







Data Science Academy

# Seja muito bem-vindo(a)!







### Data Science Academy

Machine Learning - Regressão







# Data Science Academy

O que é Regressão?



#### Aprovação de Crédito de um Indivíduo

Atributo	Valor
Sexo	Masculino
Idade	34
Salário Mensal	R\$ 18.000,00
Anos no Emprego Atual	3
Anos de Residência	7
Saldo Bancário	R\$ 32.671 <mark>,9</mark> 4

#### Classificação

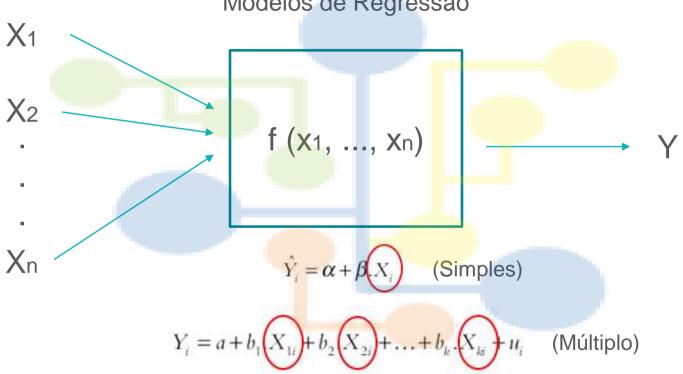
• Decisão de crédito (Sim/Não)

### Regressão

Quantidade de crédito (dinheiro)



#### Modelos de Regressão





Uma variável independente x, explica a variação em outra variável, que é chamada variável dependente y. Este relacionamento existe em apenas uma direção:

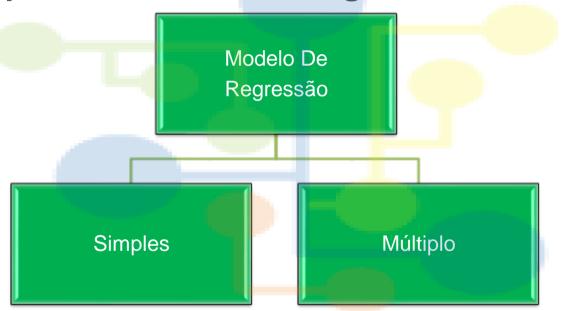
variável independente (x) -> variável dependente (y)



Análise de regressão é uma metodologia estatística que utiliza a relação entre duas ou mais variáveis quantitativas de tal forma que uma variável possa ser predita a partir de outra.



### Tipos de Modelos de Regressão Linear



- 1 Variável Dependente Y
- 1 Variável Independente X
- 1 Variável Dependente Y
- 2 ou + Variáveis Independentes X, X<sub>i</sub>



# A análise de regressão compreende quatro tipos básicos de modelos:

Linear Simples

Linear Múltiplo

Não Linear Simples Não Linear Múltiplo



Regressão Linear Simples

Regressão Linear Múltipla Regressão Logística



### Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?



Prever a população futura de uma cidade simulando a tendência de crescimento da população no passado

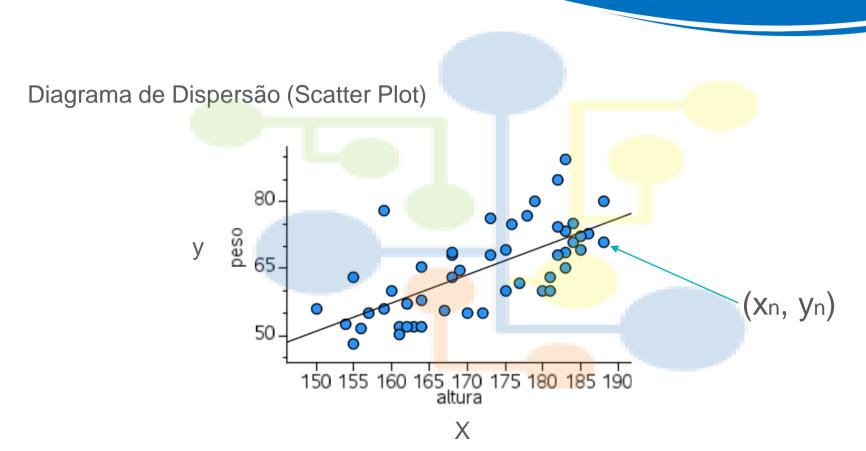


### Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?

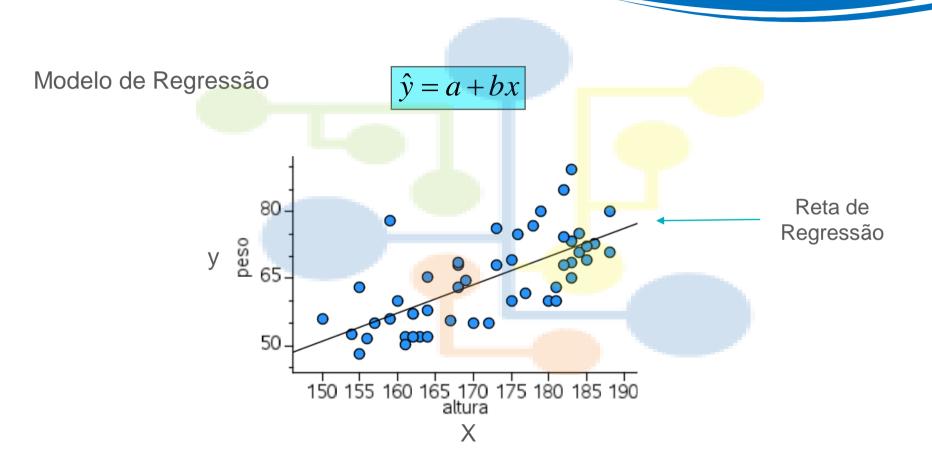


Produtividade (Y) de uma área agrícola é alterada quando se aplica certa quantidade (X) de fertilizante sobre a terra

