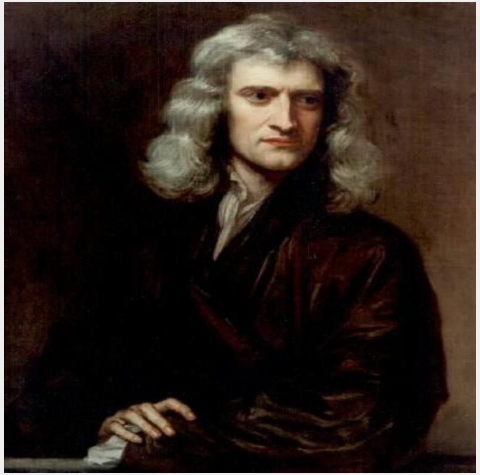
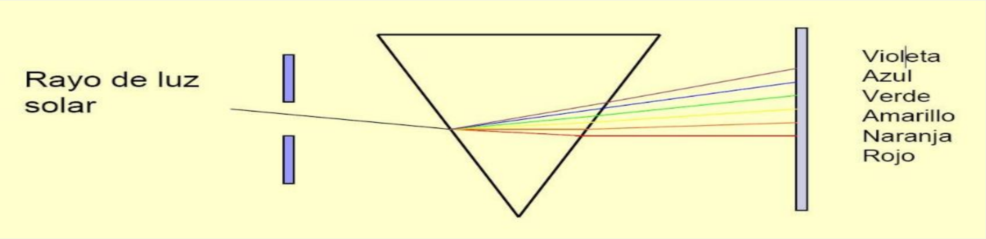
Series y Transformadas de Fourier

- Serie de Fourier en Señales Continuas Periódicas.
- Transformada de Fourier en Señales Continuas Aperiodicas.
- Serie de Fourier en Señales Discretas Periódicas.
- Transformada de Fourier en Señales Discretas Aperiodicas.
- Ejemplos

https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&feature=emb_imp_woyt



Sir Isaac Newton (1642-1727). En 1672,Newton usó el término espectro para describir la descomposición de la luz blanca al pasar por un prisma.



Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fue un matemático y físico francés mejor conocido por iniciar la investigación de las series de Fourier y sus aplicaciones a problemas de transferencia de calor y vibraciones.

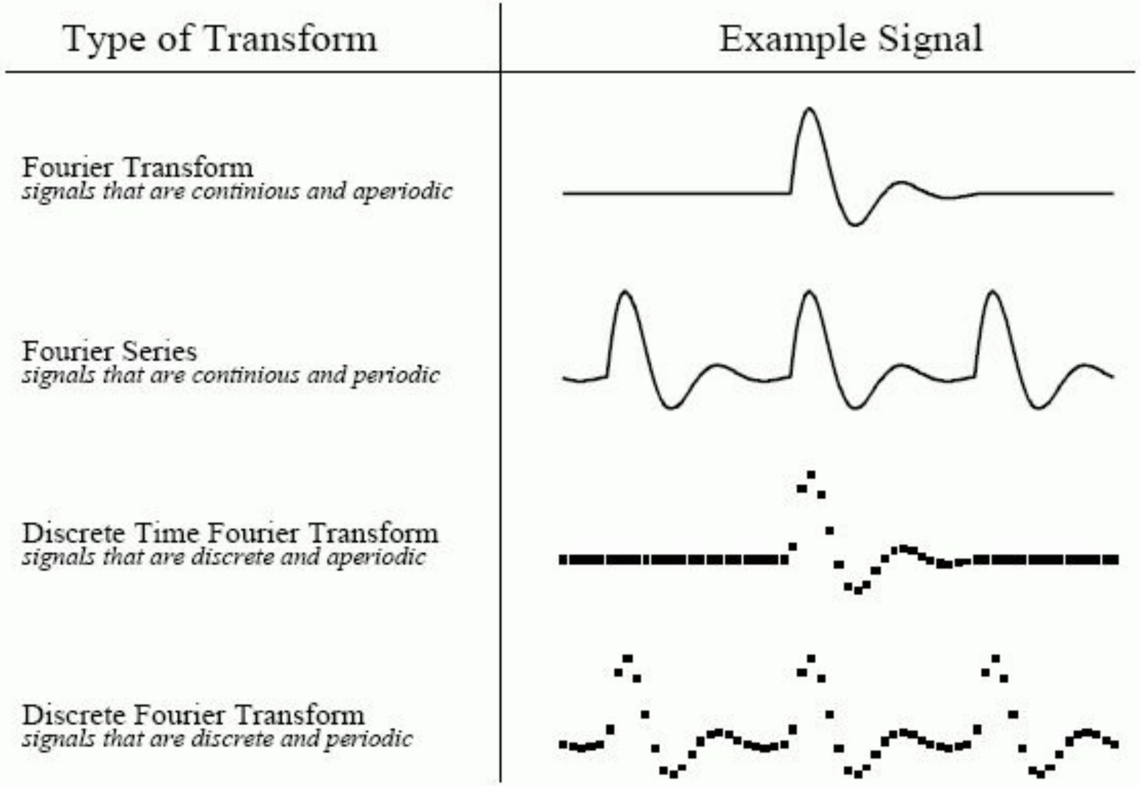


FIGURE 8-2
Illustration of the four Fourier transforms. A signal may be continuous or discrete, and it may be periodic or aperiodic. Together these define four possible combinations, each having its own version of the Fourier transform. The names are not well organized; simply memorize them.

Aperiódico-Continuo

Esto incluye, por ejemplo, exponenciales decrecientes y la curva gaussiana. Estas señales se extienden hasta el infinito positivo y negativo *sin* repetirse en un patrón periódico. La Transformada de Fourier para este tipo de señal se llama simplemente **Transformada de Fourier** .

Periódico-Continuo

Aquí los ejemplos incluyen: ondas sinusoidales, ondas cuadradas y cualquier forma de onda que se repita en un patrón regular desde el infinito negativo hasta el infinito positivo. Esta versión de la transformada de Fourier se llama **Serie de Fourier** .

Aperiódico-Discreto

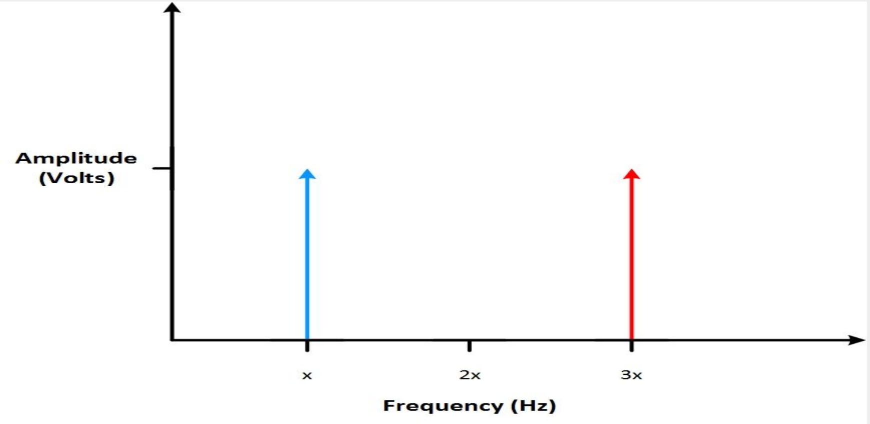
Estas señales sólo se definen en puntos discretos entre el infinito positivo y negativo, y no se repiten de forma periódica. Este tipo de transformada de Fourier se denomina **transformada de Fourier de tiempo discreto.**

Periódico-Discreto

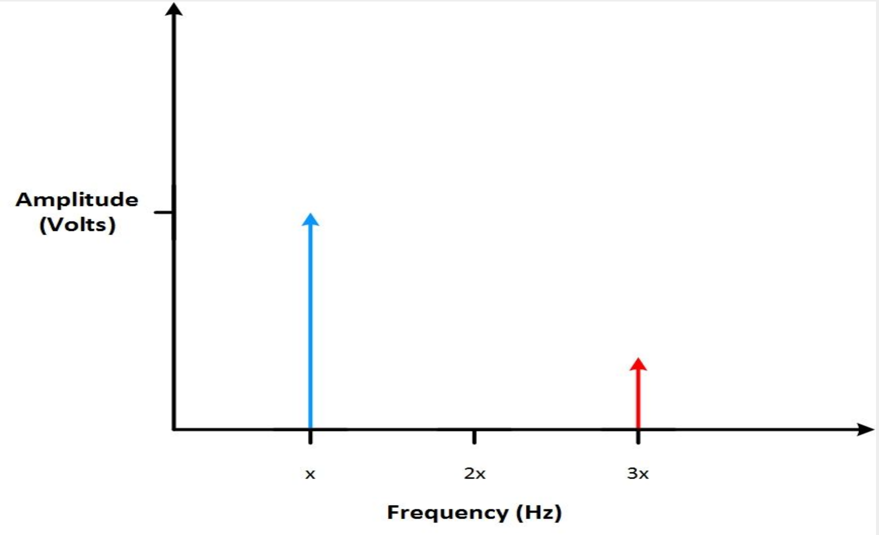
Son señales discretas que se repiten de forma periódica desde el infinito negativo al positivo. Esta clase de transformada de Fourier a veces se denomina serie discreta de Fourier, pero con mayor frecuencia se denomina **transformada discreta de Fourier.**

¿Para qué analizar las señales en función de la frecuencia ?

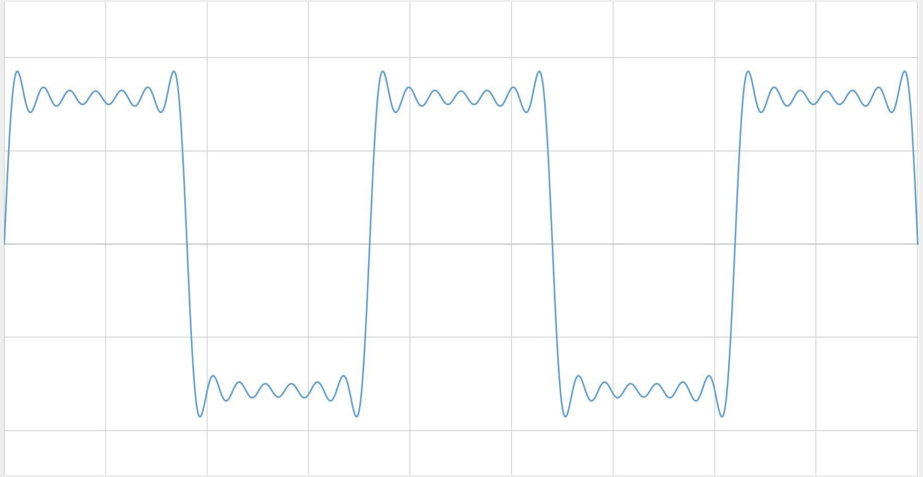
- Si usted descompone señales senoidales de ondas de radio, puede elegir qué frecuencia en particular, o estación desea escuchar.
- Si usted descompone señales senoidales en diferentes frecuencias como graves y agudos, puede alterar los tonos o frecuencias para impulsar ciertos sonidos y eliminar el ruido no deseado.
- Si usted descompone señales senoidales de vibraciones sísmicas de diferentes velocidades y fuerzas, puede optimizar el diseño de edificios para evitar las vibraciones más fuertes.
- Si descompone señales senoidales datos de cómputo, puede ignorar las frecuencias menos importantes y dar lugar a representaciones más compactas en la memoria, también conocida como compresión de archivos.

