Projeto 1 - Métodos Computacionais em Física

Rodrigo da Motta Cabral de Carvalho
NUSP:11224309

08/05/2022

1 Resumo

O caos é um tema amplamente estudado em diversas áreas, como física, matemática, estatística, computação, entre outras, ajudando na compreensão de muitos fenômenos da natureza bastante complexos e em alguns casos bastante simples. Esse projeto consiste na análise do pendulo duplo, um dos mais simples sistemas caóticos de todos. Para realizar tal análise, o uso de ferramentas numéricas são essenciais. Diante disso, foi realizada uma rotina usando algoritmo de Runge-Kutta de ordem 2 para a resolução numérica das equações diferenciais de Lagrange e de Hamilton-Jacob, primeiramente para o a aproximação $m_1 >> m_2$, e posteriormente para o caso geral. Dessa forma, é possível explorar como o sistema muda com a variação das condições iniciais, observando que o sistema se torna caótico em certos casos.

2 Introdução

2.1 Pendulo Duplo

O pendulo duplo consiste basicamente em duas massas, m_1 e m_2, ligadas a fios de comprimento l_1 e l_2, respectivamente, sob a ação da força da gravidade g.

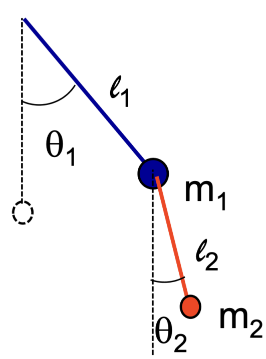

Figura 1: Esquema do pendulo duplo

Para descrever o sistema, a formulação Lagrangeana simplifica as contas e as tornam mais diretas.

2.1.1 Aproximação $m_1 >> m_2$

Primeiramente, basta escrever a Lagrangeana do sistema $\mathcal{L} = T - V$, em que K é a energia cinética e V a energia potencial, em termos dos ângulos entre os fios e a normal.

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ \mathrm{V = -\ m_1}gy_1 - m_2gy_2, \tag{1}$$

Escrevendo em termo das coordenadas generalizadas, θ_1 e θ_2, vamos utilizar um pouco de geometria.

$$x_1 = \ell_1 \sin\theta_1, \qquad y_1 = \ell_1 \cos\theta_1, \tag{2}$$

$$x_2 = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2 \qquad y_2 = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2. \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

A partir disso, o vínculo do sistema fica evidente,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 = 0. \tag{5}$$

Logo, substituindo as relações na Lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2}\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 l_2^2}{2}\dot{\theta}_2^2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g\ell_1\cos\theta_1 + m_2g\ell_2\cos\theta_2. \tag{6}$$

Aplicando a definição,

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}, \qquad \frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}, \tag{7}$$

Para encontrar as equações diferenciais acopladas de Euler-Lagrange, vamos aplicar a aproximação $m_1 >> m_2$, em que $(m_1 + m_2) \approx m_1$.

$$p_{\theta_1} \approx m_1 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{8a}$$

$$p_{\theta_2} = m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{8b}$$

$$\dot{p}_{\theta_1} \approx -m_1g\ell_1\sin\theta_1 - m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2), \tag{8c}$$

$$\dot{p}_{\theta_2} = -m_2g\ell_2\sin\theta_2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2). \tag{8d}$$

Isolando o $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$,

$$\frac{d\theta_1}{dt}\theta_1(t) = \frac{p_{\theta_1}}{m_1\ell_1^2} - \frac{p_{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1\ell_1\ell_2}, \tag{9a}$$

$$\frac{d\theta_1 2}{dt}\theta_2(t) = \frac{p_{\theta_2}}{m_2\ell_2^2} - \frac{p_{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1\ell_1\ell_2}, \tag{9b}$$

$$\frac{dP_{\theta_1}}{dt} = -m_1g\ell_1\sin\theta_1 - \frac{p_{\theta_1}p_{\theta_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1\ell_1\ell_2}, \tag{9c}$$

$$\frac{dP_{\theta_1}}{dt} = -m_2g\ell_2\sin\theta_2 + \frac{p_{\theta_1}p_{\theta_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1\ell_1\ell_2}. \tag{9d}$$

em que a energia será descrita por

$$
\begin{aligned}
E = {} & \frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1\ell_1^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m_2\ell_2^2} - \frac{p_{\theta_1}^2 p_{\theta_2}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1\ell_1\ell_2} \\
& + m_1 g\ell_1(1 - \cos\theta_1) + m_2 g\ell_2(1 - \cos\theta_2).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Assim, a utilização das ferramentas numéricas serão bastante úteis para resolver o conjunto de equações diferenciais (8) que descrevem o sistema.

