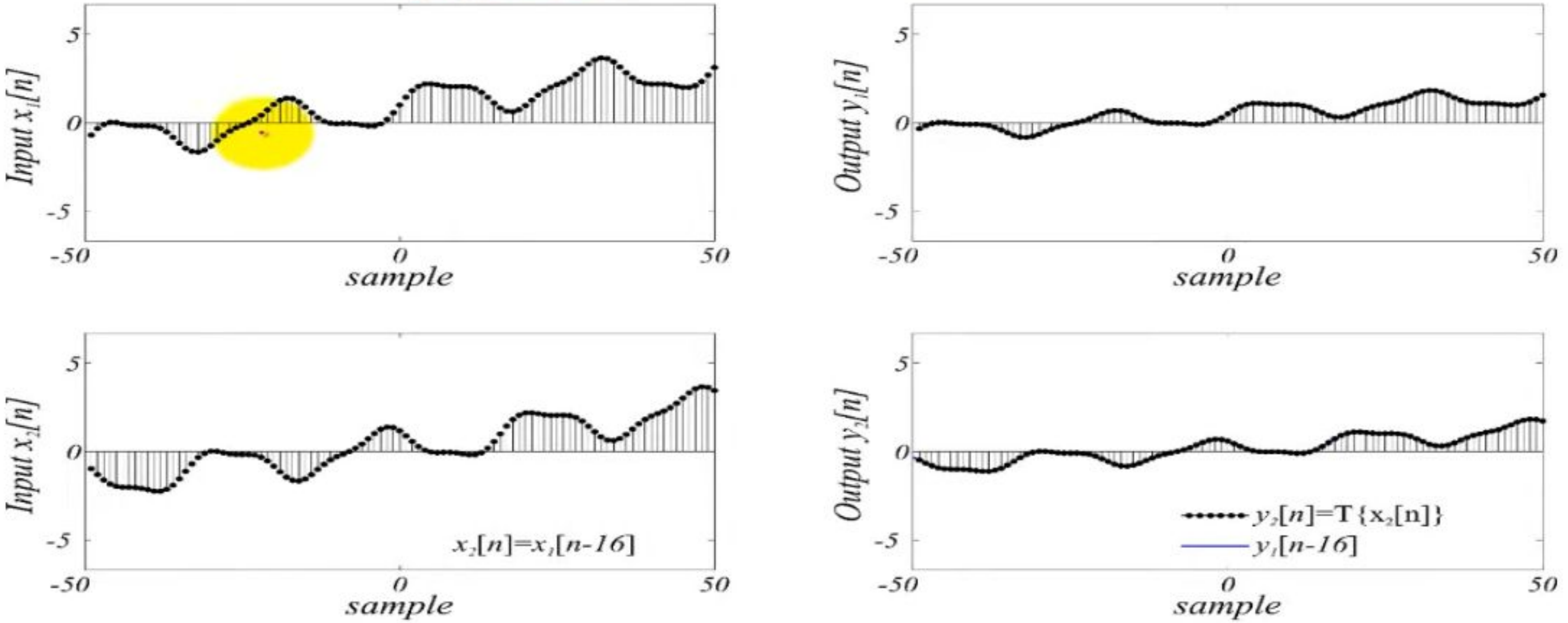
Sistemas Variantes e Invariantes en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si el comportamiento y características del mismo no cambian con el tiempo.
Si se aplica una señal x[n] la salida es y[n], si aplicamos x[n-n0] la salida será y[n-n0] pues el sistema es invariante en el tiempo.
Un desplazamiento en tiempo de la señal de entrada produce un corrimiento en el tiempo de la señal de salida.

En TC x(t-t0) ⇒⇒ y(t-t0)



$$y[n] = 0.5 \cdot x[n]$$



Input $x_1[n]$
Output $y_1[n]$
Input $x_2[n]$
Output $y_2[n]$
$x_2[n]=x_1[n-16]$
$y_2[n]=T\{x_2[n]\}$
$y_1[n-16]$
5
0
-5
-50
0
50
sample

Sistemas causales y no causales

Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de las entradas actuales y pasadas. También se le suele llamar sistema no anticipativo.

Sistemas en Tiempo Real $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ Causal

Si la señal se registra de modo que el procesamiento se lleva a cabo fuera de línea (no en tiempo real), es posible implementar un sistema no causal, dado que todos los valores de la señal están disponibles en el momento del procesamiento. A menudo, ésta es la situación que se da en el tratamiento de señales geofísicas e imágenes.

