Tema 1: Lenguajes Regulares

Lección 1.5

Lenguajes no regulares. Lema de bombeo

Jorge Bernad, Elvira Mayordomo

Índice

Lenguajes no regulares

- No todos los lenguajes son regulares.
- $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es regular.
- ¿Por qué? Al intentar hacer un AFD (o AFnD), vemos que tenemos recordar cuántas aes hay al inicio de la cadena.
- Con un AFD, no podemos recordar el número de aes que tenemos al inicio.

Lenguajes no regulares

- Cuidado con la intuición.
- Este lenguaje no es regular

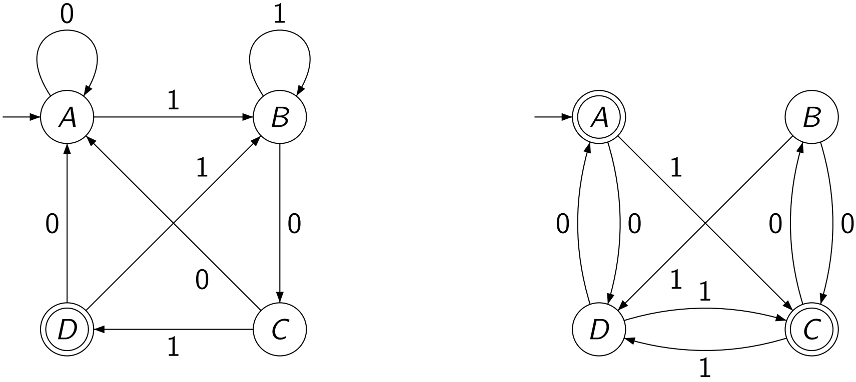
$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contiene el mismo número de 0 que de 1}\}$$

- Sin embargo,el siguiente lenguaje es regular

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contiene el mismo número de subcadenas 01 que de 10}\}$$

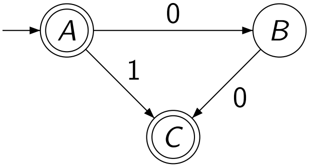
- Veremos un método para comprobar si un lenguaje es no regular: lema de bombeo.

- Si tenemos un autómata, vemos que puede haber bucles.



Los bucles en los autómatas

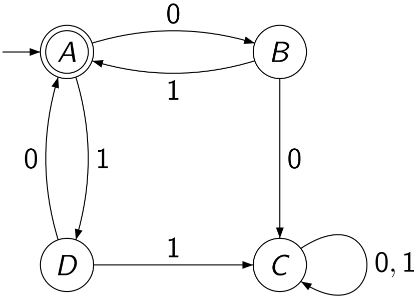
- Sólo cuando el autómata acepta un número finito de palabras podría no haber bucles



- Pero los lenguajes finitos no interesan, son todos regulares
- El lema de bombeo dice que si un lenguaje infinito es regular, las palabras largas se pueden bombear, es decir, se puede alargar la palabra repitiendo un bucle

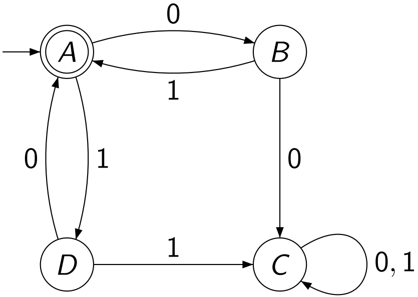
Los bucles en los autómatas

- Por ejemplo, una palabra aceptada por este autómata es 010110100101 con computación $(A, B, A, B, A, D, A, D, A, B, A, B, A)$



Los bucles en los autómatas

- Por ejemplo, una palabra aceptada por este autómata es 010110100101 con computación $(A, B, A, B, A, D, A, D, A, B, A, B, A)$



- Podemos repetir el bucle (desde A) B, A con subcadenas 01, por ejemplo obteniendo $01(01)^{100}10100101$ también aceptada

