Modelo Neo Keynesiano

Rodrigo Beltrán Moreira

1. Matemática

1.1. Log-Linealizar

1.1.1. Encuentre la log-linealización de Q_t

La forma de Q_t es el precio de un bono que paga 1 en el siguiente período a una tasa i_t. Matemáticamente sería de la forma:

$$
\begin{aligned}
Q_t &= \frac{B_{t+1}}{(1+i_t)} \\
Q_t &= \frac{1}{(1+i_t)} \quad /log() \\
log(Q_t) &= log(1) - log(1+i_t) \\
log(Q_t) &= -log(1+i_t) \\
log(Q_t) &= -i_t \quad /d() \\
q_t &= -\tilde{i_t}
\end{aligned}
$$

Notar que $log(1+i_t) \approx i_t$. Con lo que se encuentra la relación entre Q_t con la tasa de interés

1.1.2. Log-linealice la ecuación de Euler

Se procede aplicando logaritmo a la ecuación, para continuar aplicando su diferencial de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
Q_t &= \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \quad /log \\
log(Q_t) &= log(\beta) + \mathbb{E}_t \left[-\sigma(log(C_{t+1}) - log(C_t) - log\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \right]
\end{aligned}
$$

Sabemos que: $log(Q^*) = -i^*$. Luego, reemplazando y posteriormente aplicando una Aproximación de Taylor:

$$
\begin{aligned}
-i_t &= log(\beta) + \mathbb{E}_t\left[-\sigma(log(C_{t+1}) - log(C_t)) - \pi_{t+1}\right] \\
-(\cancel{i^*} + (i_t - \cancel{i^*}) &= log(\beta) + \mathbb{E}_t\left[-\sigma\left(\cancel{C^*} + \frac{C_{t+1} - C^*}{C^*} - \cancel{C^*} - \frac{C_t - C^*}{C^*}\right) - \pi_{t+1}\right] \\
-i_t &= log(\beta) + \sigma c_t - \sigma \mathbb{E}_t c_{t+1} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \\
\sigma c_t &= -i_t - \cancelto{\rho}{log(\beta)} + \sigma \mathbb{E}_t c_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \quad / \cdot \frac{1}{\sigma} \\
c_t &= \mathbb{E}_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \rho)
\end{aligned}
$$

Notar que $log(1+i_t) \approx i_t$, $log(1+\pi_t) \approx \pi_t$, $\rho = -log\beta$, y que además, al realizar las expansiones de Taylor sobre las variables, notar que para i_t no se expresa en términos de su desvío y que al evaluar π_t en su estado estacionario, este es igual a 0.

1.1.3. Asuma $D_t = 1$, log-linealiza la demanda por trabajo

Se procede aplicando logaritmo y luego aplicando diferencial:

$$
\begin{aligned}
N_t &= \frac{Y_t}{A_t} D_t \\
N_t &= \frac{Y_t}{A_t} \\
log(N_t) &= log(Y_t) - log(A_t) \quad /d() \\
dlog(N_t) &= dlog(Y_t) - dlog(A_t) \\
n_t &= y_t - a_t
\end{aligned}
$$

1.1.4. Divide la ecuación de nivel de precio por P_{t-1} y log-linealiza. ¿Por qué es importante realizar este paso, qué variable relevante encuentras?

