Exploración Numérica de la Expansión Cósmica con variación en el signo de la Constante Cosmológica Negativa en el Modelo Λ-CDM Para Distintos Valores de Ω_k

Pérez S. Rodrigo
rodrigo.perez.sa@usach.cl
Profesor: Cruz Norman

***Resumen*—Este estudio explora una extensión del modelo estándar Λ-CDM, considerando valores negativos y positivos para la constante cosmológica Λ, así como una distribución variada de las densidades adimensionales $\Omega_{i,0}$. El objetivo principal es resolver numéricamente las ecuaciones de Friedmann bajo distintas configuraciones de parámetros cosmológicos, utilizando métodos computacionales implementados en Python. Se analiza la evolución del factor de escala adimensional ($\widetilde{a}(t)$) y su derivada $\widetilde{a}$ en función del tiempo adimensional $\widetilde{t}$, considerando diferentes curvaturas espaciales (($k=0$), ($k=1$) o ($k=-1$)).**

Los resultados sugieren que un modelo dominado exclusivamente por energía oscura negativa no es viable desde un punto de vista físico. En particular, se observa que en un universo con Λ negativo, la expansión cósmica pasa de una fase de desaceleración moderada a una desaceleración máxima, seguida de una contracción eventual, lo que lleva a un escenario de Big Crunch. Este comportamiento es consistente con el efecto gravitacional atractivo de Λ negativo, que provoca una contracción acelerada del universo.

Por otro lado, en un universo con Λ positivo, se observa una expansión acelerada del universo. En este caso, el factor de escala ($\widetilde{a}(t)$) muestra una tendencia creciente, con una aceleración significativa en etapas posteriores del tiempo. Este comportamiento es característico de un modelo con curvatura positiva ((k = 1)) y una constante cosmológica positiva, que genera una expansión acelerada del universo.

Este trabajo propone nuevas perspectivas sobre la problemática actual del modelo Λ-CDM y ofrece alternativas a los desafíos que presenta, destacando la necesidad de continuar refinando nuestras teorías cosmológicas a medida que se disponga de datos más precisos y se desarrollen modelos teóricos más sofisticados. La exploración de configuraciones alternativas, como la constante cosmológica negativa, abre la puerta a investigar nuevos componentes o mecanismos que puedan ofrecer una comprensión más completa de la dinámica del universo.

Introducción

La cosmología moderna ofrece un marco teórico sólido para comprender la evolución del universo desde sus primeros instantes hasta la actualidad. Dentro de este contexto, el modelo Λ-CDM se ha establecido como el paradigma predominante, combinando los efectos de la materia ordinaria, la materia oscura fría (CDM) y la energía oscura (Λ) para describir de manera precisa la dinámica de expansión cósmica(Bullock, Boylan-Kolchin, 2017).

A pesar de su éxito en explicar numerosas observaciones, el modelo estándar cosmológico no está exento de limitaciones. En particular, resulta crucial explorar configuraciones alternativas que ofrezcan perspectivas diferentes sobre la energía oscura, usualmente representada por la constante cosmológica Λ. Este trabajo aborda una extensión del modelo estándar al considerar valores negativos para Λ, lo que plantea escenarios menos convencionales pero igualmente interesantes, con implicaciones sobre la evolución y geometría del universo.

El objetivo principal es resolver numéricamente las ecuaciones de Friedmann bajo distintas configuraciones de parámetros cosmológicos, explorando cómo evoluciona el factor de escala en función del tiempo para diferentes curvaturas espaciales ($k=0$, $k=1$ o $k=-1$). Se analizarán las implicaciones de una constante cosmológica negativa mediante métodos computacionales implementados en Python.

Es importante destacar que el enfoque se centra en evaluar tendencias generales, no en obtener predicciones exactas para Λ, debido a la dependencia de las condiciones iniciales. En cambio, el propósito es desarrollar un algoritmo robusto que permita replicar resultados conocidos y explorar configuraciones cosmológicas alternativas, proponiendo nuevas perspectivas al modelo Λ-CDM y a los desafíos que enfrenta.

