Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

# Machine Learning

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

Data Science Academy

# Seja muito bem-vindo(a)!

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

Data Science Academy

# Machine Learning - Regressão

# Regressão

- Modelos de Aprendizagem
- Fundamentos Teóricos
- Avaliação, Otimização, Regularização, Customizações
- Outros Conceitos Relacionados à Criação do Modelo
- Prática

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

# O que é Regressão?

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


## Aprovação de Crédito de um Indivíduo

| Atributo | Valor |
|---|---|
| Sexo | Masculino |
| Idade | 34 |
| Salário Mensal | R$ 18.000,00 |
| Anos no Emprego Atual | 3 |
| Anos de Residência | 7 |
| Saldo Bancário | R$ 32.671,94 |

Classificação

- Decisão de crédito (Sim/Não)

Regressão

- Quantidade de crédito (dinheiro)

# Modelos de Regressão

$X_1$

$X_2$

.

.

.

$X_n$

$f(x_1, \ldots, x_n)$

$Y$

$$\hat{Y}_i = \alpha + \beta . X_i$$ (Simples)

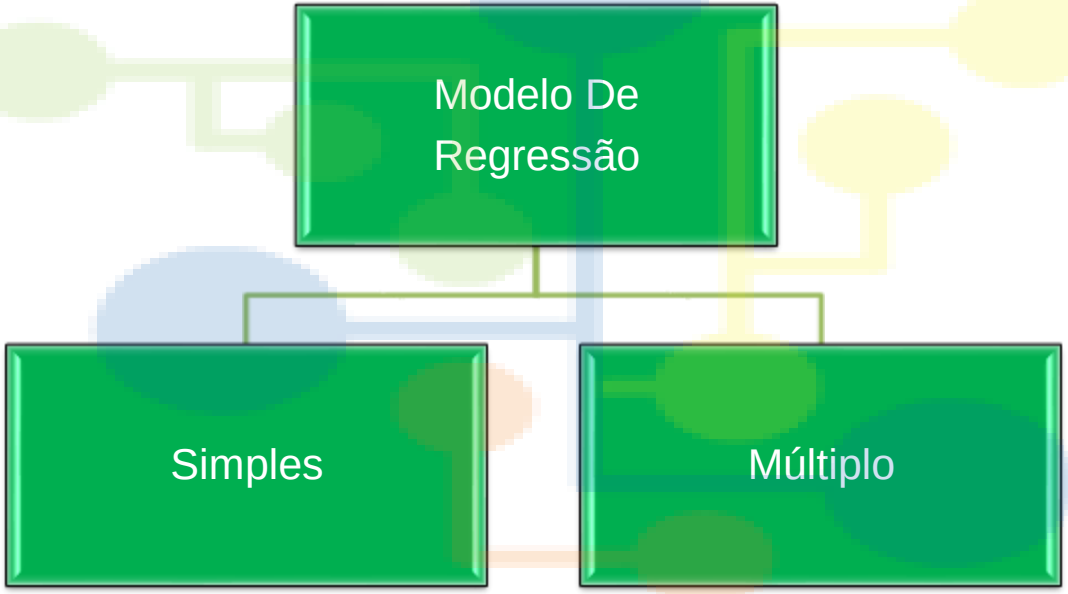
$$Y_i = a + b_1 . X_{1i} + b_2 . X_{2i} + \ldots + b_k . X_{ki} + u_i$$ (Múltiplo)

Uma **variável independente x**, explica a variação em outra variável, que é chamada **variável dependente y**. Este relacionamento existe em apenas uma direção:

**variável independente (x) → variável dependente (y)**

**Análise de regressão** é uma metodologia **estatística** que utiliza a relação entre duas ou mais variáveis quantitativas de tal forma que uma variável possa ser predita a partir de outra.

# Tipos de Modelos de Regressão Linear




**1 Variável Dependente Y**
**1 Variável Independente X**

**1 Variável Dependente Y**
**2 ou + Variáveis Independentes X, $X_i$**

A análise de regressão compreende quatro tipos básicos de modelos:

- Linear Simples
- Linear Múltiplo
- Não Linear Simples
- Não Linear Múltiplo

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


Regressão Linear Simples

Regressão Linear Múltipla

Regressão Logística

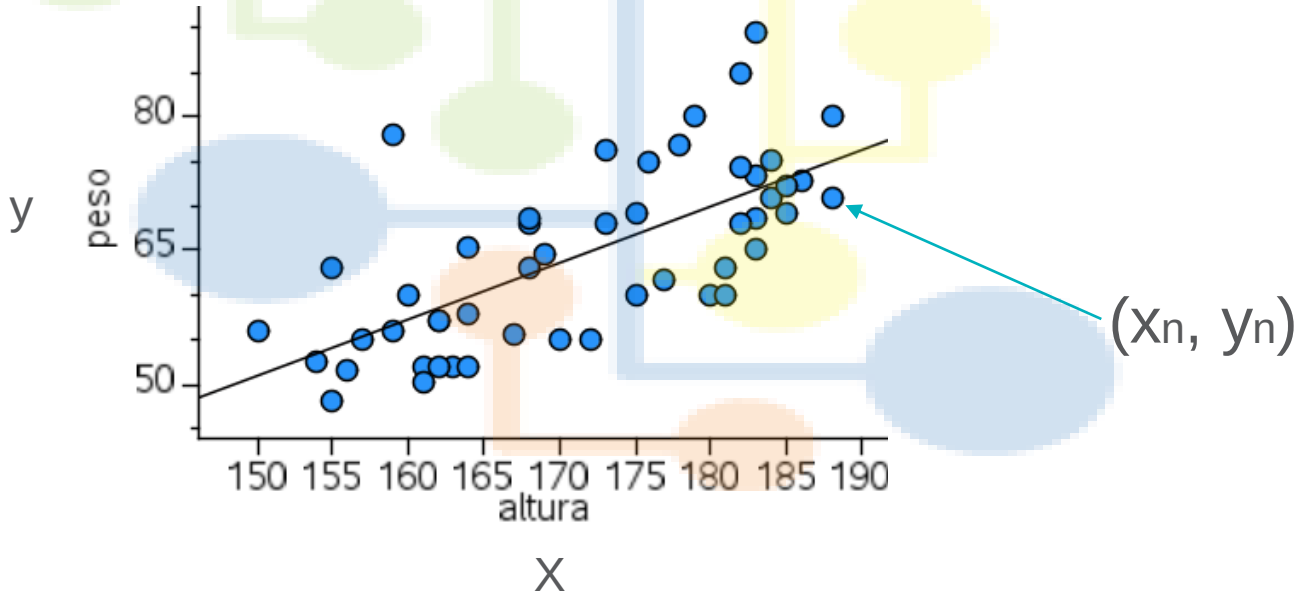
Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?

Prever a população futura de uma cidade simulando a tendência de crescimento da população no passado

Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?

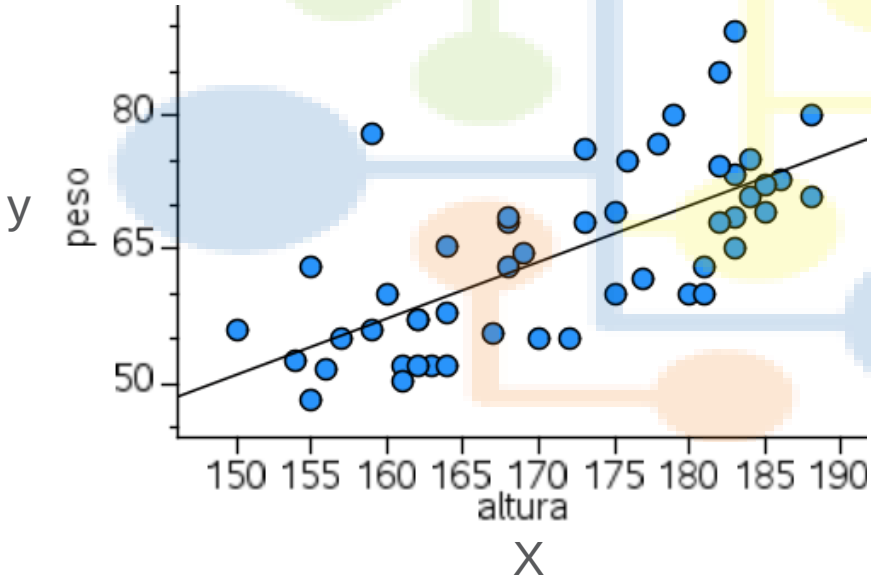
Produtividade (Y) de uma área agrícola é alterada quando se aplica certa quantidade (X) de fertilizante sobre a terra