Se lineariza y se aplica expansión de Taylor en torno a el estado estacionario de las variables, obteniendo lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
P_t &= [\theta P_{t-1}^{1-\epsilon} + (1-\theta)(P_t^*)^{1-\epsilon}]^{(\frac{1}{1-\epsilon})} \quad / \cdot \frac{1}{P_{t-1}} \\
\frac{P_t}{P_{t-1}} &= \frac{[\theta P_{t-1}^{1-\epsilon} + (1-\theta)(P_t^*)^{1-\epsilon}]^{(\frac{1}{1-\epsilon})}}{P_{t-1}} \quad /()^{1-\epsilon} \\
\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon} &= \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\epsilon} \\
(\pi_t + 1)^{1-\epsilon} &= \theta + (1-\theta)\,(1+\pi_t^*)^{1-\epsilon} \quad /d() \\
(\pi^* + 1) + (1-\epsilon)(1+\pi_t^*)^{-\epsilon}(\pi_t - \pi^*) &= \theta + (1-\theta)((1-\epsilon)(1+\pi_t^*)^{-\epsilon}(\pi_t^* - \pi^*) + (1+\pi^*)) \\
1 + \pi_t &= \theta + (1-\theta)\pi_t^* + 1 - \theta \\
\pi_t &= (1-\theta)\pi_t^*
\end{aligned}
$$

Donde la inflación en estado estacionario es 0, y cuando se evalúan los precios en estado estacionario, estos son los mismos, es decir $P_t^* = P_{t-1}$, con lo que se puede reduce el término $\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}^*}\right)^{-\epsilon}$

La relevancia de hacer la log-linealización es encontrar la relación entre la inflación y los precios que fijan las empresas, al dar la posibilidad a las empresas intermedias el poder de período a período el poder cambiar sus precios, con lo que puede ir variando la inflación en distintos puntos del tiempo.

1.1.5. Para la ecuación del productor intermedio:

Se aplica derivada total a la expresión:

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \mathbb{E}_t \left\{ \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right) - \mathcal{M}MC_{t+k} \right\} \quad /d()$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \mathbb{E}_t \left\{ \left(\frac{1}{P*} dP_t^* - \frac{P^*}{P^{2*}} dP_{t+k} \right) - \hat{m}c_{t+k} \right\}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \mathbb{E}_t \left\{ (p_t^* - p_{t+k}) - \hat{m}c_{t+k} \right\}$$

Con esto, se pasa a encontrar una expresión para p_t^*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k p_t^* = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \mathbb{E}_t \left\{ p_{t+k} + \hat{m}c_{t+k} \right\}$$

Donde $\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k} = (1 - \theta\beta)$ es una progresión geométrica, con lo que queda:

$$p_t^* = (1 - \theta\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \mathbb{E}_t \left\{ p_{t+k} + \hat{m}c_{t+k} \right\}$$

Con esto obtenemos una representación de p_t^*, y para p_{t+1}^* sería de la forma:

$$p_{t+1}^* = (1 - \theta\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \mathbb{E}_{t+1} \left\{ p_{t+k+1} + \hat{m}c_{t+k+1} \right\}$$

Pero aplicando esperanza en t:

$$\mathbb{E}_t p_{t+1}^* = (1 - \theta\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k \mathbb{E}_t \left[\mathbb{E}_{t+1} \left\{ p_{t+k+1} + \hat{m}c_{t+k+1} \right\} \right]$$

Por ley de expectativas iteradas, $\mathbb{E}_t[\mathbb{E}_{t+1} \{\dots\}] = \mathbb{E}_t \{\dots\}$, con lo que se obtiene:

$$\mathbb{E}_t p^*_{t+1} = (1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k \mathbb{E}_t\left\{p_{t+k+1} + \hat{mc}_{t+k+1}\right\}$$

Desarrollando entonces p^*_t se tiene:

$$\begin{aligned}
p^*_t &= (1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k \mathbb{E}_t\left\{p_{t+k} + \hat{mc}_{t+k}\right\} \\
p^*_t &= (1-\theta\beta)(\hat{mc}_t + p_t) + (1-\theta\beta)\sum_{k=1}^{\infty}(\theta\beta)^k \mathbb{E}_t\left\{p_{t+k} + \hat{mc}_{t+k}\right\} \\
p^*_t &= (1-\theta\beta)(\hat{mc}_t + p_t) + (1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^{k+1} \mathbb{E}_t\left\{p_{t+k+1} + \hat{mc}_{t+k+1}\right\} \\
p^*_t &= (1-\theta\beta)(\hat{mc}_t + p_t) + (\theta\beta)\underbrace{(1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k \mathbb{E}_t\left\{p_{t+k+1} + \hat{mc}_{t+k+1}\right\}}_{\mathbb{E}_t p^*_{t+1}} \\
p^*_t &= (1-\theta\beta)(\hat{mc}_t + p_t) + \theta\beta\mathbb{E}_t p^*_{t+1}
\end{aligned}$$