Sistemas causales y no causales

Sistemas Estables e Inestables

- Tambien llamados BIBO (bounded input–bounded output)

- Se define un sistema estable como aquél en el que cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Es decir

$$|x(t)| < Mx < \infty \Rightarrow |y(t)| < My < \infty$$

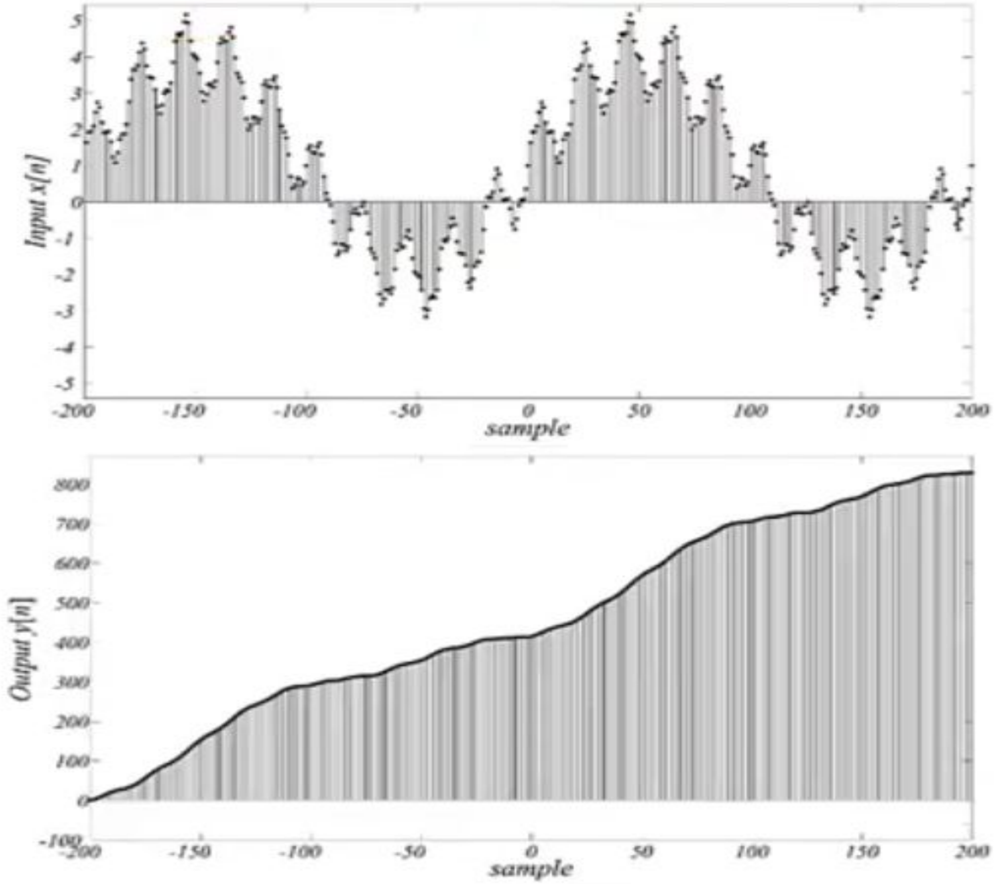
Si para alguna entrada acotada x(t) la salida no está acotada (es infinita) el sistema no es estable (inestable).

Ej. y[n]=nx[n-3]

Si consideramos que la entrada es x[n]=u[n] que es acotada, la salida será una rampa que no está acotada   y[n]=nu[n-3]

En consecuencia el sistema no es estable

$$y[n] = \sum_{k=-\infty} |x[k]|$$



Inestable

Memory	With Memory
	Memoryless
Causality	Causal
	Non Causal
Stability	Stable
	Unstable
Linearity	Linear
	Non-Linear
Time Variance	Time-Invariant
	Time-Variant

En la práctica el sistema tiene que ser causal y estable

Manejables Matemáticamente

Sistemas LTI (Linear Time-Invariant)

CONVOLUCIÓN

La convolución es una forma matemática de combinar dos señales para formar una tercera señal. Es la técnica más importante en el procesamiento digital de señales.
Usando la estrategia de la descomposición por Impulsos , los sistemas se describen mediante una señal llamada respuesta al impulso.
La convolución es importante porque relaciona las tres señales de interés: la señal de entrada, la señal de salida y la respuesta al impulso.

La convolución proporciona la matemática marco para DSP.