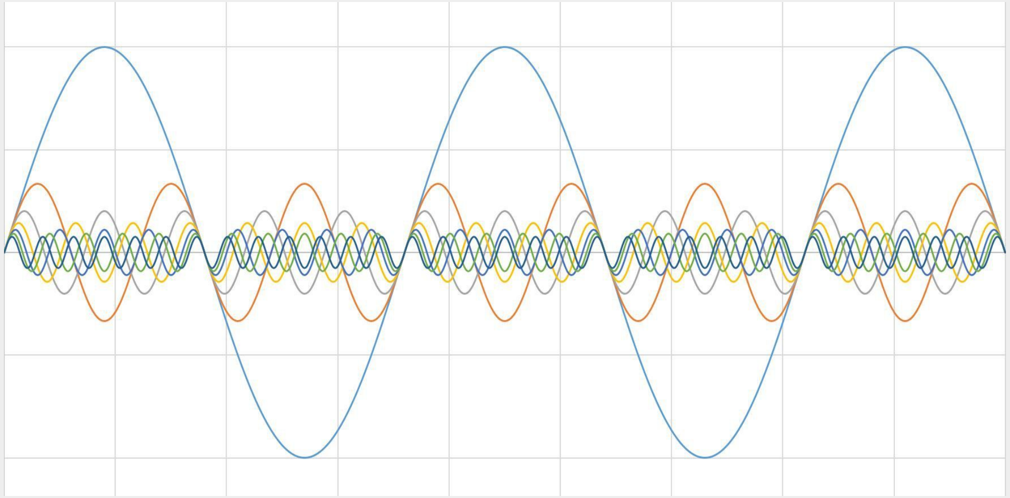


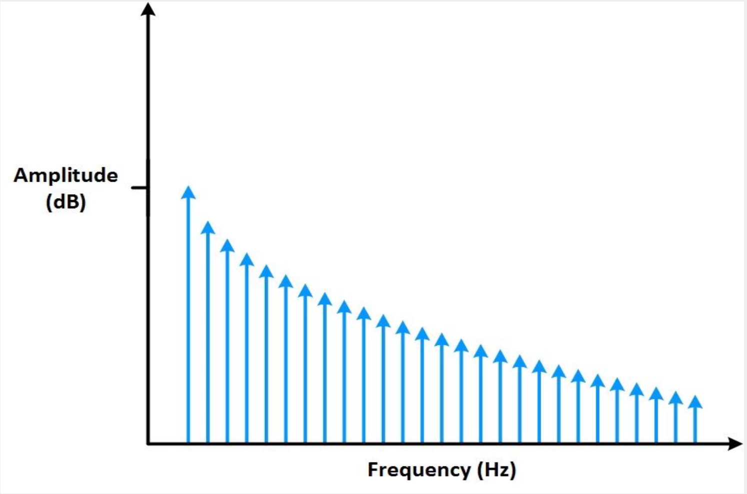
Una señal compuesta con igual amplitud pero diferente frecuencia



Una señal compuesta con diferentes valores de tensión y diferentes frecuencias







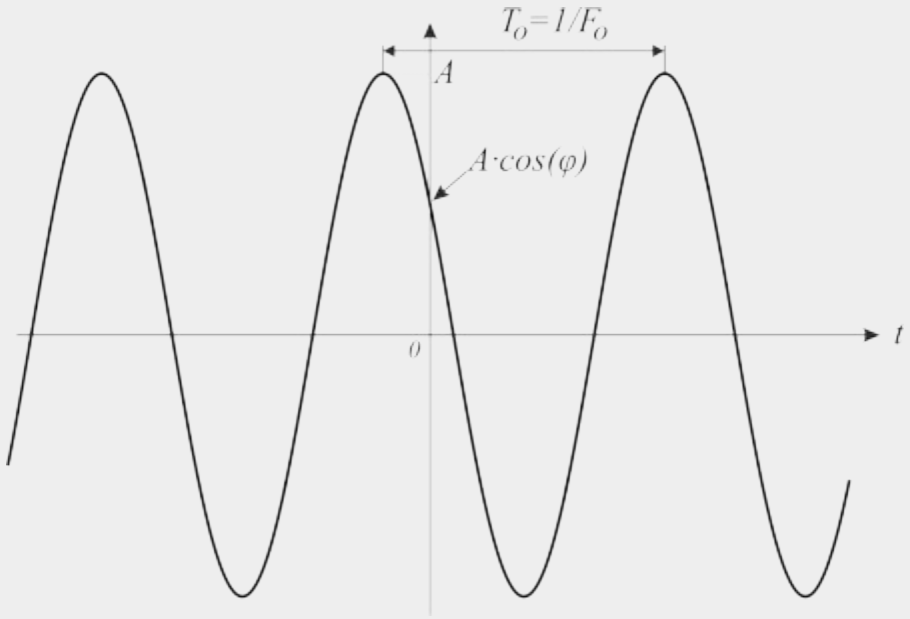
Señal cuadrada

Señal senoidal continua

$x(t) = A \cdot \cos(2\pi F_o t + \varphi)$

A:Amplitud
Fo: Frecuencia de oscilación(Hz)
φ=Fase (radianes)

-



- La variable independiente t es continua entre -infinito y + infinito
- Las senoidales son periódicas x(t)=x(t+To) con To=1/Fo es el periodo fundamental
- Dos señales con diferente frecuencia de oscilaciones son diferentes
- El aumento de la frecuencia de oscilación sinusoidal aumenta el número de oscilaciones por segundo.

Exponenciales Complejas : Fasores

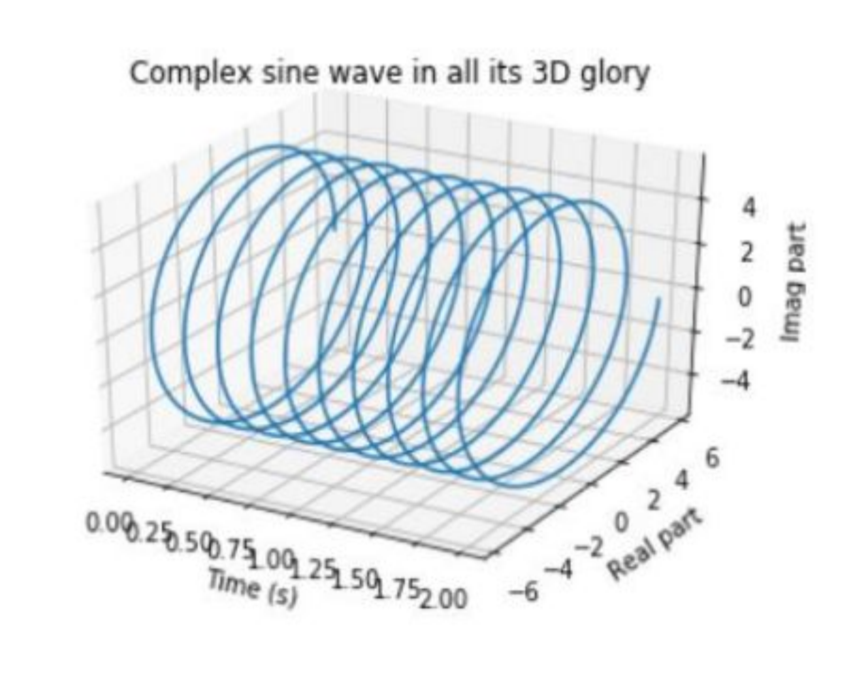
$$x(t) = A \cdot e^{j(2\pi F_o t + \phi)}$$

A:Amplitud
Fo: Frecuencia de oscilación(Hz)
φ=Fase (radianes)

$$x(t) = A \cdot e^{j(2\pi F_o t + \phi)} = A \cdot (\cos(2\pi F_o t + \phi) + j \sin(2\pi F_o t + \phi))$$

Los fasores son funciones complejas que se utilizan para representar señales sinusoidales. Proporcionan un poderoso conjunto de herramientas algebraicas y gráficas para tratar y resolver operaciones entre fenómenos oscilantes con diferentes amplitudes, frecuencias y etapas.

$$x(t) = A \cdot e^{j(2\pi F_o t+\phi)} = A \cdot (\cos(2\pi F_o t + \phi) + j \sin(2\pi F_o t + \phi))$$



1)Los fasores son periódicos x(t) = x(t + To) con To = 1/Fo y es su período fundamental.
2) La frecuencia es una cantidad física inherentemente positiva.
3) Las frecuencias negativas se utilizan como herramienta matemática para describir la rotación dirección de los fasores.
4) Las sinusoides reales son el resultado de la suma de fasores conjugados.

Exponenciales complejos armónicamente relacionados

$$s_k(t) = e^{j2\pi kF_o t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1) Por cada k, Sk(t) es periódica, y Tk=To/k =1/kFo es su periodo
2) Todos los Sk(t) también serán periódicos con cualquier múltiplo de Tk, por lo que To=k*Tk será el periodo fundamental de todos los Sk(t)
3) Cualquier señal periódica se puede escribir como una combinación lineal de fasores armónicamente relacionados:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot s_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi kF_o t}$$

donde Ck son constantes complejas arbitrarias y To=1/Fo el periodo fundamental.

Ejemplo

$$x(t) = 3 + 4 \cdot \cos(20\pi t) - 2 \cdot \cos(60\pi t + \pi/4)$$

$$x(t) = 3e^{j2\pi\cdot 0\cdot 10t} + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi\cdot 1\cdot 10t} + e^{-j2\pi\cdot 1\cdot 10t}\right) - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\pi/4}e^{j2\pi\cdot 3\cdot 10t} + e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 10t}\right)$$

$$x(t) = 3 + 2e^{j2\pi\cdot 1\cdot 10t} + 2e^{-j2\pi\cdot 1\cdot 10t} + e^{j\pi}e^{j\pi/4}e^{j2\pi\cdot 3\cdot 10t} + e^{-j\pi}e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 10t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j(2\pi k F_o t)}$$

$F_o = 10$

$c_0 = 3$
$c_1 = 2$
$c_{-1} = 2$
$c_2 = c_{-2} = 0$
$c_3 = e^{j\pi}e^{j\pi/4} = e^{j5\pi/4}$
$c_{-3} = e^{-j\pi}e^{-j\pi/4} = e^{-j5\pi/4}$
$c_i = c_{-i} = 0 \quad \forall i > 3$

$-1 = e^{j\pi}$

Euler's identities:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{+j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

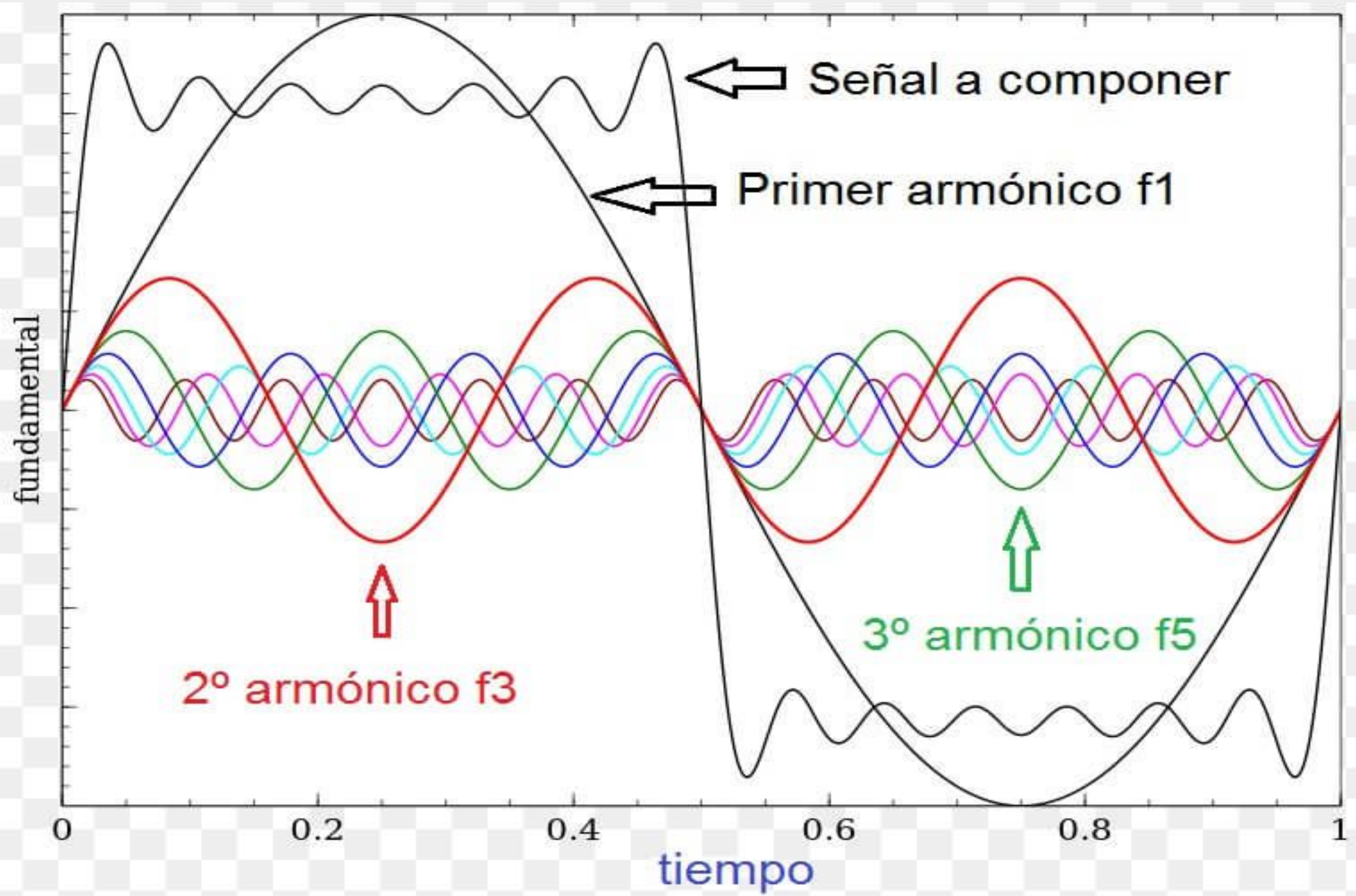
Análisis en frecuencia de las señales continuas en el tiempo

