INSTITUTO FEDERAL Maranhão

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,CIÊNCIAS
E TECNOLOGIA DO MARANHÃO
CAMPUS AÇAILÂNDIA

Elessandro Silva de Sousa
Gustavo Ávalos Ferreira Silva
Rodrigo Macedo Oliveira

MASSA E CENTRO DE MASSA DE UMA BARRA

Açailândia - MA
Janeiro de 2025

Elessandro Silva de Sousa
Gustavo Ávalos Ferreira Silva
Rodrigo Macedo Oliveira

MASSA E CENTRO DE MASSA DE UMA BARRA

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção de nota na disciplina Cálculo diferencial e integral II, ministrada pelo Professor Adão Nascimento dos Passos.

Açailândia - MA

Janeiro de 2025

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

O centro de massa de um corpo é um ponto (fictício) sobre o qual é possível considerar que toda a sua massa está concentrada, o que nos permite tratá-lo como um ponto material (ou partícula pontual). A localização desse ponto depende, naturalmente, da massa do corpo, bem como de sua forma geométrica, ou seja, depende da forma como a massa do corpo está distribuída.

Tal definição de centro de massa aplica-se não apenas para um corpo rígido, podendo ser estendida para um sistema formado por N partículas (ou seja, formado por corpos separados). Dessa forma, o centro de massa de um sistema de N partículas é um ponto sobre o qual podemos considerar que a massa total (a soma das massas das N partículas) do sistema está concentrada.

Ao analisarmos uma barra, um objeto aparentemente simples, podemos explorar de forma clara esse conceito. Em uma barra homogênea, o centro de massa coincide com o centro geométrico. No entanto, ao adicionarmos massa em uma das extremidades, o centro de massa se desloca. Essa propriedade é de fundamental importância em diversas áreas, como na engenharia civil, para o cálculo de momentos fletores em vigas, e na aeronáutica, para determinar o centro de gravidade de aeronaves.

Neste estudo, vamos explorar de forma interativa e simples, como a distribuição de massa em uma barra influencia a localização de seu centro de massa, e como esse conceito é fundamental para encontrar o centro de massa de uma barra.

Massa e Centro de Massa de uma Barra

Inicialmente, vamos descrever o conceito de centro de massa de um sistema constituído por um número finito de partículas, localizadas sobre um eixo L, de peso e espessura insignificantes.

Vamos supor que o eixo L esteja na posição horizontal e imaginemos que ele possa girar livremente em torno de um ponto P, como se nesse ponto fosse colocado um apoio (ver Figura 1).

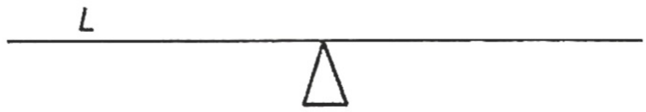

Figura 1

Se colocarmos sobre L um objeto de peso w_1 a uma distância d_1, à direita de P, o peso do objeto fará L girar no sentido horário (ver Figura 2 (a)). Colocando um objeto de peso w_2, a uma distância d_2 à esquerda de P, o peso desse objeto fará L girar no sentido anti-horário (ver Figura 2 (b)).

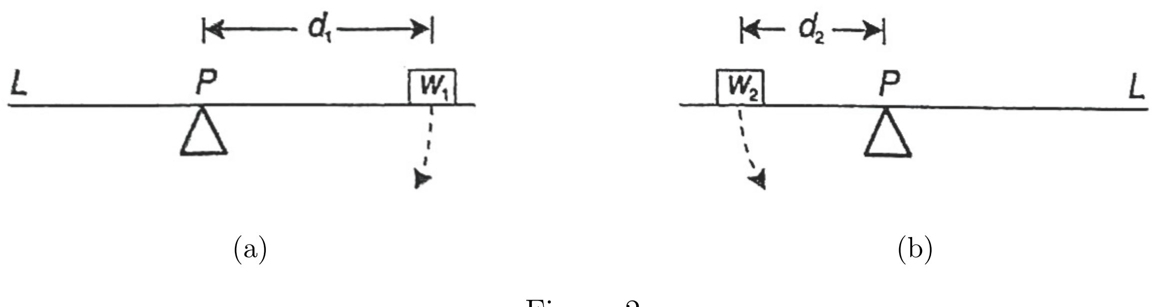

Figura 2

Colocando simultaneamente os dois objetos sobre L (ver Figura 3), o equilíbrio ocorre quando