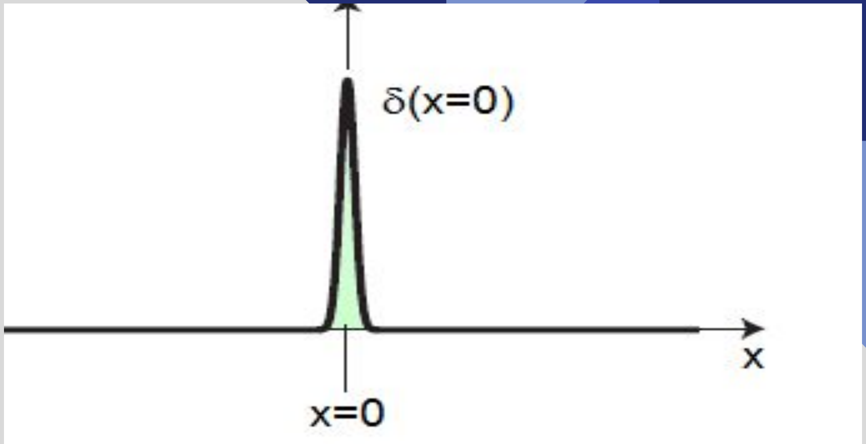
Procesamiento Digital de Señales(DSP)

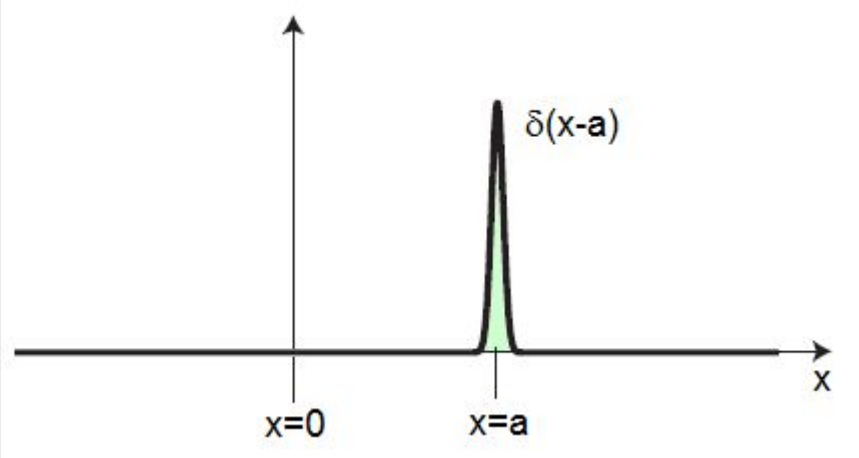
- Descomposición por Impulso
- Descomposicion de Fourier