Fundamentos y Desarrollo del Modelo Cosmológico Λ-CDM

Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann constituyen un conjunto fundamental en la cosmología moderna, derivadas a partir de las ecuaciones de campo de la relatividad general de Einstein (Friedmann, 1922). Este sistema de ecuaciones diferenciales acoplado describe la evolución dinámica del universo en términos del factor de escala $a(t)$, que caracteriza su expansión temporal. Su formulación se basa en el principio cosmológico, el cual postula que el universo es homogéneo e isótropo a gran escala. En la cosmología contemporánea, las ecuaciones de Friedmann son esenciales para modelar la evolución del universo y se expresan de la siguiente manera:

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3p}{c^2}) + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{2}$$

En estas ecuaciones, a es el factor de escala del universo, que describe cómo cambia el tamaño del universo con el tiempo. ρ se descompone en:

Materia Barióncia, ρ_b, la materia oscura, ρ_{dm}, la radiación, ρ_r y los neutrinos ρ_ν. Obteniendo en General la expresión para ρ:

$$\sum_{i=1}^{4} \rho_i = \rho_b + \rho_{dm} + \rho_r + \rho_\nu \tag{3}$$

Sin perder generalidad, además, considerando que tanto ρ_b y ρ_{dm} siguen la misma proporcionalidad; $\rho \propto a^{-3}$ (Gonzalez-Garcia et al., 2013), además, ρ_r y ρ_ν siguen la proporcionalidad $\rho \propto a^{-4}$, podemos reducir ρ_r y ρ_ν a un único parámetro ρ_{rad}, equivalentemente, ρ_b y ρ_{dm} lo reducimos al parámetro ρ_m, obteniendo:

$$\rho_m \propto a^{-3}, \rho_{rad} \propto a^{-4} \tag{4}$$

Utilizando las condiciones iniciales para un tiempo actual t_0:

$$a(t = t_0) = a_0, \rho_i(t = t_0) = \rho_{i,0} \tag{5}$$

Obtenemos, donde, por convención referenciamos todo en torno al valor $a_0 = 1$, por lo que finalmente:

$$\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}, \rho_{rad} = \rho_{rad,0}a^{-4} \tag{6}$$

Por otro lado, de las ecuaciones de friedman se define la constante cosmológica como Λ, la cual representa la energía oscura, que impulsa la expansión acelerada del universo. k es el parámetro de curvatura, que puede tomar los valores $k = 0$, $k = 1$ o $k = -1$, dependiendo de la geometría del universo (plano, cerrado o abierto, respectivamente).

Adimensionalización de las Ecuaciones de Friedman

El sistema descrito por las ecuaciones 1 y 2 corresponde a un conjunto de ecuaciones diferenciales no homogéneas de primer y segundo orden, respectivamente, que describen la dinámica de la expansión cósmica. Estas ecuaciones pueden resolverse analíticamente bajo ciertas condiciones específicas. Por ejemplo, en un universo plano ($k = 0$) dominado por materia, donde la densidad asociada a la materia bariónica es significativamente mayor que las demás densidades presentes, se obtiene una solución analítica para el factor de escala del tipo:

$$a \propto t^{\frac{2}{3}} \tag{7}$$

Con el propósito descrito en la introducción y tomando como base el problema que se planteará más adelante respecto al Modelo Cosmológico Actual, es esencial considerar las ecuaciones de Friedmann en una forma adimensional para facilitar su resolución numérica y su análisis comparativo. Esto se logra introduciendo el parámetro crítico de densidad, ρ_c, que permite expresar las diferentes componentes de densidad del universo como fracciones adimensionales de ρ_c.

El parámetro crítico de densidad, definido como:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{8}$$

representa la densidad de energía necesaria para que el universo sea espacialmente plano ($k = 0$) (Schneider, 2006). En términos de este parámetro, las densidades absolutas ρ_i de cada componente del universo (materia bariónica, materia oscura, radiación, constante cosmológica, etc.) se reescriben en términos de densidades adimensionales Ω_i:

$$\Omega_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_c} \tag{9}$$

Por lo que, utilizando 6 y del hecho que $\frac{\dot{a}}{a} = H$ (Schneider, 2006), la ecuación 1 queda expresada de la forma:

$$a^{-2}(\frac{da}{dt})^2 = \frac{8\pi G}{3}[\rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{rad,0}a^{-4}] + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \tag{10}$$

y definiendo los parámetros de adimencionalización:

$$\widetilde{t} = \frac{t}{H_0^{-1}} \tag{11}$$

$$\widetilde{a} = \frac{a}{a_0} \tag{12}$$

Es inmediato que la ecuación 10 se reduce a la expresión:

$$H_0^2 \widetilde{a}^{-2} \left[\frac{d\widetilde{a}}{d\widetilde{t}}\right]^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{m,0}a_0^{-3}\widetilde{a}^{-3} + \rho_{rad,0}a_0^{-4}\widetilde{a}^{-4}\right] + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{\widetilde{a}^2 a_0^2}. \tag{13}$$