El paso para obtener la expresión de p^*_{t+1} es importante aplicar expectativas iteradas, la cual indica que la mejor predicción actual de la mejor predicción futura de una realización de una variable no es más que la mejor predicción actual de dicha variable. El paso es fundamental ya que el modelo queda en función de los costos marginales y precios en t, más una expectativa de los precios al período siguiente, ya que la firma su mejor reacción es ir prediciendo solo sus precios óptimos, al ya conocer sus costos y precios en t, y no tiene que hacer predicciones para una suma de períodos continuos hacia el infinito.

- **Comente**: Independiente de la probabilidad de cambiar precios. El supuesto de competencia monopolística ya de por sí presenta una fricción monetaria en la economía.

  La competencia monopolística, en el modelo, viene representada por el $\varepsilon > 1$, es decir, la sustitución imperfecta entre las firmas productoras intermedias producen fricciones de precio a la que se enfrentan los productores finales. Este es el poder de mercado que tiene cada productor intermedio que le permite cobrar precios no óptimos por su producto, el que produce ganancias a estas firmas y finalmente fricciones monetarias en el modelo.

1.1.6. Log-linealiza el resto de las ecuaciones.

La primera ecuación quedaría:

$$y_t = c_t$$

Para la ecuación 2 queda de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{N_t^{\varphi}}{C_t^{-\sigma}} &= \frac{W_t}{P_t} \quad /log() \\
\varphi log(N_t) - \sigma log(C_t) &= log(W_t) - log(P_t) \quad /d() \\
\varphi n_t + \sigma c_t &= w_t - p_t
\end{aligned}$$

Para la ecuación de los costos marginales queda de la forma:

$$\begin{aligned}
MC_t &= \frac{W_t}{P_t A_t} \quad /log() \\
log(MC_t) &= log(W_t) - log(P_t) - log(A_t) \quad /d() \\
mc_t &= w_t - p_t - a_t
\end{aligned}$$

1.2. Reducción de Ecuaciones

1.2.1. Reduce tu sistema de ecuaciones log-linealizado en la sub-sección anterior

Empezaremos con la ecuación 1. Sabemos del ítem anterior (1.1.2) que:

$$c_t = \mathbb{E}_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \rho)$$

Además, sabemos también que:

$$y_t = c_t$$

Reemplazando tenemos que:

$$\boxed{y_t = \mathbb{E}_t y_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \rho)}$$

En la ecuación 2, para encontrar la representación de p_t^* y p_{t+1}^* se toma la ecuación de precios y se resuelve de la forma:

$$\begin{aligned}
P_t &= [\theta P_{t-1}^{1-\epsilon} + (1-\theta)(P_t^*)^{1-\epsilon}]^{(\frac{1}{1-\epsilon})} \quad /()^{1-\epsilon} \\
P_t^{1-\epsilon} &= \theta P_{t-1}^{1-\epsilon} + (1-\theta)(P_t^*)^{1-\epsilon} \quad /d() \\
\cancelto{1}{(1-\epsilon)}\cancelto{1}{(P_t^*)^{-\epsilon}} p_t &= \cancelto{1}{(1-\epsilon)}\theta\cancelto{1}{(P_t^*)^{-\epsilon}} p_{t+1} + (1-\theta)\cancelto{1}{(1-\epsilon)}\cancelto{1}{P_t^{-\epsilon}} p_t^* \\
p_t &= \theta p_{t-1} + (1-\theta) p_t^* \\
p_t^* &= \frac{p_t - \theta p_{t-1}}{(1-\theta)} \rightarrow p_{t+1}^* = \frac{p_{t+1} - \theta p_t}{(1-\theta)}
\end{aligned}$$