2.1.2 Caso geral

Para o caso geral, a aproximação não vale mais, gerando as equações de Euler-Lagrange da seguinte forma

$$p_{\theta_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{11a}$$

$$p_{\theta_2} = m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{11b}$$

$$\dot{p}_{\theta_1} = -(m_1 + m_2) g\ell_1 \sin\theta_1 - m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2), \tag{11c}$$

$$\dot{p}_{\theta_2} = -m_2 g\ell_2\sin\theta_2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2). \tag{11d}$$

Isolando o $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$,

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\ell_2 p_{\theta_1} - \ell_1 p_{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\ell_1^2\ell_2\left[m_1 + m_2\sin^2(\theta_1 - \theta_2)\right]}, \tag{12a}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{-\ell_2 p_{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2) + \ell_1(1 + m_1/m_2) p_{\theta_2}}{\ell_1\ell_2^2\left[m_1 + m_2\sin^2(\theta_1 - \theta_2)\right]}, \tag{12b}$$

$$\frac{dp_{\theta_1}}{dt} = -(m_1 + m_2) g\ell_1\sin\theta_1 - A + B, \tag{12c}$$

$$\frac{dp_{\theta_2}}{dt} = -m_2 g\ell_2\sin\theta_2 + A - B, \tag{12d}$$

em que as constantes são

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\ell_1\ell_2\left[m_1 + m_2\sin^2(\theta_1 - \theta_2)\right]}, \\
B &= \frac{\ell_2^2 m_2 p_{\theta_1}^2 + \ell_1^2(m_1 + m_2) p_{\theta_2}^2 - \ell_1\ell_2 m_2 p_{\theta_1} p_{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{2\ell_1^2\ell_2^2\left[m_1 + m_2\sin^2(\theta_1 - \theta_2)\right]^2}\sin\left[2(\theta_1 - \theta_2)\right].
\end{aligned}
$$

A energia é dada por

$$
\begin{aligned}
E = {} & \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}\left[\frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1\ell_1^2} + \frac{(m_1 + m_2) p_{\theta_2}^2}{2m_1 m_2\ell_2^2} - \frac{p_{\theta_1}^2 p_{\theta_2}^2\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1\ell_1\ell_2}\right] \\
& + (m_1 + m_2) g\ell_1(1 - \cos\theta_1) + m_2 g\ell_2(1 - \cos\theta_2).
\end{aligned} \tag{13}
$$

2.2 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré é uma forma de visualizar o espaço de fases para casos maiores que 3 dimensões. No caso do pendulo duplo, temos 4 graus de liberdade, o que gera um espaço de fase 4D, e, para a visualização em 2D, basta utilizar um "corte". Para o problema, será utilizada uma "fatia", em que $\theta_2 = 0$, ou então, quando $\theta_1 = 0$.

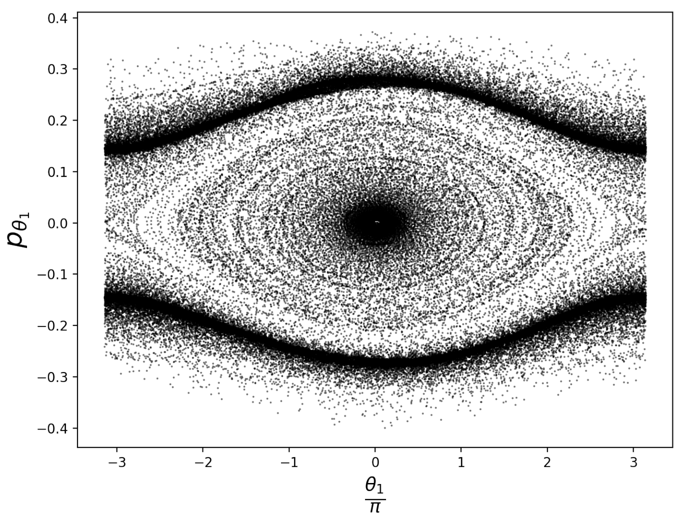

Figura 2: Exemplo de uma Seção de Poincaré para o pendulo duplo. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1\ kg$, $m_2 = 0.005\ kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_2}(0) = 0$ e $p_{\theta_1}(0)$ variando de -0.41 até 0.41 em passos de 0.01. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5\ m$ e $\ell_2 = 0.2\ m$, em que o tempo final foi $Tf = 100\ s$ com passos $\Delta t = 0.01\ s$. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