Entonces, despejando y definiendo los parámetros de densidad adimensional $\Omega_{\Lambda,0}$[1] y $\Omega_{k,0}$[2]:

$$\Omega_{k,0} = -\frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2} \tag{14}$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \tag{15}$$

$$\frac{d\widetilde{a}}{d\widetilde{t}}^2 = \Omega_{m,0}\widetilde{a}^{-1} + \Omega_{r,0}\widetilde{a}^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}\widetilde{a}^2 + \Omega_{k,0} \tag{16}$$

La primera ecuación de Friedmann, expresada en su forma adimensional (ec. 16), describe cómo evoluciona el factor de escala $a(t)$ en función del tiempo bajo la influencia de las diferentes densidades de energía ($\Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{m,0}$) y la curvatura espacial ($\Omega_{k,0}$). Esta ecuación encapsula el balance energético del universo, considerando las contribuciones de materia, radiación, energía oscura y la geometría (Ryden, 2003).

Ahora procedemos a trabajar con la segunda ecuación de Friedmann, la cual describe la aceleración o desaceleración del universo en función de la densidad de energía y la presión asociada a cada componente. Esto es crucial para entender

[1] $\Omega_{\Lambda,0}$se interpreta como la densidad de energía debida a la constante cosmológica Λ. Es una cantidad adimensional que mide la contribución relativa de esta componente al contenido energético total del universo en comparación con la densidad crítica

[2] Aquí $\Omega_{k,0}$ no se define como una densidad física en el sentido convencional (masa/volumen), sino una cantidad adimensional que representa la contribución de la curvatura espacial (k) a la dinámica del universo en relación con la densidad crítica.

cómo la constante cosmológica negativa afecta la dinámica del universo.

De la ecuación 2 definimos la presión como la contribución de la radiación y materia tal que:

$$P = P_m + P_r = \omega\rho c^2 \tag{17}$$

En este contexto, la relación, $P = \omega\rho c^2$ define la ecuación de estado que relaciona la presión y la densidad a través de su parámetro de estado ω (Ryden, 2003). Específicamente para la masa, $\omega = 0$, por lo que la expresión para la presión se reduce únicamente a la contribución asociada a la radiación ($\omega = \frac{1}{3}$), mientras que la contribución asociada a la energía oscura está explícita en el término $\frac{\Lambda c^2}{3}$.

Sustituyendo los valores de P y ρ (ec. 6) obtenemos la expresión para 2:

$$a^{-1}\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{-4\pi G}{3}[\rho_{m,0}a^{-3} + 2\rho_{r,0}a^{-4}] + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{18}$$

De las expresiones adimensionales 12 y 11 obtenemos:

$$a^{-1}\frac{d^2a}{dt^2} \to \frac{H_0^2}{\widetilde{a}}\frac{d^2\widetilde{a}}{d\widetilde{t}^2} \tag{19}$$

Se reduce finalmente mediante despeje y con las definiciones ya dadas en las ecuaciones 19, 12, 8 y 9 la expresión para le ecuación 18:

$$\frac{d^2\widetilde{a}}{d\widetilde{t}^2} = -[\frac{1}{2}\Omega_{m,0}a^{-2} + \Omega_{r,0}\widetilde{a}^{-3}] + \Omega_{\Lambda,0}\widetilde{a} \tag{20}$$

La ecuación 20 describe la aceleración del parámetro $\widetilde{a}(t)$ y nos permite continuar con el desarrollo numérico de las mismas.

Modelo Cosmológico Lambda-Cold Dark Matter

El modelo cosmológico actual, conocido como Lambda-Cold Dark Matter (Λ-CDM), nació en 1998, actualmente es la teoría predominante en cosmología que describe la evolución del universo desde el Big Bang hasta la actualidad. Este modelo, descrito por las ecuaciones de Friedmann, se basa en la combinación de tres componentes principales: la materia oscura fría (CDM)[3], la energía oscura (Λ)[4], y la materia ordinaria (bariónica) los cuales interactúan de forma que gobiernan la expansión cósmica en el marco de la relatividad general(Christiansen, Siver, 2012).