# Diagrama de Dispersão (Scatter Plot)



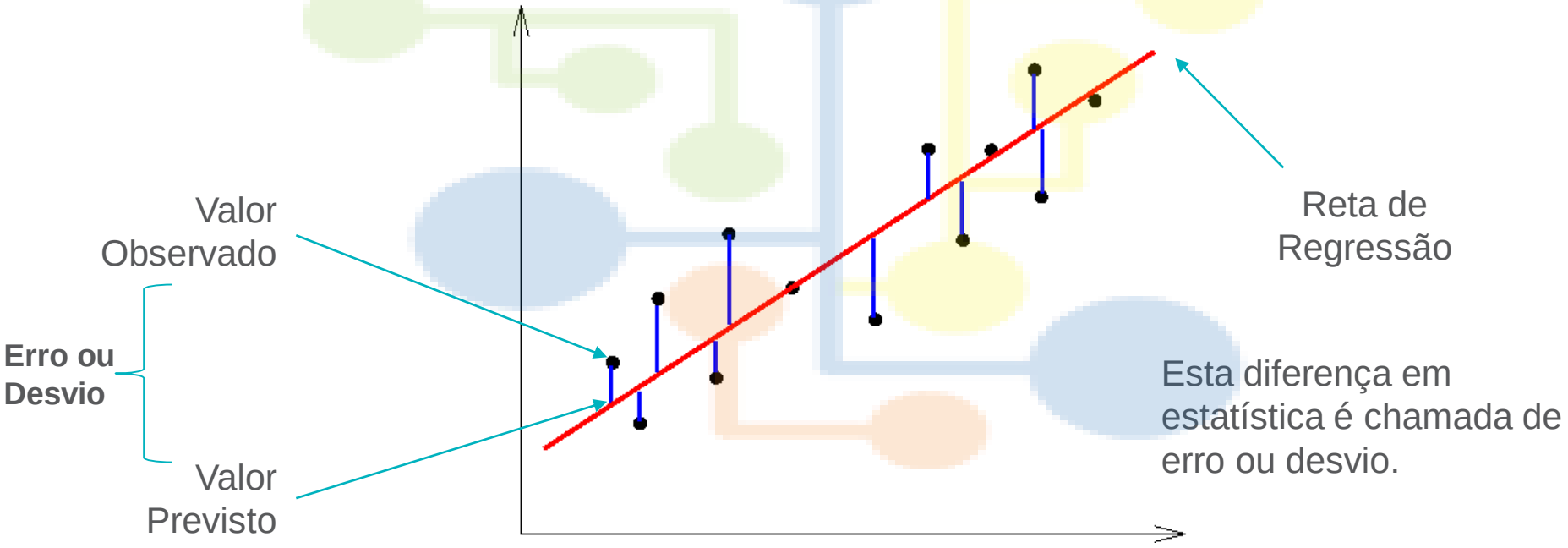
## Modelo de Regressão

$$\hat{y} = a + bx$$

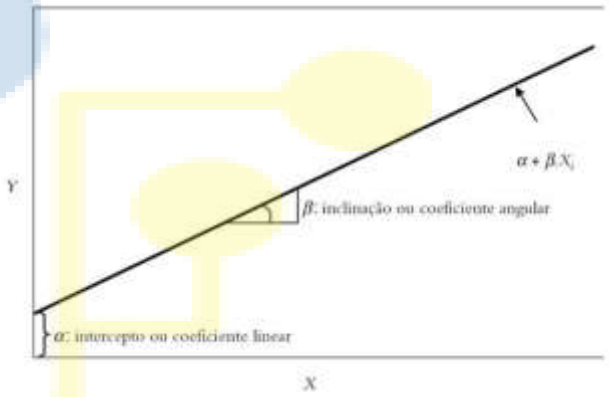



Reta de Regressão

# Modelo de Regressão



$$\hat{y} = a + bx$$



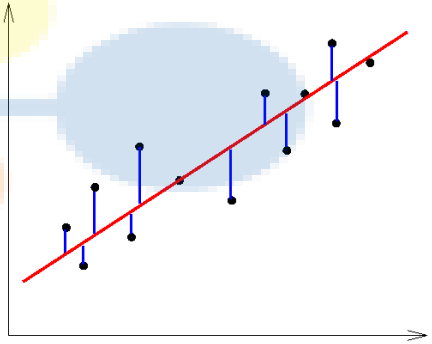

Onde:

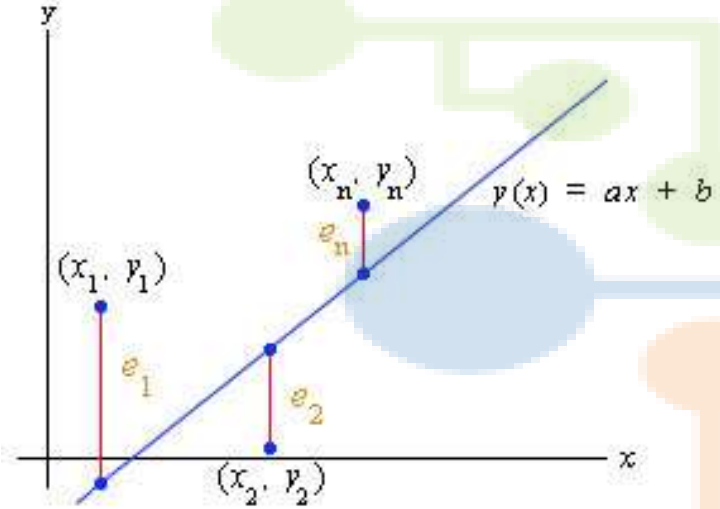
$\hat{y}$ = valor previsto de *y* dado um valor para *x*

***x*** = variável independente

***a*** = ponto onde a linha intercepta o eixo y

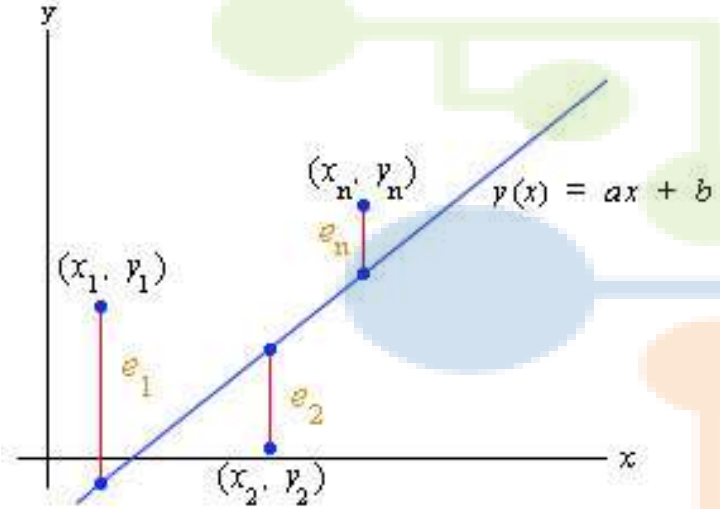
***b*** = inclinação da linha reta





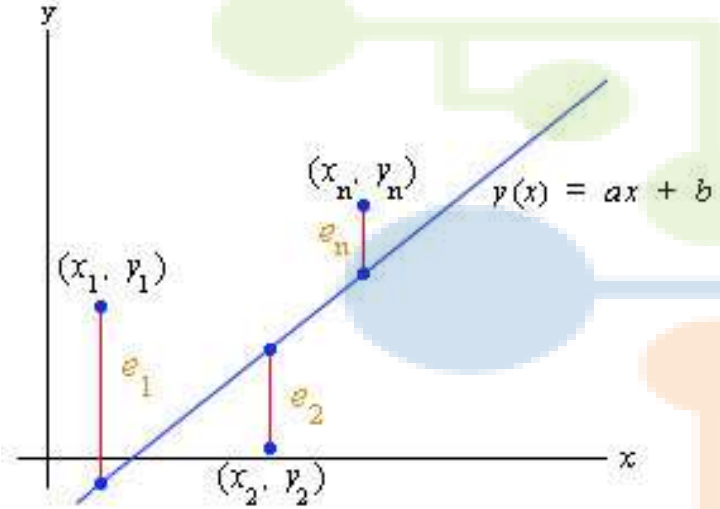

## Método dos Mínimos Quadrados

Esse método definirá uma reta que minimizará a soma das distâncias ao quadrado entre os pontos plotados (X, Y) e a reta (que são os valores previstos de X’,Y’).




Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação




Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação

# Coeficiente de Correlação

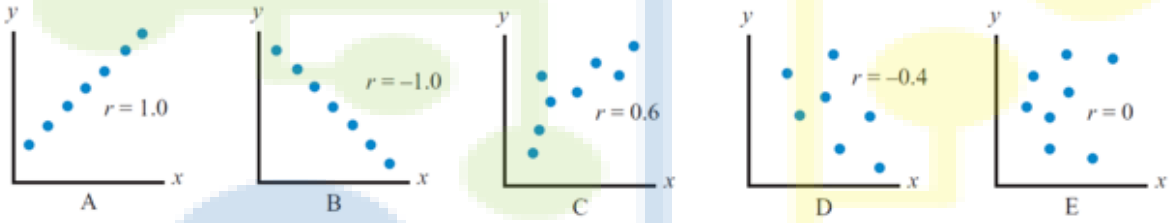



**Gráfico A (*r* = 1.0):** correlação positiva perfeita entre *x* e *y*

**Gráfico B (*r* = -1.0):** correlação negativa perfeita entre *x* e *y*

**Gráfico C (*r* = 0.6):** relação positiva moderada: y tende a aumentar se x aumenta, mas não necessariamente na mesma taxa observada no Gráfico A

**Gráfico D (*r* = -0.4):** relação negativa fraca: o coeficiente de correlação é próximo de zero ou negativo: y tende a diminuir se x aumenta

**Gráfico E (*r* = 0):** Sem relação entre x e y

Os valores de **r** variam entre **-1.0** (uma forte relação negativa) até **+1.0**, uma forte relação positiva.

# Coeficiente de Correlação

O coeficiente de determinação indica o quanto a reta de regressão explica o ajuste da reta, enquanto que o coeficiente de correlação deve ser usado como uma medida de força da relação entre as variáveis

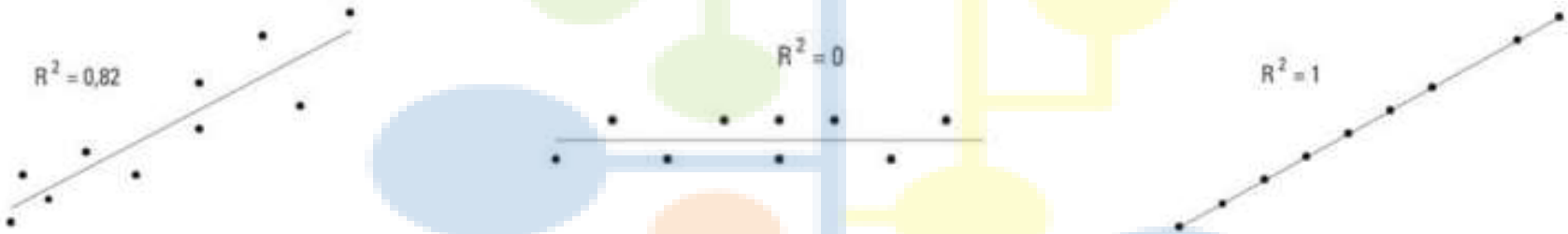
- Soma Total dos Quadrados (STQ) – Mostra a variação em Y em torno da própria média.
- Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) – Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.
- Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) – Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

$$STQ = SQR + SQU$$

Nossa próxima etapa é compreender o poder explicativo do modelo de regressão

## Coeficiente de Ajuste $R^2$

$$R^2 = \frac{SQR}{SQR + SQU} = \frac{SQR}{SQT}$$


$R^2 = 0,82$
$R^2 = 0$
$R^2 = 1$

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


O coeficiente de ajuste R2 não diz aos analistas se uma determinada variável explicativa é estatisticamente significante e se esta variável é a causa verdadeira da alteração de comportamento da variável dependente.

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

Data Science Academy

# Avaliando o Modelo de Regressão

# Típicos problemas que podem ser resolvidos com Regressão

- Quantos computadores serão vendidos no próximo mês?
- Quantas pessoas vão acessar nosso web site na próxima semana?
- Qual o salário de uma pessoa de acordo com a performance escolar?
- Qual o total de vendas relacionado ao número de seguidores em redes sociais?

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


| Número de Funcionários Por Turno | Número de Seguidores nas Redes Sociais | Preço da Matéria-Prima (R$) | Cotação do Dólar | | Total de Vendas (R$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1400 | 54000 | 5000 | 3.44 | | 1245900 |
| 1359 | 55000 | 5400 | 3.12 | | 1302763 |
| 1402 | 55430 | 5300 | 3.50 | | 1345119 |

Atributos ou Features
(X)