3 Algoritmo

3.1 Método de Runge-Kutta de segunda ordem

Para resolver as equações de movimento será utilizado o método de Runge-Kutta de segunda ordem. O método consiste basicamente na definição de derivada

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{14}$$

utilizando a discretização do tempo, $t_n = (n-1)\Delta t$, e considerando meio passo seguindo a seguinte forma

$$\begin{aligned} K_1^f &= f_n \Delta t \\ \mathrm{f}_{1/2} &= f_n + K_1^f \Delta t \\ \mathrm{K}_2^f &= f_{1/2} \Delta t \\ \mathrm{f}_{n+1} &= f_n + K_2^f \end{aligned} \tag{15}$$

chega-se ao método de Runge Kutta de segunda ordem.

Como o problema do pendulo duplo tem 4 equações diferenciais acopladas, será necessário resolver todas simultaneamente pelo método, ou seja, $(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$.

3.2 O código

O código do método de Runge Kutta foi feito no formato de classe, então, para os usuários não familiarizados, será brevemente explicado como utilizar uma classe em python.

Primeiramente, é importante ter o arquivo do projeto no diretório do environment, ou então, no mesmo diretório do arquivo .py que vai chamar a classe. Para importar a classe basta escrever *from rodrigodamottacabraldecarvalho_projeto1 import double_pendulum.*

Após importar a classe é preciso criar um objeto chamado pêndulo duplo, informando as respectivas massas e comprimento de fio. Assim, para criar o sistema físico e a solução da equações, basta colocar as condições inciais e explicitar a aproximação de $m_1 >> m_2$ ou $m_1 = m_2$ (caso geral) como mostra a Fig 3. A variável que recebeu o sistema será composta de um array 4D com as soluções de θ_1, θ_2, p_{θ_1}, p_{θ_2} para as condições estabelecidas. Para acessar bastar usar *array4D = p1.data*
Para avaliar parte do comportamento do sistema, existe a função *poincare_section* da classe dizendo que, como não é possível visualizar a fatia do espaço de fases em 4D, é utilizado a fatia referente a m_1 ou m_2. Essa fatia é avaliada no ponto em que θ_1 ou θ_2 passa pelo zero. Esse método retorna um array 2D com a Seção de Poincaré.

```python
from Project1 import double_pendulum

# condições iniciais ( m1 = 0.1, m2=0.005,l1=0.5, l2=0.2 )

p1 = double_pendulum(m1=0.1, m2=0.005, l1=0.5, l2=0.2)

p1.system(x10=0, v10=0.08, x20=np.pi/2, v20=0, Tf=5000, dt=0.01, equations="m1>>m2")

section = p1.poicare_section(phase_space='m1')
```

Figura 3: Exemplo para utilizar a classe

4 Análise

4.1 Verificação da aproximação

Para verificar a aproximação $m_1 >> m_2$, foram utilizado 2 casos, o primeiro caso $m_1/m_2 = 100$,

