ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lista de Exercícios

Métodos de prova em lógica de predicados

Marco Furlan

Março,2021

Alunos:

Rodrigo Machado Pedreira	18.01569-7
Douglas Giacomelli Amaro Filho	19.01091-5
Lucas Pedreira Barreto	17.01106-0

1. Provar se as fbfs a seguir são válidas ou inválidas.

   (a) $(\exists x)A(x) \leftrightarrow \neg[(\forall x)\neg A(x)]$

   Rescrevendo e provando validade:

   1. $A(a) \leftrightarrow \neg[\neg A(a)]$ ....ei,ui
   2. $A(a) \leftrightarrow A(a)$ ....dn

   (b) $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \rightarrow (\forall x)[(P(x) \vee Q(x)]$

   Rescrevendo e provando validade:

   1. $P(x) \vee Q(a) \rightarrow [P(x) \vee Q(a)]$ (ui,ei)
   2. $P(x) \vee Q(a) = \mathtt{V}$
   3. $P(x) \vee Q(a) = \mathtt{F}$

   Não é possível provar a afirmação falsa, já que para isso teríamos as condições 2,3 como validas, porém elas são iguais, portanto não podem ter valores verdade diferentes.

   (c) $(\forall x)A(x) \leftrightarrow \neg[(\exists x)\neg A(x)]$

   Rescrevendo e provando validade:

   1. $A(b) \leftrightarrow \neg[\neg A(b)]$ .... ei,ui
   2. $A(b) \leftrightarrow A(b)$ .... dn

(d) $(\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \to (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y)$

Rescrevendo e provando validade:

1. $[P(x) \lor Q(a)] \to P(x) \lor Q(a)$ (ei,ui)
2. $P(x) \lor Q(a) = \mathtt{V}$
3. $P(x) \lor Q(a) = \mathtt{F}$

Não é possível provar a afirmação falsa, já que para isso teríamos as condições 2,3 como validas, porém elas são iguais, portanto não podem ter valores verdade diferentes.

2. Considere a fbf a seguir:

$$(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x) \to (\exists x)[P(x) \land Q(x)]$$

(a) Encontrar uma interpretação em que esta fbf não é válida.

Resposta: Existe no mínimo uma flor com pétalas no jardim e existe no mínimo uma flor queimada no jardim então existe uma flor com pétalas e queimada no jardim.

(b) Encontrar a falha na seguinte "demonstração" desta fbf:

1. $(\exists x)P(x)$ .... (hip.)
2. $P(a)$ .... 1, ei
3. $(\exists x)Q(x)$ .... (hip.)
4. $Q(a)$ .... 3, ei
5. $P(a) \land Q(a)$ .... 2,4, con
6. $(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$ ....5, eg

Correção: O erro foi usar 'a' como constante em 2 e 4 ao mesmo tempo, pois não pode-se assumir que eles são iguais. 'a' já havia sido utilizado em 2 e não poderia ser utilizado novamente em 4, isso é uma condição para utilização de "ei".

3. Demonstrar, por sequência de prova, que as fbfs a seguir são teoremas (válidas):

(a) $(\forall x)P(x) \to (\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$

1. $(\forall x)P(x)$ .... (hip.)
2. $P(x)$ ....1, ui
3. $P(x) \lor Q(x)$ .... 2, add
4. $(\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$ $\square$ .... 3, ug

(b) $(\forall x)P(x) \land (\exists x)Q(x) \to (\exists x)[P(x) \land Q(x)]$

1. $(\forall x)P(x)$ ....(hip.)
2. $(\exists x)Q(x)$ ....(hip.)
3. $P(a)$ .... 1, ui
4. $Q(a)$ .... 2, ei
5. $P(a) \land Q(a)$ .... 3,4, add
6. $(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$ $\square$ .... 5, eg

(c) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

1. $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$ ....(hip.)
2. $(\exists y)P(a,y)$ .... 1, ei
3. $P(a,b)$ ....2, ei
4. $(\exists x)P(x,b)$ ....3, eg
5. $(\exists y)(\exists x)P(x,y)$ $\square$ ....4, eg

(d) $(\forall x)(\forall y)Q(x,y) \to (\forall y)(\forall x)Q(x,y)$

1. $(\forall x)(\forall y)Q(x,y)$ .... (hip.)
2. $(\forall y)Q(a,y)$ .... 1, ui
3. $Q(a,b)$ .... 2, ui
4. $(\forall x)Q(x,b)$ .... 3, ug
5. $(\forall y)(\forall x)Q(x,y)$ $\square$ .... 4, ug

4. Usando a lógica de predicados, provar, por sequência de prova, que os argumentos a seguir são válidos. Utilizar os predicados apresentados

   (a) Há um astrônomo que não é míope. Qualquer um que usa óculos então é míope. Além disso, todos usam óculos ou usam lentes de contato. Portanto, algum astrônomo usa lentes de contato $(A(x), M(x), O(x), L(x))$.

   $$(\exists x)[A(x) \wedge \neg M(x)] \wedge (\forall x)[O(x) \to M(x)] \wedge (\forall x)[O(x) \vee L(x)] \to (\exists x)[A(x) \wedge L(x)]$$

   (b) Todo membro do conselho vem da indústria ou do governo. Todos do governo que são advogados são a favor da moção. John não é da indústria, mas é advogado. Portanto, se John for um membro do conselho, ele será a favor da moção $(M(x), I(x), G(x), A(x), F(x), j)$.

   Dica: Para resolver problemas do tipo (lógica proposicional ou de predicados) como $A \wedge B \wedge C \to D \to E$, notar que a expressão pode ser reescrita como $\neg(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg D \vee E)$ que, por sua vez, pode ser escrita como $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \vee (\neg D \vee E)$ e também como $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D) \vee E$ e, finalmente, como $A \wedge B \wedge C \wedge D \to E$. Em outras palavras, nesse tipo de forma (somente nesse), a fbf D também pode ser admitida como uma hipótese

   (c) Há uma estrela de cinema que é mais rica que as outras. Todo mundo que é mais rico que os outros também paga mais impostos que os outros. Portanto, existe uma estrela de cinema que paga mais impostos que os outros $(E(x), R(x,y), I(x,y))$.

   $$(\exists x)[E(x) \wedge R(x,y)] \wedge (\forall x)[R(x,y) \to I(x,y)] \to (\exists x)[E(x) \wedge I(x,y)]$$

   (d) Todo estudante da Ciência da Computação trabalha mais que alguém e todo mundo que trabalha mais que alguém também dorme menos que esta pessoa. Maria é uma estudante da Ciência da Computação. Portanto Maria dorme menos que outra pessoa $(E(x), T(x,y), D(x,y), m)$.

   (e) Todo embaixador fala apenas com diplomatas e algum embaixador fala com alguém, portanto existe um diplomata $(E(x), F(x,y), D(x))$.