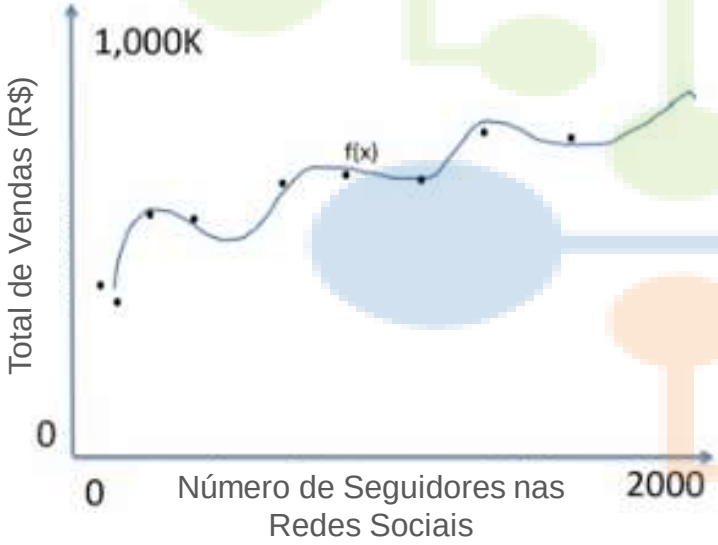
Variável Resposta
(y)

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


| | Número de Seguidores nas Redes Sociais | | | | Total de Vendas (R$) |
|---|---|---|---|---|---|
| | 54000 | | | | 1245900 |
| | 55000 | | | | 1302763 |
| | 55430 | | | | 1345119 |

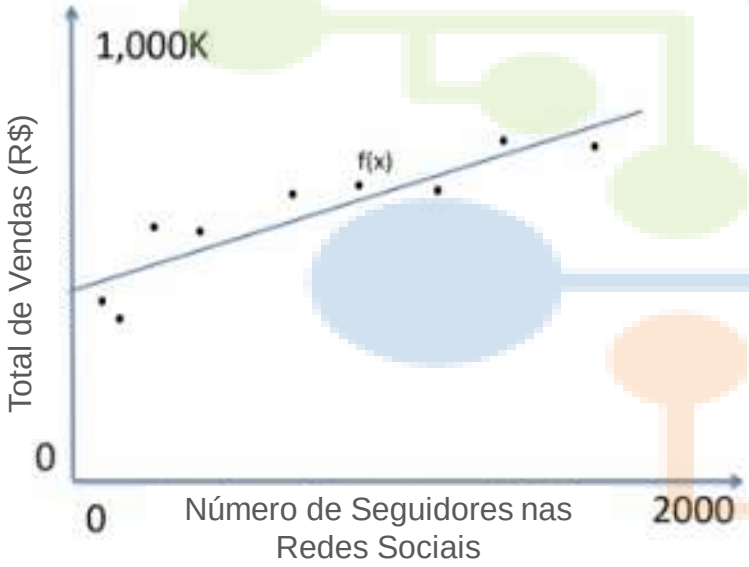
Atributo (X)

Variável Resposta (y)



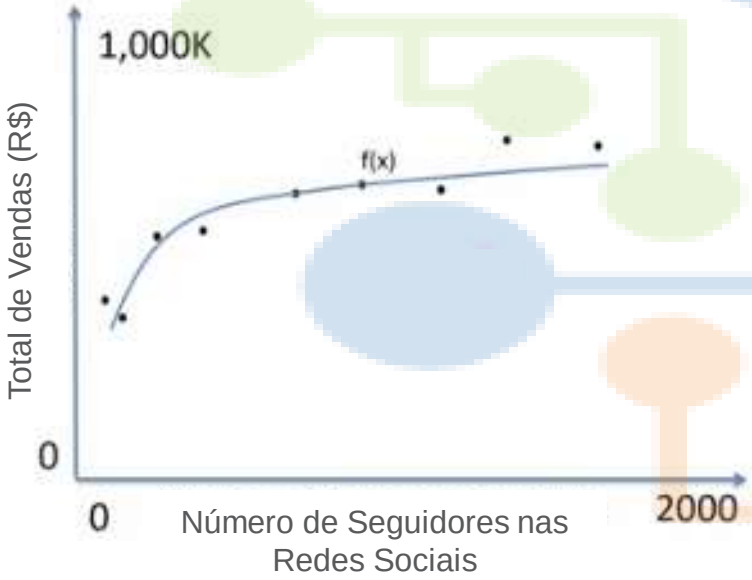

f(x) = function(Número de Seguidores)

Overfitting




f(x) = function(Número de Seguidores)

Underfitting




f(x) = function(Número de Seguidores)

