UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

24 de Octubre 2023 JA/EB/JB/GD/AR

PAUTA EVALUACIÓN 2

Cálculo II - 527150

1. **(20 puntos)** Resolver los siguientes ejercicios:

a) Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función continua en todo su dominio definida por

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{|\sin(x^2-1)|}{4x+x^4} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Analizar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$.

Solución: Separando la integral en el punto $x = 1$, se tiene que

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^{+\infty} g(x)dx\ .$$

Por definición,

$$\int_0^1 \ln(x)dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \ln(x)dx = \lim_{a\to 0^+} \left(x\ln(x) - x\right)_a^1 = -1 - \lim_{a\to 0^+} a\ln(a)$$

Ahora, usando L'hopital

$$\lim_{a\to 0^+} a\ln(a) = \lim_{a\to 0^+} \frac{\ln(a)}{1/a} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1/a}{-1/a^2} = -\lim_{a\to 0^+} a = 0.$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ es convergente y converge al valor -1.

Por otro lado,

$$0 \leq \frac{|\sin(x^2-1)|}{4x+x^4} \leq \frac{1}{4x+x^4} \leq \frac{1}{x^4}$$

y como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}dx$ es convergente (por criterio $p-$integral con $p = 4$), entonces por criterio de comparación se concluye que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x^2-1)|}{4x+x^4}dx$ es convergente.

Finalmente,

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx \text{ es convergente por ser suma de integrales convergentes.}$$

(12 ptos).

b) Utilizando la función Gamma Γ, calcule

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2} dx.$$

Solución: Haciendo la sustitución $u = \ln(x)$, se tiene que $dx = e^u du$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2} dx &= \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du \\ &= \int_0^{+\infty} u^{4-1} e^{-u} du \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^{4-1} e^{-u} du &= \Gamma(4) \\ &= 3! = 6 \end{aligned}$$

se concluye que

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2} dx = 6 \ .$$

(8 ptos).

2. **(20 puntos)** Sea R la región en el primer cuadrante encerrada por las curvas

$$y = x^2, \quad y = 8 - x^2 \quad \text{e} \quad y = 7x.$$

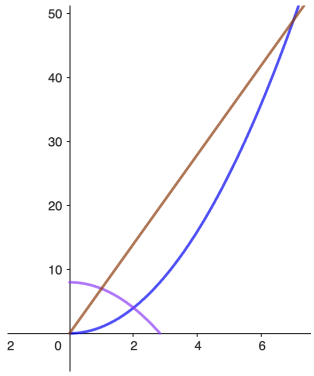
a) Calcule el área de la región R.

b) Escriba la integral que permite calcular el perímetro de la región R. **No calcule esta integral**.

Solución: Sean $C_1 : y = x^2,\ C_2 : y = 8 - x^2,\ C_3 : y = 7x.$

Primero, lo puntos de intersección del primer cuadrante entre las curvas C_1, C_2 y C_3 son $(0,0)$, $(2,4)$, $(1,7)$ y $(7,49)$.

Bosquejando obtenemos lo siguiente:



(4 ptos).

Del esquema se ve que existen dos regiones acotadas por las curvas C_1, C_2 y C_3.

I. Región R acotada por las curvas C_1, C_2 y C_3, con $0 \leq x \leq 2$.

a) El área de la región R se calcula mediante la integral

$$A = \int_0^1 7x - x^2 dx + \int_1^2 (8 - x^2) - x^2 dx \ .$$

Como

$$\int_0^1 7x - x^2 dx = \frac{19}{6} \quad \text{y} \quad \int_1^2 (8 - x^2) - x^2 dx = \frac{10}{3}$$

se tiene que

$$A = \frac{19}{6} + \frac{10}{3} = \frac{13}{2}\ \mathrm{u}^2$$

(8 ptos).

b) El perímetro P de la región R es:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 \sqrt{1 + ((7x)')^2} dx + \int_0^2 \sqrt{1 + ((x^2)')^2} dx + \int_1^2 \sqrt{1 + (8 - x^2)')^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{50} dx + \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \int_1^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx \end{aligned}$$

(8 ptos).

II. Región R acotada por las curvas C_1, C_2 y C_3, con $1 \leq x \leq 7$.

a) El área se calcula mediante la integral

$$A = \int_1^2 7x - (8 - x^2)dx + \int_2^7 7x - x^2 dx \ .$$

Como

$$\int_1^2 7x - (8 - x^2)dx = \frac{29}{6} \quad \text{y} \quad \int_2^7 7x - x^2 dx = \frac{275}{6}$$

se tiene que

$$A = \frac{29}{6} + \frac{275}{6} = \frac{152}{3} \text{ u}^2$$

(8 ptos).

b) El perímetro P es:

$$\begin{aligned} P &= \int_1^7 \sqrt{1 + ((7x)')^2}dx + \int_2^7 \sqrt{1 + ((x^2)')^2}dx + \int_1^2 \sqrt{1 + (8 - x^2)')^2}dx \\ &= \int_1^7 \sqrt{50}dx + \int_2^7 \sqrt{1 + 4x^2}dx + \int_1^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx \end{aligned}$$

(8 ptos).

3. **(20 puntos)** Sea α una constante real tal que $\alpha \leq 0$.

Sea R_1 la región del plano en el primer cuadrante encerrada por las curvas

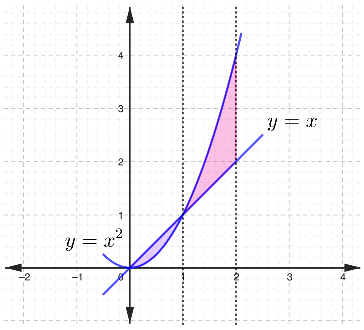
$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x,$$

y sea R_2 la región en el primer cuadrante encerrada por las curvas

$$y = x^2, \quad y = x, \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = 2.$$

Determinar, si es posible, un valor de α de modo que la suma de los volúmenes que se obtienen al rotar R_1 y R_2 en torno a la recta $y = \alpha$ sea 6π.

Solución: Bosquejando las regiones R_1 y R_2 obtenemos lo siguiente:



Utilizaremos el método de los discos para calcular los volúmenes $V(R_1)$ y $V(R_2)$ obtenidos tras rotar R_1 y R_2 respectivamente, en torno a la recta $y = \alpha$, con $\alpha \leq 0$.

Para R_1,

$$V(R_1) = \pi \int_0^1 (x - \alpha)^2 - (x^2 - \alpha)^2 dx = \pi \left(\frac{2}{15} - \frac{\alpha}{3} \right)$$

y para R_2

$$V(R_2) = \pi \int_1^2 (x^2 - \alpha)^2 - (x - \alpha)^2 dx = \pi \left(\frac{58}{15} - \frac{5\alpha}{3} \right)$$

Como la suma de los volúmenes debe ser 6π,

$$\begin{aligned} V(R_1) + V(R_2) &= 6\pi \\ \pi \left(\frac{2}{15} - \frac{\alpha}{3} \right) + \pi \left(\frac{58}{15} - \frac{5\alpha}{3} \right) &= 6\pi \\ 4 - 2\alpha &= 6 \\ \alpha &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor buscado existe y es $\alpha = -1$.

(20 ptos).