El lema de bombeo, versión fácil

- Dado un autómata M, con N estados

El lema de bombeo, versión fácil

- Dado un autómata M, con N estados
- cualquier palabra w con $|w| \geq N$ y w aceptada por M ($w \in L(M)$)

El lema de bombeo, versión fácil

- Dado un autómata M, con N estados
- cualquier palabra w con $|w| \geq N$ y w aceptada por M ($w \in L(M)$)
- puede ser bombeada, es decir, existe una partición en tres trozos $w = xyz$, $|y| \geq 1$, tal que para todo i,

$$xy^iz \in L(M)$$

El lema de bombeo, versión fácil

Demostración

- La demostración es sencilla, si $|w| = m \geq N$ los estados por los que paso son
$$(q_0, q_1, \ldots q_m)$$
Aquí hay $m + 1 > N$ estados luego alguno de los N estados posibles está repetido, $q_a = q_b$, $a \neq b$

Demostración

- La demostración es sencilla, si $|w| = m \geq N$ los estados por los que paso son
$$(q_0, q_1, \dots q_m)$$
Aquí hay $m + 1 > N$ estados luego alguno de los N estados posibles está repetido, $q_a = q_b$, $a \neq b$
- El bucle va a ser $y = w_{a+1} \dots w_b$ que es el fragmento que lleva de q_a a q_b

El lema de bombeo, versión fácil

Demostración

- La demostración es sencilla, si $|w| = m \geq N$ los estados por los que paso son
$$(q_0, q_1, \ldots q_m)$$
Aquí hay $m + 1 > N$ estados luego alguno de los N estados posibles está repetido, $q_a = q_b$, $a \neq b$
- El bucle va a ser $y = w_{a+1} \ldots w_b$ que es el fragmento que lleva de q_a a q_b
- $w = xyz$ con $x = w_1 \ldots w_a$, $z = w_{b+1} \ldots w_m$

El lema de bombeo, versión fácil

Demostración

- La demostración es sencilla, si $|w| = m \geq N$ los estados por los que paso son
$$(q_0, q_1, \dots q_m)$$
Aquí hay $m + 1 > N$ estados luego alguno de los N estados posibles está repetido, $q_a = q_b$, $a \neq b$
- El bucle va a ser $y = w_{a+1} \dots w_b$ que es el fragmento que lleva de q_a a q_b
- $w = xyz$ con $x = w_1 \dots w_a$, $z = w_{b+1} \dots w_m$
- Si repetimos y:
$$xy^2z = w_1 \dots w_a w_{a+1} \dots w_b w_{a+1} \dots w_b w_{b+1} \dots w_m$$
llegamos al mismo estado q_m y aceptamos

Demostración

- La demostración es sencilla, si $|w| = m \geq N$ los estados por los que paso son
$$(q_0, q_1, \ldots q_m)$$
Aquí hay $m + 1 > N$ estados luego alguno de los N estados posibles está repetido, $q_a = q_b$, $a \neq b$
- El bucle va a ser $y = w_{a+1} \ldots w_b$ que es el fragmento que lleva de q_a a q_b
- $w = xyz$ con $x = w_1 \ldots w_a$, $z = w_{b+1} \ldots w_m$
- Si repetimos y:
$$xy^2z = w_1 \ldots w_a w_{a+1} \ldots w_b w_{a+1} \ldots w_b w_{b+1} \ldots w_m$$
llegamos al mismo estado q_m y aceptamos
- También aceptamos xy^3z, xy^4z, incluso xy^0z

El lema de bombeo, versión útil

- Dado un lenguaje infinito A

El lema de bombeo, versión útil

- Dado un lenguaje infinito A
- si A es regular, entonces

El lema de bombeo, versión útil

- Dado un lenguaje infinito A
- si A es regular, entonces
- existe un N tal que para cualquier palabra w con $|w| \geq N$ y $w \in A$