Good Fit

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


| | Número de Seguidores nas Redes Sociais | | | Total de Vendas (R$) | Total de Vendas Previsto (R$) |
|---|---|---|---|---|---|
| | 54000 | | | 1245900 | 1278450 |
| | 55000 | | | 1302763 | 1302763 |
| | 55430 | | | 1345119 | 1320876 |

Atributos ou Features (X)

Variável Resposta (y)

Previsão f(x)

$y_i - f(x_i)$

$f(x_i) - y_i$

$| f(x_i) - y_i |$

$(y_i - f(x_i))^2$

$$\text{Mean absolute error (MAE)} = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|$$

$$\text{SSE/MSE} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2}$$

**Método dos Mínimos Quadrados (Least Square Error)**

| Total de Vendas (R$) | Total de Vendas Previsto (R$) |
|---|---|
| 1245900 | 1278450 |
| 1302763 | 1334789 |
| 1345119 | 1320876 |

Variável Resposta (y)

Previsão f(x)

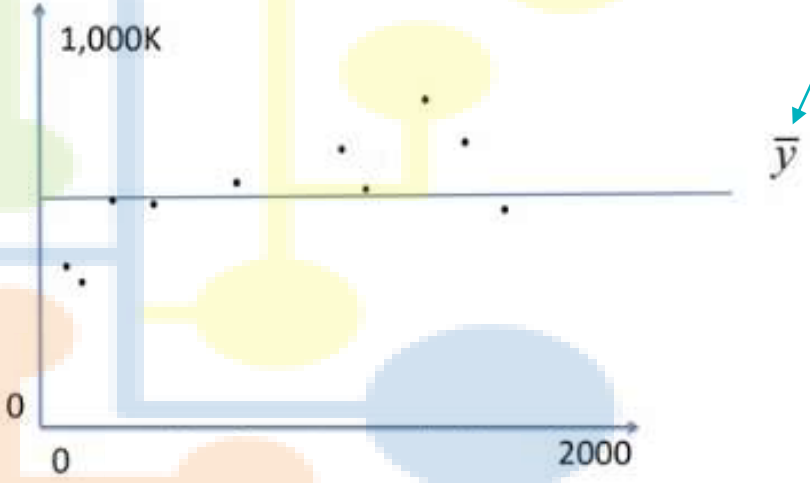
- (**SST – Sum Square Total**) Soma Total dos Quadrados (STQ) – Mostra a variação em Y em torno da própria média.

- (**SSR – Sum Square Regression**) Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) – Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.

- (**SSE – Sum Square Error**) Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) – Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

$$SST = SSE + SSR$$

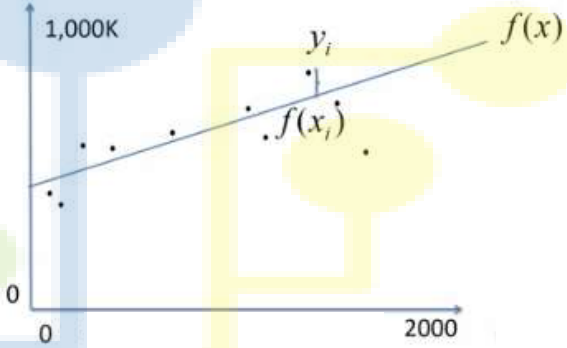
Média de y



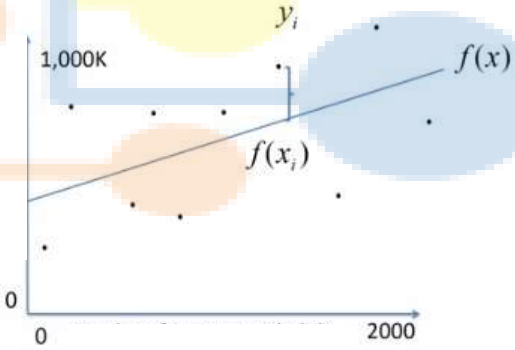
$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \bar{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$




$$SST = SSE + SSR$$



$$\frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 0

Próximo de 1

$$1 - \frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 1

Próximo de 0

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 1

Próximo de 0

$$SST = SSE + SSR$$

Se o SSR é alto e o SSE é baixo, o Modelo de Regressão explica bem a variação nas previsões

Se o SSR é baixo e o SSE é alto, o Modelo de Regressão não explica bem a variação nas previsões