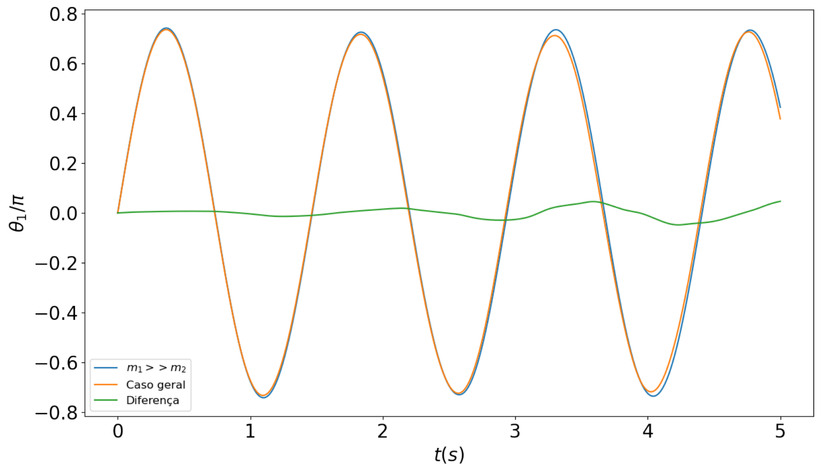

Figura 4: Plot usando $m_1/m_2 = 100$ com a aproximação $m_1 >> m_2$, o caso geral e a diferença entre as duas curvas, utilizando o passo $\Delta t = 0.01\ s$. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1\ kg$, $m_2 = 0.001\ kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_2}(0) = 0$ e $p_{\theta_1}(0) = 0.08$. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5\ m$ e $\ell_2 = 0.2\ m$. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

Em que é possível verificar que praticamente não há diferença entre as duas soluções durante todo o tempo analisado.

No entanto, para o caso em que $m_1/m_2 = 10$,

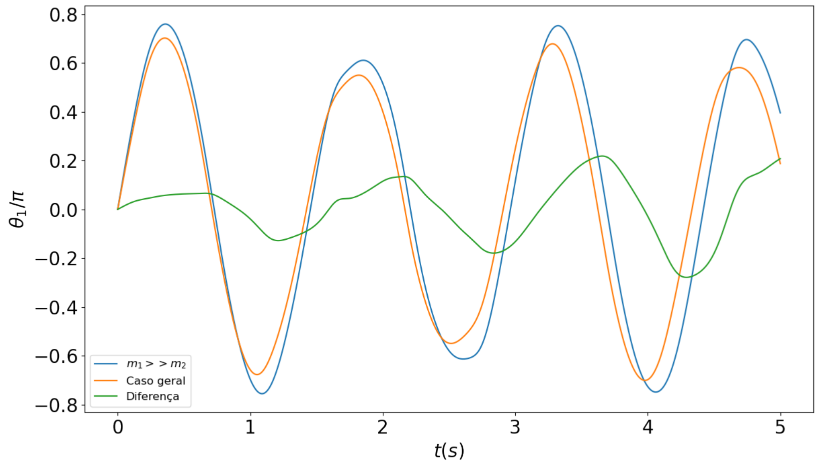

Figura 5: Plot usando $m_1/m_2 = 10$ com a aproximação $m_1 >> m_2$, o caso geral e a diferença entre as duas curvas, utilizando o passo $\Delta t = 0.01\ s$. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1\ kg$, $m_2 = 0.001\ kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_2}(0) = 0$ e $p_{\theta_1}(0) = 0.08$. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5\ m$ e $\ell_2 = 0.2\ m$. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

Podemos ver que, conforme o tempo passa, a diferença entre as duas soluções começa a crescer significativamente, demonstrando que a aproximação deixa de ser válida.
Então, a aproximação só será válida para casos na em que a razão é maior ou igual a ordem de grandeza 10^2.

4.2 Explorando a Seção de Poincaré

4.2.1 $m_1/m_2 = 100$

Como já discutido, uma técnica muito útil para analisar o sistema é plotar Seções de Poincaré do sistema para diversas condições iniciais. Algumas são especialmente reveladoras, como representado na Fig. 6.

A Seção de Poincaré revela um comportamento parecido ao de um pendulo simples para valores pequenos de $p_{\theta_1}(0)$, mas conforme os valores crescem a imagem se aproxima de uma elipse, demonstrando o novo comportamento do sistema. Usando essa fração das massas no caso geral, o resultado é muito próximo com o esperado, como mostra a Fig. 7.

As Seções de Poincaré são bastante reveladoras sobre dinâmica do problema, no entanto, são difíceis de serem interpretadas, como na Fig. 8, em que é possível ver algum comportamento oscilatório para valores mais baixos de $p_{\theta_1}(0)$, mas para valores mais altos, a dinâmica de m_2 parece ser imprevisível.

