UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

II - 2023

EVALUACION n^{o}3 - Cálculo II

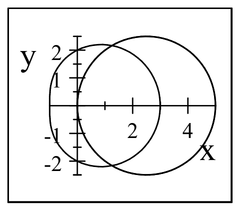
1. (16 ptos). Sean C_1 , C_2 curvas cerradas en el plano polar cuyas ecuaciones son $r = 2 + \cos\theta$, $r = 5\cos\theta$ respectivamente

   (a) Determine las coordenadas de los puntos de intersección entre C_1 y C_2.

   (b) Calcule el área de la región R que se encuentra al interior de C_1 y es exterior a C_2

Sol. $C_1 : \ r = 2 + \cos\theta \quad C_2 : \ r = \ 5\cos\theta$

a)



$C_1 \cap C_2$

C_1 y C_2 se intersecan cuando

$$2 + \cos\theta = 5\cos\theta$$

esto es

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

luego

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

Así, las coordenadas de los puntos de intersección son $\left(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$

(06 ptos)

b. El área A de la región R que se encuentra al interior de C_1 y es exterior a C_2, usando simetrias, esta dada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\pi/3}^{\pi} (2 + \cos\theta\ )^2\, d\theta - \int_{\pi/3}^{\pi/2} (5\cos\theta)^2\, d\theta \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi} \left(\cos^2\theta + 4\cos\theta + 4\right) d\theta - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(25\cos^2\theta\right) d\theta \\
&= 3\pi - \frac{17}{8}\sqrt{3} - \left(\frac{25}{12}\pi - \frac{25}{8}\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{11}{12}\pi + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

(10 ptos)

2. (21 ptos).

(a) Usando un criterio adecuado, determine la convergencia de cada una de las siguientes series

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ **ii.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Resp

i. Puesto que

$$\left|n\left(\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right| < n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{2}{3}$$

entonces, aplicando el criterio de la raiz, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ es convergente.

Así, por comparación simple, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|n\left(\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|$ converge.

Así, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ converge absolutamente.

(05 ptos)

ii. Es claro que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

Ahora, si definimos $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \in [1,\infty[$ se tiene que:

a. $f(x) > 0$ en $[1,\infty[$

b. f es decreciente en $[3,\infty[$, ya que $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$ alli.

c. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$

d. $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \dfrac{\ln n}{n}$

e. $\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \displaystyle\lim_{h\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}\ln^2 h - \tfrac{1}{2}\ln^2 3\right) = \infty$

entonces, por criterio de la integral, la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es divergente.

Como una serie no cambia su caracter de convergencia al agregar o quitar un número finito de términos, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es divergente, y luego la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tfrac{\ln n}{n}$ no es absolutamente convergente.

Por otro lado, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tfrac{\ln n}{n}$ es serie alternante con $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

Como

i. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii. $a_{n+1} < a_n$

entonces , por Leibniz, la serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tfrac{\ln n}{n}$ es convergente.

De lo anterior, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tfrac{\ln n}{n}$ converge condicionalmente.

(09 ptos)

(b) Encuentre una expresión en series de potencias para la función $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$, determinando explícitamente el intervalo de convergencia.

Resp. Se sabe que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ , \qquad -1 < x < 1$$

entonces, por sustitución,

$$\frac{1}{1+\frac{x}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} x^n \ , \quad -4 < x < 4$$

Ahora, como $\dfrac{x}{4+x} = \dfrac{x}{4}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{4}}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4+x} &= \frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} x^n, \quad -4 < x < 4 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} x^n, \end{aligned}$$

entonces la serie de potencias para $f\ (x)$ es

$$f\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} x^n \ , \quad -4 < x < 4 \qquad \text{(07 ptos)}$$

3. (23 ptos) Sea f la función definida mediante

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n}(x-1)^n$$

en el intervalo de convergencia I de la serie de potencia

(a) **(08 ptos)** Determinar radio e intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n}(x-1)^n$. Indique, con fundamentos, si la serie converge absolutamente, condicionalmente o diverge en los extremos del intervalo de convergencia.

Resp. Para $x = 1$, la serie converge al valor cero.

Si $x \neq 1$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{n4^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-|}{4\sqrt[n]{n}} = \frac{|x-1|}{4} \quad , \text{ ya que } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Luego, aplicando el criterio de la raiz, la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n}(x-1)^n$ es converge absolutamente si $\frac{|x-1|}{4} < 1$ y divergente si $\frac{|x-1|}{4} > 1$.

Así, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n}(x-1)^n$ converge si $-3 < x < 5$, y diverge si $x < -3$ o $x > 5$

(04 ptos)

Como el criterio no proporciona información para $x = -3$ o $x = 5$, analizamos por separado dichos puntos.

- Si $x = -3$, entonces resulta la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente (serie armonica)
- Si $x = 5$, entonces resulta la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que es convergente condicionalmente (por Leibnitz).

Finalmente, el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n}(x-1)^n$ es

$$I =]-3, 5]$$

y su radio de convergencia es

$$R = 4$$

(04 ptos)

b) **(07 ptos)** Demuestre que $f'(x) = \frac{-1}{x+3}$ en el intervalo $]-3,5[$

Resp. Como la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n}(x-1)^n$ converge a $f(x)$ en $]-3,5[$ entonces para cada $x \in]-3,5[$, por propiedad de derivación en series de potencias,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{4}\right)^n \quad \text{(serie geométrica con } r = \frac{1-x}{4}) \end{aligned}$$

Así, por propiedad de series geométricas,

$$f'(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(\frac{1-x}{4}\right)}, \quad -1 < \frac{1-x}{4} < 1$$

Esto es,

$$f'(x) = \frac{-1}{x+3}, \quad -3 < x < 5 \qquad \text{(07 ptos)}$$

c) **(5 ptos)** Usando el 3.b) deduzca que $f(x) = \ln\left(\frac{4}{x+3}\right)$

Ind. Notar que, por la definición de f en el apartado 3.a), $f(1) = 0$

Solución: Como $f(1) = 0$, y usando el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= \int_1^x \frac{-1}{t+3}\, dt = -\ln(x+3) + \ln 4 \\ &= \ln\left(\frac{4}{x+3}\right), \end{aligned}$$

luego

$$f(x) = \ln\left(\frac{4}{x+3}\right), \quad -3 < x < 5\,. \qquad \text{(05 ptos)}$$

d) (**3 ptos**) Utilice 3.c) para calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n}$.

En particular, usando $x = 2$ en la serie de potencias se tiene.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ne^n} = f(2) = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \qquad \text{(03 ptos)}$$