Problemática en el Modelo Λ-CDM

El modelo Λ-CDM ha sido fundamental en el desarrollo de la cosmología moderna, proporcionando una descripción coherente de la evolución del universo a escalas cosmológicas grandes. Sin embargo, presenta limitaciones a escalas pequeñas (aproximadamente inferiores a 1 Mpc), como los problemas de cúspide-núcleo y satélites faltantes, señalados por (Bullock, Boylan-Kolchin, 2017). Además, se han identificado tensiones observacionales a escalas mayores, como la discrepancia en las mediciones del parámetro de Hubble (H_0) obtenidas a partir del fondo cósmico de microondas (CMB) y aquellas basadas en el escalón de distancia local, lo que plantea interrogantes sobre la validez del modelo estándar (Visinelli et al., 2019).

Adicionalmente, investigaciones recientes han explorado la posibilidad de modificar el paradigma actual mediante la introducción de nuevos parámetros cosmológicos. En particular, (Calderón et al., 2021), investigaron un modelo que incluye una constante cosmológica negativa ($\Lambda < 0$), tradicionalmente excluida del modelo estándar por su efecto gravitacional atractivo. En este contexto, la aceleración observada en la expansión del universo no puede explicarse únicamente por $\Lambda < 0$, por lo que los autores propusieron la adición de un componente X en el sector oscuro con un parámetro de estado $\omega_X < -\frac{1}{3}$. Este componente introduce un comportamiento dinámico en la energía oscura que, dependiendo de sus propiedades, permite abordar tanto las tensiones en H_0 como las discrepancias en la evolución cósmica a diferentes escalas de redshift.

Los resultados de (Calderón et al., 2021). sugieren que, bajo ciertas condiciones, este modelo puede reproducir de manera coherente observaciones clave como las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) y el CMB, además de ofrecer nuevas perspectivas sobre el futuro del universo.

A pesar de su simplicidad y éxito, el modelo estándar (Λ-CDM) puede requerir modificaciones para explicar de manera coherente tanto las tensiones en H_0 como los problemas en pequeñas y largas escalas. Estos estudios destacan la necesidad de continuar refinando nuestras teorías cosmológicas a medida que se disponga de datos más precisos y se desarrollen modelos teóricos más sofisticados.

METODOLOGÍA

Para resolver esta Problemática, y, teniendo en cuenta que el sistema de ecuaciones descrito por 1 y 2 no tiene solución analítica bajo condiciones arbitrarias, implementaremos un algorítmo realizado en Python el cual se encuentra publicado en el github (Pérez, 2025), sin embargo para esto es necesario recurrir a las ecuaciones adimensionales descritas en 16 y 20.

En contraste a estudios realizados previamente por (Calderón et al., 2021), en este trabajo se propone no añadir una nueva componente a las ecuaciones de friedmann, esto con el fin de no modificar la teoría y analizar bajo este paradigma un modelo cosmológico con distintas curvaturas ($\Omega_{k,0}$) y proporciones de densidades dadas por $\Omega_{i,0}$, además para resultados finales, se añadió en el código la posibilidad de poder visualizar evolución temporal de $\widetilde{a}$, esto será de ayuda para obtener una mejor claridad en la interpretación de los resultados y conclusiones posteriores.

Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un algoritmo ampliamente utilizado para resolver ecuaciones diferenciales numéricamente. En este trabajo, se emplea específicamente para integrar las ecuaciones adimensionales de Friedmann (Ecuaciones 16

[3]la CDM es una forma invisible de materia que no interactúa con la luz, pero cuya presencia se detecta a través de sus efectos gravitacionales. Se mueve a velocidades bajas, lo que ayuda en la formación de estructuras a gran escala en el universo.(Armendariz-Picon, Neelakanta, 2014)

[4]La energía oscura es una forma de energía desconocida que acelera la expansión del universo(Peebles, Ratra, 2003).

y 20). Este método permite obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales que describen la evolución de $a(t)$ y $\widetilde{\dot{a}}$ y que no tienn una solución analítica sencilla en escenarios generales.

El método de Runge-Kutta se basa en un enfoque iterativo, en el que se calculan aproximaciones sucesivas del valor de la función y sus derivadas a partir de los valores previos. Es eficiente en términos de precisión y estabilidad, lo que lo hace adecuado para los complejos modelos cosmológicos considerados en este estudio, donde las ecuaciones incluyen términos no lineales y dependen de varios parámetros, como la densidad de materia, radiación, y energía oscura. Para la implementación, se utiliza la versión clásica de cuarto orden, que es lo suficientemente precisa para los requisitos de este trabajo sin un costo computacional excesivo (Runge, 1895).

