Engenharia de Computação

ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lógica de predicados

Slides da disciplina ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores
Curso de Engenharia de Computação
Instituto Mauá de Tecnologia
Prof. Marco Antonio Furlan de Souza

Lógica de predicados

- A principal **limitação da lógica proposicional** é que ela tem um **poder de expressão limitado**;
- Por **exemplo**, **não é possível definir**, utilizando uma única proposição, que uma certa pessoa é irmã de outra pois **não há suporte** nas proposições para se referir a **objetos em particular**;
- Além disso, não é possível declarar **sentenças quantificadas** tais como "para todo x, $x > 0$";
- **A lógica de predicados**, também conhecida como **cálculo de predicados**, **contém todos os elementos** da **lógica proposicional** e **adiciona variáveis**, **constantes**, **quantificadores** e **predicados**.

Domínio

- **Domínio** ou **universo de discurso** é uma **coleção de todos objetos** (pessoas, ideias, símbolos etc) que **afetam** uma **argumentação lógica**;
- Os elementos de um domínio são denominados **indivíduos** ou **objetos**;
- Por **exemplo**, ao se **especificar o conhecimento sobre uma família**, com fatos que indicam quem é pai, mãe etc sobre elementos de uma **família**, o **domínio** em questão pode ser representado por todas as pessoas que vivem em um mesmo apartamento – nem toda pessoa é mãe de alguém e nem toda pessoa é filho de uma mesma mãe;
- Já em uma **sentença como** “existe um número menor que todos”, ela se aplica a um domínio maior, por exemplo, dos números naturais.

Predicado

- Um **predicado** permite **criar sentenças** que tratam sobre **relações entre indivíduos**. Observar as sentenças a seguir:
  - *João e Maria são parentes* (**parente** é um predicado que relaciona João e Maria).
  - *Jane é mãe de Maria* (**mãe** é um predicado que relaciona Jane e Maria).
  - *A soma de 2 e 3 é 5* (**soma** é um predicado que relaciona 2, 3 e 5).
- Os **predicados possuem** uma **aridade**: é o número de indivíduos a que se referem – por exemplo, no caso do **predicado mãe**, tem-se uma aridade de 2; já no caso do **predicado soma**, a aridade é 3. Um predicado de aridade zero é uma **proposição**;
- É prática utilizar **letras maiúsculas para representar nomes de predicados** e **letras minúsculas** (fonte monoespaçada) para representar **indivíduos**. Assim $P(\mathtt{m}, \mathtt{j})$ pode representar o fato que Maria e João são parentes;
- O **valor verdade de um predicado** é obtido pela **atribuição ao predicado** de **indivíduos do domínio** que o tornam **verdadeiro** ($\mathtt{V}$) ou **falso** ($\mathtt{F}$).

Variáveis e instanciações

- Pode-se **generalizar predicados** por meio de **variáveis** – elas representam "lugares" de um predicado onde posteriormente pode-se substituí-las por indivíduos;
- Utilizam-se comumente **letras minúsculas** (fonte matemática) para variáveis;
- Por exemplo, o **predicado** que representa "parente" pode ser assim especificado: $P(x, y)$. Neste caso, ele apenas **representa** "x é parente y", mas não especifica quem é x ou y – logo, não é possível saber seu valor;
- Quando se **substitui** as **variáveis** de um **predicado** por **termos** (**constantes** ou **variáveis**) tem-se uma **instanciação** ou **substituição**;
- Por exemplo, quando no **predicado** $P(x, y)$ substitui-se x por $\mathtt{m}$ e y por $\mathtt{j}$, tem-se $P(\mathtt{m}, \mathtt{j})$ – que, inclusive, possui um valor verdade, dependendo se $\mathtt{m}$ e $\mathtt{j}$ são parentes ou não!

Quantificadores

- Um **quantificador** é uma **frase como** “para todo” e “existe” que indica **quantos objetos possuem** uma **certa propriedade**. Existem **dois tipos de quantificadores**:
    - **Quantificador universal**: é representado pelo **símbolo** $\forall$. **Lê-se** “para todo” **ou** “para cada” **ou** “para qualquer” – indica que **alguma coisa** é **verdadeira** para **todos os indivíduos**;
    - **Quantificador existencial**: é representado pelo **símbolo** $\exists$. **Lê-se** “existe um” **ou** “pelo menos um” ou “para algum” – indica que **alguma coisa** é **verdadeira** para **alguns indivíduos** (pelo menos um).
- Os **quantificadores** se referem a uma **expressão** A qualquer assim: $(\forall x)A$ e $(\exists x)A$. Neste caso, a **variável** x é dita estar **vinculada** pelo quantificador e A é o **escopo** do quantificador.

