# Project SVD

Nahid Emad (Novembre 2023)

**Résumé**

Ce document donne un aperçu de méthode de décomposition en valeur singulière (SVD) d'une matrice rectangulaire ainsi que plusieurs algorithmes permettant le calcul de la SVD d'un *dataset*. L'**objectif du projet** est d'implémenter la SVD d'une matrice rectangulaire représentant un *dataset* quelconque. Pour cette implantation, vous utiliserez un des algorithmes proposés dans le document. Le travail devra être réalisé en 2 étapes : programmation séquentielle, programmation parallèle. Chacune des étapes doit être accompagnée par une série de mesures pour l'évaluation des performances.

## Table des matières

# 1 La décomposition SVD d'une matrice

Soit $A$ une matrice réelles de dimensions $m \times n$. La SVD de $A$ est :

$$A = U\Sigma V^T \tag{1}$$

où $U = [u_1, u_2, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $V = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont des matrices orthogonales ($U^T = U^{-1}$, $V^T = V^{-1}$) et $\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est une matrice diagonale

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_p \end{pmatrix} \tag{2}$$

avec $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \ldots \geq \delta_p \geq 0$ et $p = \min(m, n)$. Le rang de la matrice $A$ est égale au nombre de valeurs signgulières non-nulles de $A$. Les vecteurs colonnes de $U$ et de $V$ sont, respectivement, vecteur singulier à gauche et à droite pour les valeurs singulières correspondantes. En général, on ne calcule pas les valeurs et vecteurs singuliers de la matrice $A$ mais plutôt les valeurs et vecteurs propres des matrices $AA^T$ et $A^TA$ (voir la section suivante).

# 2 La SVD et la EVD d'une matrice

Le calcul des matrices $U$, $V$ et $\Sigma$ d'une décomposition SVD d'une matrice rectangulaire quelconque $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ peut être fait à l'aide de la décomposition EVD des matrices carrées $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $AA^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$. En effet, en utilisant la décomposition (1) de $A$, on a :

$$A^TA = V\Sigma U^TU\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T \tag{3}$$

Or, $A^TA$ (resp. $AA^T$) étant une matrice symétrique diagonalisable, il existe une matrice diagonale $\Lambda$ et une matrice orthogonale des vacteurs propres $X$ (resp. $Y$) telle que :

$$A^TA = X\Lambda X^T = V\Sigma^2V^T \tag{4}$$

et

$$AA^T = Y\Lambda Y^T = U\Sigma^2U^T \tag{5}$$

Par conséquent, $V = X$ (resp. $U = Y$) et $\Sigma^2 = \Lambda$ sont les vecteurs et les valeurs propres de $A^TA$ (resp. $AA^T$) et donc

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_r} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Autrement dit, pour obtenir les valeurs et vecteurs (droite et gauche) singuliers d'une matrice rectangulaire $A$, il suffit de calculer les valeurs et vecteurs propres des matrices symétriques $A^TA$ et $AA^T$. Lorsque $n \ll$, il est plus intéressant de calculer la EVD de la matrice $A^TA$ (Snapshots). Dans le cas contraire, il est préférable de résoudre le problème EVD de la matrice $AA^T$ (méthode usuelle).

## 3 Algorithmes de calcul de la SVD

### 3.1 Motivation pour l'utilisation de la SVD d'un dataset

**Valeurs et vecteurs propres :** Soient $A$ une application linéaire définie dans l'espace $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ une base de cet espace. L'application appliquée à $B$ modifie les vecteurs de la base (les directions ainsi que la taille). Cependant, si $B$ est la base constituée des vecteurs propres de $A$, cette dernière ne modifie pas les directions des vecteurs propres mais seulement leur taille. La valeur propre associée à un vecteur propre détermine le facteur d'agrandissement de celui-ci.

**Rôle des vecteurs propres dominants :** Ainsi on remarque que les directions associées aux plus grandes valeurs propres sont celles dont les tailles augmontent le plus. Une application courante est quant on a un nuage de points qu'on souhaite analyser. Pour cela, on les redispositionne afin de les étaler aussi largement que possible pour mieux les voir et analyser. Une méthode simple consiste à tourner l'espace dans la direction des vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance (décrivant comment les points varient les uns relativement aux autres).