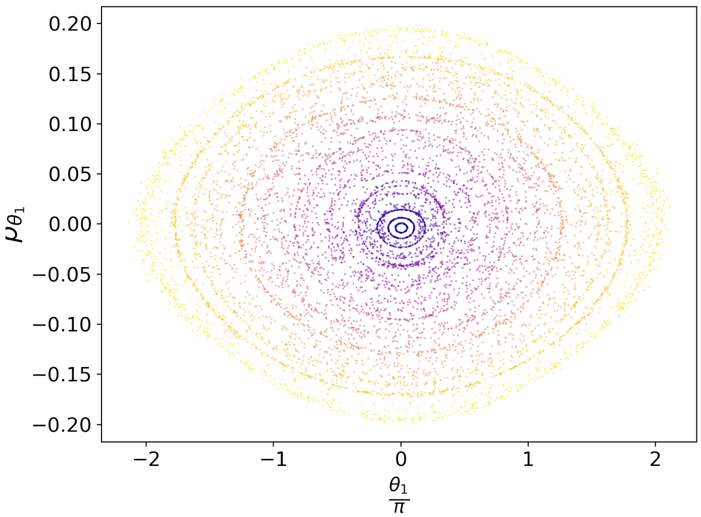

Figura 6: Seção de Poincaré com $m1 >> m2$. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1kg$, $m_2 = 0.001kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_2}(0) = 0$ e $p_{\theta_1}(0)$ variando de -0.2 até 0.2 em passos de 0.01,,em que o tempo final $Tf = 100s$ com passos $\Delta t = 0.01$. Quanto mais próximo do amarelo maior o parâmetro em módulo. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5$ e $\ell_2 = 0.2m$. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

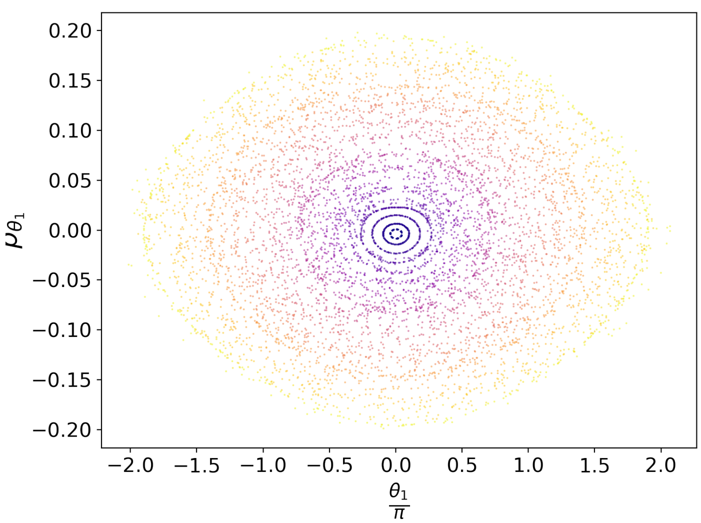

Figura 7: Seção de Poincaré para o **caso geral**. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1kg$, $m_2 = 0.001kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_2}(0) = 0$ e $p_{\theta_1}(0)$ variando de -0.2 até 0.2 em passos de 0.01. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5$ e $\ell_2 = 0.2m$, em que o tempo final $Tf = 100s$ com passos $\Delta t = 0.01$. Quanto mais próximo do amarelo maior o parâmetro em módulo. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

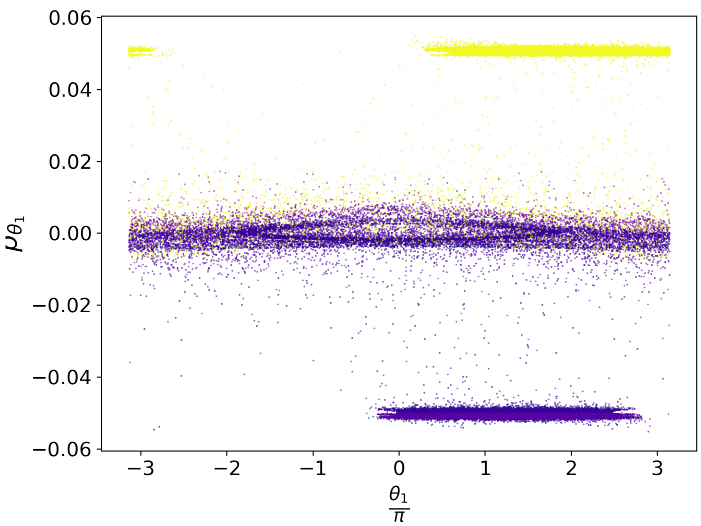

Figura 8: Seção de Poincaré da massa m_2 para $m_1 >> m_2$. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1kg$, $m_2 = 0.001kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_2}(0) = 0$ e $p_{\theta_1}(0)$ variando de -0.2 até 0.2 em passos de 0.01. Além disso, utilizouse $\ell_1 = 0.5$ e $\ell_2 = 0.2m$,em que o tempo final $Tf = 100s$ com passos $\Delta t = 0.01$. Quanto mais próximo do amarelo maior o parâmetro em módulo. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