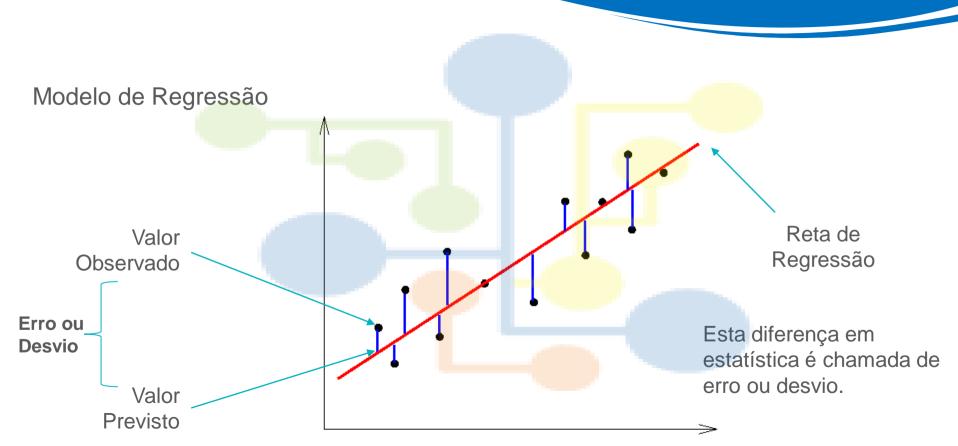














$$\hat{y} = a + bx$$

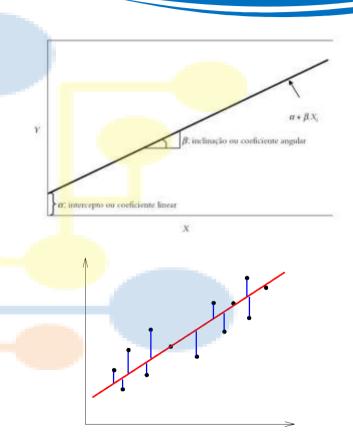
#### Onde:

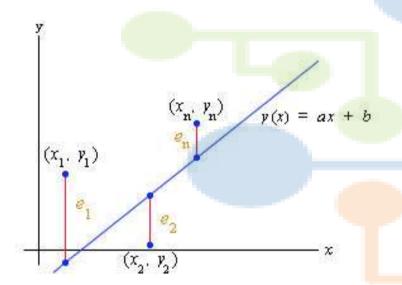
 $\hat{y}$  = valor previsto de y dado um valor para x

 $\dot{\mathbf{x}}$  = variável independente

a = ponto onde a linha intercepta o eixo y

b = inclinação da linha reta

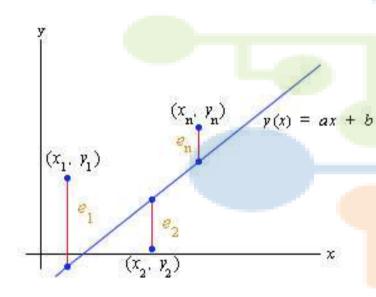




#### Método dos Mínimos Quadrados

Esse método definirá uma reta que minimizará a soma das distâncias ao quadrado entre os pontos plotados (X, Y) e a reta (que são os valores previstos de X',Y').

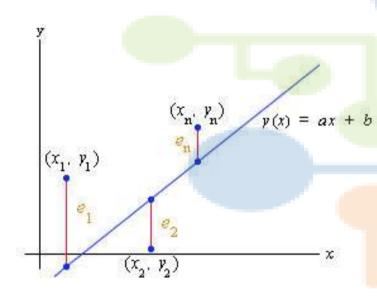




Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação





#### Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação



# Coeficiente de Correlação

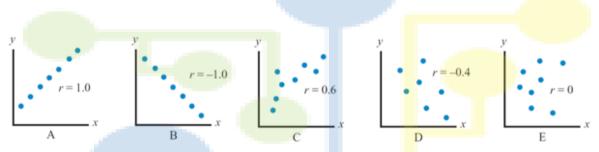


Gráfico A (r = 1.0): correlação positiva perfeita entre x = y

Gráfico B (r = -1.0): correlação negativa perfeita entre x e y

Gráfico C (r = 0.6): relação positiva moderada: y tende a aumentar se x aumenta, mas não

necessariamente na mesma taxa observada no Gráfico A

Gráfico D (r = -0.4): relação negativa fraca: o coeficiente de correlação é próximo de zero ou

negativo: y tende a diminuir se x aumenta

Gráfico E (r = 0): Sem relação entre x e y

Os valores de r variam entre -1.0 (uma forte relação negativa) até +1.0, uma forte relação positiva.