Resultados

Verificación de código

De acuerdo a los resultados hallados con el algoritmo de python (Pérez, 2025) y la resolución de las ecuaciones 16 y 20 se prosigió verificando los resultados hallados en base a resultados ya conocidos obteniendo:

Para un universo dominado por materia con geometría plana, es decir, donde $\Omega_{m,0} \simeq 1$ y $k = 0$, se obtiene el clásico resultado del universo *Einstein-De Sitter*, que se verifica con investigaciones como (Gonfa Tolasa, 2024) y se obtiene la figura:

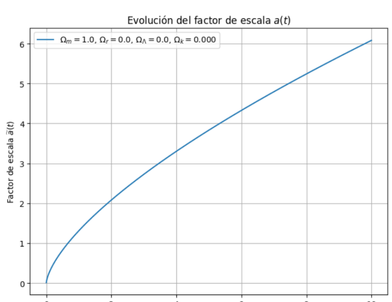


Figura 1: Evolución adimensional del factor de escala $\widetilde{a(t)}$ en un universo *Einstein-De Sitter*.

Donde en la fig 1 se puede apreciar una tendencia de la forma $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ que es raspaldado por la solución analítica que se puede hallar resolviendo las ecuaciones de Friedmann para este caso. Por otro lado, se respalda este código y resultados preliminares en los estudios realizados por (Galindo-Dellavalle et al., 2008) donde se verifica el resultado que, en un universo dominado por radiación $\Omega_{r,0} \simeq 1$ y una geometría cerrada (i.e $k = 1$) obteniendose la siguiente figura:

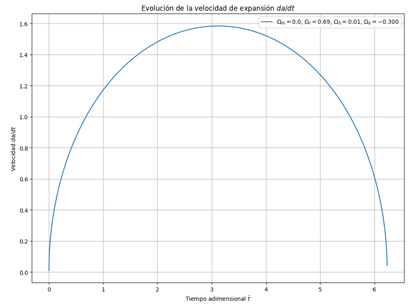
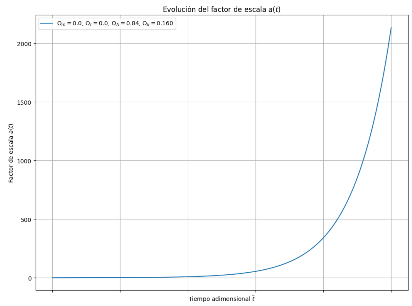


Figura 2: Evolución adimensional del factor de escala $\widetilde{a(t)}$ en un universo cerrado y dominado por Radiación.

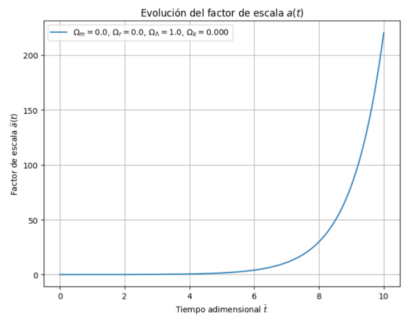
Es de detacar que en la figura 2 se presencia el hipotético escenario cosmológico *"Big Crunch"* en el cual eventualmente la expansión se estaciona para contraerse y volver al estado inicial.

Implementación del código

Los resultados obtenidos en la sección anterior confirman que la implementación del código es adecuada. No obstante, es importante resaltar las variaciones observadas en los resultados para los universos dominados por energía oscura. En particular, un aspecto relevante consiste en analizar los escenarios en los que la energía oscura predomina en el contenido energético del universo, es decir, cuando $\Omega_{\Lambda,0} \simeq \pm 1$. Según las investigaciones de (Borislavov Vasilev et al., 2021), se propone un destino hipotético para el universo en el que la expansión exponencial creciente de la función de escala $a(t)$ da lugar a un 'desgarro' de la materia. Este fenómeno se refleja en el algoritmo implementado, el cual se presenta en las figuras siguientes:



(a) Universo con geometría hiperbólica $k = -1$



(b) Universo con geometría plana $k = 0$

Figura 3: Evolución adimensional de $\widetilde{a}(t)$ en un universo dominado por radiación ($\Lambda > 0$) en distintas curvaturas.

