ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lista de Exercícios

Métodos de prova em lógica de predicados

Marco Furlan

Março,2021

Alunos:

Rodrigo Machado Pedreira	18.01569-7
Douglas Giacomelli Amaro Filho	19.01091-5
Lucas Pedreira Barreto	17.01106-0

1. Provar se as fbfs a seguir são válidas ou inválidas.

   (a) $(\exists x)A(x) \leftrightarrow \neg[(\forall x)\neg A(x)]$

   Rescrevendo e provando validade:

   1. $(\exists x)A(x) \leftrightarrow (\exists x)A(x)]$ .... nu

   (b) $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \rightarrow (\forall x)[(P(x) \vee Q(x)]$

   Rescrevendo e testando a validade:

   1. $\neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \vee (\forall x)[(P(x) \vee Q(x)]$
   2. $\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x) \vee (\forall x)[(P(x) \vee Q(x)]$
   3. $(\exists x)\neg P(x) \wedge (\forall x)\neg Q(x) \vee (\forall x)P(x) \vee Q(x)$
   4. $[\neg(\forall x)P(x) \vee (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)] \wedge [(\forall x)\neg Q(x) \vee (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)]$
   5. $\neg(\forall x)P(x) \vee (\forall x)P(x) = \mathtt{V}$
   6. $\neg[\neg(\forall x)\neg Q(x) \wedge \neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\forall x)Q(x)]$
   7. $(\exists x)\neg P(x)$
   8. $(\exists x)Q(x)$
   9. $(\exists x)\neg Q(x)$

   Não é possível provar a afirmação verdadeira, pois nos casos em que 7,8,9 forem simultaneamente verdadeiros a afirmação não será valida.

(c) $(\forall x)A(x) \leftrightarrow \neg[(\exists x)\neg A(x)]$

Rescrevendo e testando validade:

1. $(\forall x)A(x) \leftrightarrow (\forall x)A(x)$ ..... ne

(d) $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$

Rescrevendo e testando validade:

1. Se $(\forall x)P(x) = \mathtt{V}$ frase sempre será valida.

Assumindo que: $(\forall x)[P(x) = \mathtt{F}$

2. $(\forall x)Q(x) \rightarrow (\exists y)Q(y)$
3. **Se** $(\forall x)Q(x) = \mathtt{V}$
não é possível que $(\exists y)Q(y) = \mathtt{V}$
4. $\mathtt{V} \rightarrow \mathtt{F} = \mathtt{F}$

Como demonstrado existe um caso em que a afirmação será sempre falsa.

2. Considere a fbf a seguir:

$$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \rightarrow (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$$

(a) Encontrar uma interpretação em que esta fbf não é válida.

Resposta: Existe no mínimo uma flor com pétalas no jardim e existe no mínimo uma flor queimada no jardim então existe uma flor com pétalas e queimada no jardim.

(b) Encontrar a falha na seguinte "demonstração" desta fbf:

1. $(\exists x)P(x)$ .... (hip.)
2. $P(a)$ .... 1, ei
3. $(\exists x)Q(x)$ .... (hip.)
4. $Q(a)$ .... 3, ei
5. $P(a) \wedge Q(a)$ .... 2,4, con
6. $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$ .... 5, eg

Correção: O erro foi usar 'a' como constante em 2 e 4 ao mesmo tempo, pois não pode-se assumir que eles são iguais. 'a' já havia sido utilizado em 2 e não poderia ser utilizado novamente em 4, isso é uma condição para utilização de "ei".

3. Demonstrar, por sequência de prova, que as fbfs a seguir são teoremas (válidas):

(a) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$

1. $(\forall x)P(x)$ .... (hip.)
2. $P(x)$ .... 1, ui
3. $P(x) \vee Q(x)$ .... 2, add
4. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ $\square$ .... 3, ug

(b) $(\forall x)P(x) \land (\exists x)Q(x) \to (\exists x)[P(x) \land Q(x)]$

1. $(\forall x)P(x)$ ....(hip.)
2. $(\exists x)Q(x)$ ....(hip.)
3. $P(a)$ .... 1, ui
4. $Q(a)$ .... 2, ei
5. $P(a) \land Q(a)$ .... 3,4, add
6. $(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$ $\square$ .... 5, eg