La función Delta

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$





Respuesta a un Impulso de un Sistema y la Función Delta

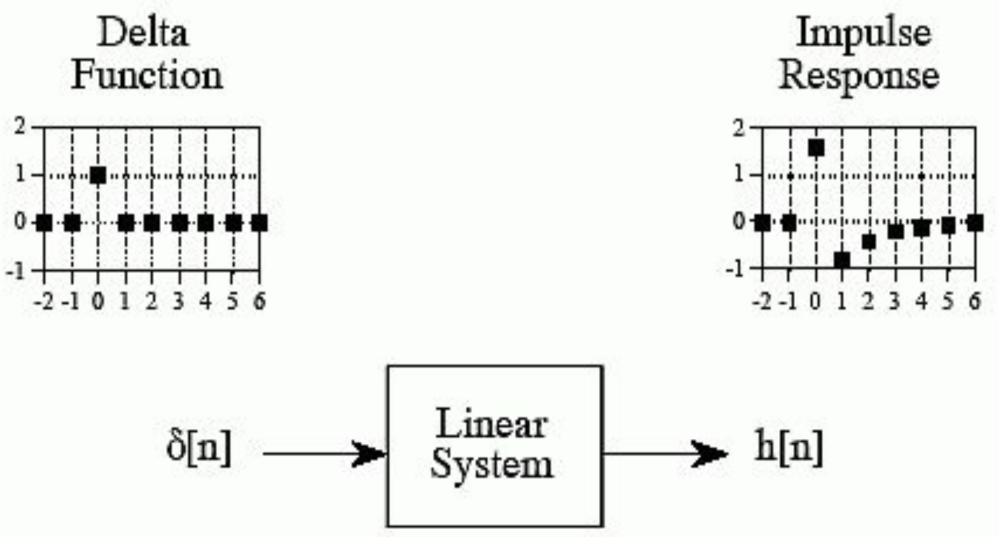
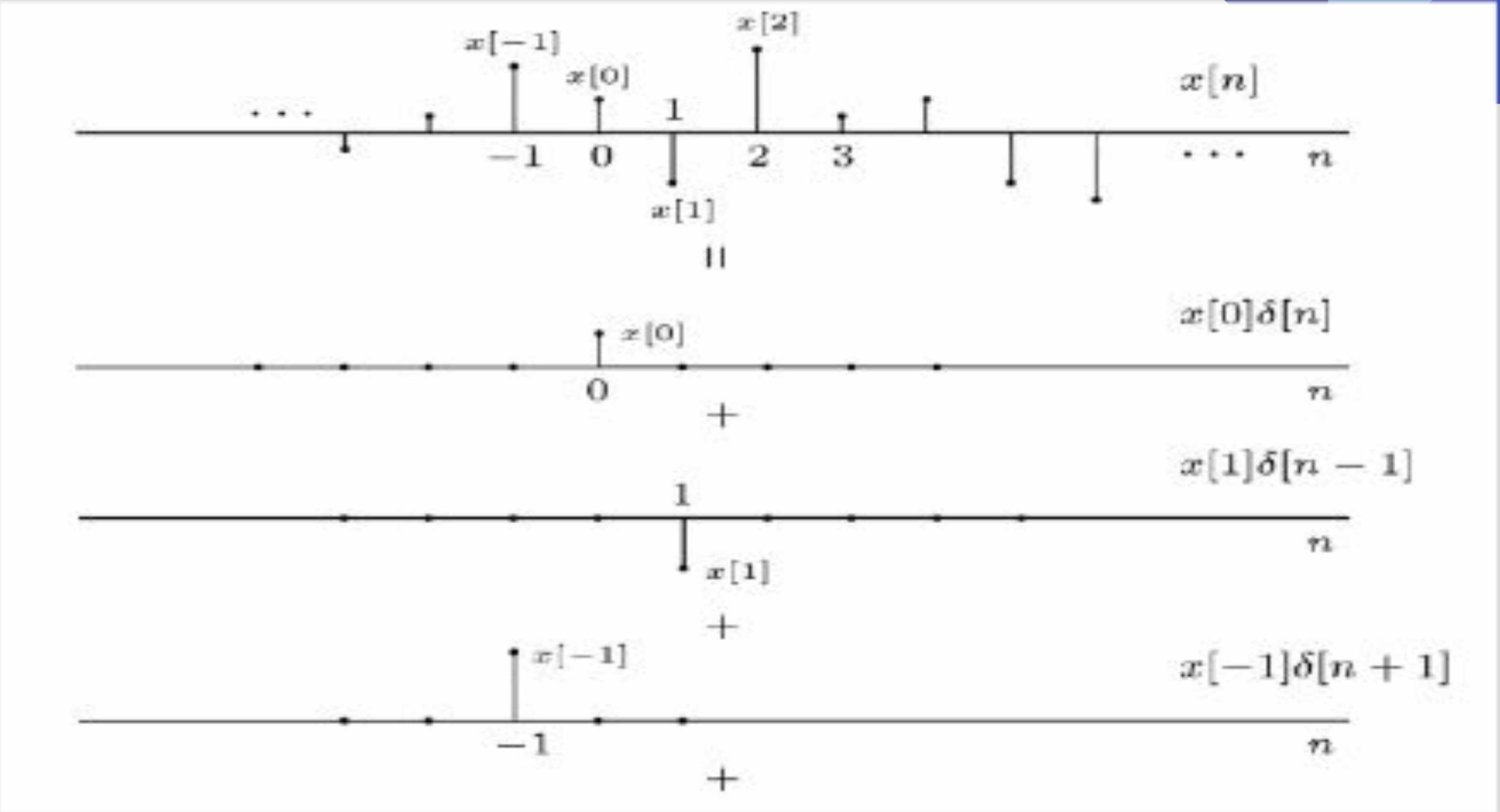


FIGURE 6-1
Definition of *delta function* and *impulse response*. The delta function is a normalized impulse. All of its samples have a value of zero, except for sample number zero, which has a value of one. The Greek letter delta, $\delta[n]$, is used to identify the delta function. The *impulse response* of a linear system, usually denoted by $h[n]$, is the output of the system when the input is a delta function.

Con la función delta se puede descomponer cualquier señal en sumatorias de deltas escaladas y desplazadas.