El lema de bombeo, versión útil

- Dado un lenguaje infinito A
- si A es regular, entonces
- existe un N tal que para cualquier palabra w con $|w| \geq N$ y $w \in A$
- existe una partición en tres trozos $w = xyz$ con $|y| \geq 1$, $|xy| \leq N$

El lema de bombeo, versión útil

- Dado un lenguaje infinito A
- si A es regular, entonces
- existe un N tal que para cualquier palabra w con $|w| \geq N$ y $w \in A$
- existe una partición en tres trozos $w = xyz$ con $|y| \geq 1$, $|xy| \leq N$
- tal que para todo i,
$$xy^iz \in A$$

El lema de bombeo, versión útil

- Dado un lenguaje infinito A
- si A es regular, entonces
- existe un N tal que para cualquier palabra w con $|w| \geq N$ y $w \in A$
- existe una partición en tres trozos $w = xyz$ con $|y| \geq 1$, $|xy| \leq N$
- tal que para todo i,

$$xy^iz \in A$$

Sólo cambia "palabra aceptada por un autómata" por "lenguaje regular" y $|xy| \leq N$ (porque para $y = w_{a+1} \ldots w_b$, $b \leq N$ en la demostración anterior)

- Hemos visto que todos los lenguajes regulares se pueden buclear o bombear

- Hemos visto que todos los lenguajes regulares se pueden buclear o bombear
- Lo que nos interesa es el converso, si un lenguaje no se puede bombear entonces no es regular

Lema de bombeo, versión muy útil

A es regular $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \exists N, \text{ tal que } \forall w \in A,\ |w| \geq N \\ \bullet\ \text{existe partición } w = xyz,\ |xy| \leq N, \\ \quad |y| \geq 1 \\ \bullet\ \text{se puede bombear: } \forall i,\ xy^i z \in A \end{array}}$

Lema de bombeo, versión muy útil

A es regular $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \exists N, \text{ tal que } \forall w \in A,\ |w| \geq N \\ \bullet\ \text{existe partición } w = xyz,\ |xy| \leq N, \\ \quad |y| \geq 1 \\ \bullet\ \text{se puede bombear: } \forall i,\ xy^i z \in A \end{array}}$

$\sim \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \exists N, \text{ tal que } \forall w \in A,\ |w| \geq N \\ \bullet\ \text{existe partición } w = xyz,\ |xy| \leq N, \\ \quad |y| \geq 1 \\ \bullet\ \text{se puede bombear: } \forall i,\ xy^i z \in A \end{array}} \Rightarrow A$ NO regular

Lema de bombeo, versión muy útil

$\sim$

- $\exists N$, tal que $\forall w \in A$, $|w| \geq N$

- $\forall N$, $\exists w \in A$, $|w| \geq N$

Lema de bombeo, versión muy útil

$\sim$

- $\exists N$, tal que $\forall w \in A$, $|w| \geq N$
- existe partición $w = xyz$, $|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$

- $\forall N$, $\exists w \in A$, $|w| \geq N$
- toda partición $w = xyz$, $|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$

Lema de bombeo, versión muy útil

- $\exists N$, tal que $\forall w \in A$, $|w| \geq N$
- existe partición $w = xyz$, $|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$
- se puede bombear: $\forall i$, $xy^iz \in A$

$\sim$

- $\forall N$, $\exists w \in A$, $|w| \geq N$
- toda partición $w = xyz$, $|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$
- no se puede bombear: $\exists i$, $xy^iz \notin A$

Lema de bombeo

- Dado un lenguaje infinito A

Lema de bombeo

- Dado un lenguaje infinito A
- si para todo N existe una palabra w con $|w| \geq N$ y $w \in A$ tal que