# Coeficiente de Correlação

O coeficiente de determinação indica o quanto a reta de regressão explica o ajuste da reta, enquanto que o coeficiente de correlação deve ser usado como uma medida de força da relação entre as variáveis



- Soma Total dos Quadrados (STQ) Mostra a variação em Y em torno da própria média.
- Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.
- Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

$$STQ = SQR + SQU$$

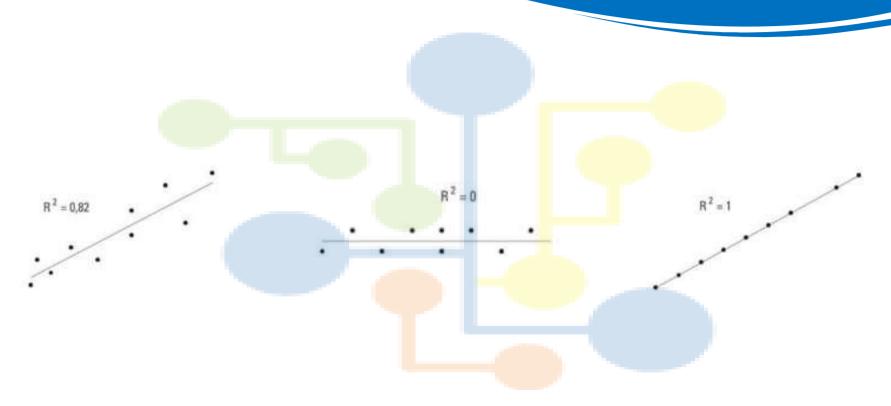


# Nossa próxima etapa é compreender o poder explicativo do modelo de regressão

Coeficiente de Ajuste R<sup>2</sup>

$$R^2 = \frac{SQR}{SQR + SQU} = \frac{SQR}{SQT}$$







O coeficiente de ajuste R2 não diz aos analistas se uma determinada variável explicativa é estatisticamente significante e se esta variável é a causa verdadeira da alteração de comportamento da variável dependente.





**Data Science Academy** 

Avaliando o Modelo de Regressão





### Típicos problemas que podem ser resolvidos com Regressão

- Quantos computadores serão vendidos no próximo mês?
- Quantas pessoas vão acessar nosso web site na próxima semana?
- Qual o salário de uma pessoa de acordo com a performance escolar?
- Qual o total de vendas relacionado ao número de seguidores em redes sociais?





Data Science
Academy

Número de Funcionários Por Turno	Número de Seguidores nas Redes Sociais	Preço da Matéria-Prima (R\$)	Cotação do Dólar	Total de Vendas (R\$)
1400	54000	5000	3.44	1245900
1359	55000	5400	3.12	1302763
1402	55430	5300	3.50	1345119

