¡Tu podrías haber inventado el controlador PID!

por Rodrigo Aldana López

Contexto

La pandemia de COVID-19 ha resaltado la importancia de la educación en matemáticas en la población general, especialmente en la comprensión de sistemas dinámicos, como los utilizados para describir la propagación de enfermedades [1]. En este contexto, la teoría de control, esencial en la regulación de sistemas dinámicos y con aplicaciones principalmente en ingeniería, emerge como una herramienta potencial para mejorar el entendimiento sobre nuestras acciones (tanto individuales como colectivas) en la sociedad a nivel económico, ambiental y sanitario [2]. A pesar de esto, las herramientas matemáticas de la teoría de control son desconocidas para la mayoría de la población, incluso dentro del ámbito ingenieril. Por ello, en este ensayo, el autor pretende destacar cómo los conceptos matemáticos más básicos de la teoría de control podrían ser tan familiares e intuitivos que cualquiera podría haberlos deducido, si se utilizan con cuidado las herramientas didácticas apropiadas. El ensayo describe un hipotético experimento educativo donde un instructor guía a sus estudiantes a "reinventar" el controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), la estrategia de control más popular. Este ejercicio se aplica a un problema de ingeniería que consiste en ajustar la posición del cabezal de una impresora 3D en el lugar deseado. Este problema ha sido seleccionado tanto por la importancia de las impresoras 3D en el desarrollo de nuevas tecnologías hoy en día como por la simplicidad del ejemplo.

Problema de ingeniería a considerar

Para el ejercicio docente descrito anteriormente, se considera el sistema ilustrado en la Figura 1a, que representa un cabezal extrusor de una impresora 3D desplazándose unidireccionalmente a lo largo de un riel. Este sistema simula el proceso de posicionamiento preciso del cabezal para depositar material fundido en ubicaciones específicas, esencial para la impresión 3D. Aunque una impresora 3D típicamente utiliza tres rieles para movimientos tridimensionales, simplificamos el modelo a un solo riel para facilitar la comprensión y el análisis. El cabezal, equipado con un motor, se mueve a lo largo del riel, y un sensor registra la posición $x(t)$ del cabezal en todo momento. Ignorando la fricción entre el cabezal y el riel, la evolución de $x(t)$ se describe mediante la segunda ley de Newton:

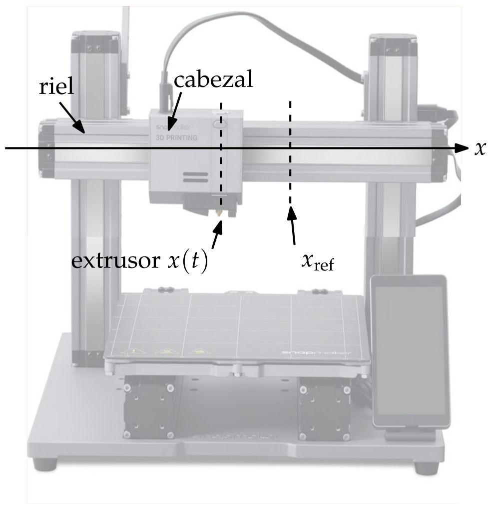
$$m\ddot{x}(t) = u(t) \tag{1}$$

donde m es la masa del cabezal y $u(t)$ es la fuerza ejercida por el motor para moverse sobre el riel, y $\ddot{x}(t)$ es la segunda derivada temporal de $x(t)$, o la aceleración. El desafío propuesto a los estudiantes es determinar cómo variar $u(t)$ para que $x(t)$ alcance una posición objetivo x_{ref}.