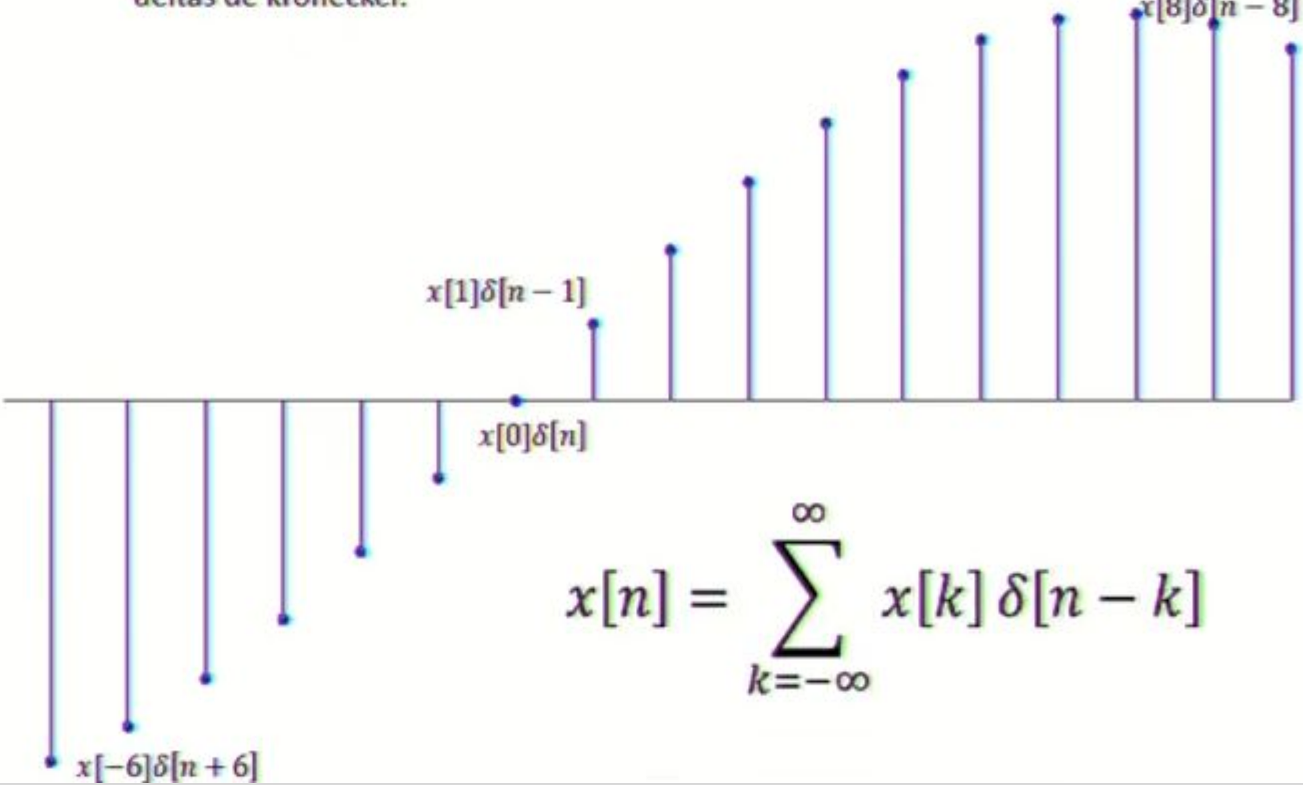
Si el sistema es LTI podríamos calcular la respuesta a impulsos escalados y suponer la respuesta de cada uno.

La respuesta de un sistema al impulso es TODO lo que hace falta para conocer la respuesta del sistema a cualquier otra señal



x[−1]
x[0]
x[2]
x[n]
. . .
1
−1
0
2
3
. . .
n
x[1]
=
x[0]δ[n]
x[0]
0
n
+
x[1]δ[n − 1]
1
n
x[1]
+
x[−1]
x[−1]δ[n + 1]
−1
n
+

- Caso tiempo continuo:
  - La convolución se fundamenta en la capacidad de poder descomponer cualquier señal como suma ponderada de deltas de kronecker.



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Convolución

Al ser LTI

$$\sum_{k} \alpha_{\kappa} x_{k}[n] \xleftrightarrow{T\{\ \}} \sum_{k} \alpha_{\kappa} y_{k}[n]$$

Propiedad Linealidad

$$x[n-n_o] \xleftrightarrow{T\{\ \}} y[n-n_o]$$

Propiedad Invarianza

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

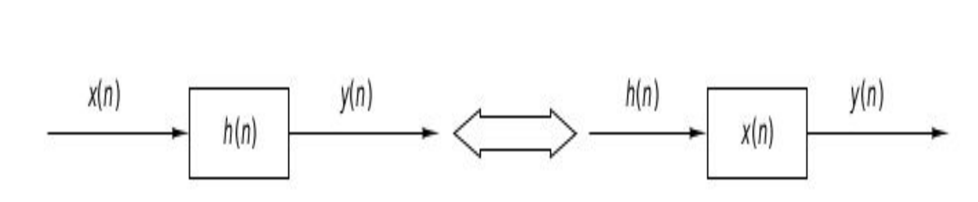
La operación anterior la llamamos convolución de las secuencias x[n] y h[n]. De manera simbólica :

y[n]= x[n]* h[n]   Suma de Convolución

Por tanto el sistema LIT queda completamente caracterizado por la respuesta a una sola señal, su respuesta al impulso unitario.