$$w_1 d_1 = w_2 d_2. \tag{1}$$

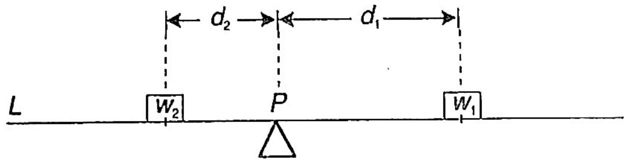

Figura 3

Este resultado é conhecido como **Lei da Alavanca** e foi descoberto por Arquimedes. Na prática, podemos constatar isso quando duas crianças se balançam numa gangorra.

Vamos, agora, orientar L e fazê-lo coincidir com o eixo dos x do sistema de coordenadas cartesianas. Se duas partículas de peso w_1 e w_2 estão localizadas nos pontos x_1 e x_2, respectivamente (ver Figura 4), podemos reescrever (1) como

$$w_1(x_1 - P) = w_2(P - x_2) \quad \text{ou} \quad w_1(x_1 - P) + w_2(x_2 - P) = 0.$$

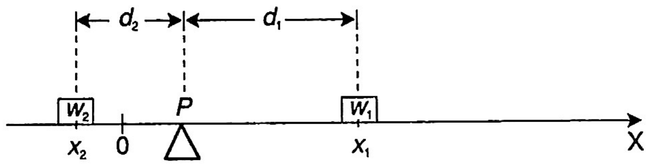

Figura 4

Supondo que n partículas de pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ estejam colocadas nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, o sistema estará em equilíbrio ao redor de P, quando

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - P) = 0. \tag{2}$$

Como o peso de um corpo é dado por $w = mg$, onde g é a aceleração da gravidade e m é a massa do corpo, considerando g constante, podemos reescrever (2) como

$$\sum_{i=1}^{n} m_i g(x_i - P) = 0,$$

ou de forma equivalente,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - P) = 0.$$

A soma $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - P)$ mede a tendência do sistema girar ao redor do ponto P e é chamada *momento do sistema em relação a P*. Quando o momento é positivo, o giro se dá no sentido horário. Quando o momento é negativo, o giro se dá no sentido anti-horário e, obviamente, quando o momento é nulo o sistema está em equilíbrio.

Se o sistema não está em equilíbrio, movendo o ponto P, podemos encontrar um ponto $\bar{x}$, de tal forma que ocorra o equilíbrio, isto é, um ponto $\bar{x}$ tal que o momento do sistema em relação a $\bar{x}$ seja nulo. O ponto $\bar{x}$ deve satisfazer

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = 0.$$

Resolvendo esta equação para $\bar{x}$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\,\bar{x} = 0,$$

ou

$$\bar{x}\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

ou ainda

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3)$$

O ponto $\bar{x}$ que satisfaz (3) é chamado **centro de massa do sistema dado**.

Sob a hipótese de a aceleração da gravidade ser constante, $\bar{x}$ também é chamado **centro de gravidade do sistema**.
É interessante observar que, na expressão (3), o numerador do lado direito é o momento do sistema em relação à origem e que o denominador é a massa total do sistema

Queremos, a seguir, mostrar como a integração pode ser usada para estender essas ideias a um sistema que, ao invés de ser constituído por um número finito de partículas, apresenta uma distribuição contínua de massa.