Adicionalmente es pertinente analizar el caso opuesto, aquel donde aproximamos $\Omega_{\Lambda,0} \simeq -1$, de este se obtiene:

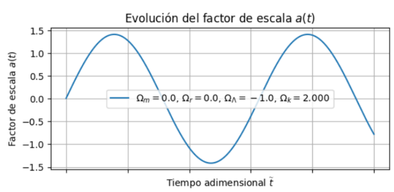


Figura 4: Evolución adimensional del factor de escala $\widetilde{a(t)}$ en un universo abierto y dominado por $\Omega_{\Lambda,0} < 0$.

Los resultados mostrados en la figura 4 sugieren un comportamiento que podría interpretarse como un universo cíclico, con valores del factor de escala $a(t) < 0$ en ciertos periodos. Sin embargo, dado que $a(t)$ representa una medida del tamaño relativo del universo y, por tanto, debe ser no negativa ($a(t) \geq 0$), esta interpretación no tiene sustento físico en el marco convencional de las ecuaciones de Friedmann. La aparición de $a(t) < 0$ podría estar relacionada con la extensión matemática de las soluciones, pero no refleja un estado físico real. Además, considerar un universo comprimido en $a = 0$ durante ciertos intervalos tampoco es consistente con las ecuaciones de Friedmann, ya que estas no permiten transiciones regulares a través de $a = 0$. Por lo tanto, los resultados obtenidos sugieren que un modelo dominado exclusivamente por energía oscura negativa no es viable desde un punto de vista físico. Se considera necesario explorar alternativas que incluyan otros componentes o mecanismos que permitan interpretar las soluciones en un marco más coherente con los principios de la cosmología moderna.

Por otro lado, en cuanto a un modelo que contenga una proporción entre todas las densidades $\Omega i, 0$, se ha indagado en distintos modelos con $\Lambda < 0$, sin embargo todos los resultados han señalado una similitud en los resultados y estos radican en una forma estipulada para un *Big Crunch*, como se puede ver en la figura:

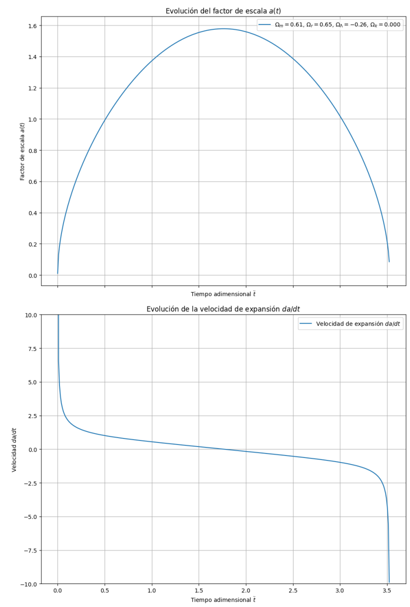


Figura 5: Representación gráfica de $\widetilde{a}(t)$, $\widetilde{\dot{a}}$ con $\Lambda < 0$, $k = 0$ y proporción entre los $\Omega i, 0$

La figura 5 representa los resultados obtenidos en el caso de $\Lambda < 0$. La gráfica de $\widetilde{a}(t)$ en función del tiempo presenta un comportamiento parabólico invertido, indicando que la expansión cósmica pasa de una fase de desaceleración moderada a una desaceleración máxima, seguida de una contracción eventual. Este resultado es consistente con el efecto gravitacional atractivo de $\Lambda < 0$.

Es razonable plantear la posibilidad de que el modelo actual de expansión del universo represente solo una fase dentro de un marco más amplio y dinámico. Aunque el modelo Λ-CDM predice una expansión acelerada indefinida debido a la energía oscura, las observaciones empíricas descartan la posibilidad de un 'Big Crunch' en el futuro cercano. Este hecho se basa en que la expansión del universo no solo persiste, sino que ocurre a una tasa acelerada. Este descubrimiento, basado en observaciones como las de supernovas de tipo Ia, ha transformado nuestra comprensión del destino cósmico, inclinando la balanza hacia escenarios como el 'Big Freeze' o el 'Big Rip', dependiendo de la naturaleza de la energía oscura.

No obstante, existen escenarios teóricos que abren la puerta a posibles transiciones futuras en la evolución cósmica. Entre estos se encuentran:

- **Modelos con energía oscura dinámica**, donde su densidad podría disminuir o incluso cambiar de signo.