Lema de bombeo

- Dado un lenguaje infinito A
- si para todo N existe una palabra w con $|w| \geq N$ y $w \in A$ tal que
- para cualquier partición de w en tres trozos cumpliendo

$$w = xyz, \quad |xy| \leq N, \; |y| \geq 1$$

El lema de bombeo, versión muy útil

Lema de bombeo

- Dado un lenguaje infinito A
- si para todo N existe una palabra w con $|w| \geq N$ y $w \in A$ tal que
- para cualquier partición de w en tres trozos cumpliendo

$$w = xyz, \quad |xy| \leq N, \ |y| \geq 1$$

- existe un i,

$$xy^iz \notin A$$

El lema de bombeo, versión muy útil

Lema de bombeo

- Dado un lenguaje infinito A
- si para todo N existe una palabra w con $|w| \geq N$ y $w \in A$ tal que
- para cualquier partición de w en tres trozos cumpliendo

$$w = xyz, \quad |xy| \leq N, \ |y| \geq 1$$

- existe un i,

$$xy^i z \notin A$$

- entonces A no es regular

El lema de bombeo, telegráfico

Lema de bombeo

- Dado un lenguaje infinito A
- si $\forall N\ \exists w$ con $w \in A$, $|w| \geq N$
  - tal que $\forall x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$
  - $\exists i$ con $xy^iz \notin A$
- entonces A no es regular

Lema de bombeo

- Dado un lenguaje infinito A
- si $\forall N \; \exists w$ con $w \in A$, $|w| \geq N$
  - tal que $\forall x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$
  - $\exists i$ con $xy^iz \notin A$
- entonces A no es regular

Intuitivamente

- Dado un lenguaje infinito A
- si existe una palabra $w \in A$ todo lo larga que quiera
- tal que para cualquier partición w no se puede bombear
- entonces A no es regular

Ejemplo, $A = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Ejemplo, $A = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1. Para todo N existe una palabra en A,
   - $w = a^N b^N \quad |w| = 2N \geq N$

Ejemplo, $A = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1. Para todo N existe una palabra en A,
   - $w = a^N b^N \quad |w| = 2N \geq N$
2. tal que para cualquier partición de w $\; x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = a^r \quad y = a^s, s \geq 1 \quad z = a^{N-r-s} b^N$$

Ejemplo, $A = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1. Para todo N existe una palabra en A,
   - $w = a^N b^N \quad |w| = 2N \geq N$
2. tal que para cualquier partición de $w \quad x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = a^r \quad y = a^s, s \geq 1 \quad z = a^{N-r-s} b^N$$

3. $\exists i$ con $xy^i z \notin A$
   - para $i = 2$,

$$xy^2 z = a^r a^s a^s a^{N-r-s} b^N = a^{N+s} b^N$$

y $a^{N+s} b^N \notin A$

Ejemplo, $A = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1. Para todo N existe una palabra en A,
   - $w = a^N b^N \quad |w| = 2N \geq N$
2. tal que para cualquier partición de $w \quad x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = a^r \quad y = a^s, s \geq 1 \quad z = a^{N-r-s} b^N$$

3. $\exists i$ con $xy^i z \notin A$
   - para $i = 2$,

$$xy^2 z = a^r a^s a^s a^{N-r-s} b^N = a^{N+s} b^N$$

   y $a^{N+s} b^N \notin A$

4. luego A no es regular

Resumen lema de bombeo

- Para demostrar que A no es regular
- Para cada N elegir $w \in A$ con $|w| \geq N$
- Ver cómo son todas las particiones de w que cumplen $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$

Resumen lema de bombeo

- Para demostrar que A no es regular
- Para cada N elegir $w \in A$ con $|w| \geq N$
- Ver cómo son todas las particiones de w que cumplen $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$
  Hay que elegir w para que las particiones sean fáciles

Resumen lema de bombeo

- Para demostrar que A no es regular
- Para cada N elegir $w \in A$ con $|w| \geq N$
- Ver cómo son todas las particiones de w que cumplen $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$
  Hay que elegir w para que las particiones sean fáciles
- Para cada partición, encontrar i con $xy^iz \notin A$

Otras formas de ver que un lenguaje no es regular

Usando las propiedades de clausura:

Otras formas de ver que un lenguaje no es regular

Usando las propiedades de clausura:

- Si A y B son regulares entonces $A \cup B$ es regular.
  Si $A \cup B$ no es regular y B es regular entonces A no es regular.