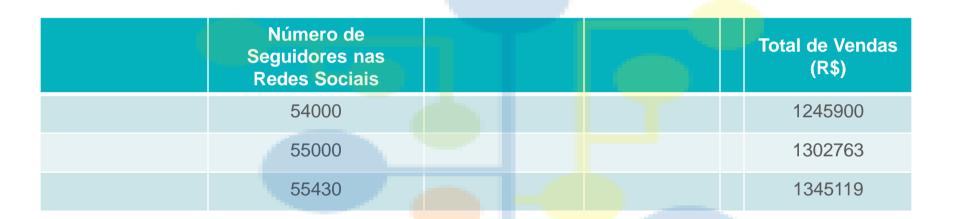
Atributos ou Features

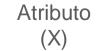








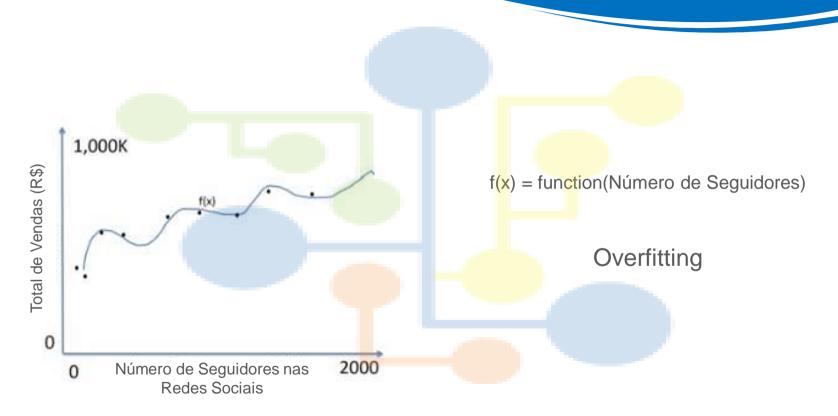




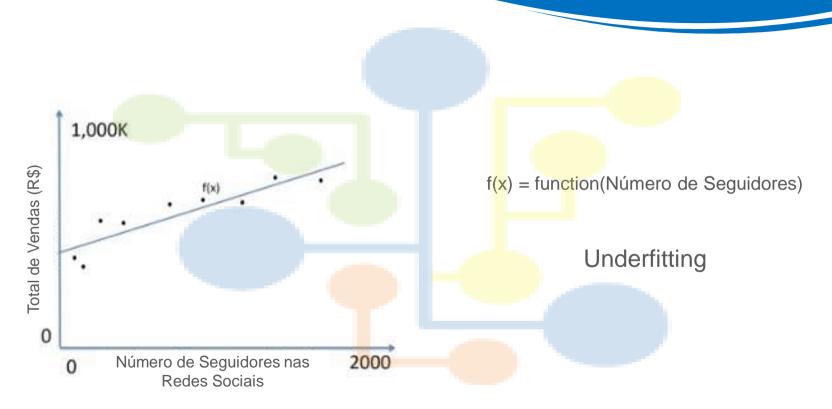






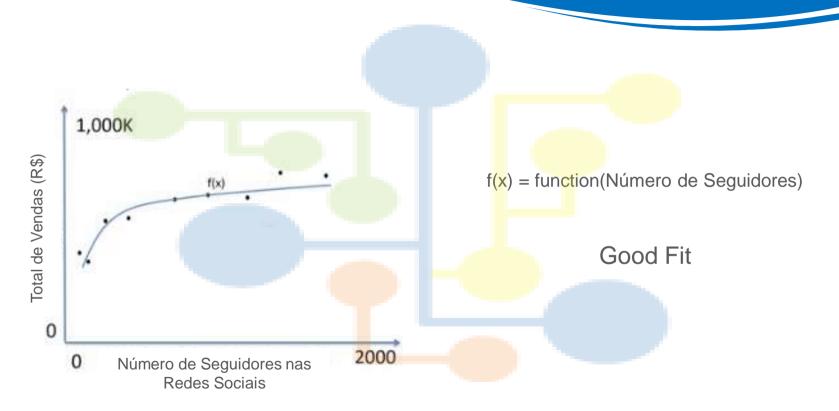




















Total de Vendas (R\$)	Total de Vendas Previsto (R\$)
1245900	1278450
1302763	1302763
1345119	1320876

Variável Resposta (y) Previsão f(x)





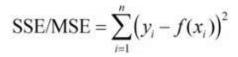
## $y_i - f(x_i)$

$$| f(x_i) - y_i |$$

$$(y_i - f(x_i))^2$$

Metodo dos Minimos				
Quadrados				
(Least Square Error)				

Total de Vendas (R\$)		Total de Vendas Previsto (R\$)
	1245900	1278450
	1302763	1334789
	1345119	1320876



Mean absolute error (MAE)= $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|$ 

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2}$$





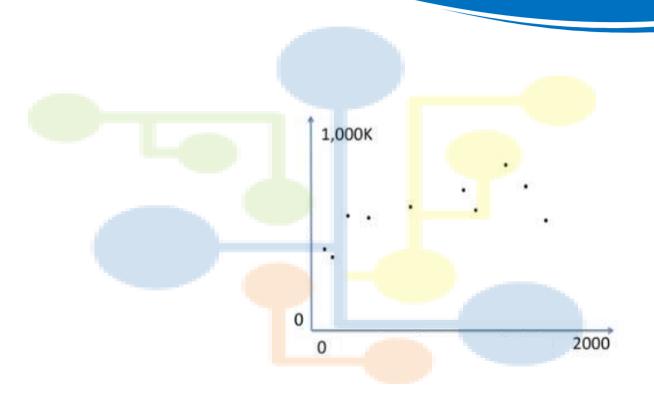


- (SST Sum Square Total) Soma Total dos Quadrados (STQ) Mostra a variação em Y em torno da própria média.
- (SSR Sum Square Regression) Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) – Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.
- (SSE Sum Square Error) Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) –
   Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

$$SST = SSE + SSR$$

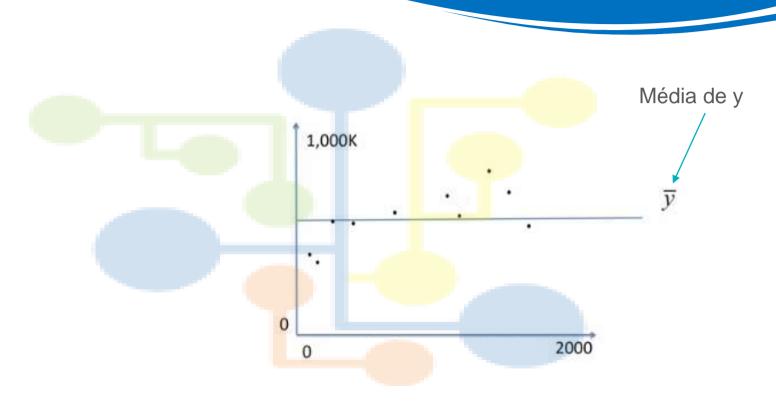












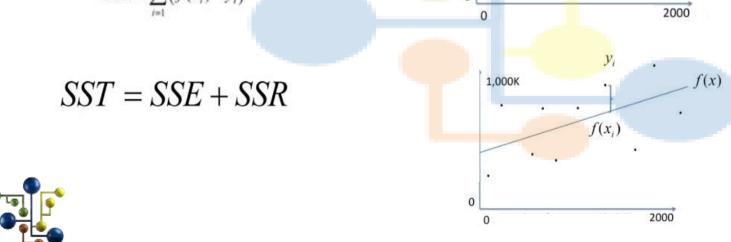


1,000K

 $f(x_i)$ 

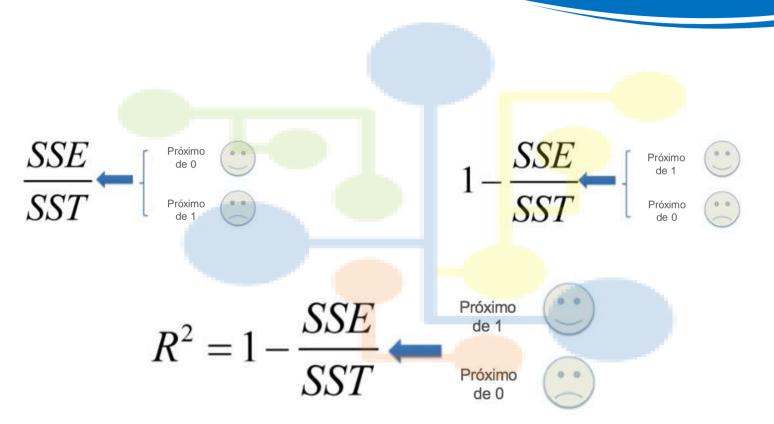


# $SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ $SSR = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \overline{y})^2$ $SSE = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$