Esto porque en estado estacionario, $P_t^* = P_{t+1}^*$. Entonces, obtenemos las expresiones para p_t^* y p_{t+1}^*

$$p_t^* = \frac{p_t - \theta p_{t-1}}{(1-\theta)} \rightarrow p_{t+1}^* = \frac{p_{t+1} - \theta p_t}{(1-\theta)}$$

Aplicando esto en (1.1.5.c):

$$\begin{aligned}
p_t^* &= (1-\theta\beta)(\hat{mc}_t + p_t) + \theta\beta\mathbb{E}_t p_{t+1}^* \\
\frac{p_t - \theta p_{t-1}}{(1-\theta)} &= (1-\theta\beta)\hat{mc}_t + (1-\theta\beta)p_t + \theta\beta\mathbb{E}_t\left(\frac{p_{t+1} - \theta p_t}{(1-\theta)}\right) \quad /(1-\theta) \\
p_t - \theta p_{t-1} &= (1-\theta)(1-\theta\beta)\hat{mc}_t + (1-\theta\beta)(1-\theta)p_t + \mathbb{E}_t p_{t+1} \\
p_t - \theta p_{t-1} &= (1-\theta)(1-\theta\beta)\hat{mc}_t + [p_t - \theta p_t - \theta\beta p_t + \theta^2\beta p_t] - \theta^2\beta p_t + \mathbb{E}_t p_{t+1}
\end{aligned}$$

Simplificando y reordenando nos queda:

$$\theta p_t - \theta p_{t-1} = (1-\theta)(1-\theta\beta)\hat{mc}_t + \beta\theta\mathbb{E}_t[p_{t+1} - p_t] \quad / \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$\boxed{\pi_t = \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)\hat{mc}_t}{\theta} + \beta\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]}$$

Y finalmente, para la ecuación 3 sabemos del enunciado que:

$$\frac{N_t^{\varphi}}{Y_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t}$$

Ademas sabemos que $N_t = \frac{Y_t}{A_t}$. Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{\varphi}}{Y_t^{-\sigma}} &= \frac{W_t}{P_t} \quad /log() \\
\varphi log(Y_t) - \varphi log(A_t) + \sigma log(Y_t) &= log(W_t) - log(P_t) \quad /d() \\
\varphi y_t - \varphi a_t + \sigma y_t &= w_t - p_t \\
w_t &= \varphi y_t - \varphi a_t + \sigma y_t + p_t
\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que:

$$mc_t = w_t - p_t - a_t$$

Reemplazando el w_t encontrado anteriormente:

$$mc_t = \varphi y_t - \varphi a_t + \sigma y_t + p_t - p_t - a_t$$

$$\boxed{mc_t = (\varphi + \sigma)y_t - (1+\varphi)a_t}$$

1.2.2. Itera hacia adelante la curva de Phillips. Luego responde el siguiente comente.

Comente: Si las empresas esperan que los márgenes comerciales promedio estén por debajo de su nivel de estado estacionario, aquellas empresas que ajustan eligen un precio por encima del precio promedio de la economía, pues la inflación es totalmente forward-looking.

Iterando hacia adelante la curva de Phillips queda de la forma:

$$\pi_{t+1} = \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)\hat{mc}_{t+1}}{\theta} + \beta\mathbb{E}_t[\pi_{t+2}]$$

La afirmación sería correcta, ya que las empresas cuando cambian sus precios, saben que no hay certeza en el futuro de que vuelvan a cambiar los precios, por lo que pueden preferir aumentar ahora sus precios por no saber si en el futuro lo cambiarán nuevamente. Esto lleva a que las empresas, ante la expectativa negativa de los márgenes comerciales, eleven sus precios a niveles no óptimos para escudarse de potenciales pérdidas futuras.