- Si A es regular entonces A^c es regular.
  Si A^c no es regular entonces A no es regular.
- Si A es regular entonces A^R es regular.
  Si A^R no es regular entonces A no es regular.
- Si A y B son regulares entonces $A \cap B$ es regular.
  Si $A \cap B$ no es regular y B es regular entonces A no es regular.

Otras formas de ver que un lenguaje no es regular

Usando las propiedades de clausura:

- Si A y B son regulares entonces $A \cup B$ es regular.
  Si $A \cup B$ no es regular y B es regular entonces A no es regular.
- Si A y B son regulares entonces $A \cdot B$ es regular.
- Si A es regular entonces A^* es regular.
- Si A es regular entonces A^c es regular.
  Si A^c no es regular entonces A no es regular.
- Si A es regular entonces A^R es regular.
  Si A^R no es regular entonces A no es regular.
- Si A y B son regulares entonces $A \cap B$ es regular.
  Si $A \cap B$ no es regular y B es regular entonces A no es regular.

Otras formas de ver que un lenguaje no es regular

Usando las propiedades de clausura:

- Si A y B son regulares entonces $A \cup B$ es regular.
  Si $A \cup B$ no es regular y B es regular entonces A no es regular.
- Si A y B son regulares entonces $A \cdot B$ es regular.
- Si A es regular entonces A^* es regular.
- Si A es regular entonces A^c es regular.
  Si A^c no es regular entonces A no es regular.
- Si A es regular entonces A^R es regular.
  Si A^R no es regular entonces A no es regular.
- Si A y B son regulares entonces $A \cap B$ es regular.
  Si $A \cap B$ no es regular y B es regular entonces A no es regular.

Ejemplo

$$A = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$$

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$

Palabras con el mismo número de *a*s que de *b*s

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
Palabras con el mismo número de as que de bs

- $A \cap a^* b^* =$

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
Palabras con el mismo número de as que de bs

- $A \cap a^* b^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
Palabras con el mismo número de as que de bs

- $A \cap a^* b^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Hemos visto que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es regular

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
Palabras con el mismo número de *a*s que de *b*s

- $A \cap a^* b^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Hemos visto que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es regular
- Sabemos que $a^* b^*$ es regular

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
Palabras con el mismo número de as que de bs

- $A \cap a^* b^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Hemos visto que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es regular
- Sabemos que $a^* b^*$ es regular
- Luego A no es regular

Ejemplo

$$A = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$$

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

Palabras con distinto número de as que de bs

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

Palabras con distinto número de *a*s que de *b*s

- $A^c =$

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$
Palabras con distinto número de *a*s que de *b*s

- $A^c = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$
Palabras con distinto número de *a*s que de *b*s

- $A^c = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
- Hemos visto que $\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ no es regular

Ejemplo

$A = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$
Palabras con distinto número de as que de bs

- $A^c = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
- Hemos visto que $\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ no es regular
- Luego A no es regular

Otro ejemplo: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$

$L = \{\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no es regular.

Otro ejemplo: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$

$L = \{\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no es regular.

1. Para todo N existe $w \in L$,
   - $w = 0^{N+1}1^N \;\; |w| = 2N + 1 \geq N$

Otro ejemplo: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$

$L = \{\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no es regular.

1. Para todo N existe $w \in L$,
   - $w = 0^{N+1}1^N \quad |w| = 2N + 1 \geq N$
2. tal que para cualquier partición de $w \quad x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = 0^r \quad y = 0^s, s \geq 1 \quad z = 0^{N+1-r-s}1^N$$

Otro ejemplo: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$

$L = \{\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no es regular.