- La mayoría de las señales de interés práctico se pueden descomponer como una combinación lineal de sinusoides (variaciones cíclicas con el tiempo)
- La síntesis de series de Fourier es la representación matemática de una señal como un combinación de sinusoides relacionados armónicamente (fasores):

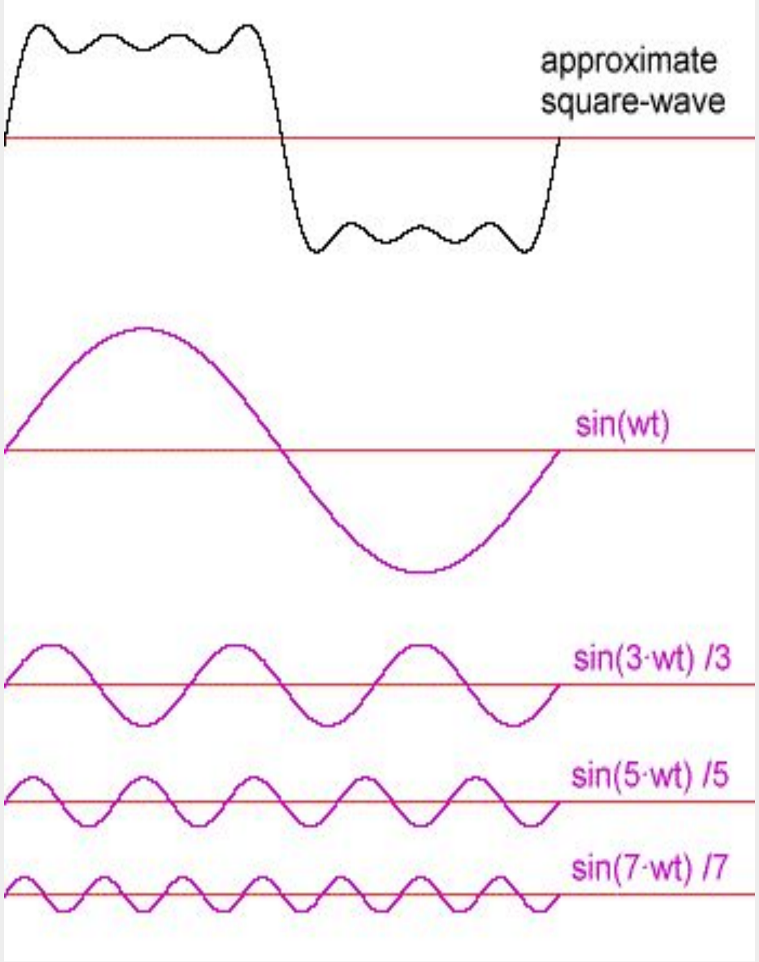
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot s_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k F_o t}$$

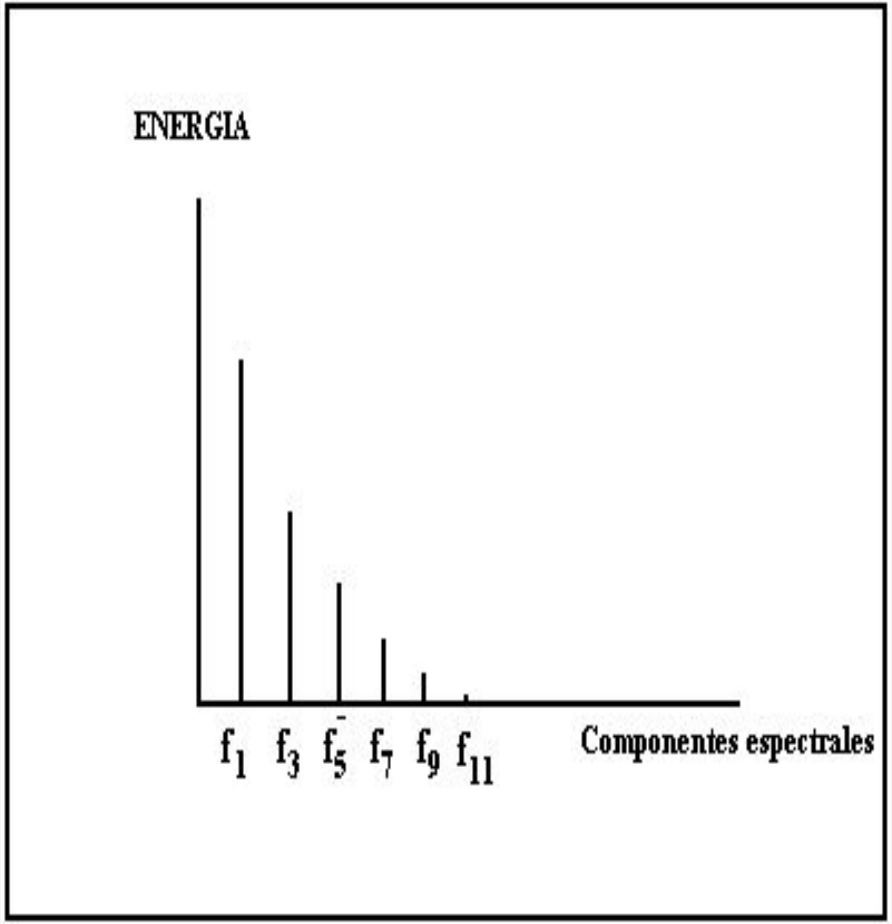
donde Ck son constantes complejas arbitrarias y To=1/Fo el periodo fundamental.

- El análisis de series de Fourier es el conjunto de herramientas matemáticas utilizadas para obtener la constantes Ck asociadas a cada una de las sinusoides fundamentales que componen la señal.



Señal a componer
Primer armónico f1
fundamental
2º armónico f3
3º armónico f5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
tiempo


approximate
square-wave
sin(wt)
sin(3·wt) /3
sin(5·wt) /5
sin(7·wt) /7


ENERGIA
f_1 f_3 f_5 f_7 f_9 f_{11}
Componentes espectrales

Series de Fourier para señales periódicas continuas en el tiempo

Si una función es periódica y satisface las condiciones de Dirichlet se puede representar mediante una serie de fourier mediante :

$$c_k = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\, e^{-j2\pi k F_o t}\partial t$$

Ecuación de Análisis de la serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_o t}$$

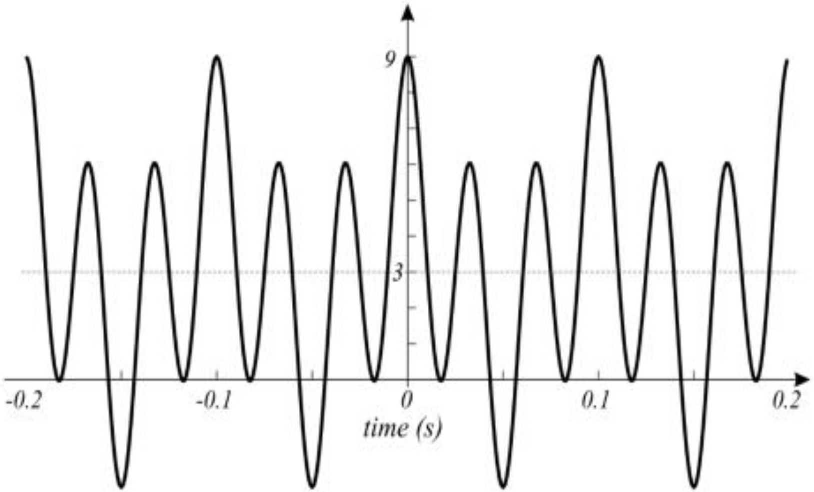
Ecuación de Síntesis de la serie de fourier

$$c_k = c_{-k}^{*} \leftrightarrow \begin{cases} c_k = |c_k| e^{\varphi_k} \\ c_{-k} = |c_k| e^{-\varphi_k} \end{cases}$$

$$x(t) = c_0 + 2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_o t + \varphi_k)$$

Como los coeficientes Ck son números complejos se la puede expresar de esta forma también a la serie

Example 1 $x(t) = 3 + 2\cos(20\pi t) - 4\cos(60\pi t)$



Fourier Series Analysis

$$c_k = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\, e^{-j2\pi k F_o t}\partial t$$

Fourier Series Synthesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_o t}$$

Euler's identities:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{+j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

Example 1 $x(t) = 3 + 2\cos(20\pi t) - 4\cos(60\pi t)$

$$x(t) = 3e^{j2\pi\cdot 0\cdot 10t} + 2\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi\cdot 1\cdot 10t} + e^{-j2\pi\cdot 1\cdot 10t}\right) - 4\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi\cdot 3\cdot 10t} + e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 10t}\right)$$

$$x(t) = 3 + e^{j2\pi\cdot 1\cdot 10t} + e^{-j2\pi\cdot 1\cdot 10t} + 2e^{j\pi}e^{j2\pi\cdot 3\cdot 10t} + 2e^{-j\pi}e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 10t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j(2\pi k F_o t)}$$

$F_o = 10$

$c_0 = 3$
$c_1 = 1$
$c_{-1} = 1$
$c_2 = c_{-2} = 0$
$c_3 = 2e^{j\pi}$
$c_{-3} = 2e^{-j\pi}$
$c_i = c_{-i} = 0 \quad \forall i > 3$

$-1 = e^{j\pi}$

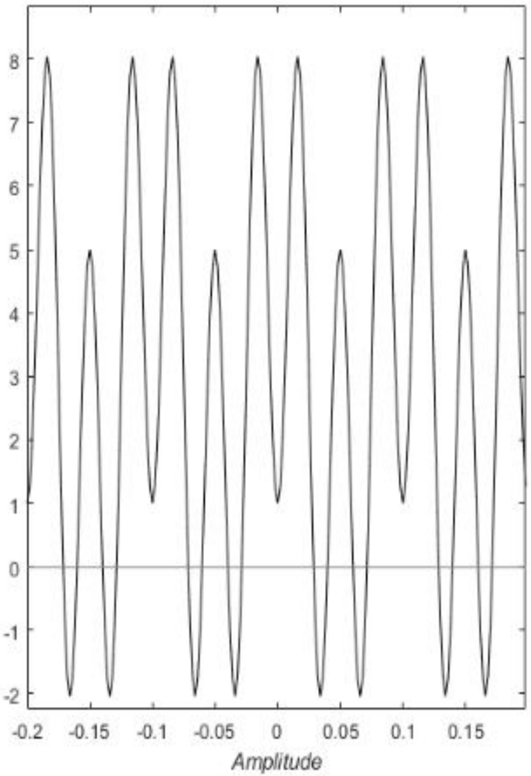
Euler's identities:

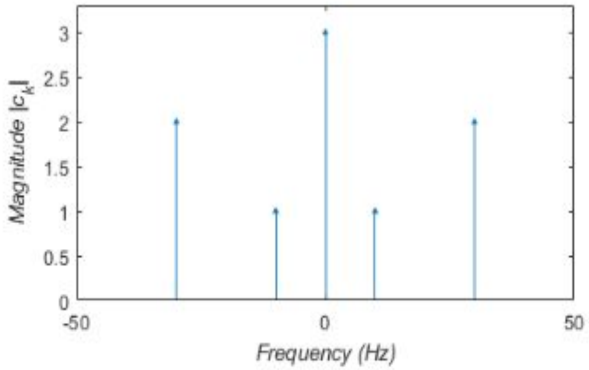
$$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi)$$

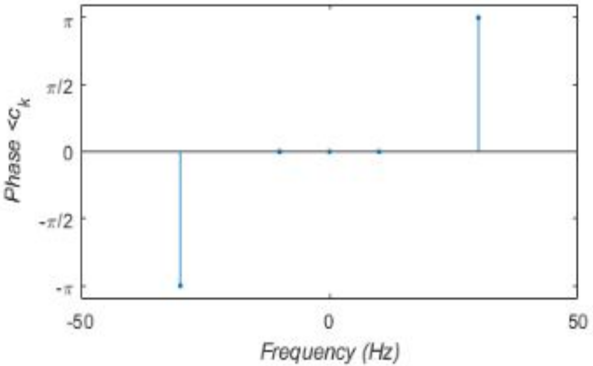
$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{+j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

Example 1 $x(t) = 3 + 2\cos(20\pi t) - 4\cos(60\pi t)$







Fourier Series Analysis

$$c_k = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\, e^{-j2\pi k F_o t}\partial t$$

Fourier Series Synthesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_o t}$$

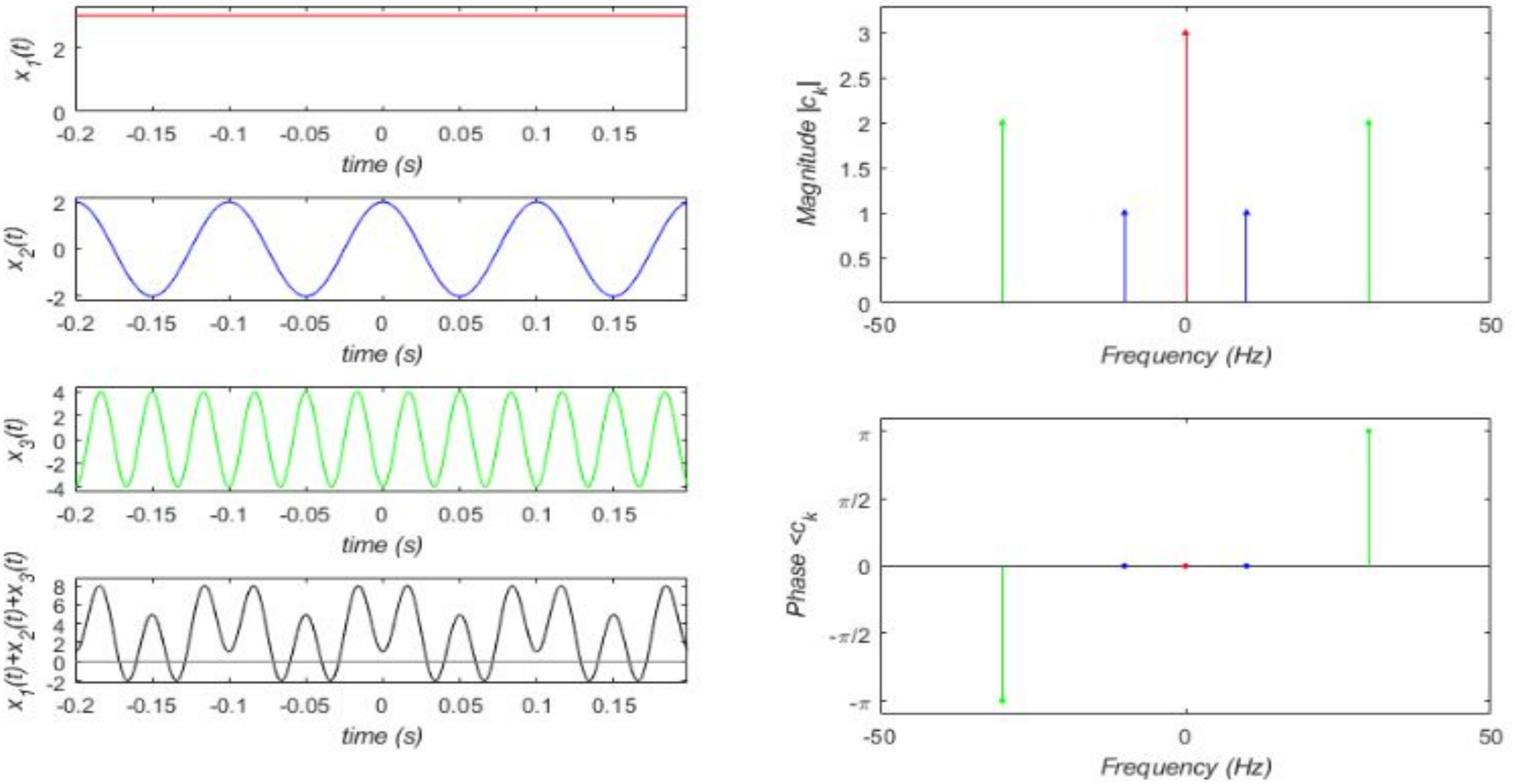
Euler's identities:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{+j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

Example 1 $x(t) = 3 + 2\cos(20\pi t) - 4\cos(60\pi t)$



Example 2 $x(t) = 2 + \cos(30\pi t + \pi/4) + 2\sin(40\pi t)$

$$x(t) = 2e^{j2\pi\cdot 0\cdot 5t} + \frac{1}{2}\left(e^{j\pi/4}e^{j2\pi\cdot 3\cdot 5t} + e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 5t}\right) - 2\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi\cdot 4\cdot 5t} + e^{-j2\pi\cdot 4\cdot 5t}\right)$$

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{j2\pi\cdot 3\cdot 5t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi\cdot 3\cdot 5t} + e^{j2\pi\cdot 4\cdot 5t} + e^{-j2\pi\cdot 4\cdot 5t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j(2\pi k F_o t)}$$

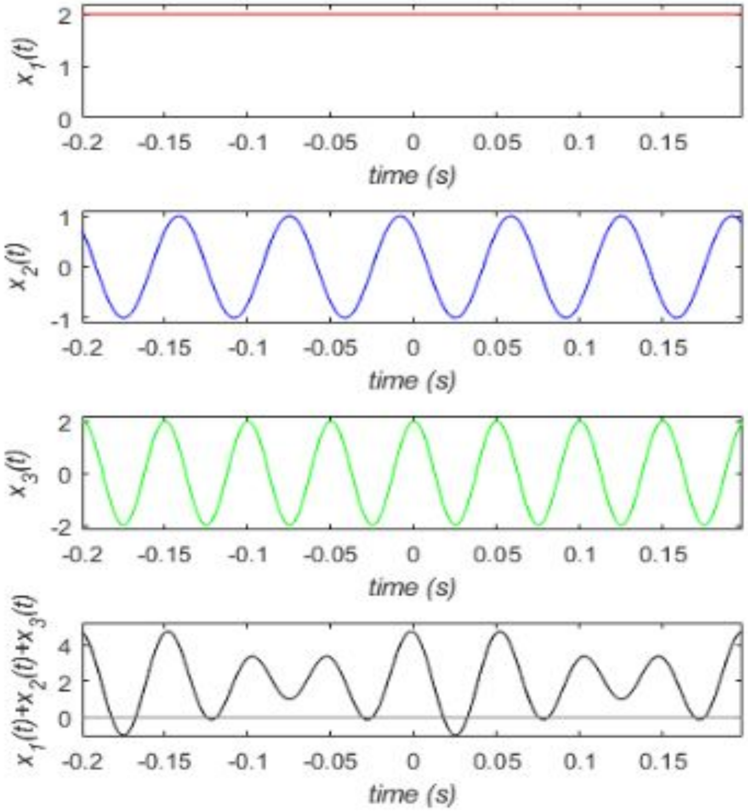
$$F_o = 5$$
$$c_0 = 2$$
$$c_1 = c_{-1} = c_2 = c_{-2} = 0$$
$$c_{-3} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$$
$$c_{-3} = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$$
$$c_{-4} = c_4 = 1$$
$$c_i = c_{-i} = 0 \quad \forall i > 4$$

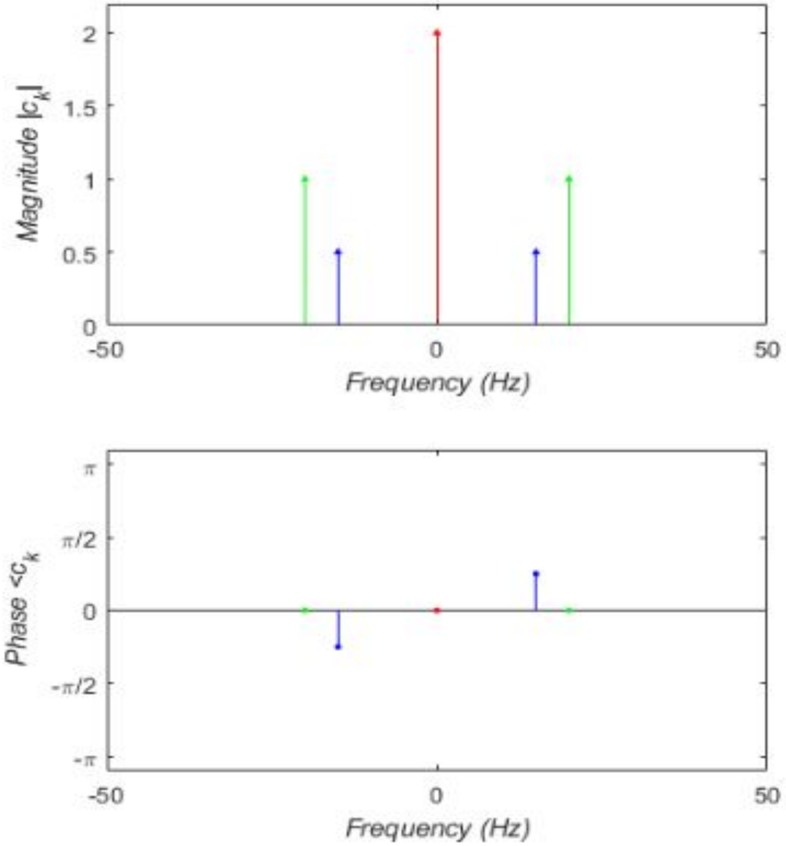
$$-1 = e^{j\pi}$$

Euler's identities:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi)$$
$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$
$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{+j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

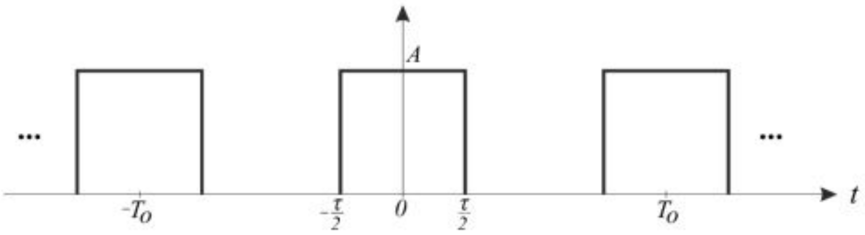
Example 2 $x(t) = 2 + \cos(30\pi t + \pi/4) + 2\sin(40\pi t)$





Example 3

$$x(t) = \begin{cases} A & kT_0 - \frac{\tau}{2} < t < kT_0 + \frac{\tau}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



Fourier Series Analysis

$$c_k = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} x(t)\, e^{-j2\pi k F_o t} \partial t$$

Fourier Series Synthesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_o t}$$

Euler's identities:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j \sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{+j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