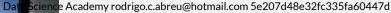
## SST = SSE + SSR

Se o SSR é alto e o SSE é baixo, o Modelo de Regressão explica bem a variação nas previsões

Se o SSR é baixo e o SSE é alto, o Modelo de Regressão não explica bem a variação nas previsões

- SSR = medida da variação que pode ser explicada
- SSE = medida da variação que não pode ser explicada
- SST = medida da variação total









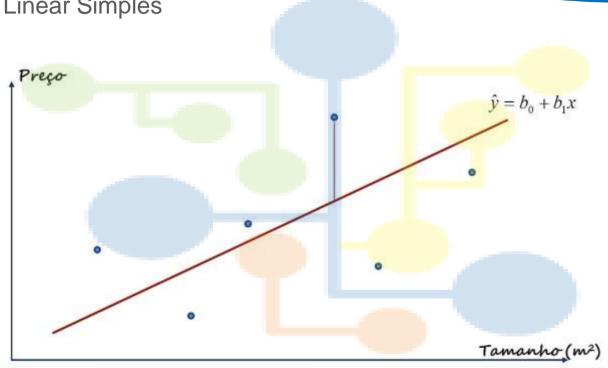
# Data Science Academy

Regressão Linear Simples

Regressão Linear Múltipla

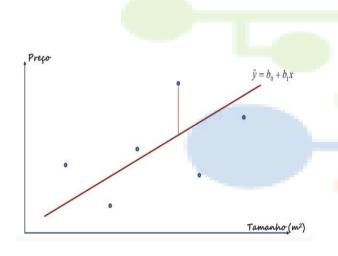








#### Regressão Linear Simples



Tamanho (m2)	Preço (R\$)
105	89.000
120	145.000
115	123.000



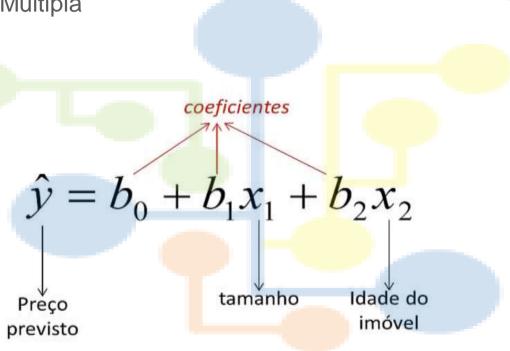
#### Regressão Linear Múltipla

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Tamanho (m2)	Idade do Prédio (Anos)	Número Vagas na Garagem	Número de Quartos	Preço (R\$)
105	15	2	2	89.000
120	4	3	3	145.000
115	8	2	3	123.000



#### Regressão Linear Múltipla





# Interpretando Modelos de Regressão Linear Simples e Múltipla



# Interpretando Modelos de Regressão Linear Simples e Múltipla

- Teste F de Significância Global
- Testes de Significância Individuais
- Coeficientes R2 e R2 Ajustado
- Coeficientes



#### Teste F de Significância Global

O modelo é útil para prever o preço?

Estatística de re R múltiplo R-Quadrado R-quadrado ajustado Erro padrão Observações	0,66 0,44 0,41 132352,0 40		"Há evidência está relaciona	de significação: teste F de significância global do modelo. Há evidências de que pelo menos uma variável no modelo stá relacionada com o preço?" omo valor-p do teste F < 0,05, há evidências estatísticas.				
ANOVA	gl	SQ	MQ	F	F de significação	Valor-p do		
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000			
Residuo	37	6,481E+11	1,752E+10					
Total	39	1,162E+12						
	Coeficientes	Erro padrão	Stat t	valor-P	95% inferiores	95% superiores		
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1		
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2		
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5		



## Testes de Significância Individuais

Quais variáveis estão relacionadas com o preço?

R múltiplo	0,66
R-Quadrado	0,44
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

-0.00-04-00-0	gl	5Q	MQ	F	F de significação
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Residuo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12	27.53		

	Coeficientes I	Erro padrão	Stat t	valor-P	95% inferiores	95% superiores
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5

Há evidências estatísticas de relação de tamanho e idade com preço, pois valores-p<0,05.

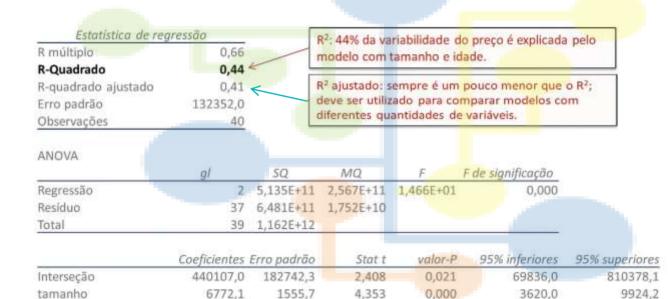


#### Coeficientes R2 e R2 Ajustado

idade do prédio

Qual percentual de variabilidade é explicado pelas variáveis usadas no modelo?