2. Dynare

2.1. 1.

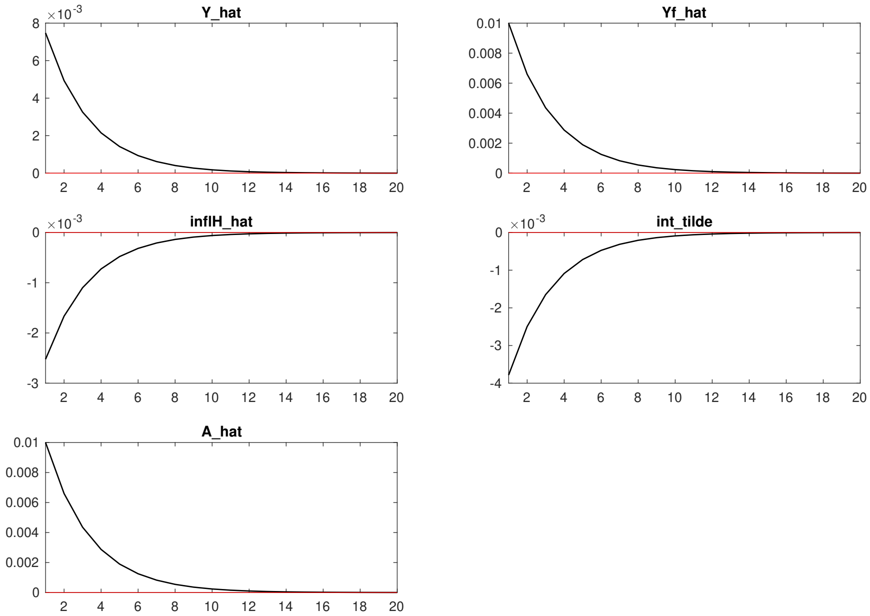
Las ecuaciones se resumen en la siguiente tabla:

Ecuaciones	Descripción
$y_t = \mathbb{E}\left[y_{t+1}\right] - \frac{1+\alpha(\omega-1)}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - \mathbb{E}[\pi_{H,t+1}]\right)$	Ecuación IS
$\pi_{H,t} = \kappa(\sigma_\alpha + \varphi)(y_t - y_t^f) + \beta\mathbb{E}[\pi_{H,t+1}]$	Curva de Phillips
$\tilde{i}_t = \phi_\pi \pi_{H,t}$	Tasa de interés
$a_t = \phi_a a_{t-1} + \epsilon_t^a$	Shock de Productividad
$(\sigma_\alpha + \varphi)y_t^f = (1+\varphi)a_t$	Producto sin fricciones

Fuente: Elaboración Propia

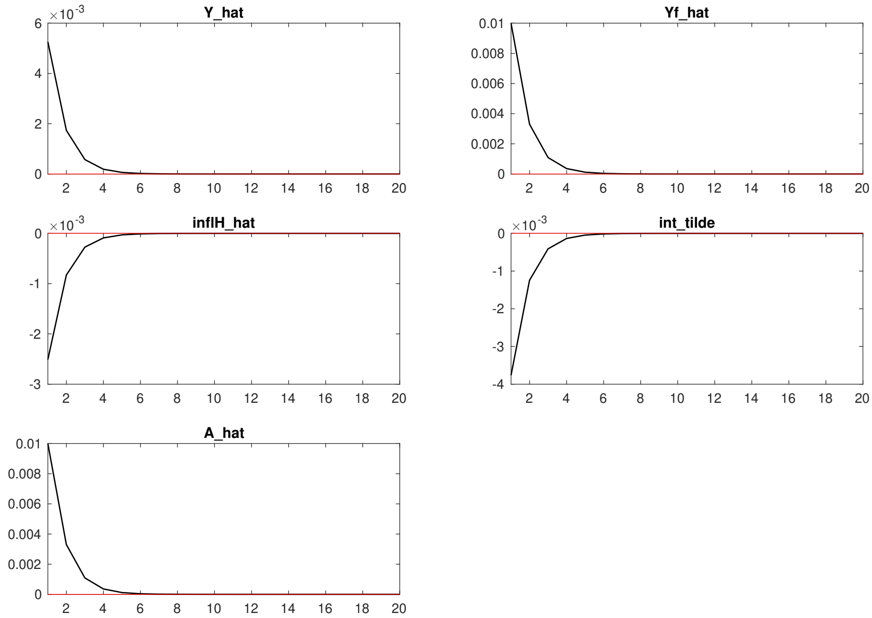
La IS representa la relación negativa entre el producto y la tasa de interés de la economía, la Curva de Phillips es el *trade-off* entre inflación y el Producto sin Fricciones que muestra la relación positiva entre el producto sin fricciones y la productividad, indicando que la única forma de que este aumente es por aumentos en la productividad (notar que no es lo mismo un aumento en el producto sin fricciones y el producto).