1. Para todo N existe $w \in L$,
   - $w = 0^{N+1} 1^N \quad |w| = 2N + 1 \geq N$
2. tal que para cualquier partición de w $\; x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = 0^r \quad y = 0^s, s \geq 1 \quad z = 0^{N+1-r-s} 1^N$$

3. $\exists i$ con $xy^i z \notin L$
   - para $i = 2$: $xy^2 z = 0^r 0^s 0^s 0^{N+1-r-s} 1^N = 0^{N+1+s} 1^N$

Otro ejemplo: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$

$L = \{\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no es regular.

1. Para todo N existe $w \in L$,
   - $w = 0^{N+1}1^N \quad |w| = 2N + 1 \geq N$
2. tal que para cualquier partición de w $\; x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = 0^r \quad y = 0^s, s \geq 1 \quad z = 0^{N+1-r-s}1^N$$

3. $\exists i$ con $xy^iz \notin L$
   - para $i = 2$: $xy^2z = 0^r0^s0^s0^{N+1-r-s}1^N = 0^{N+1+s}1^N$
   - Debería ser $0^{N+1+s}1^N \notin L$, pero $0^{N+1+s}1^N \in L$
   - Para $i = 3, 4, \cdots$, ocurre lo mismo. Se puede bombear.

Otro ejemplo: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$

$L = \{\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no es regular.

1. Para todo N existe $w \in L$,
   - $w = 0^{N+1}1^N \quad |w| = 2N + 1 \geq N$
2. tal que para cualquier partición de $w \quad x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = 0^r \quad y = 0^s, s \geq 1 \quad z = 0^{N+1-r-s}1^N$$

3. $\exists i$ con $xy^iz \notin L$
   - para $i = 2$: $xy^2z = 0^r 0^s 0^s 0^{N+1-r-s} 1^N = 0^{N+1+s}1^N$
   - Debería ser $0^{N+1+s}1^N \notin L$, pero $0^{N+1+s}1^N \in L$
   - Para $i = 3, 4, \cdots$, ocurre lo mismo. Se puede bombear.
   - Tenemos también $i = 0$: $xy^0z = 0^{N+1-s}1^N \notin L$

Otro ejemplo: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$

$L = \{\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no es regular.

1. Para todo N existe $w \in L$,
   - $w = 0^{N+1}1^N \quad |w| = 2N + 1 \geq N$
2. tal que para cualquier partición de $w \quad x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = 0^r \quad y = 0^s, s \geq 1 \quad z = 0^{N+1-r-s}1^N$$

3. $\exists i$ con $xy^i z \notin L$
   - para $i = 2$: $xy^2z = 0^r0^s0^s0^{N+1-r-s}1^N = 0^{N+1+s}1^N$
   - Debería ser $0^{N+1+s}1^N \notin L$, pero $0^{N+1+s}1^N \in L$
   - Para $i = 3, 4, \cdots$, ocurre lo mismo. Se puede bombear.
   - Tenemos también $i = 0$: $xy^0z = 0^{N+1-s}1^N \notin L$
   - Solo con el bombeo hacia abajo podemos probar que no es regular.

Otro ejemplo: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$

$L = \{\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no es regular.

1. Para todo N existe $w \in L$,
   - $w = 0^{N+1}1^N \quad |w| = 2N + 1 \geq N$
2. tal que para cualquier partición de $w \quad x, y, z$ con $w = xyz$, $|y| \geq 1$ y $|xy| \leq N$,
   - la partición tiene que ser

$$x = 0^r \quad y = 0^s, s \geq 1 \quad z = 0^{N+1-r-s}1^N$$

3. $\exists i$ con $xy^iz \notin L$
   - para $i = 2$: $xy^2z = 0^r0^s0^s0^{N+1-r-s}1^N = 0^{N+1+s}1^N$
   - Debería ser $0^{N+1+s}1^N \notin L$, pero $0^{N+1+s}1^N \in L$
   - Para $i = 3, 4, \cdots$, ocurre lo mismo. Se puede bombear.
   - Tenemos también $i = 0$: $xy^0z = 0^{N+1-s}1^N \notin L$
   - Solo con el bombeo hacia abajo podemos probar que no es regular.
4. luego L no es regular

Cuidado

- Supongamos que tenemos un lenguaje donde las palabras largas se pueden bombear

$$\{a^m b^n c^n \mid m \geq 1, n \geq 0\} \cup \{b^i c^j \mid i, j \geq 0\}$$

- Todas las palabras $w \in L$ con $|w| \geq 1$ se pueden bombear (fácil).
- ¿Es por tanto el lenguaje regular?