<u>Propiedad conmutativa</u>

$$y(n) = h(n) * x(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$



y[n]= h[n] *x[n]

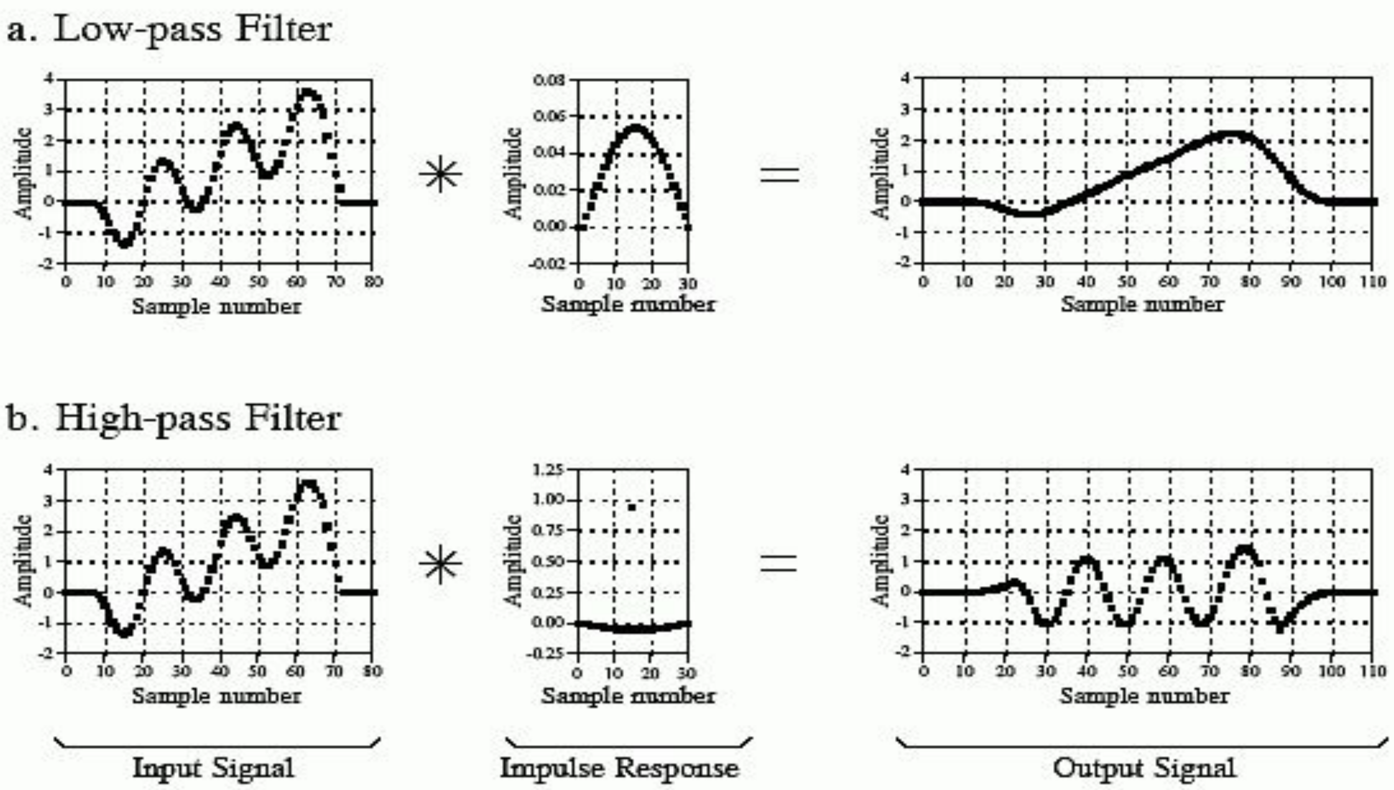


FIGURE 6-3
Examples of low-pass and high-pass filtering using convolution. In this example, the input signal is a few cycles of a sine wave plus a slowly rising ramp. These two components are separated by using properly selected impulse responses.