Consideremos uma barra horizontal rígida, de comprimento l. Se a sua densidade linear ρ, que é definida como massa por unidade de comprimento, é constante, dizemos que a barra é homogênea. Neste caso, intuitivamente, percebemos que a massa total da barra é dada por ρl e que o centro de massa deve estar localizado no ponto médio da barra.

Suponhamos, agora, que temos uma barra não homogênea. Localizamos a barra sobre o eixo dos x, com as extremidades nos pontos a e b, como a Figura 5.

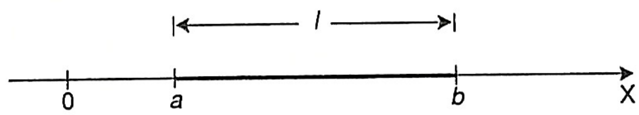

Figura 5

Seja $\rho(x)$, $x \in [a,b]$, uma função contínua que representa a densidade linear da barra. Para encontrar a massa total da barra, vamos considerar uma partição P de $[a,b]$, dada pelos pontos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Sejam c_i um ponto qualquer do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Então, uma aproximação da massa da parte da barra entre x_{i-1} e x_i é dada por:

$$\Delta m_i = \rho(c_i)\Delta x_i,$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\Delta x_i \tag{4}$$

constitui uma aproximação da massa total da barra.

Podemos observar que, à medida que n cresce muito e cada $\Delta x_i \to 0$, a soma (4) se aproxima do que intuitivamente entendemos como massa total da barra.

Assim, como (4) é uma soma de Riemann da função contínua $\rho(x)$, podemos definir a massa total da barra como

$$m = \int_a^b \rho(x)\, dx \tag{5}$$

Para encontrarmos o centro de massa da barra, precisamos primeiro encontrar o momento da barra em relação à origem.

Procedendo de acordo com as hipóteses e notações anteriores, obtemos que $c_i \Delta m_i$ é uma aproximação do momento em relação à origem, da parte da barra que está entre x_{i-1} e x_i, e que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \rho(c_i)\Delta x_i \tag{6}$$

é uma aproximação do momento da barra em relação à origem.

Como a soma (6) é uma de Riemann da função contínua $x\rho(x)$, podemos definir o momento da barra em relação à origem como

$$M_0 = \int_a^b x\rho(x)\, dx \tag{7}$$

Então, entendendo a expressão (3) para a barra, obtemos o seu centro de massa $\bar{x}$, que é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_a^b x\rho(x)\, dx \tag{8}$$

Exemplos

Exemplo (i):

Usando (8), verificar que o centro de massa de uma barra homogênea está no seu ponto médio.

Solução

Seja l o comprimento da barra e ρ a sua densidade linear. Localizando a barra sobre o eixo dos x com extremidades nos pontos a e b, temos:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_a^b \rho\, dx \\
&= \rho \int_a^b dx \\
&= \rho\,(b-a) \\
&= \rho l \quad \text{(unidades de massa);}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{m}\int_a^b x\rho\, dx \\
&= \frac{\rho}{\rho l}\int_a^b x\, dx \\
&= \frac{1}{l}\int_a^b x\, dx \\
&= \frac{1}{l}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b \\
&= \frac{1}{l}\frac{1}{2}(b^2-a^2) \\
&= \frac{1}{2l}(b^2-a^2)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2l}(b-a)\cdot(b+a)$$

Como $b-a=l$, temos:

$$\bar{x} = \frac{b-a}{2}$$

ou seja, $\bar{x}$ está sobre o ponto médio da barra.

Neste exemplo, fica claro que a localização do centro de massa em relação à barra não depende da posição da barra em relação à origem. Na prática, podemos sempre escolher a posição mais conveniente de forma a facilitar os cálculos.

Exemplo (ii):

Uma barra mede 6 m de comprimento. A densidade linear em um ponto qualquer da barra é proporcional à distância desse ponto a um ponto q, que está sobre o prolongamento da linha da barra, a uma distância de 3 m da mesma. Sabendo que na extremidade mais próxima a q, a densidade linear é 1 kg/m, determinar a massa e o centro de massa da barra.