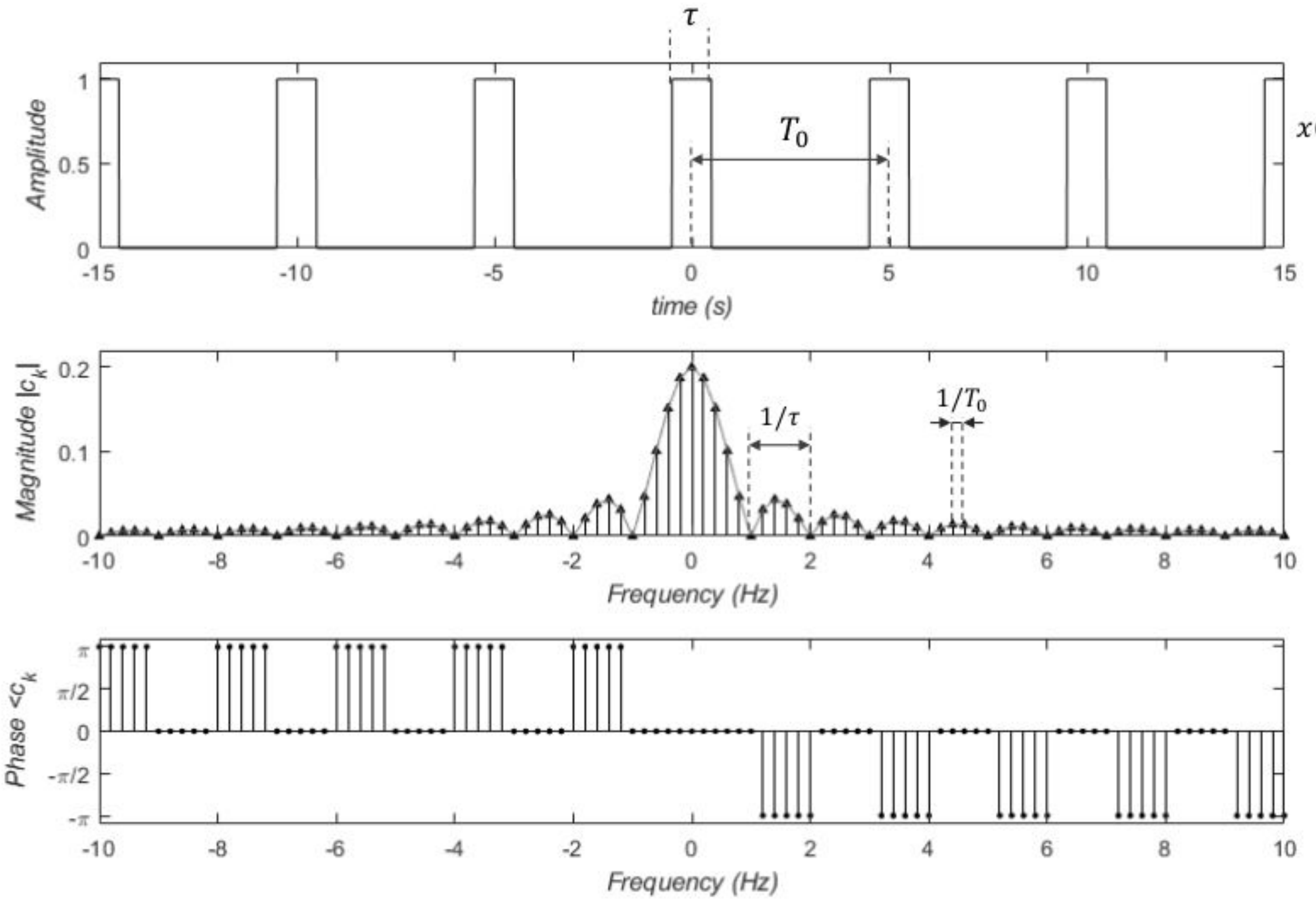
Example 3

$$x(t) = \begin{cases} A & kT_0 - \frac{\tau}{2} < t < kT_0 + \frac{\tau}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$c_k = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi k F_o t} \partial t = \frac{A}{T_o} \left[\frac{e^{-j2\pi k F_o t}}{-j2\pi k F_o} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A}{\pi k F_o T_o} \frac{e^{j\pi k F_o \tau} - e^{-j\pi k F_o \tau}}{2j}$$

$$= \frac{A\tau}{T_o} \frac{\sin(\pi k F_o \tau)}{\pi k F_o \tau} = \frac{A\tau}{T_o} sinc(kF_o \tau)$$

$$c_k = \frac{A \cdot \tau}{T_o} sinc(kF_o \tau)$$

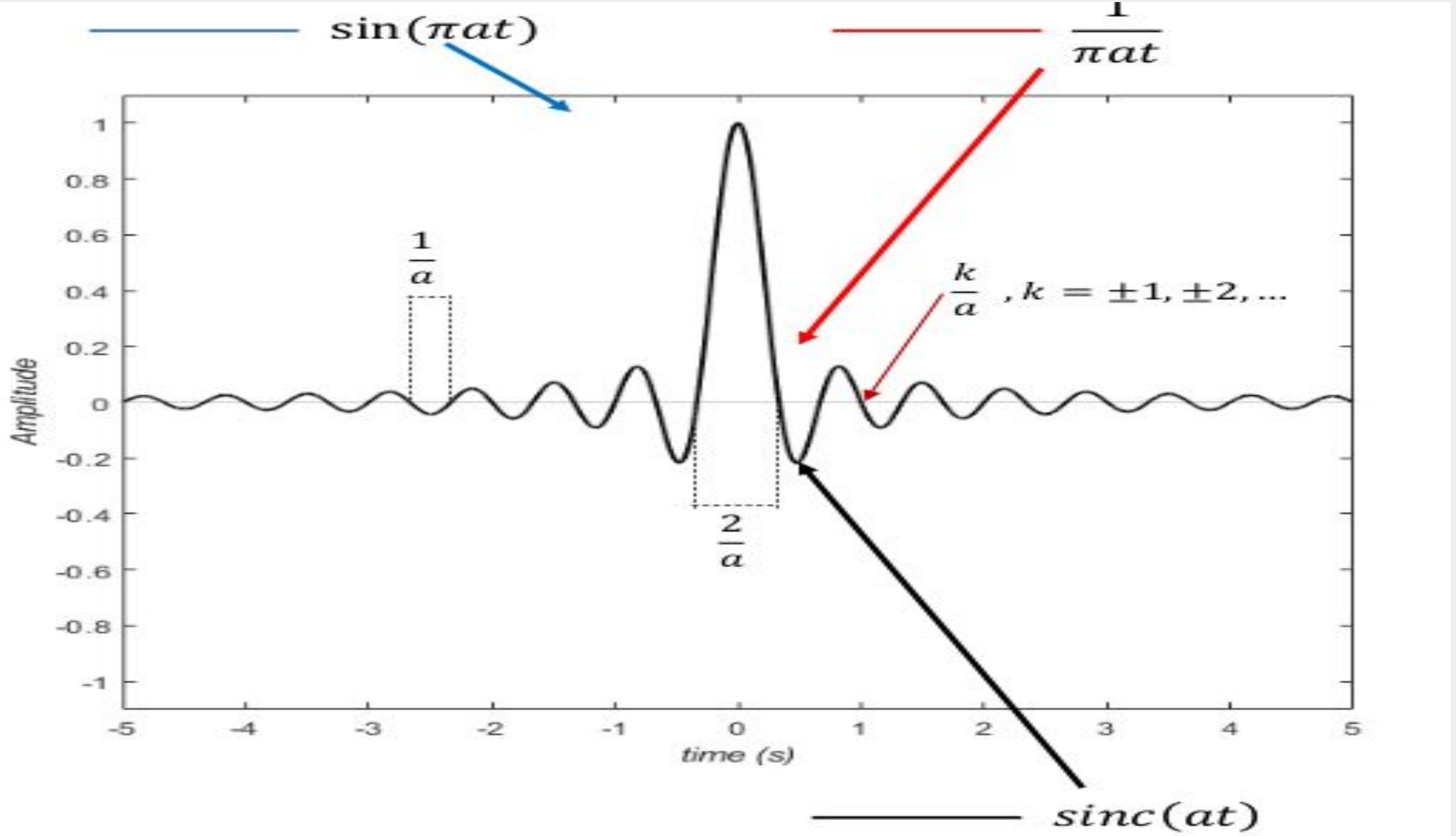


$$x(t) = \begin{cases} A & kT_0 - \frac{\tau}{2} < t < kT_0 + \frac{\tau}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$c_k = \frac{A \cdot \tau}{T_o} sinc(kF_o \tau)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

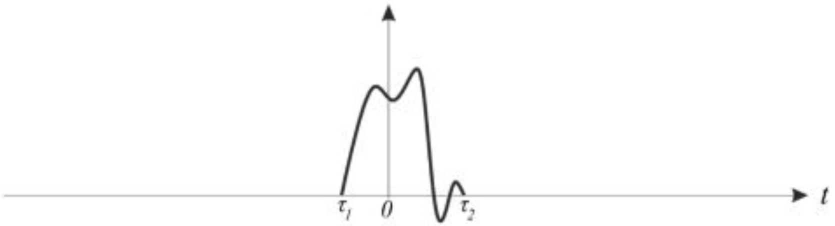


$\sin(\pi a t)$
$\frac{1}{\pi a t}$
$\frac{1}{a}$
$\frac{k}{a}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\frac{2}{a}$
Amplitude
time (s)
$sinc(at)$

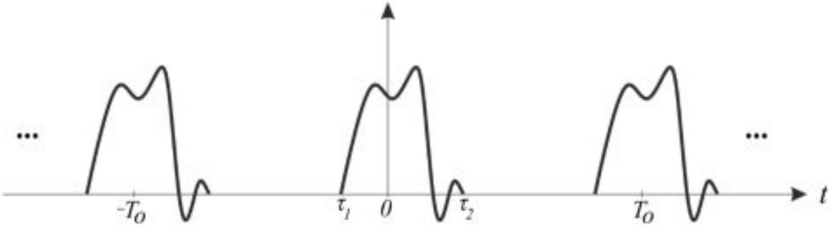
Transformada de Fourier de señales aperiódicas continuas en el tiempo

Considere una señal de duración finita x(t). No se puede expresar como una Serie de Fourier, así que hagámoslo periódico con cierto período arbitrario, y luego hagamos que el período tienda a infinito y ver qué pasa ...

$$x(t) = \begin{cases} \neq 0 & \tau_1 < t < \tau_2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



$$x_p(t) = \begin{cases} x(t) & kT_0 + \tau_1 < t < kT_0 + \tau_2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}\partial t$$

Ecuación de análisis de la Transformada de Fourier (Transformada Directa)

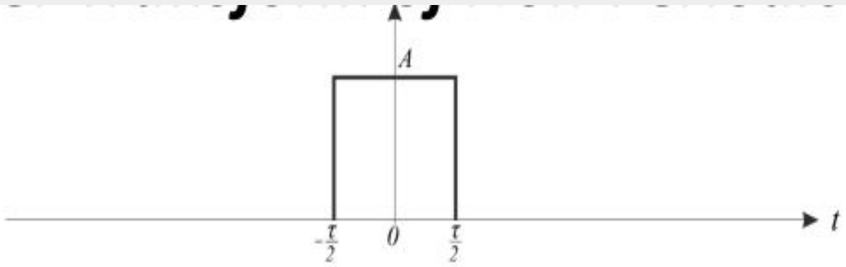
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}\partial F$$

Ecuación de síntesis (Transformada inversa)

“La transformada de Fourier es una función continua en F(frecuencias) , Mientras que la serie de Fourier es una función discreta en F ”

Ejemplo

Example 1



$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases} \xleftrightarrow{Fourier\ Transform} X(F) = A\tau \cdot sinc(F\tau)$$

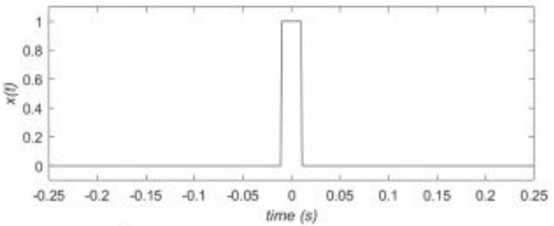
Fourier Transform of Non − Periodic Signals