2.2. 2. IRF



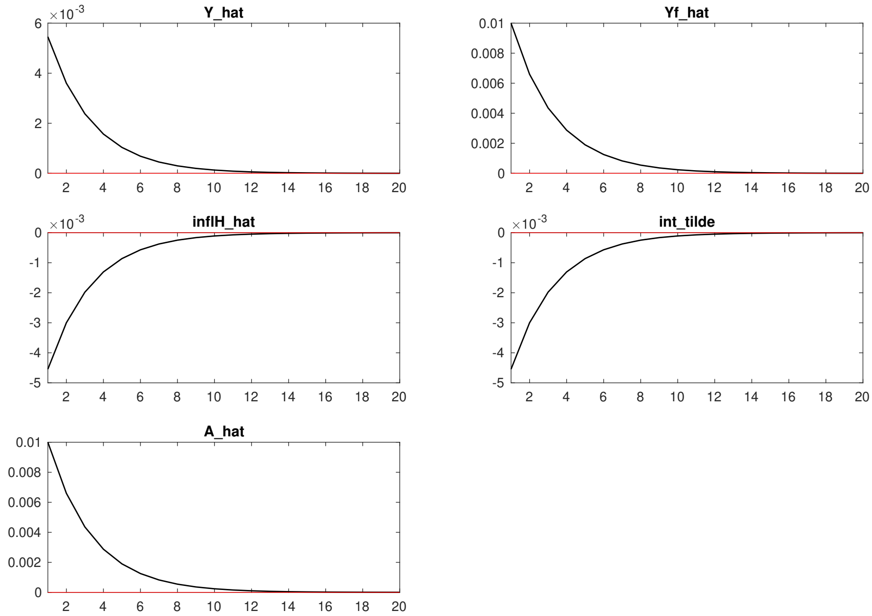
Observamos que un shock positivo de productividad en el sistema, hace que las personas quieran trabajar más, y las firmas al tener mayor productividad pueden bajar los precios, haciendo que caiga la inflación. El Banco Central también toma parte en este shock de productividad, al reducir en parte la tasa de interés nominal, para ya luego absorbido este shock ir subiendo la tasa a su estado de equilibrio.Los hogares perciben mayores ingresos y adquieren mayor poder adquisitivo, consumiendo mayor cantidad de productos, haciendo que el PIB aumente. Vemos que este shock de productividad es persistente por aproximadamente 8 períodos mientras va decreciendo, hasta alcanzar el nivel de equilibrio en estado estacionario donde el sistema absorbe este shock productivo integrándolo como la nueva “normalidad”.

2.3. 3.



Al cambiar el parámetro que acompaña a la ecuación AR(1) de la productividad, las conclusiones en general son las mismas al haber un shock de productividad en el sistema, explicado en la pregunta previa. La diferencia es que el parámetro al ser más pequeño, este afecta el nivel de persistencia del efecto, haciendo que se diluya mucho más rápido.