-19129,7



8372,9

4,353

-2,285

0,028

-36094,8

-2164,5



#### Coeficientes

Valores que compõe a equação.

President in the se	2020-80					
Estatística de re R múltiplo R-Quadrado R-quadrado ajustado Erro padrão	0,66 0,44 0,41 132352,0					
Observações	40					
ANOVA	g/	SQ	MQ	F	F de significação	
Regressão	2		2,567E+11	1,466E+01	-	
Residuo	37	6,481E+11	1,752E+10			
Total	39	1,162E+12				
	Coeficientes	Erro padrão	Stat t	valor-P	95% inferiores	95% superiores
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5



#### Regras Gerais

Modelo é útil para prever o preço, se o valor-p do teste F é menor que 0,05. O R2 indica quanto da variabilidade de y é explicado pelas variáveis preditoras. Pode ser necessário incluir mais variáveis no modelo para aumentar este coeficiente.

Há evidências de que uma variável está relacionada com o valor previsto, se o valor-p for menor que 0,05.

O objetivo da regressão é encontrar os coeficientes que permitem construir a equação de regressão e fazer as previsões.

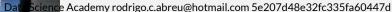


#### Regras Gerais

Modelo é útil para prever o preço, se o valor-p do teste F é menor que 0,05. O R2 indica quanto da variabilidade de y é explicado pelas variáveis preditoras. Pode ser necessário incluir mais variáveis no modelo para aumentar este coeficiente.

Há evidências de que uma variável está relacionada com o valor previsto, se o valor-p for menor que 0,05.

O objetivo da regressão é encontrar os coeficientes que permitem construir a equação de regressão e fazer as previsões.







# Data Science Academy

# Interpretando o Valor-p

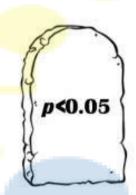


Data Science é uma área multidisciplinar, que emprega conceitos de diversas áreas diferentes.

Data Science e Estatística NÃO são a mesma coisa, mas a Estatística fornece ferramentas importantes principalmente para interpretabilidade dos modelos de Machine Learning.



O **valor-p** é amplamente usado para interpretar modelos de regressão ou mesmo quando empregamos análise estatística aos dados.













#### Interpretando o Valor-p

Os conceitos de valor-p e nível de significância são aspectos importantes dos testes de hipóteses e métodos estatísticos, como regressão. No entanto, eles podem ser um pouco difíceis de entender, especialmente para iniciantes, e uma boa compreensão desses conceitos pode ajudar bastante no entendimento do aprendizado de máquina.



Interpretando o Valor-p

Vamos imaginar o seguinte exemplo.

Considere dois grupos dentro de uma determinada população: um grupo de controle e um grupo experimental. O grupo experimental é uma amostra aleatória retirada da população sobre a qual um experimento será realizado e, em seguida, será comparada com o grupo de controle. A diferença nos grupos é definida em termos de uma estatística de teste, como o teste t de Student (por exemplo, uma empresa deseja saber se seu produto é comprado mais por homens ou mulheres).



#### Interpretando o Valor-p

Precisamos definir dois termos adicionais: uma hipótese nula significa que não há diferença entre os dois grupos, enquanto a hipótese alternativa significa que há uma diferença estatisticamente significativa entre os dois grupos.



#### Interpretando o Valor-p

Assumiremos que a hipótese nula é verdadeira, ou seja, não há diferença entre dois grupos. Em seguida, o experimento é realizado no grupo experimental. Em seguida, é verificado se há algum efeito significativo no grupo ou não.



#### Interpretando o Valor-p

Agora vamos considerar a importância do valor-p. Precisamos calcular a probabilidade de que o efeito no grupo seja atribuído ao acaso. Se você repetir o experimento repetidamente no mesmo tamanho de amostra para o grupo experimental, qual porcentagem de tempo você vê uma diferença no grupo experimental por acaso?



#### Interpretando o Valor-p

O valor-p é usado para avaliar d<mark>e fato a fo</mark>rça d<mark>as hipóte</mark>ses nula e alternativa.

Os valores-p são números decimais entre 0 e 1, que servem como referência probabilística para pesar a hipótese.



#### Interpretando o Valor-p

Às vezes, o valor-p também é expresso como uma porcentagem.

Um valor-p maior que 0,05 significa que, em mais de 1/20 das vezes, o experimento não mostra diferença entre os dois grupos. O valor 0,05 é normalmente usado como referência e é conhecido como nível de significância (α).



#### Interpretando o Valor-p

Em um problema de regressão, você deseja que o valor-p seja muito menor que 0,05 para a variável ser considerada uma variável significativa.

Normalmente, um pequeno valor-p (<0,05) sugere que a hipótese nula deve ser rejeitada, enquanto um grande valor-p (> 0,05) indica que a hipótese nula deve não deve ser rejeitada devido à falta de evidências contra ela.

Valores iguais ou próximos a 0,05 sugerem que o Cientista de Dados deve tomar a decisão por si mesmo!

#### Interpretando o Valor-p

Agora, vamos considerar o uso de valores-p em Ciência de Dados.



Interpretando o Valor-p

Usando o conjunto de dados de casas em Boston, ajustamos um modelo linear simples usando a variável preditora RM e a variável de resposta "y".