- **Teorías de gravedad modificada**, que sugieren desviaciones a largo plazo respecto a las predicciones del modelo estándar.
- **Cosmologías cíclicas**, que plantean fases recurrentes de expansión y contracción, aunque estas hipótesis carecen de evidencia sólida hasta el momento.

Desde esta perspectiva, podríamos considerar la etapa actual como una fase de expansión acelerada dentro del gráfico de evolución cósmica. Sin embargo, es crucial recordar que nuestro entendimiento de la energía oscura y las leyes fundamentales que rigen el universo sigue siendo incompleto. Por ello, nuevas observaciones y avances teóricos, como los esfuerzos para resolver las limitaciones del modelo Λ-CDM señaladas por (Bullock, Boylan-Kolchin, 2017), o las reinterpretaciones de las componentes cósmicas propuestas por (Farnes, 2018), serán clave para determinar si este planteamiento puede integrarse en un modelo más general que abarque las posibles transiciones futuras del cosmos.

Por otro lado Exploré una configuración similar con $\Lambda > 0$, esto, más acorde a los paradigmas presupuestados por Λ-CDM, los resultados son reflejados en la siguiente figura:

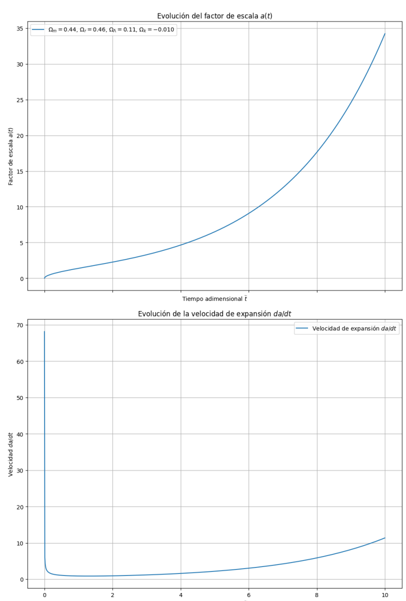


Figura 6: Representación gráfica de $\widetilde{a}(t)$, $\dot{\widetilde{a}}$ con $\Lambda > 0$, $k = 1$ y proporción entre los $\Omega i, 0$

En esta ocasión la gráfica correspondiente a $\widetilde{a}(t)$ corresponde a una creciente desde 0 cuya curva posee una baja pronunciación en instantes iniciales, sin embargo para instantes posteriores se aprecia que la gráfica toma una creciente considerable, esto se acredita con la gráfica $\dot{\widetilde{a}}$, la cual posee una recta pronunciada en los inicios producto de una aproximación en las condiciones iniciales.

Este comportamiento es característico de un modelo con curvatura positiva ($k = 1$) y una constante cosmológica positiva ($\Lambda > 0$), que genera una expansión acelerada del universo. Este tipo de modelo sugiere una fase temprana en la que el universo crece lentamente y, a medida que la energía oscura comienza a dominar, la expansión se acelera rápidamente.

Sin embargo, a diferencia del modelo Λ-CDM convencional, que también muestra aceleración en la expansión, este modelo resenta una 'crecida exponencial' mucho más pronunciada en etapas intermedias del tiempo, lo que podría ser visto como una expansión repentina, en contraste con las predicciones más suaves del modelo estándar Λ-CDM (como se puede observar en trabajos de (Gonfa Tolasa, 2024)).

Desde esta perspectiva, este modelo podría considerarse como una alternativa viable, sugiriendo que la 'época' actual de expansión del universo podría encontrarse en una fase en la que el crecimiento no es exponencial, sino que está desacelerando hacia una tasa más moderada. Este tipo de modelo permite abrir nuevas avenidas para la exploración de los parámetros cosmológicos y la dinámica del universo en un contexto alternativo al que se plantea en el modelo Λ-CDM tradicional. Sin embargo, para que este modelo sea validado como una descripción precisa de la evolución cósmica, sería necesario realizar observaciones e investigaciones adicionales que puedan corroborar sus predicciones y compararlas con los datos empíricos disponibles. Solo con estas pruebas podríamos determinar si este modelo es un candidato viable frente a las propuestas más convencionales.