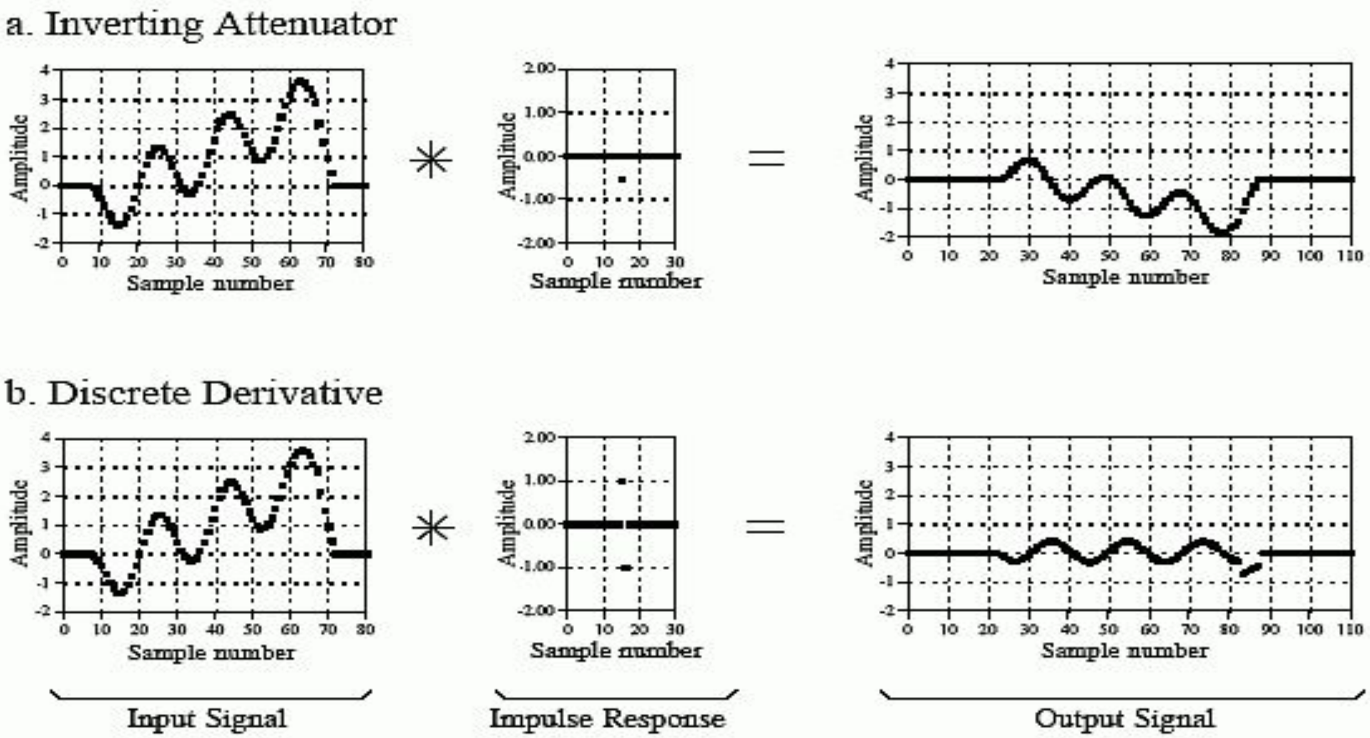


FIGURE 6-4
Examples of signals being processed using convolution. Many signal processing tasks use very simple impulse responses. As shown in these examples, dramatic changes can be achieved with only a few nonzero points.

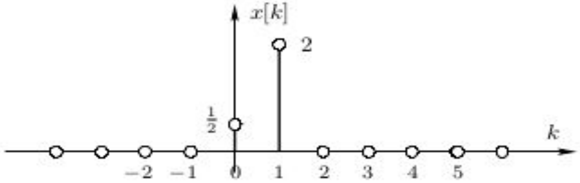
Ejemplos Convolución

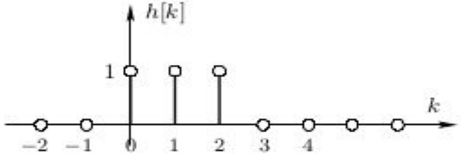
Ejemplo 1

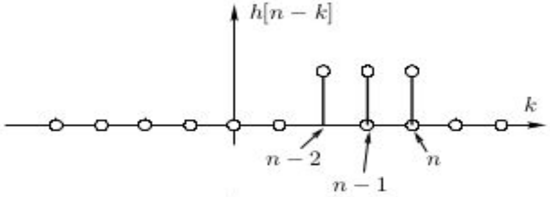
$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + 2\delta[n-1]$

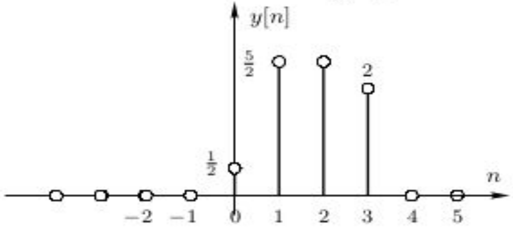
$h[n] = u[n] - u[n-3]$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$