Solução:

A Figura 6 mostra a barra localizada sobre o eixo dos x:

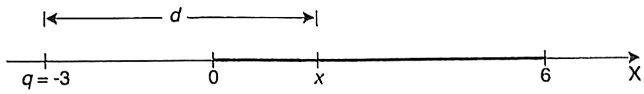

Figura 6

A distância de um ponto x da barra até q é dada por:

$$\begin{aligned} d &= x - (-3) \\ &= x + 3. \end{aligned}$$

Como a densidade é proporcional à distância d, temos:

$$\rho(x) = k(x+3),$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.
Como $\rho(0) = 1$ kg/m, substituindo na expressão anterior, vem:

$$1 = k(0+3) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}.$$

Portanto:

$$\rho(x) = \frac{1}{3}(x+3), \quad \forall x \in [0, 6].$$

A massa da barra é dada por:

$$m = \int_0^6 \rho(x)\, dx = \int_0^6 \frac{1}{3}(x+3)\, dx.$$

Resolvendo a integral:

$$m = \frac{1}{3}\int_0^6 (x+3)\, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_0^6$$

Substituindo os limites:

$$m = \frac{1}{3}\left[\frac{6^2}{2} + 3(6) - \left(\frac{0^2}{2} + 3(0)\right)\right] = \frac{1}{3}\,[18 + 18] = 12\,\text{kg}.$$

Centro de Massa

O centro de massa da barra é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^6 x\rho(x)\,dx = \frac{1}{12}\int_0^6 x\left(\frac{1}{3}(x+3)\right)\,dx.$$

Simplificando:

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}\int_0^6 x(x+3)\,dx = \frac{1}{36}\int_0^6 (x^2+3x)\,dx.$$

Resolvendo a integral:

$$\int_0^6 (x^2+3x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^6$$

Substituindo os limites:

$$\int_0^6 (x^2+3x)\,dx = \left[\frac{6^3}{3}+\frac{3(6^2)}{2}\right] - \left[\frac{0^3}{3}+\frac{3(0^2)}{2}\right] = 72+54 = 126.$$

Portanto:

$$\bar{x} = \frac{1}{36}\cdot 126 = 3.5\,\text{m}.$$

Assim, a massa da barra é 12 kg e o centro de massa está localizado a 3.5 m da extremidade esquerda.

Exemplo (iii):

Determinar o centro de massa de uma barra de 5 m de comprimento, sabendo que num ponto q, que dista 1 m de uma das extremidades, a densidade é 2 kg/m e que nos demais pontos ela é dada por $(2+d)$ kg/m, onde d é a distância até o ponto q.

Solução

Localizamos a barra sobre o eixo dos x como mostra a Figura 7:

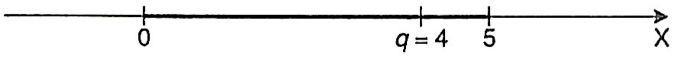

Figura 7

Podemos expressar a densidade da barra pela função:

$$\rho(x) = \begin{cases} 2, & x = 4, \\ 2+(4-x) = 6-x, & 0 \le x < 4, \\ 2+(x-4) = x-2, & 4 < x \le 5. \end{cases}$$

A massa da barra é dada por:

$$m = \int_0^5 \rho(x)\,dx = \int_0^4 (6-x)\,dx + \int_4^5 (x-2)\,dx.$$

Resolvendo as integrais:

$$\int_0^4 (6-x)\,dx = \left(6x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = (24-8) = 16,$$

$$\int_4^5 (x-2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_4^5 = \left(\frac{25}{2} - 10\right) - \left(\frac{16}{2} - 8\right) = 2.5.$$

Somando:

$$m = 16 + 2.5 = 18.5\,\text{kg}.$$

O centro de massa é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^5 x\rho(x)\,dx.$$

Resolvendo com os valores apropriados, podemos calcular o centro de massa.

Referências

Halliday, D.; Resnick, R.; Walker, J. Fundamentos de Física.