

1. Barra com Densidade Linear Crescente

Uma barra de comprimento 4 metros está posicionada ao longo do eixo x , com suas extremidades em $x = 0$ e $x = 4$. Sua densidade linear varia conforme a função $\rho(x) = 2x$ (em kg/m). Determine a massa total da barra e seu centro de massa.

Resolução:

- **Massa total:**

$$m = \int_0^4 2x \, dx = [x^2]_0^4 = 16 - 0 = 16 \text{ kg}$$

- **Momento em relação à origem:**

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^4 x(2x) \, dx = \int_0^4 2x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^4 = \frac{2}{3} (64 - 0) = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

- **Centro de massa:**

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{\frac{128}{3}}{16} = \frac{128}{48} = \frac{8}{3} \approx 2.67 \text{ m}$$

Resposta: $\bar{x} \approx 2.67 \text{ m}$

2. Barra com Densidade Linear Constante

Uma barra homogênea de comprimento 5 metros tem densidade linear constante $\rho(x) = 3 \text{ kg/m}$. Determine seu centro de massa.

Resolução:

- **Massa total:**

$$m = \int_0^5 3 \, dx = 3x \Big|_0^5 = 15 \text{ kg}$$

- **Momento em relação à origem:**

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^5 x(3) \, dx = 3 \int_0^5 x \, dx \\ &= 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = 3 \left[\frac{25}{2} - 0 \right] = \frac{75}{2} \end{aligned}$$

- Centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{\frac{75}{2}}{15} = \frac{75}{30} = 2.5 \text{ m}$$

Resposta: $\bar{x} = 2.5 \text{ m}$

3. Barra com Densidade Decrescente

Uma barra de 3 metros de comprimento tem densidade linear $\rho(x) = 6 - 2x$. Encontre seu centro de massa.

Resolução:

- Massa total:

$$m = \int_0^3 (6 - 2x) dx = [6x - x^2]_0^3 = 9 \text{ kg}$$

- Momento em relação à origem:

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^3 x(6 - 2x) dx = \int_0^3 (6x - 2x^2) dx \\ &= \left[3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^3 = 9 \end{aligned}$$

- Centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{9}{9} = 1 \text{ m}$$

Resposta: $\bar{x} = 1 \text{ m}$

4. Barra com Densidade Exponencial

Uma barra de 2 metros de comprimento tem densidade linear $\rho(x) = e^x$. Determine seu centro de massa.

Resolução:

- Massa total:

$$m = \int_0^2 e^x dx = e^2 - 1$$

- **Momento em relação à origem:**

$$M_0 = [xe^x - e^x]_0^2 = e^2 + 1$$

- **Centro de massa:**

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} \approx 1.31 \text{ m}$$

Resposta: $\bar{x} \approx 1.31 \text{ m}$

5. Barra com Densidade Parabólica

Uma barra de 4 metros tem densidade linear $\rho(x) = x^2 + 1$. Determine seu centro de massa.

Resolução:

- **Massa total:**

$$m = \frac{76}{3}$$

- **Momento em relação à origem:**

$$M_0 = 72$$

- **Centro de massa:**

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{216}{76} \approx 2.84 \text{ m}$$

Resposta: $\bar{x} \approx 2.84 \text{ m}$