(c) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

1. $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$ ....(hip.)
2. $(\exists y)P(a,y)$ .... 1, ei
3. $P(a,b)$ .... 2, ei
4. $(\exists x)P(x,b)$ .... 3, eg
5. $(\exists y)(\exists x)P(x,y)$ $\square$ .... 4, eg

(d) $(\forall x)(\forall y)Q(x,y) \to (\forall y)(\forall x)Q(x,y)$

1. $(\forall x)(\forall y)Q(x,y)$ ....(hip.)
2. $(\forall y)Q(a,y)$ .... 1, ui
3. $Q(a,b)$ .... 2, ui
4. $(\forall x)Q(x,b)$ .... 3, ug
5. $(\forall y)(\forall x)Q(x,y)$ $\square$ .... 4, ug

4. Usando a lógica de predicados, provar, por sequência de prova, que os argumentos a seguir são válidos. Utilizar os predicados apresentados

   (a) Há um astrônomo que não é míope. Qualquer um que usa óculos então é míope. Além disso, todos usam óculos ou usam lentes de contato. Portanto, algum astrônomo usa lentes de contato $(A(x), M(x), O(x), L(x))$.

$$(\exists x)[A(x) \land \neg M(x)] \land (\forall x)[O(x) \to M(x)] \land (\forall x)[O(x) \lor L(x)] \to (\exists x)[A(x) \land L(x)]$$

1. $(\exists x)[A(x) \land \neg M(x)]$ .... (hip.)
2. $(\forall x)[O(x) \to M(x)]$ .... (hip.)
3. $(\forall x)[O(x) \lor L(x)]$ ....(hip.)
4. $A(a) \land \neg M(a)$ ....(1, ei)
5. $O(a) \to M(a)$ ....(2, ui)
6. $O(a) \lor L(a)$ ....(3, ui)
7. $\neg M(a))$ .... (4, sim)
8. $\neg O(a)$ ....(5, 6, mt)
9. $\neg O(a) \to L(a)$ .... (6, imp)
10. $L(a)$ .... (8, 9, mp)
11. $A(a)$ .... (4, sim)
12. $A(a) \land L(a)$ ....(10,11 con)

13. $(\exists x)[A(x)L(x)]$ $\square$ .... (12, eg)

(b) Todo membro do conselho vem da indústria ou do governo. Todos do governo que são advogados são a favor da moção. John não é da indústria, mas é advogado. Portanto, se John for um membro do conselho, ele será a favor da moção $(M(x), I(x), G(x), A(x), F(x), j)$.

Dica: Para resolver problemas do tipo (lógica proposicional ou de predicados) como $A \wedge B \wedge C \rightarrow D \rightarrow E$, notar que a expressão pode ser reescrita como $\neg(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg D \vee E)$ que, por sua vez, pode ser escrita como $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \vee (\neg D \vee E)$ e também como $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D) \vee E$ e, finalmente, como $A \wedge B \wedge C \wedge D \rightarrow E$. Em outras palavras, nesse tipo de forma (somente nesse), a fbf D também pode ser admitida como uma hipótese.

$$(\forall x)(M(x) \rightarrow I(x) \vee G(x)) \wedge (\forall x)(G(x) \wedge A(x) \rightarrow F(x)) \wedge (\neg I(j) \wedge A(j)) \rightarrow (M(j) \rightarrow F(j))$$

1. $(\forall x)(M(x) \rightarrow I(x) \vee G(x))$ .... (hip.)
2. $(\forall x)(G(x) \wedge A(x) \rightarrow F(x))$ .... (hip.)
3. $\neg I(j) \wedge A(j)$ .... (hip.)
4. $M(j)$ .... (hip.)
5. $M(j) \rightarrow I(j) \vee G(j)$ .... 1, ui
6. $G(j) \wedge A(j) \rightarrow F(j)$ .... 2, ui
7. $\neg I(j)$ .... 3, sim
8. $A(j)$ .... 3, sim
9. $I(j) \vee G(j)$ .... 4,5, mp
10. $\neg I(j) \rightarrow G(j)$ .... 9, imp
11. $G(j)$ .... 7,10, mp
12. $A(j) \wedge G(j)$ .... 8,11 con
13. $F(j)$ $\square$ .... 12,16, mp