Conclusiones

El algoritmo creado y subido en (Pérez, 2025) aparenta ser una buena herramienta para la búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Friedmann, pues el algoritmo refleja correctamente las gráficas estipuladas para los escenarios ya conocidos. Por ejemplo, en modelos simples como el de *Einstein-de Sitter*, el algoritmo replicó perfectamente la dependencia $a \propto t^{\frac{2}{3}}$. Además, en modelos más complejos como aquellos donde hay una proporción entre los $\Omega_{i,0}$, se llegaron a los resultados esperados en escenarios estándar.

Para el caso de $\Lambda > 0$, se obtuvieron resultados fuera de lo común, que se alejan del comportamiento presupuestado por el modelo estándar Λ-CDM. A pesar de la implementación del término cosmológico positivo en las ecuaciones de Friedmann, se observó que en ciertas condiciones de densidad de energía, el comportamiento del factor de escala $a(t)$ mostró oscilaciones inusuales o crecimientos que no siguen el patrón clásico de expansión acelerada. Estos resultados podrían sugerir la presencia de efectos adicionales, como la interacción entre diferentes componentes de la energía oscura o la contribución de una constante cosmológica modificada, lo que abre la puerta a nuevos enfoques teóricos para describir la aceleración cósmica en términos más allá del modelo Λ-CDM.

Para $\Lambda < 0$, los resultados muestran una dinámica en la que la expansión cósmica desacelera hasta detenerse y luego da paso a una contracción acelerada, culminando en un escenario de colapso conocido como Big Crunch. Aunque este comportamiento es consistente con el efecto gravitacional atractivo de una constante cosmológica negativa, no refleja el modelo cosmológico actual basado en observaciones, que indica una expansión acelerada indefinida debido a $\lambda > 0$.

Sin embargo, este ejercicio teórico ofrece una visión interesante sobre cómo diferentes valores de Λ podrían afectar la evolución del universo

Estos hallazgos, tanto para $\Lambda > 0$ como para $\Lambda < 0$, abren nuevas interrogantes sobre la naturaleza de la energía oscura y su rol en la evolución del universo, sugiriendo que enfoques alternativos podrían ofrecer explicaciones más ajustadas a los datos simulados.

REFERENCIAS

Armendariz-Picon Cristian, Neelakanta Jayanth T. How cold is cold dark matter? // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. III 2014. 2014, 03. 049–049.

Borislavov Vasilev Teodor, Bouhmadi-López Mariam, Martín-Moruno Prado. Classical and Quantum f(R) Cosmology: The Big Rip, the Little Rip and the Little Sibling of the Big Rip // Universe. VIII 2021. 7, 8. 288.

Bullock James S., Boylan-Kolchin Michael. Small-Scale Challenges to the CDM Paradigm // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. VIII 2017. 55, 1. 343–387.

Calderón Rodrigo, Gannouji Radouane, L'Huillier Benjamin, Polarski David. Negative cosmological constant in the dark sector? // Physical Review D. I 2021. 103, 2.

Christiansen Jodi L., Siver Andrew. Computing accurate age and distance factors in cosmology // American Journal of Physics. IV 2012. 80, 5. 367–375.

Farnes J. S. A unifying theory of dark energy and dark matter: Negative masses and matter creation within a modified CDM framework // Astronomy amp; Astrophysics. XII 2018. 620. A92.

Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes // Zeitschrift fur Physik. I 1922. 10. 377–386.

Galindo-Dellavalle E., German G., Macorra A. de la. Cosmology of the very early universe. 2008.

Gonfa Tolasa Diriba. Comparison between CDM and Einstein-De Sitter Models // SSRN Electronic Journal. 2024.

Gonzalez-Garcia M.C., Niro V., Salvado Jordi. Dark radiation and decaying matter // Journal of High Energy Physics. IV 2013. 2013, 4.

Peebles P. J. E., Ratra Bharat. The cosmological constant and dark energy // Reviews of Modern Physics. IV 2003. 75, 2. 559–606.

Pérez Rodrigo. Cosmic Model. 2025. Accedido: enero 2025.

Runge C. Ueber die numerische Auflsung von Differentialgleichungen // Mathematische Annalen. VI 1895. 46, 2. 167–178.

Ryden Barbara. Introduction to cosmology. 2003.

Schneider Peter. Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction. 2006. 1.

Visinelli Luca, Vagnozzi Sunny, Danielsson Ulf. Revisiting a Negative Cosmological Constant from Low-Redshift Data // Symmetry. VIII 2019. 11, 8. 1035.