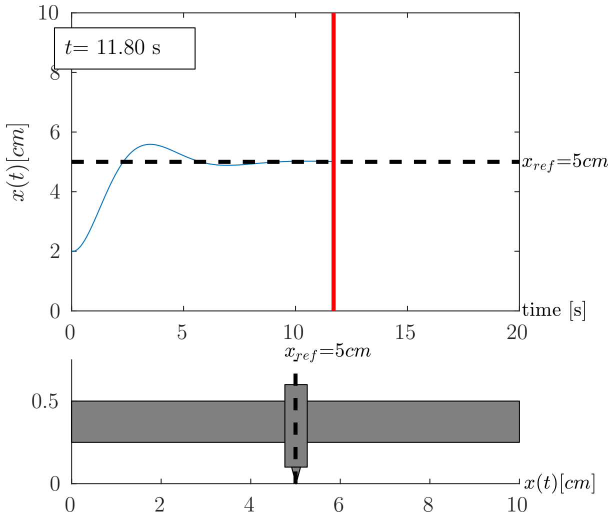
Entorno de simulación didáctico

Una solución posible para el problema anteriormente descrito es el uso de un controlador PID. En lugar de proveer las ecuaciones de un PID directamente a los alumnos, el papel del instructor en este ejercicio docente es el de apoyarse en la experimentación directa de los alumnos en el sistema (1). Esto puede realizarse mediante un entorno de simulación[1] en MATLAB, como se muestra en la Figura 1b. Dicho entorno incluye una animación en tiempo real del sistema, obtenida a partir de la simulación de (1), donde los estudiantes pueden *diseñar* la entrada $u(t)$

[1]El código del entrono de simulación listo para probar puede encontrarse en https://github.com/RodrigoAldana/PID_lecture



(a) Modelo de una impresora 3D. Su principal componente es un riel sobre un eje x, por el que se mueve un cabezal extrusor en una posición $x(t)$ para depositar material fundido. Se representa también una posición deseada x_{ref} para el extrusor.



(b) Ambiente de simulación para el sistema del cabezal moviéndose por un riel en la impresora 3D. Arriba se muestra la evolución temporal de la posición $x(t)$ del cabezal. Abajo se muestra una animación en movimiento del cabezal extrusor sobre el riel en tiempo real.

usando programación en MATLAB. Esto permite experimentar con el sistema directamente, fomentando una discusión activa sobre cuál debería ser la forma correcta de $u(t)$ en términos de la posición actual y la deseada.

Una posible solución inicial se puede construir apelando a la intuición: aplicar fuerza en dirección opuesta si el cabezal se encuentra más allá de la posición deseada, formalizado como:

$$\text{si } x(t) > x_{\text{ref}}, \text{ entonces } u = -c,$$
$$\text{si } x(t) \leq x_{\text{ref}}, \text{ entonces } u = c,$$

donde c es una constante (por ejemplo, la fuerza máxima del motor). Esta aproximación intuitiva revela rápidamente a los estudiantes el potencial de inestabilidad, ya que este controlador produce oscilaciones con amplitud creciente, cuyo efecto puede ser catastrófico para la aplicación.

A través de distintos experimentos en el sistema, se pueden identificar distintos principios:

1. El control $u(t)$ debe usar información de $x(t)$ para poder alcanzar la referencia (*feedback*).
2. El control $u(t)$ debe actuar para penalizar el error respecto a la referencia, con el signo contrario para contrarrestar su efecto.
3. La penalización del error debe ser proporcionalmente pequeña si el error es pequeño, para evitar oscilaciones no deseadas.
4. Las oscilaciones pueden ser evitadas si se penaliza también la velocidad $\dot{x}(t)$, penalizando así un exceso de movimiento.
5. Para evitar transitorios muy largos antes de alcanzar la referencia, o con sobre saltos muy grandes, se puede penalizar el error acumulado hasta el momento (la integral del error).

Últimamente, a partir de estos principios que pueden ser obtenidos empíricamente uno a uno, el instructor es capaz de llevar a los alumnos gradualmente a la forma final del controlador PID:

$$u(t) = -k_P x(t) - k_D \dot{x}(t) - k_I \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2}$$

donde las constantes k_P, k_D, k_I dictan distintos comportamientos sobre los que se puede experimentar.

Conclusión

El autor enfatiza que, mediante ejercicios didácticos como el descrito, los estudiantes pueden aprender de manera interactiva y práctica conceptos esenciales de matemáticas y sistemas dinámicos, aplicándolos al problema ingenieril sobre el control de la posición del cabezal de una impresora 3D. En este ejemplo concreto, utilizando la experimentación directa con el sistema, es posible que cualquiera pueda utilizar su intuición para "reinventar" el controlador PID. Esta experiencia directa promueve una comprensión intuitiva de los principios y las herramientas matemáticas de la teoría de control.

Referencias

[1] G. Stewart, K. van Heusden, and G. A. Dumont, "How control theory can help us control Covid-19," *IEEE Spectrum*, vol. 57, no. 6, pp. 22-29, 2020. DOI: 10.1109/MSPEC.2020.9099929.

[2] A. M. Annaswamy, K. H. Johansson, and G. J. Pappas, "Control for Societal-scale Challenges: Road Map 2030," IEEE Control Systems Society Publication, 2023. [Online]. Available: https://ieeecss.org/control-societal-scale-challenges-roadmap-2030.