#### OLS Regression Results

Dep. Vari	able:			target		R-squ	ared:		0.484
Model:				\$700000	OLS				0.483 471.8
Method: Date:			Least		ares	700 mm 700 mm	tistic:		
				Sep 2019			(F-statistic	):	2.49e-74
Time:					5:23		ikelihood:		-1673.1
No. Observations:					506	AIC:			3350.
Df Residu					504	BIC:			3359.
Df Model:					304	DIC:			3339.
Covarianc			- 1	nonro	bust				
		coef	std	err		t	P> t	[0.025	0.975]
const	-34.	6706	2	650	-13	.084	0.000	-39.877	-29.465
RM	9.	1021	0	419	21	.722	0.000	8.279	9.925
Omnibus:				102	.585	Durbi	n-Watson:		0.684
Prob(Omni	bus):			0	.000	Jarqu	e-Bera (JB):		612.449
Skew:				0	.726	Prob			1.02e-133
Kurtosis:				8	.190	Cond.			58.4
					M 100 100 100 100 100 1				

#### Interpretando o Valor-p

Um pequeno valor-p indica que é improvável observar uma associação tão substancial entre o preditor e a resposta devido ao acaso, na ausência de qualquer associação real entre o preditor e a resposta.

#### Interpretando o Valor-p

Consequentemente, se vemos um pequeno valor-p podemos deduzir que há uma associação entre o preditor e a resposta. Isso significa que rejeitamos a hipótese nula, ou seja, afirmamos que existe um relacionamento entre as duas variáveis se o valor-p for pequeno o suficiente.



#### Interpretando o Valor-p

Consequentemente, se vemos um pequeno valor-p podemos deduzir que há uma associação entre o preditor e a resposta. Isso significa que rejeitamos a hipótese nula, ou seja, afirmamos que existe um relacionamento entre as duas variáveis se o valor-p for pequeno o suficiente.

No caso de um grande valor-p ded<mark>uzimos que não há uma associação entre o preditor e a resposta!</mark>



#### Interpretando o Valor-p

O valor-p representa a chance ou a probabilidade do efeito (ou da diferença) observada entre as variáveis ser devido ao **acaso**, e não aos fatores que estão sendo estudados.

0		1
Impossível		luta certeza
'		
p = 0.001	Muito imprová <mark>ve</mark> l ser de <mark>vido a</mark> o acaso	1 em 1000
p = 0.05	Bastante improvável ser devido ao acaso	1 em 20
p = 0.5	Bastante provável ser devido ao acaso	1 em 2
p = 0.75	Muito provavelmente é devido ao acaso	3 em 4







# Data Science Academy

O Que é Regularização?

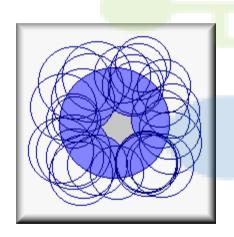


O modelo de regressão utiliza as variáveis explanatórias para explicar a variabilidade da variável resposta!

Mas o que acontece quando o número de variáveis explanatórias é muito grande?

A técnica de mínimos quadrados, nesta situação, pode não permitir previsões com precisão e nem permitir uma interpretação ideal para o modelo.





Isso significa que muitas variáveis seriam ajustadas e o modelo ficaria super estimado, com uma variância infinita, sendo inviável o método dos mínimos quadrados.



Temos basicamente 3 métodos que nos auxiliam quando o número de variáveis é muito grande ou até mesmo maior que o número de observações:

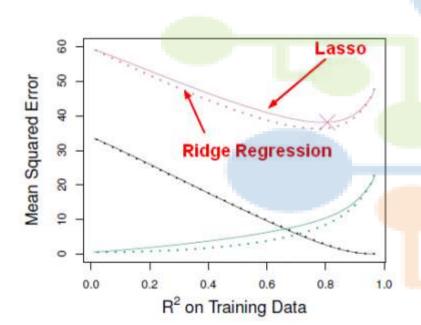
Seleção de um subconjunto de coeficientes

Reduzir a dimensão

Reduzir o valor dos coeficientes (Regularização)







Uma regressão com diversos coeficientes torna o modelo como um todo muito mais complexo e pode não ter características de interpretabilidade.



# Shirinkage Methods (Métodos de Encolhimento)

Ridge Regression

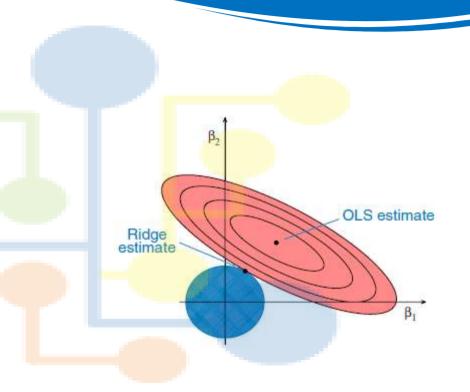
LASSO Regression

(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)



# Ridge Regression

A Ridge Regression é um método de regularização do modelo que tem como principal objetivo suavizar atributos que sejam relacionados uns aos outros e que aumentam o ruído no modelo (multicolinearidade).