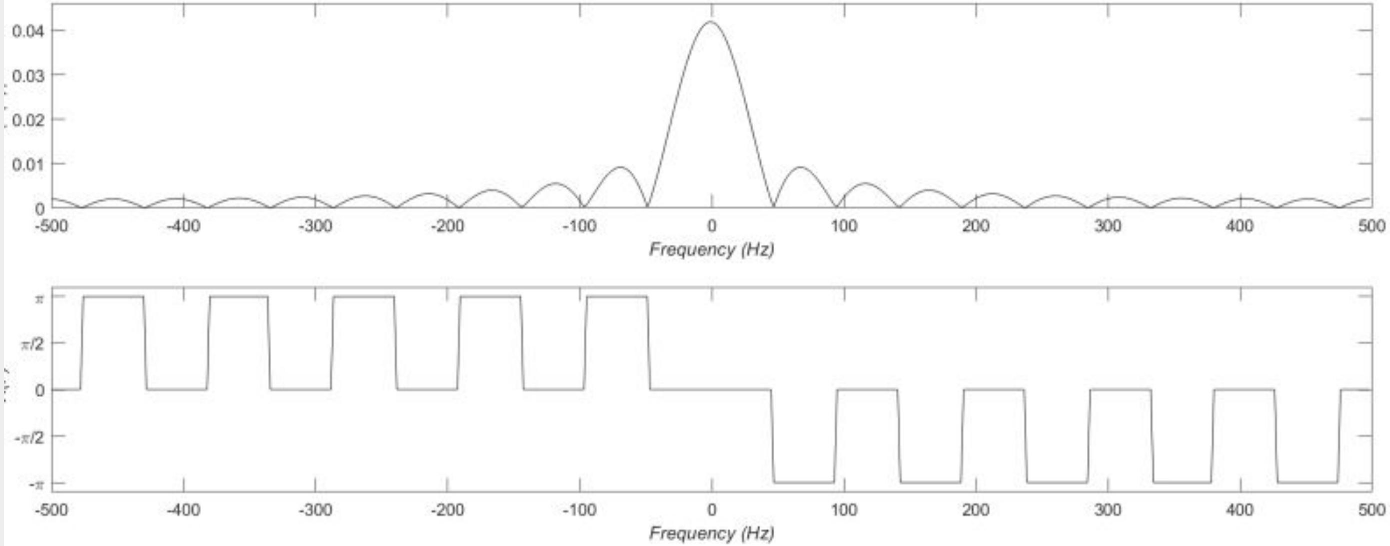
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi F t} \partial F$$

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} \partial t$$

Example

$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases} \xleftrightarrow{Fourier\ Transform} X(F) = A\tau \cdot sinc(F\tau)$$





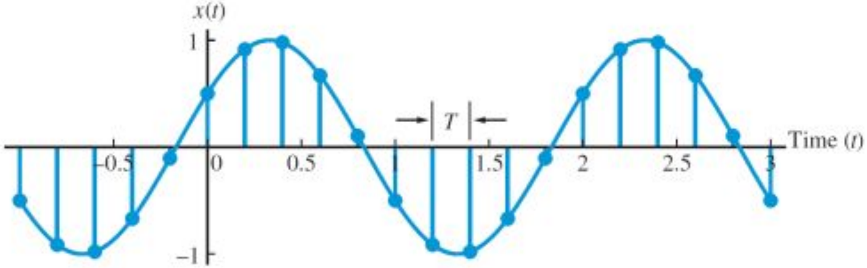
Fourier Transform of Non − Periodic Signals

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} \partial F$$

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} \partial t$$

Repasemos Señales Discretas

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi F_o t + \varphi) \quad \begin{cases} A = the\ amplitude \\ F_o = Osc.\,Frequency\ (Hz) \\ \varphi = phase\ (radians) \end{cases}$$



$$x[n] = x(t)\Big|_{t=nT_s} = A \cdot \cos(2\pi F_o n T_s + \varphi) = A \cdot \cos(2\pi F_o / F_s n + \varphi) = A \cdot \cos(2\pi f_o n + \varphi)$$

$$x[n] = A \cdot \cos(2\pi f_o n + \varphi) \quad -\infty < n < \infty \quad \begin{cases} A = the\ amplitude \\ f_o = discrte\ frequency\ (n.u.) \\ \varphi = phase\ (radians) \end{cases}$$

$Discrete\ frequency$:

$$f_o = \frac{F_o}{F_s}\ n.u.$$

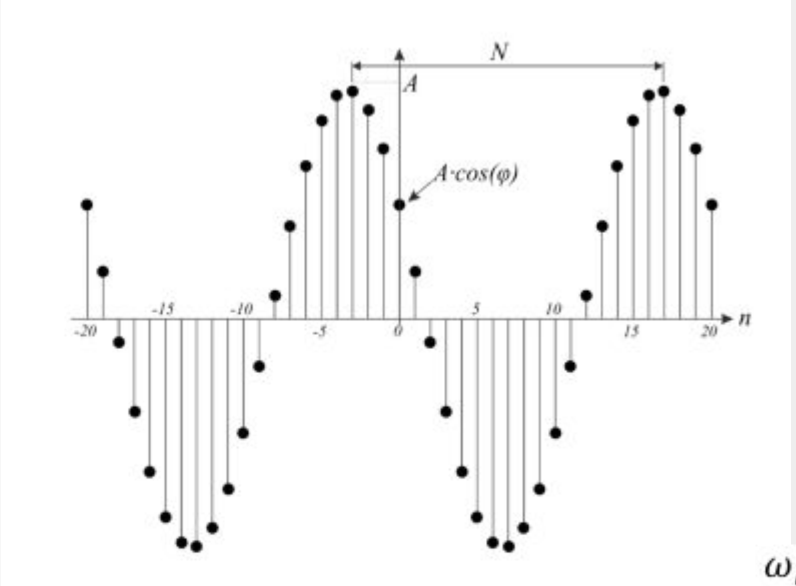
$$nu = \frac{cycles}{sample} = natural\ units$$

$$\omega = 2\pi f = Radians$$

$$\cos\left(2\pi f n - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi f n)$$

$$x[n] = A \cdot \cos(2\pi f_o n + \varphi)$$
$$-\infty < n < \infty$$

A:Amplitud
fo:Frecuencia Discreta
φ:Fase(radianes)



1) La variable independiente n es discreta y solo y solo puede tener valores enteros -∞<n<∞

1) Las sinusoidales discretas son periódicas si : x[n]=x[n+N] con N perteneciente a los naturales positivos esto da el periodo fundamental fo y es un número racional
2) Las señales sinusoidales con una frecuencia de oscilación separadas por algún multiple de 2*pi son idénticas

$$\cos(2\pi f_o n + \varphi) = \cos(2\pi(f_o + k \cdot 2\pi)n + \varphi) \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

1) La máxima oscilación de frecuencia es pi

$$\omega_k = \omega_0 + k \cdot 2\pi \ , \qquad -\pi < \omega_0 < \pi, \qquad \omega_k \ is \ an \ \text{alias} \ of \ \omega_0$$

Exponenciales complejas : Fasor

$$x[n] = A \cdot e^{j(2\pi f_o n + \varphi)} \quad \begin{cases} A = amplitude \\ f_o = discrte\ frequency\ (nu) \\ \varphi = phase\ (radians) \end{cases}$$

Euler's identities:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi})$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}(e^{+j\varphi} - e^{-j\varphi})$$

$$x[n] = A \cdot e^{j(2\pi f_o n + \varphi)} = \frac{A}{2} \cdot (\cos(2\pi f_o n + \varphi) + j\sin(2\pi f_o n + \varphi))$$

1) La señal fasorial es peridodico si se cumple : x[n]=x[n+N] con N como periodo fundamental
2) Las señales fasoriales son periódicas en 2*pi para todo K pertenecientes a los naturales
3) Las frecuencias negativas son usadas matemáticamente como una herramienta que describe la direccion de rotacion de los fasores

“ cualquier señal periódica discreta con período N se puede escribir como una combinación lineal de fasores discretos armónicamente relacionados “

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot s_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j2\pi k f_o n} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j2\pi k n/N}$$

$$x[n] = 3 + 4 \cdot \cos(0.2\pi n) - 2 \cdot \cos(1.2\pi n + \pi/4)$$

$$x(t) = 3e^{j2\pi \cdot 0 \cdot \frac{1}{10} \cdot n} + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot n} + e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot n}\right) - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\pi/4} e^{j2\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{10} \cdot n} + e^{-j\pi/4} e^{-2\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{10} \cdot n}\right)$$

$$x(t) = 3 + 2e^{j2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot n} + 2e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot n} + e^{j\pi} e^{j\pi/4} e^{j2\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{10} \cdot n} + e^{-j\pi} e^{-j\pi/4} e^{-j2\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{10} \cdot n}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{9} c_k \cdot e^{j(2\pi k n/10)}$$

$$f_o = \frac{1}{10} \rightarrow N = 10$$

$$c_0 = 3$$
$$c_1 = 2$$
$$c_{-1} = 2$$
$$c_6 = e^{j\pi} e^{j\pi/4} = e^{j5\pi/4}$$
$$c_{-6} = e^{-j\pi} e^{-j\pi/4} = e^{-j5\pi/4}$$
$$c_i = c_{-i} = 0 \quad i = 2,3,4,5,7,8,9$$

$$-1 = e^{j\pi}$$

Euler's identities:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{+j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

Análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo

La serie de Fourier de señales discretas se representa matemáticamente como una combinación lineal de sinusoides relacionados armónicamente (fasores), como el rango de frecuencia para señales discretas es finito, es decir, −1/2 < fo < 1/2, un periódio de una señal discreta de período N solo puede tener un conjunto de componentes de frecuencia finitos.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j2\pi kn/N}$$

Ecuación de Síntesis (DTFS discrete-time fourier series)

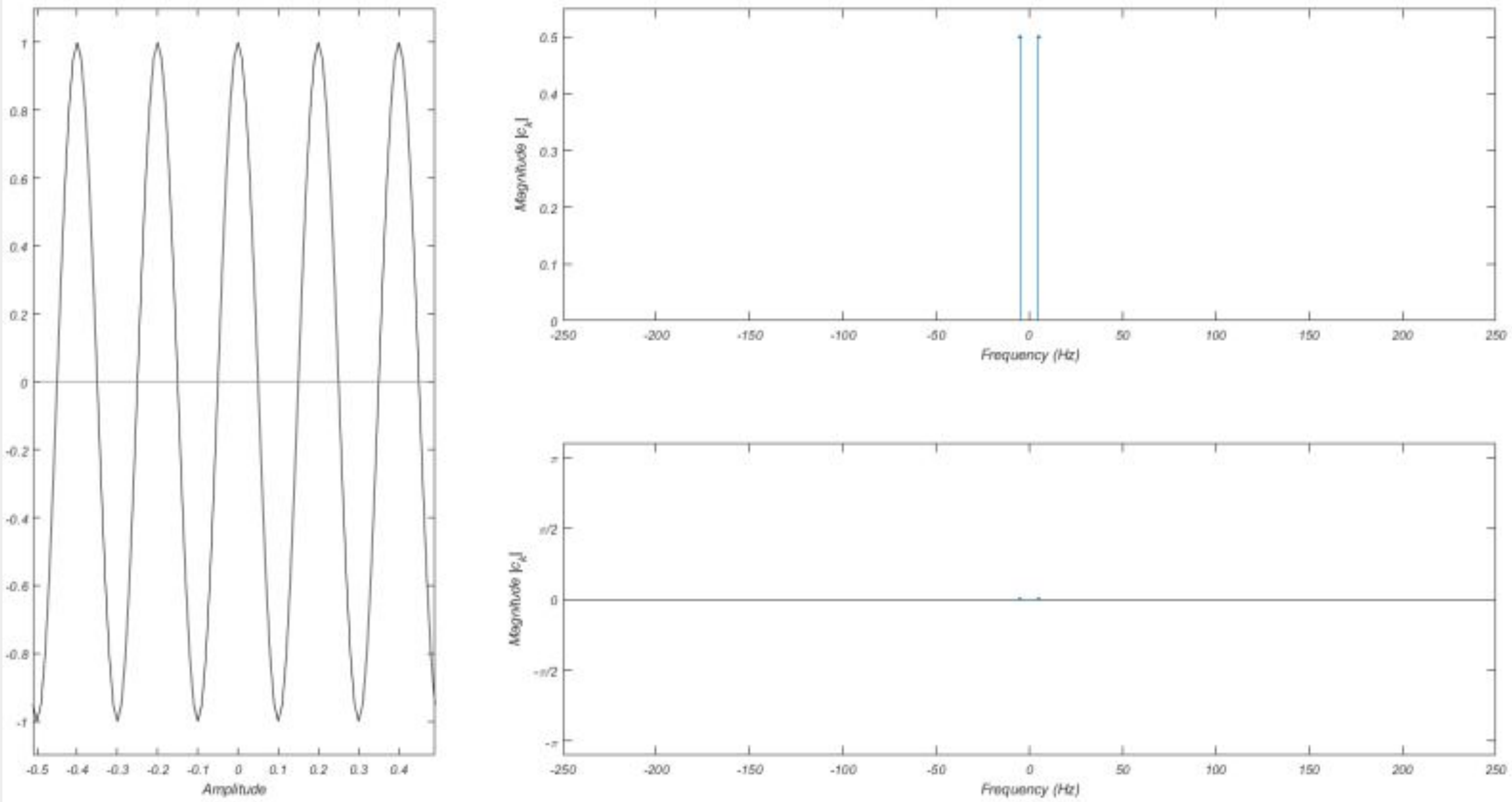
$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\omega_k n}$$

