ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lista de Exercícios

Métodos de prova em lógica de predicados

Marco Furlan

Março/2021

1. Provar se as fbfs a seguir são válidas ou inválidas.

   (a) $(\exists x)A(x) \leftrightarrow \neg(\forall(x)\neg A(x))$

   (b) $(\forall x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) \rightarrow (\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$

   (c) $(\forall x)A(x) \leftrightarrow \neg((\exists x)\neg A(x))$

   (d) $(\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \rightarrow (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y)$

2. Considere a fbf a seguir:

   $$(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x) \rightarrow (\exists x)[P(x) \land Q(x)]$$

   (a) Encontrar uma interpretação em que esta fbf não é válida.

   (b) Encontrar a falha na seguinte "demonstração" desta fbf:

1. $(\exists x)P(x)$	(hipótese)
2. $P(a)$	1, ei
3. $(\exists x)Q(x)$	(hipótese)
4. $Q(a)$	3, ei
5. $P(a) \land Q(a)$	2,4, con
6. $(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$	5, eg

3. Demonstrar, por **sequência de prova**, que as fbfs a seguir são teoremas (válidas):

   (a) $(\forall x)P(x) \to (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$

   (b) $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \to (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$

   (c) $(\exists x)(\exists y)P(x, y) \to (\exists y)(\exists x)P(x, y)$

   (d) $(\forall x)(\forall y)Q(x, y) \to (\forall y)(\forall x)Q(x, y)$

4. Usando a lógica de predicados, provar, por **sequência de prova**, que os argumentos a seguir são válidos. Utilizar os predicados apresentados.

   (a) Há um astrônomo que não é míope. Qualquer um que usa óculos então é míope. Além disso, todos usam óculos ou usam lentes de contato. Portanto, algum astrônomo usa lentes de contato ($A(x)$, $M(x)$, $O(x)$, $L(x)$).

   (b) Todo membro do conselho vem da indústria ou do governo. Todos do governo que são advogados são a favor da moção. John não é da indústria, mas é advogado. Portanto, se John for um membro do conselho, ele será a favor da moção ($M(x)$, $I(x)$, $G(x)$, $A(x)$, $F(x)$,j).

   Dica: Para resolver problemas do tipo (lógica proposicional ou de predicados) como $A \wedge B \wedge C \to D \to E$, notar que a expressão pode ser reescrita como $\neg(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg D \vee E)$ que, por sua vez, pode ser escrita como $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \vee (\neg D \vee E)$ e também como $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D) \vee E$ e, finalmente, como $A \wedge B \wedge C \wedge D \to E$. Em outras palavras, nesse tipo de forma (somente nesse), a fbf D também pode ser admitida como uma hipótese.

   (c) Há uma estrela de cinema que é mais rica que as outras. Todo mundo que é mais rico que os outros também paga mais impostos que os outros. Portanto, existe uma estrela de cinema que paga mais impostos que os outros ($E(x)$, $R(x, y)$, $I(x, y)$).

   (d) Todo estudante da Ciência da Computação trabalha mais que alguém e todo mundo que trabalha mais que alguém também dorme menos que esta pessoa. Maria é uma estudante da Ciência da Computação. Portanto Maria dorme menos que outra pessoa ($E(x)$, $T(x, y)$, $D(x, y)$, m).

   (e) Todo embaixador fala apenas com diplomatas e algum embaixador fala com alguém, portanto existe um diplomata ($E(x)$, $F(x, y)$, $D(x)$).