4.2.2 m1/m2 = 1.25

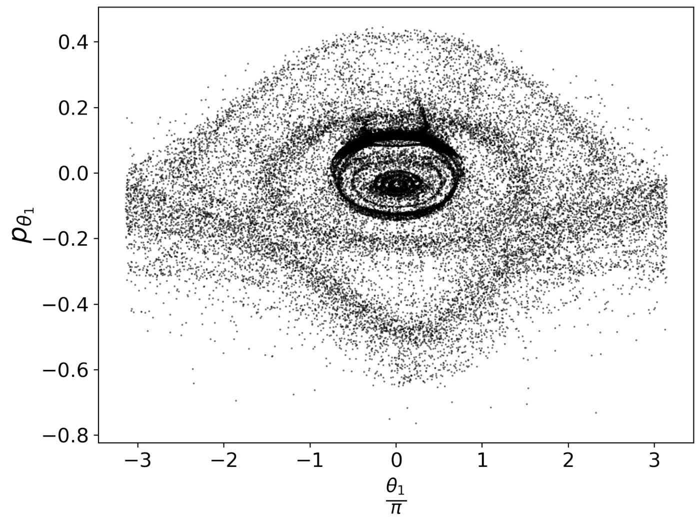

Figura 9: Caos na Seção de Poincaré da massa m_1 para o caso geral. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1kg$, $m_2 = 0.08kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_1}(0) = -0.3$ e $p_{\theta_2}(0)$ variando de -0.2 até 0.2 em passos de 0.01. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5$ e $\ell_2 = 0.2m$, onde o tempo final $Tf = 1000s$ com passos $\Delta t = 0.01$. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

4.2.3 m1/m2 = 1

Para a razão $m_1/m_2 = 1$, variando o parâmetro p_{θ_1}, é necessário usar o caso geral, visto que a aproximação não é mais válida. Um resultado interessante começa a aparecer. Como mostra a Seção de Poincaré da Fig. 9 e Fig. 10, em que o sistema demonstra comportamento caótico sem padrões reveladores.

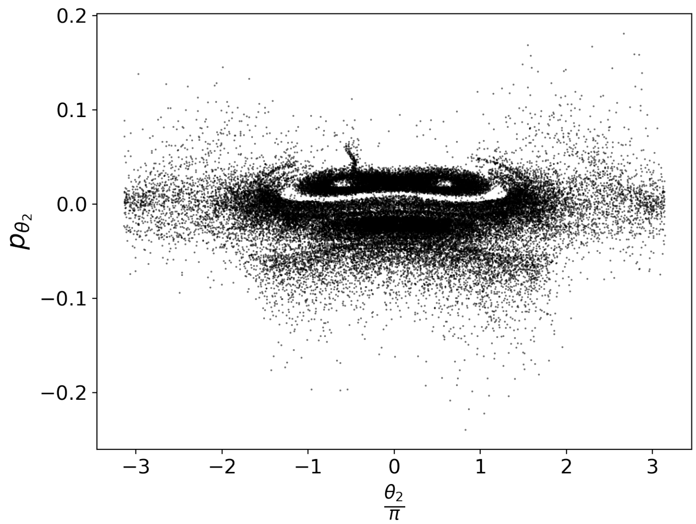

Figura 10: Caos na Seção de Poincaré da massa m_1 para o caso geral. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1\ kg$, $m_2 = 0.1\ kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_1}(0) = 0.08$ e $p_{\theta_2}(0)$ variando de -0.3 até 0.3 em passos de 0.01. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5\ m$ e $\ell_2 = 0.2\ m$, onde o tempo final $Tf = 1000\ s$ com passos $\Delta t = 0.01\ s$. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