Ecuación de Análisis

1) Ck es perdiocio en N Ck=C(k+N)
2) Ck es una sucesión de periodo infinito

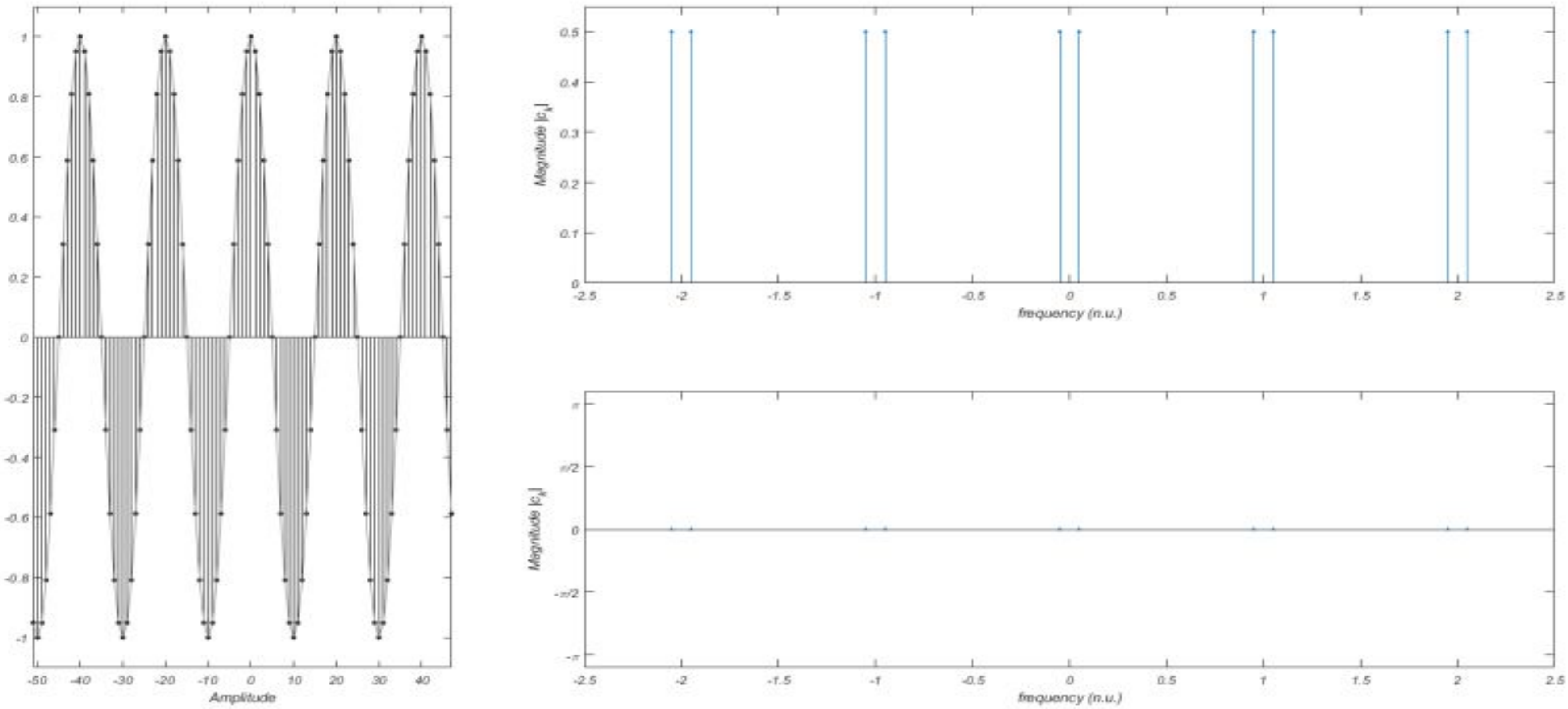
Tanto para la Ecuación de síntesis como el para la de análisis , las ecuaciones son series o sea siempre van ha existir(Convergen)

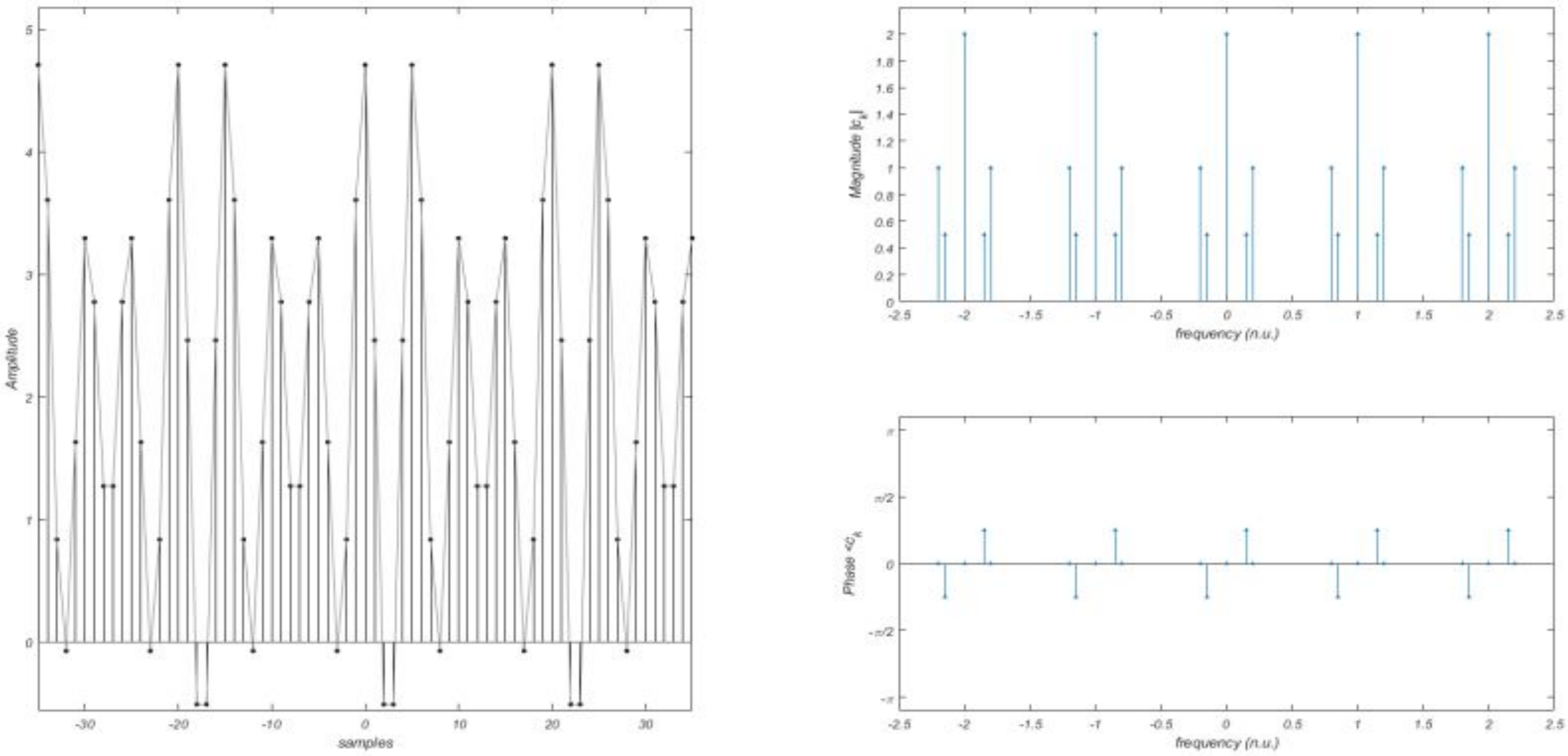
Example of Spectrum of a Periodic Continuous Signal



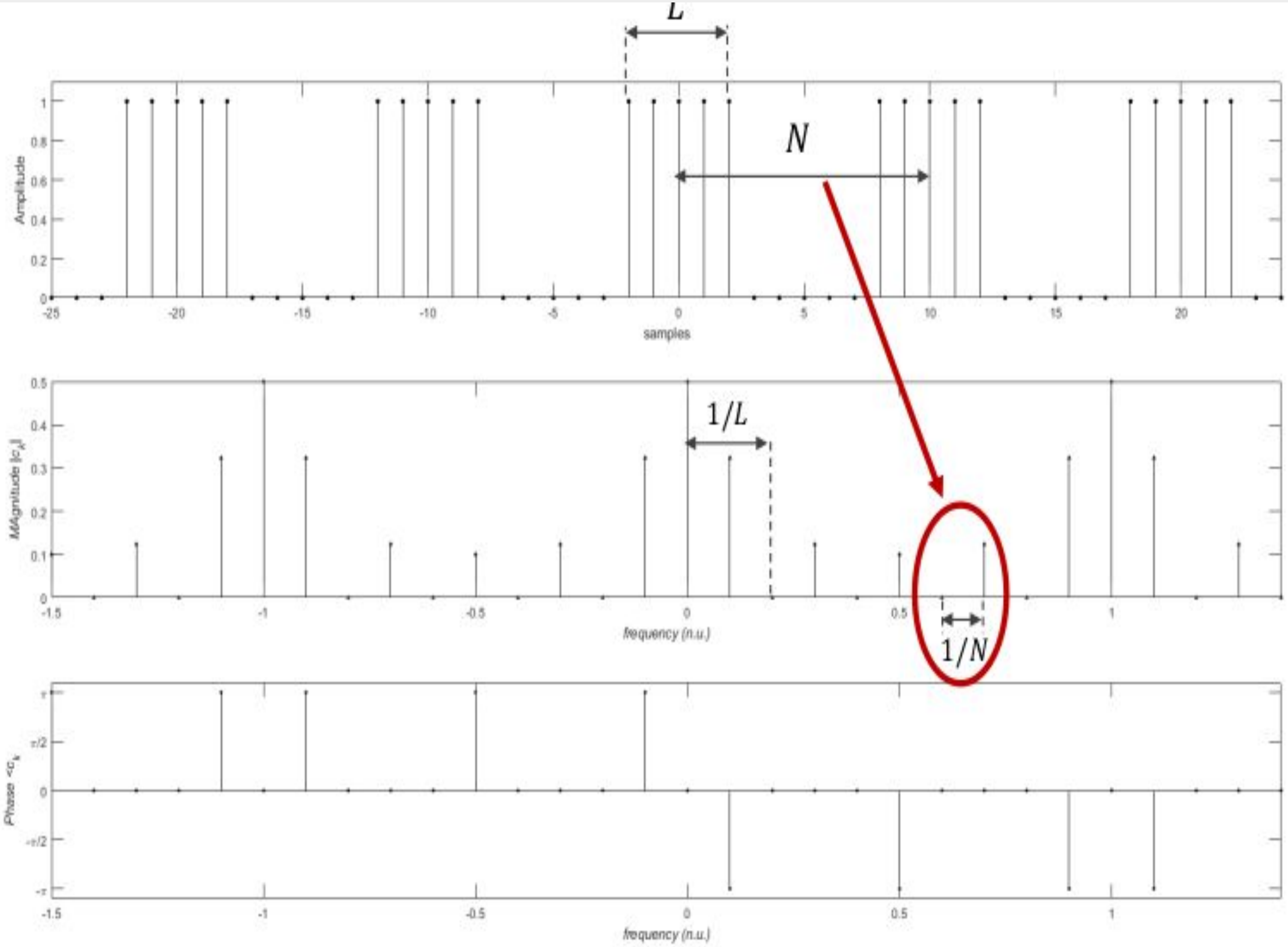
En la señal
Continua

Example of Spectrum of a Periodic Discrete Signal





Amplitude
samples
Magnitude |c_k|
frequency (n.u.)
Phase ∠c_k
frequency (n.u.)