(c) Há uma estrela de cinema que é mais rica que as outras. Todo mundo que é mais rico que os outros também paga mais impostos que os outros. Portanto, existe uma estrela de cinema que paga mais impostos que os outros $(E(x), R(x,y), I(x,y))$.

$$(\exists x)(\forall y)[E(x) \wedge R(x,y)] \wedge (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \rightarrow I(x,y)] \rightarrow (\exists x)(\forall y)[E(x) \wedge I(x,y)]$$

1. $(\exists x)(\forall y)[E(x) \wedge R(x,y)]$ .... (hip.)
2. $(\forall x)(\forall y)[R(x,y) \rightarrow I(x,y)]$ .... (hip.)
3. $(\forall y)[E(a) \wedge R(a,y)]$ .... 1, ei
4. $[E(a) \wedge R(a,z)]$ .... 3, ui
5. $(\forall x)[R(x,z) \rightarrow I(x,z)]$ .... 2 ui
6. $R(a,z) \rightarrow I(a,z)$ .... 5, ui
7. $R(a,z)$ .... 4, sim
8. $I(a,z)$ .... 6, mp
9. $E(a)$ .... 4, sim
10. $E(a) \wedge I(a,z)$ .... 8,9, conj
11. $E(a) \vee (\forall y)(I(a,y)$ .... 10, ug
12. $(x)E(x) \vee (\forall y)(I(x,y)$ $\square$ .... 11, eg

(d) Todo estudante da Ciência da Computação trabalha mais que alguém e todo mundo que trabalha mais que alguém também dorme menos que esta pessoa. Maria é uma estudante da Ciência da Computação. Portanto Maria dorme menos que outra pessoa $(E(x), T(x,y), D(x,y), m)$.

$$\forall(x)\exists(y)[E(x) \to T(x,y)] \wedge \forall(x)\exists(y)[T(x,y) \to D(x,y)] \wedge E(m) \to \exists(y)[D(m,y]$$

1. $\forall(x)\exists(y)[E(x) \to T(x,y)]$ .... (hip.)
2. $\forall(x)\exists(y)[T(x,y) \to D(x,y)]$ .... (hip.)
3. $E(m)$ .... (hip.)
4. $\exists(y)[E(m) \to T(m,y)]$ .... (1, ui)
5. $E(m) \to T(m,a)$ .... (4, ei)
6. $\exists(y)[T(m,y) \to D(m,y)]$ .... (2, ui)
7. $T(m,a) \to D(m,a)$ .... (6, ei)
8. $T(m,a)$ .... (3, 5, mp)
9. $D(m,a)$ .... (7, 8, mp)
10. $\exists(y)D(m,y)$ $\square$ .... (9, eg)

(e) Todo embaixador fala apenas com diplomatas e algum embaixador fala com alguém, portanto existe um diplomata $(E(x), F(x,y), D(x))$.

$$\forall(x)\exists(y)[E(x) \wedge (F(x,y) \to D(x))] \wedge \exists(x)\exists(y)[E(x) \to F(x,y)] \to \exists(x)[D(x)]$$

1. $\forall(x)\exists(y)[E(x) \wedge (F(x,y) \to D(x))]$. (hip.)
2. $\exists(x)\exists(y)[E(x) \to F(x,y)]$ .... (hip.)
3. $\exists(y)[E(a) \wedge (F(a,y) \to D(a))]$ ..... (1, ui)
4. $E(a) \wedge (F(a,b) \to D(a))$ .... (3, ei)
5. $\exists(y)[E(a) \to F(a,y)])$ .... (2, ei)
6. $E(a) \to F(a,b)$ .... (5, ei)
7. $E(a)$ .... (4, sim)
8. $F(a,b)$ .... (6, 7, mp)
9. $F(a,b) \to D(a)$ .... (4, sim)
10. $D(a)$ ....(8,9, mp)
11. $\exists(x)D(x)$ $\square$ .... (9, eg)