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA MAUÁ

- **Exemplos de predicados quantificados**:
  - Se $P(x)$ é $(x > 0)$, a expressão $(\forall x)P(x)$ **representa** "para todo x maior que zero";
  - Se $P(x)$ é "o livro x possui capa vermelha" então $(\forall x)P(x)$ **representa** "todos os livros possuem capa vermelha";
  - Se $P(x)$ é "o livro x possui capa vermelha" então $(\exists x)P(x)$ **representa** "pelo menos um livro possui capa vermelha".
- O **valor verdade de** $P(x)$ **depende** do **domínio de interpretação** – a **coleção de objetos** a partir do qual se escolhe x. Neste ponto, verifica-se a diferença que existe com a lógica proposicional.
- Um predicado pode ser **quantificado** ou **não**.

Interpretação

- O **valor verdade** de uma **sentença em lógica de predicados** depende de sua **interpretação**;
- Para **interpretar** uma **expressão** da **lógica de predicados**, é **necessário** ter:
  - Um **domínio** (ou universo de discurso);
  - Para cada **indivíduo** do domínio, deve haver uma **constante individual** que se refere exclusivamente ao **indivíduo em particular** e mais nenhum outro;
  - À toda **variável livre** ser **atribuída** uma **constante individual única**;
  - Deve haver uma **atribuição** para **cada predicado** usado na **expressão**, incluindo aqueles de aridade zero.

- **Exemplo**
  - Considere o **predicado** $P(x)$ como "**cliente** x **pagou a conta**". Para haver uma **interpretação** de $(\forall x)P(x)$ e de $(\exists x)P(x)$, é necessário um universo de discurso;
  - Considere como **universo de discurso** desta situação o conjunto contendo **apenas três clientes**: Marco ($\mathtt{m}$), Everson ($\mathtt{e}$) e Sergio ($\mathtt{s}$);
  - **Supor que**, destes três, **apenas Sergio não pagou** a conta. Neste caso, os **valores verdade** de $P(x)$ serão: $P(\mathtt{m}) = \mathtt{V}$, $P(\mathtt{e}) = \mathtt{V}$ e $P(\mathtt{s}) = \mathtt{F}$;
  - Nesta situação, **pela definição do quantificador universal**, o valor de $(\forall x)P(x)$ deve ser **falso**, pois não foram todos que pagaram a conta;
  - Já **pela definição do quantificador existencial**, o valor de $(\exists x)P(x)$ deve ser **verdadeiro**, pois alguns clientes pagaram a conta.

- **Exemplo**
  - Considere o **predicado** $Q(x, y)$ como "**a pessoa** x **admira a pessoa** y";
  - A expressão em **lógica de predicados** para "existe alguém que admira todo mundo" pode ser assim definida: $(\exists x)(\forall y)Q(x, y)$;
  - Para saber o **valor verdade desta expressão**, é importante **conhecer uma atribuição**. Por exemplo, considerar a atribuição a seguir (onde o universo de discurso possui apenas três indivíduos):

	João	Maria	José
João	F	T	T
Maria	T	F	F
José	F	T	T

  - Para avaliar a expressão, avalia-se primeiramente o quantificador mais interno, $(\forall y)Q(x, y)$. Para interpretá-la, verifica-se se é verdade que todo y é admirado por qualquer x – o que não é verdade – logo, nesta interpretação $(\exists x)(\forall y)Q(x, y)$ é falso.

- **Equivalência entre os quantificadores**
  - Pela definição do **quantificador universal**, **se** $(\forall x)P(x)$ for **verdadeiro**, independentemente do valor de x, **então** é válida a **equivalência**: $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$, onde $a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ é algum indivíduo do domínio;
  - E, pela definição do **quantificador existencial**, **se** $(\exists x)P(x)$ for **verdadeiro**, independentemente do valor de x, **então** é válida a **equivalência**: $(\exists x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \ldots \vee P(a_n)$, onde $a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ é algum indivíduo do domínio;
  - Ao aplicar **DeMorgan** à **forma equivalente negada** de $(\forall x)P(x)$, resulta em: $\neg(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \ldots \wedge P(a_n)) \Leftrightarrow \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \neg P(a_3) \vee \ldots \vee \neg P(a_n)$ ou **seja** $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$;
  - Ao aplicar **DeMorgan** à **forma equivalente negada** de $(\exists x)P(x)$, resulta em: $\neg(P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \ldots \vee P(a_n)) \Leftrightarrow \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \neg P(a_3) \wedge \ldots \wedge \neg P(a_n)$ ou **seja** $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$.

Fórmulas bem formadas

- Segue o **mesma formulação da lógica proposicional**: as **expressões** podem ser obtidas da **combinação** de **predicados**, **quantificadores**, **símbolos de agrupamento** (parênteses ou colchetes);
- Os símbolos de agrupamento ajudam a **identificar o escopo** de um quantificador:
  - Em $(\forall x)(P(x) \to Q(x,y))$, o **escopo** de $(\forall x)$ é $P(x) \to Q(x,y)$;
  - Em $(\forall x)((\exists y)[P(x) \wedge Q(x,y)] \to R(x))$, o **escopo** de $(\exists y)$ é $P(x) \wedge Q(x,y)$.

Referências bibliográficas

[1] GERSTING, J.L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 4.ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001. 538 p. ISBN 85-216-1263-X.