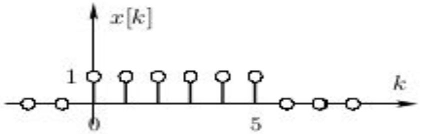


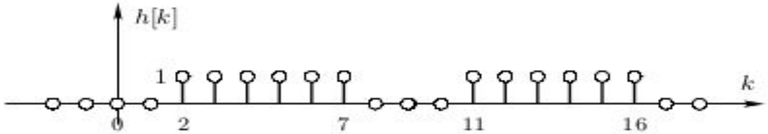
- $n < 0,\ y[n] = 0$
- $n = 0,\ y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = x[0]h[0] = \frac{1}{2}$
- $n = 1,\ y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = x[0]h[1] + x[1]h[0] = \frac{5}{2}$
- $n = 2,\ y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = x[0]h[2] + x[1]h[1] = \frac{5}{2}$
- $n = 3,\ y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = x[1]h[2] = 2$
- $n > 3,\ y[n] = 0$

Ejemplos Convolución

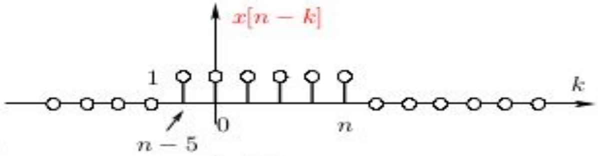
Ejemplo 5

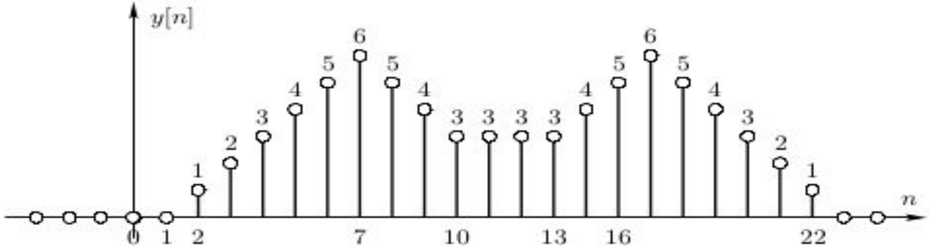
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}, \quad h[n] = \begin{cases} 1, & 2 \leq n \leq 7, 11 \leq n \leq 16 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$





- $n < 2,\ y[n] = 0$
- $2 \leq n \leq 7,\ y[n] = \sum_{k=2}^{n} 1 = n - 1$
- $8 \leq n \leq 10,\ y[n] = \sum_{k=n-5}^{7} 1 = 13 - n$
- $11 \leq n \leq 12,\ y[n] = 3$
- $13 \leq n \leq 16,\ y[n] = \sum_{k=11}^{n} 1 = n - 10$
- $17 \leq n \leq 21,\ y[n] = \sum_{k=n-5}^{16} 1 = 22 - n$
- $n \geq 22,\ y[n] = 0$



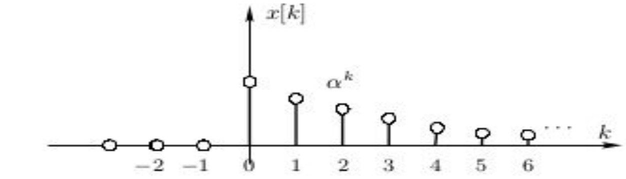


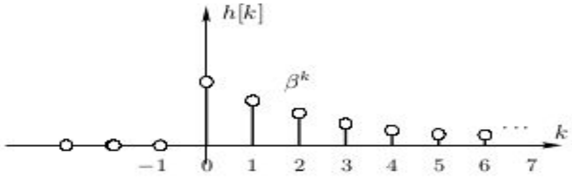
Ejemplos Convolución

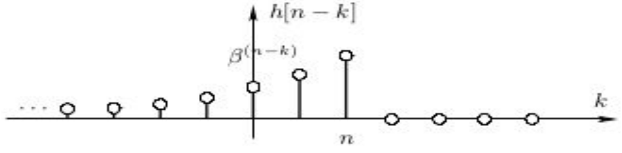
Ejemplo 2

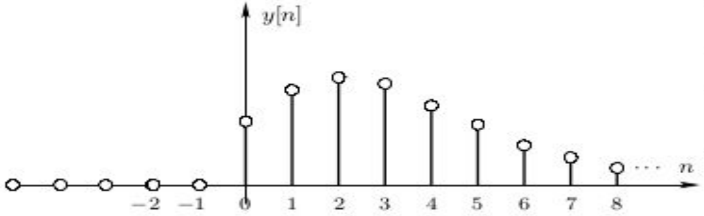
$$x[n] = \alpha^n u[n], \qquad \alpha \neq \beta,$$
$$h[n] = \beta^n u[n], \qquad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k]\beta^{n-k}u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \beta^{n-k} u[n-k].$$









- $n < 0, \ y[n] = 0$
- $n \geq 0, \ y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$

$$\boxed{y[n] = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} u[n]}$$