Supposons que $A$ est une matrice diagonalisable. Alors, $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tel que $A = PDP^{-1}$ où $D$ est une matrice diagonable. Comme $AP = PD$, si nous notons les colonnes de $P$ par $a_1, \ldots a_n$, alors $AP = (\lambda_1 a_1, \ldots \lambda_n a_n)$. Avec $P$ une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de $A$ associés aux valeurs propres $\lambda_i$ (pour $i = 1, n$) et constituent une base. Ainsi l'invariabilité de la direction des vecteurs propres (i.e. les colonnes $P$) par l'application linéaire $A$ est mise en évidence.

**Problème pour les matrices non-inversibles et/ou rectangulaire :** Malheureseument, toutes les matrices ne sont pas diagonalisables et donc leurs vecteurs propres ne forment pas une base. Par conséquent, nous ne pourrons pas utiliser cette invariabilité du sous-espace propre par l'application linéaire $A$. Il est possible de remédier à ce défaut lorsque $A$ n'est pas diagonalisable par sa SVD. De plus, la SVD est applicable à des matrices rectangulaires, ce qui est bien plus générale que la diagonalisation d'une matrice.

### 3.2 Représentation des valeurs et vecteurs singuliers

Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $p = \min(m, n)$. Alors $\exists U = [u_1, \cdots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\exists V = [v_1, \cdots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonales et $\exists \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$ avec $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tel que : $A = U\Sigma V^T$ avec $\Sigma = \big(\Sigma_1, 0\big)$ **si** $n \leq m$ and $\Sigma = \begin{pmatrix}\Sigma_1 \\ 0\end{pmatrix}$ **sinon**.

Si les valeurs singulières $\sigma_i$ (pour $i = 1, p$) sont distinctes, alors les $u_i$ et $v_i$ sont uniques et $\sigma_1$ est le rayon spectral (la norme 2) de la matrice $A$.

Pour calculer la décomposition en valeurs singulières (SVD) d'une matrice, on exploite le fait que quelque soit la forme d'une matrice $A$ (carré ou non), la matrice $B = A^T A$ est symétrique. Or, les vecteurs propres d'une matrice symétrique forment une base orthonormale. Soit $x_i$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i$ de la matrice $B$ (pour $i = 1, n$). Les valeurs singulières de $A$ sont les $\sqrt{\lambda_i}$ et les vecteurs singuliers à droite de $A$ sont leur vecteurs propres correspondants. Le rang de $A$ est le nombre de ses valeurs singulières strictement supérieur à 0.

# 4 Alorithmes pour le calcul de la SVD d'une matrice

## 4.1 Algorithme 1

1. Transformer la matrice $B = A^T A$ en une matrice tridiagonale.
2. Calculer les valeurs propres de $B$

Cet algorithme est instable **si on calcule la SVD explicitement et lorsque des très petites valeurs singulières existent**. Dans ce cas, on préférera l'algorithme suivant :

## 4.2 Algorithme 2

1. Transformer la matrice $A$ en une matrice bidiagonale $C$ ayant les même valeurs singulières.
2. Calculer les valeurs singulières de $C$

# 5 Bi-diagonalisation d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Nous supposons $m \leq n$ (sinon, on utilisera $A^T$ au lieu de $A$). Alors $\exists Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonales tel que : $Q^T AP = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$ où $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ est bidiagonale.

Soit $C = UDV^T$ la SVD de $C$. Alors $A = \left(Q_1 U, Q_2\right) \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \left(PV^T\right)$ est une SVD de $A$. Les matrices $C$ et $A$ ont les mêmes valeurs singulières.

## 5.1 Algorithme 3 (adaptation de l'algorithme 2)

1. Transformer la matrice $A$ en une matrice bidiagonale $C$ avec une procédure de bidiagonalisation comme celle donnée en

   `http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/etemplates/node198.html`
2. Calculer les valeurs singulière de $C$ par l'algorithme 4.1.