$$x(t) = \begin{cases} 1 & kN - \frac{L}{2} < n < kN + \frac{L}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{2L+1}{N} & k = 0 \\ \dfrac{1}{N} \dfrac{\sin(2\pi k (L + 1/2)/N)}{\sin(\pi k/N)} & otherwise \end{cases}$$

Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo

Se realizan el mismo análisis para señales continuas aperiodicas y se obtiene que:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

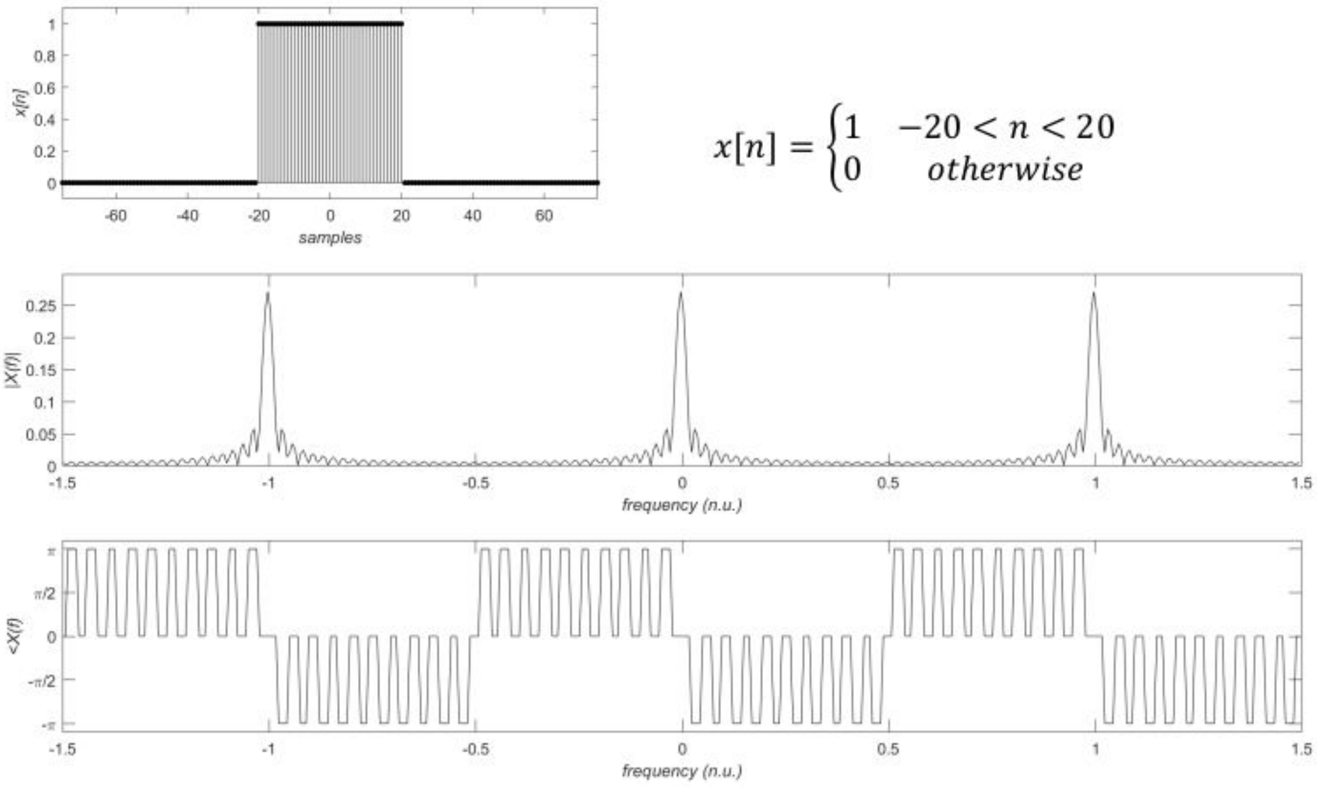
Ecuación de Análisis de la Transformada Discreta de Fourier

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} \partial f$$

Ecuación de Síntesis de la Transformada discreta Inversa de Fourier

“Esta Transformada me da como resultado una señal continua en Frecuencias . MIentras que la serie discreta es una señal discreta en frecuencia “

Ejemplo



$$x[n] = \begin{cases} 1 & -20 < n < 20 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Discrete Time Fourier Series of Periodic Signals

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi f_k n}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j2\pi f_k n}$$

Discrte Time Fourier Transform of Non − Periodic Signals

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} \partial f$$

Alguna Propiedades importante de Fourier-Discreta

Operation	Time domain	Frequency domain
Transform	$x[n]$	$X(f)$
Linearity	$a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$	$a \cdot X_1(f) + b \cdot X_2(f)$
Time reversal	$x[-n]$	$X(-f)$
Product (windowing)	$x_1[n] \cdot x_2[n]$	$\int_{-1/2}^{1/2} X_1(\theta) X_2(f-\theta)\partial\theta$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(f) \cdot X_2(f)$
Time shifting	$x[n-n_0]$	$X(f) \cdot e^{-j2\pi f n_0}$
Frequency shifting	$x[n] \cdot e^{-j2\pi f_0 n}$	$X(f-f_0)$
Modulation	$x[n] \cdot \cos(2\pi f_o n)$	$\frac{1}{2}(X(f+f_0) + X(f-f_0))$
Correlation	$x_1[n] * x_2[-n]$	$X_1(f) \cdot X_2(-f)$

Fourier Transform of Non − Periodic Signals

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} \partial f$$

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

$$E_x = \int_{-1/2}^{1/2} S_{xx}(f) \partial f$$

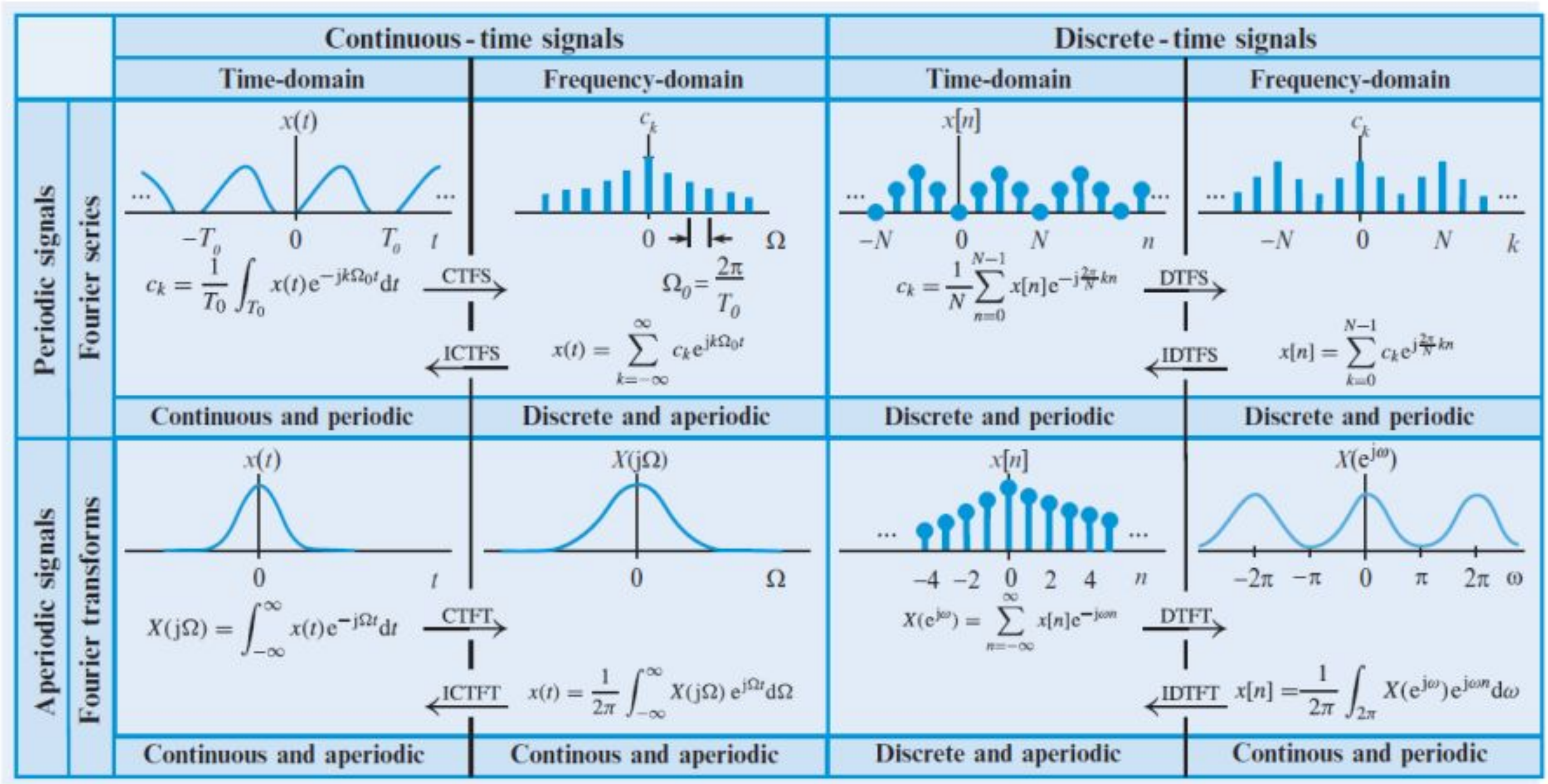
$$X(f) = X(f+k), \forall k \in \mathbb{N}$$

$$X(\omega) = X(\omega + k \cdot 2\pi), \forall k \in \mathbb{N}$$

“ El principio de la representación de señales de Fourier es dividir todas las señales en sumatorias de componentes sinusoidales o exponenciales complejas. La forma analítica, numérica o gráfica de las representaciones de magnitud y fase de cada componente en función de la frecuencia se conocen como espectro de magnitud y espectro de fase de la señal. A su vez esto se conoce como el espectro de Fourier o simplemente el espectro de una señal.

La forma exacta de las fórmulas matemáticas utilizadas para determinar el espectro de la señal (ecuación de análisis de Fourier) y la señal de su espectro (síntesis de Fourier ecuación) dependen de si el tiempo es continuo o discreto y si la señal es periódico o aperiódico. “

Resumen



Continuous - time signals
Discrete - time signals
Time-domain
Frequency-domain
Time-domain
Frequency-domain
Periodic signals
Fourier series
$x(t)$
$-T_0$ 0 T_0 t
c_k
0 Ω
$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$
CTFS
ICTFS
$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$
$x[n]$
$-N$ 0 N n
c_k
$-N$ 0 N k
$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
DTFS
IDTFS
$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
Continuous and periodic
Discrete and aperiodic
Discrete and periodic
Discrete and periodic
Aperiodic signals
Fourier transforms
$x(t)$
0 t
$X(j\Omega)$
0 Ω
$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$
CTFT
ICTFT
$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\, e^{j\Omega t}d\Omega$
$x[n]$
−4 −2 0 2 4 n
$X(e^{j\omega})$
−2π −π 0 π 2π ω
$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$
DTFT
IDTFT
$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$
Continuous and aperiodic
Continous and aperiodic
Discrete and aperiodic
Continous and periodic

Analizadores de Espectro

https://www.digikey.com/es/pdf/t/teledyne-lecroy/t3sa3100-t3sa3200-data-sheet

https://www.digikey.com/es/pdf/r/rigol-technologies/dsa800-e-series-spectrum-analyzer

https://www.analog.com/en/products/adsp-21060.html#product-documentation