2.4. 4.



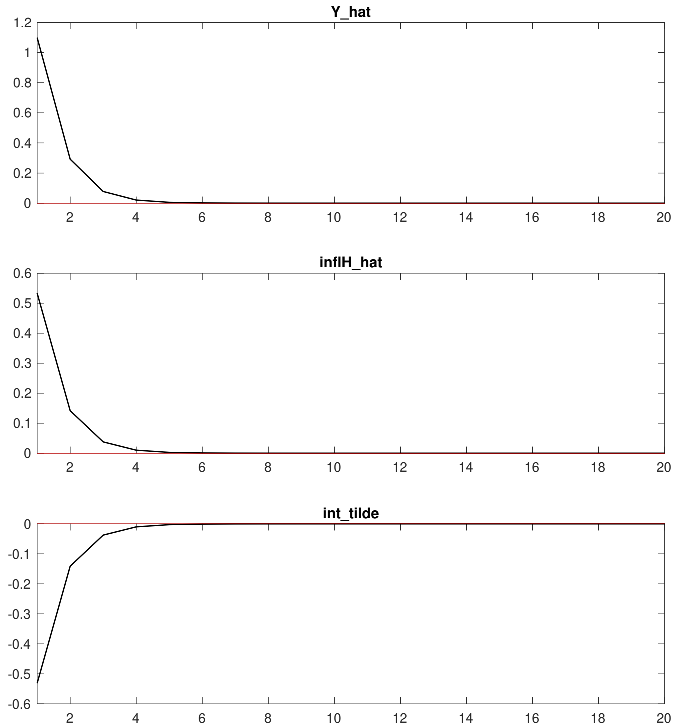
Esta nueva tasa de interés - que sufre una caída mayor al caso anterior - produce efectos en el producto y en la inflación mayores al anterior, por el mismo mecanismo pero en mayor nivel. Esto quiere decir que, aumentos en productividad incentivan a trabajar más, y las firmas más productivas pueden bajar los precios y hacer caer la inflación. Al caer más la tasa de interés (que en el caso anterior), los hogares consumen más y por tanto aumentan el producto más con esta nueva tasa de interés de Banco Central. Este efecto tiene la misma persistencia, es decir, 8 períodos. En este sentido, los shocks de productividad tienen efectos positivos para los hogares, pero la nueva tasa de interés puede ser contraproducente para shocks negativos. El Banco Central debe tener mecanismos para contrarrestar las caídas en productividad y su efecto en la economía que serían más altas que en el caso anterior

2.5. 5.

Se pide representar un shock de política monetaria negativa AR(1) persistente, para esto, se representará la tasa de interés como una regla de Taylor de la forma:

$$\tilde{i}_t = \rho_{i_t}\tilde{i}_{t-1} + (1-\rho_{i_t})(\phi_\pi \pi_t + \phi_y(y_t - y_t^f)) - \varepsilon_t^{i_t}$$

El cual es de la forma que se vió en el apunte de la clase de modelo Neo-Keynesiano. Para los parámetros ρ_{i_t} y ϕ_y, se usará la calibración propuesta por Galí (2015), con lo que $\rho_{i_t} = 0{,}5$ y $\phi_y = 0{,}125$. Así, obtenemos los siguientes IRFs:



Una caída de la tasa de política monetaria, ayuda a impulsar un crecimiento del producto por el aumento del consumo de los hogares. Esto puede ser, por ejemplo, por el acceso a un endeudamiento más barato por parte de los hogares, que valoran más el consumo presente. Al subir la demanda esto conlleva a un incremento en los precios de la economía, haciendo que el Banco Central deba ajustar la tasa de interés, aumentándola, para así poder controlar la inflación que estaba al alza.

Referencias

[1] Galí, J. (2015). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and Its Applications Second edition.* Number 10495 in Economics Books. Princeton University Press.