4.3 Séries temporais

Uma forma de avaliar como a variação dos parâmetros muda o sistema, é medir a correlação de Pearson da coordenada generalizada de alguma massa, através da variação do parâmetro. A correlação de Pearson é definida como

$$r(i, j) = \frac{\left\langle x_i(t)x_j(t)\right\rangle - \langle x_i(t)\rangle \left\langle x_j(t)\right\rangle}{\sigma[x_i(t)]\sigma[x_j(t)]} \tag{16}$$

em que $x_i(t)$ e $x_j(t)$ são duas séries temporais, no caso $\theta(t)$ representará uma série temporal, e

$$\sigma^2[x_l(t)] = \left\langle x_l^2(t)\right\rangle - \langle x_l(t)\rangle^2 . \tag{17}$$

Dessa forma, o resultado é a medida linear de similaridade das séries temporais, demonstrando as relações de tendencia de subida e descida.

Variando um parâmetro, é possível calcular a correlação entre todas as combinações das soluções, para analisar como as soluções diferem. Por exemplo, supondo uma coleção de condições inicias $(x_1, ..., x_j, ...x_n)$, haverá uma coleção de soluções $(y_1, ..., y_j, ...y_n)$, no caso do pendulo duplo é interessante utilizar θ_1 ou θ_2. Desta forma, basta fazer a correlação para combinação 2 a 2 de cada componente da solução. Isso pode ser visualizado por uma matriz de correlação na Fig. 11. A matriz é simétrica, uma vez que a correlação entre a solução θ_1 da condição j e θ_1 da condição inicial

i é a mesma independente da ordem, ou seja, $r(i, j) = r(j, i)$. Além disso, a diagonal da matriz não será um valor numérico, uma vez que a correlação de uma solução com ela mesmo sempre será 1, e não trará nenhuma informação adicional.

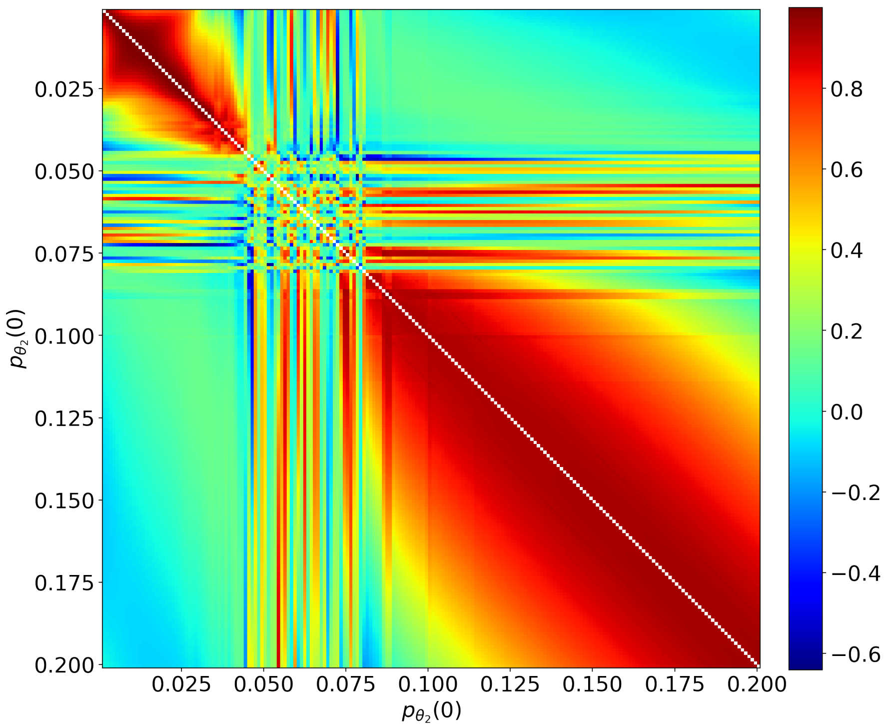

Figura 11: Matriz de correlação entre as soluções para diferentes condições iniciais. Os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1kg$, $m_2 = 0.1kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_1}(0) = 0.08$ e $p_{\theta_2}(0)$ variando de 0 até 0.2 em passos de 0.01. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5$ e $\ell_2 = 0.2m$, onde o tempo final $Tf = 20s$ com passos $\Delta t = 0.001$. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