Cuidado

- Supongamos que tenemos un lenguaje donde las palabras largas se pueden bombear

$$\{a^m b^n c^n \mid m \geq 1, n \geq 0\} \cup \{b^i c^j \mid i, j \geq 0\}$$

- Todas las palabras $w \in L$ con $|w| \geq 1$ se pueden bombear (fácil).
- ¿Es por tanto el lenguaje regular?
- No (comprobar utilizando las propiedades de clausura)
- El lema de bombeo solo se puede utilizar para demostrar que un lenguaje es no regular.

Cuidado

- Comprobemos que este lenguaje no es regular

$$L = \{0^{k^2} \mid k \geq 0\}$$

Cuidado

- Comprobemos que este lenguaje no es regular

$$L = \{0^{k^2} \mid k \geq 0\}$$

- $\forall N$, existe $w = 0^{N^2} \in L$, $|w| \geq N$

Cuidado

- Comprobemos que este lenguaje no es regular

$$L = \{0^{k^2} \mid k \geq 0\}$$

- $\forall N$, existe $w = 0^{N^2} \in L$, $|w| \geq N$
- la partición $w = xyz$, $x = \epsilon$, $y = 0$, $z = 0^{N^2-1}$

Cuidado

- Comprobemos que este lenguaje no es regular

$$L = \{0^{k^2} \mid k \geq 0\}$$

- $\forall N$, existe $w = 0^{N^2} \in L$, $|w| \geq N$
- la partición $w = xyz$, $x = \epsilon$, $y = 0$, $z = 0^{N^2-1}$
- No se puede bombear para $\mathrm{i} = 2$;

Cuidado

- Comprobemos que este lenguaje no es regular

$$L = \{0^{k^2} \mid k \geq 0\}$$

- $\forall N$, existe $w = 0^{N^2} \in L$, $|w| \geq N$
- la partición $w = xyz$, $x = \epsilon$, $y = 0$, $z = 0^{N^2-1}$
- No se puede bombear para i $= 2$;
- $xy^2z = 0^{N^2+1} \notin L$

Cuidado

- Comprobemos que este lenguaje no es regular

$$L = \{0^{k^2} \mid k \geq 0\}$$

- $\forall N$, existe $w = 0^{N^2} \in L$, $|w| \geq N$
- la partición $w = xyz$, $x = \epsilon$, $y = 0$, $z = 0^{N^2-1}$
- No se puede bombear para i = 2;
- $xy^2z = 0^{N^2+1} \notin L$
- Por tanto, L no es regular.

Cuidado

- Comprobemos que este lenguaje no es regular

$$L = \{0^{k^2} \mid k \geq 0\}$$

- $\forall N$, existe $w = 0^{N^2} \in L$, $|w| \geq N$
- la partición $w = xyz$, $x = \epsilon$, $y = 0$, $z = 0^{N^2-1}$
- No se puede bombear para i $= 2$;
- $xy^2z = 0^{N^2+1} \notin L$
- Por tanto, L no es regular.
- Razonamiento incorrecto. Aunque L es no regular, solo se ha comprobado un tipo de partición de w.
- Falta por comprobar particiones: $w = xyz$,

$$x = 0^i, y = 0^j, z = 0^{N^2-i-j}, i + j < N$$

Referencias

- Kelly: capítulo 2, sección 2.9
- Sipser: capítulo 1, sección 1.4