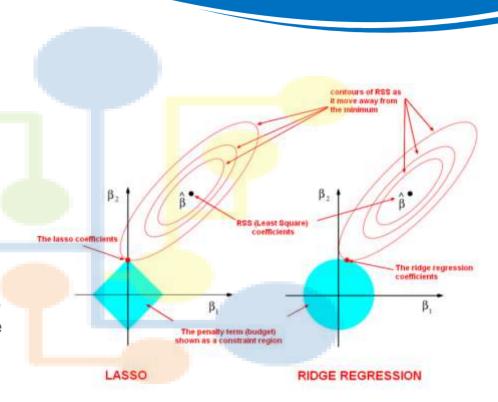


#### Machine Learning

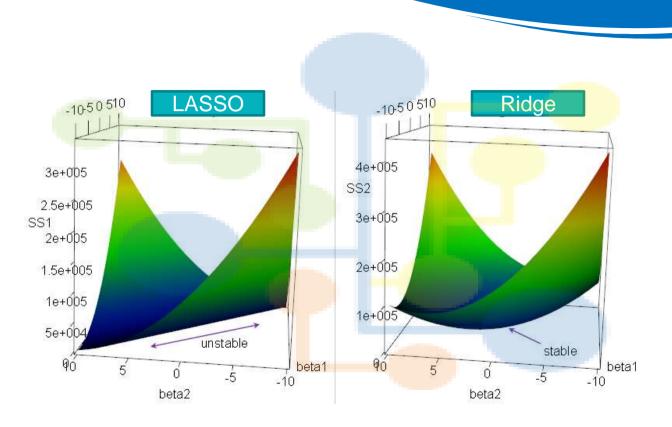
### **LASSO** Regression

(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

O LASSO tem o mesmo mecanismo de penalização dos coeficientes com um alto grau de correlação entre si, mas que usa o mecanismo de penalizar os coeficientes de acordo com o seu valor absoluto.











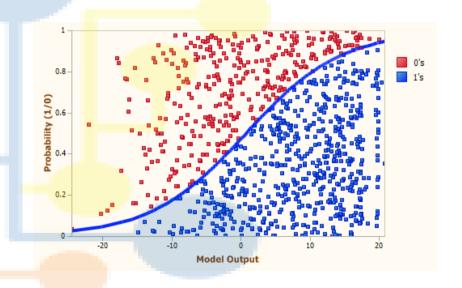


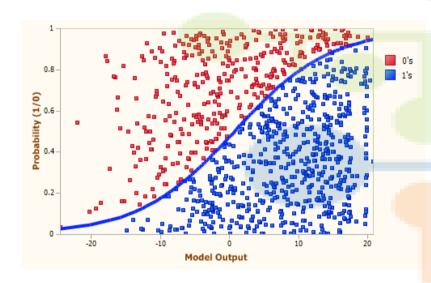
# Data Science Academy

# Regressão Logística



A regressão logística é uma técnica estatística que tem como objetivo modelar, a partir de um conjunto de observações, a relação "logística" entre uma variável resposta e uma série de variáveis explicativas numéricas (contínuas, discretas) e/ou categóricas.





A regressão logística é amplamente usada em ciências médicas e sociais, e tem outras denominações, como modelo logístico, modelo logit e classificador de máxima entropia.



### Na Regressão Logística, a variável resposta é binária:

- 1 → acontecimento de interesse (sucesso)
- 0 → acontecimento complementar (insucesso)

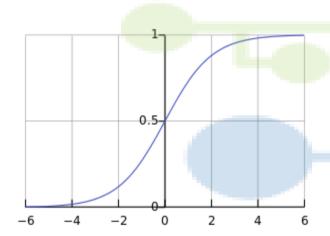
# $g(x) = \ln\left(\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}\right)$

$$g(x) = \ln \left( \frac{\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}}{1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}} \right) = \ln \left( \frac{\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}}{\frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}} \right)$$

Transformação logit

$$g(x) = ln(e^{\beta_0 + \beta_1 x}) = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$\uparrow$$
Logaritmo



Regressão Logística é útil para modelar a probabilidade de um evento ocorrer como função de outros fatores. É um modelo linear generalizado que usa como função de ligação a função logit.







- Em <u>medicina</u>, permite por exemplo determinar os fatores que caracterizam um grupo de indivíduos doentes em relação a indivíduos saudáveis.
- Na área de <u>seguros</u>, permite encontrar frações de clientes que sejam sensíveis a determinada política securitária em relação a um dado risco particular.
- Em instituições financeiras, pode detectar os grupos de risco para a subscrição de um crédito.
- Em <u>econometria</u>, permite explicar uma variável discreta, como por exemplo as intenções de voto em atos eleitorais.



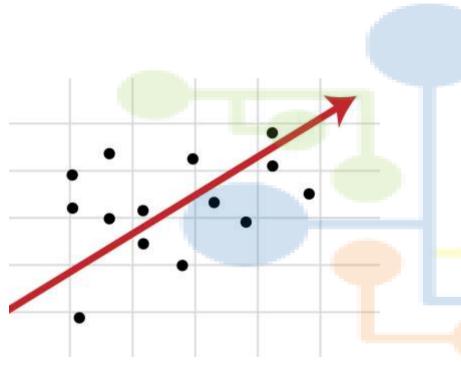


# **Data Science Academy**

Regressão Vantagens e Desvantagens







- Simple Linear Regression
- Multiple Linear Regression
- Ridge Regression
- Lasso Regression
- Logistic Regression
- Polynomial Regression
- Stepwise Regression
- Elastic Net Regression















































# Importantes Desvantagens:

- Apenas consideram relacionamento linear
- Toma como base a média da variável dependente
- Sensível a Outliers

Regressão Linear assume que os dados são independentes