No intervalo em que $p_{\theta_2}(0)$ toma valores entre $[0.001, 0.040]$, ou então $[0.080, 0.200]$, é observado um comportamento previsível, pois existe uma maior correlação com as condições inicias mais próximas em valor absoluto. Isso é visível pelo gradiente indo do vermelho ao verde, indicando uma alta correlação para os vizinhos e uma correlação que diminui com a distancia das condições. A parte fascinante se aplica aos valores de $p_{\theta_2}(0)$ entre $[0.040, 0.080]$, uma vez que esse padrão desaparece e as soluções podem ou não ser parecidas sem nenhum critério, demonstrando que nesse regime o sistema é extremamente suscetível as condições iniciais, logo, a suscetibilidade aos parâmetros é altamente não linear. Para visualizar que isso de fato está acontecendo, basta olhar as séries temporais no intervalo $[0.001, 0.040]$ e comparar as séries temporais do intervalo $[0.040, 0.080]$, demonstradas na Fig. 12 e na Fig. 13, respectivamente.

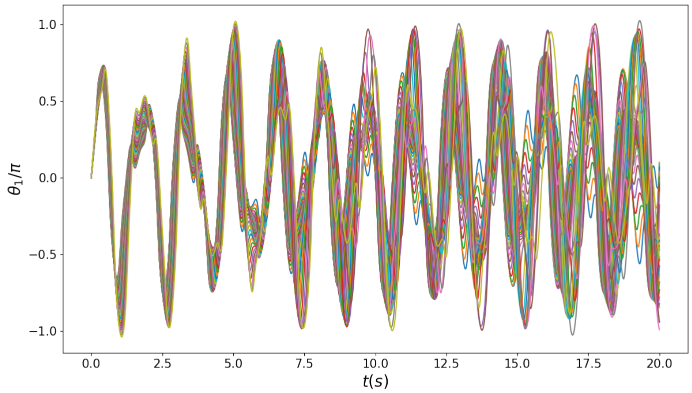

Figura 12: Séries temporais com os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1kg$, $m_2 = 0.1kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_1}(0) = 0.08$ e $p_{\theta_2}(0)$ variando de 0.001 até 0.040 em passos de 0.01. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5$ e $\ell_2 = 0.2m$, onde o tempo final $Tf = 20s$ com passos $\Delta t = 0.001$. **É evidente que há tendencia comum entre as soluções, ainda que conforme o tempo aumente as soluções comecem a divergir** Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

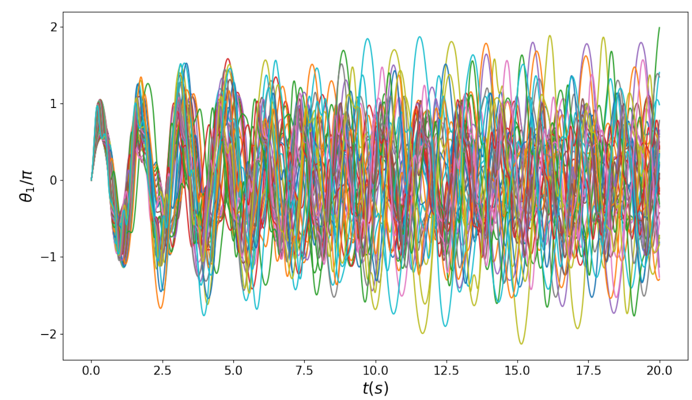

Figura 13: Séries temporais com os parâmetros utilizados foram $m_1 = 0.1kg$, $m_2 = 0.1kg$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/2$, $p_{\theta_1}(0) = 0.08$ e $p_{\theta_2}(0)$ variando de 0.040 até 0.080 em passos de 0.01. Além disso, utilizou-se $\ell_1 = 0.5$ e $\ell_2 = 0.2m$, onde o tempo final $Tf = 20s$ com passos $\Delta t = 0.001$. **É evidente que há não há tendencia comum entre as soluções, ainda que conforme o tempo aumente as soluções comecem a divergir**. Na figura, todas as grandezas estão em unidades do SI.

5 Conclusão

O pendulo duplo é um dos sistemas físicos mais simples com um comportamento caótico evidenciado pela Seção de Poincaré, demonstrando uma gama de diferentes formas e dinâmicas bastante complicadas e imprevisíveis. Além disso, o sistema é extremamente suscetível às condições inicias como mostrou a correlação de Pearson das soluções para diferentes condições iniciais.