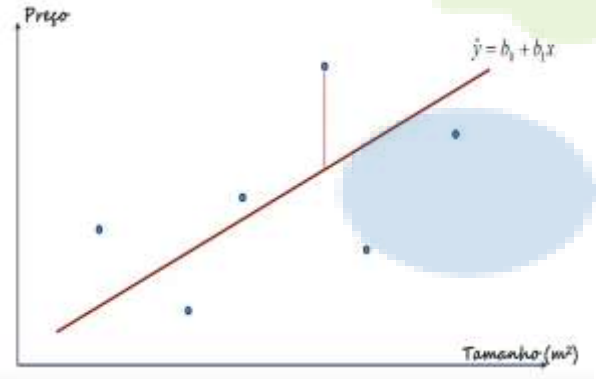
- **SSR = medida da variação que pode ser explicada**
- **SSE = medida da variação que não pode ser explicada**
- **SST = medida da variação total**

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

Data Science Academy

# Regressão Linear Simples
# x
# Regressão Linear Múltipla

# Regressão Linear Simples




| Tamanho (m2) | | | | Preço (R$) |
|---|---|---|---|---|
| 105 | | | | 89.000 |
| 120 | | | | 145.000 |
| 115 | | | | 123.000 |

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


# Regressão Linear Múltipla

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

| Tamanho (m2) | Idade do Prédio (Anos) | Número Vagas na Garagem | Número de Quartos | Preço (R$) |
|---|---|---|---|---|
| 105 | 15 | 2 | 2 | 89.000 |
| 120 | 4 | 3 | 3 | 145.000 |
| 115 | 8 | 2 | 3 | 123.000 |

# Regressão Linear Múltipla

coeficientes

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Preço previsto

tamanho

Idade do imóvel

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


# Interpretando Modelos de Regressão Linear Simples e Múltipla

- Teste F de Significância Global
- Testes de Significância Individuais
- Coeficientes R2 e R2 Ajustado
- Coeficientes

# Teste F de Significância Global

O modelo é útil para prever o preço?

| *Estatística de regressão* | |
|---|---|
| R múltiplo | 0,66 |
| R-Quadrado | 0,44 |
| R-quadrado ajustado | 0,41 |
| Erro padrão | 132352,0 |
| Observações | 40 |

F de significação: teste F de significância global do modelo.
"Há evidências de que pelo menos uma variável no modelo está relacionada com o preço?"
Como **valor-p do teste F < 0,05**, há evidências estatísticas.

ANOVA

| | *gl* | *SQ* | *MQ* | *F* | ***F de significação*** |
|---|---|---|---|---|---|
| Regressão | 2 | 5,135E+11 | 2,567E+11 | 1,466E+01 | **0,000** |
| Resíduo | 37 | 6,481E+11 | 1,752E+10 | | |
| Total | 39 | 1,162E+12 | | | |

Valor-p do teste F

| | *Coeficientes* | *Erro padrão* | *Stat t* | *valor-P* | *95% inferiores* | *95% superiores* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Interseção | 440107,0 | 182742,3 | 2,408 | 0,021 | 69836,0 | 810378,1 |
| tamanho | 6772,1 | 1555,7 | 4,353 | 0,000 | 3620,0 | 9924,2 |
| idade do prédio | -19129,7 | 8372,9 | -2,285 | 0,028 | -36094,8 | -2164,5 |

# Testes de Significância Individuais

Quais variáveis estão realcionadas com o preço?

| *Estatística de regressão* | |
|---|---|
| R múltiplo | 0,66 |
| R-Quadrado | 0,44 |
| R-quadrado ajustado | 0,41 |
| Erro padrão | 132352,0 |
| Observações | 40 |

ANOVA

| | *gl* | *SQ* | *MQ* | *F* | *F de significação* |
|---|---|---|---|---|---|
| Regressão | 2 | 5,135E+11 | 2,567E+11 | 1,466E+01 | 0,000 |
| Resíduo | 37 | 6,481E+11 | 1,752E+10 | | |
| Total | 39 | 1,162E+12 | | | |

| | *Coeficientes* | *Erro padrão* | *Stat t* | ***valor-P*** | *95% inferiores* | *95% superiores* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Interseção | 440107,0 | 182742,3 | 2,408 | 0,021 | 69836,0 | 810378,1 |
| tamanho | 6772,1 | 1555,7 | 4,353 | **0,000** | 3620,0 | 9924,2 |
| idade do prédio | -19129,7 | 8372,9 | -2,285 | **0,028** | -36094,8 | -2164,5 |

Há evidências estatísticas de relação de tamanho e idade com preço, pois **valores-p<0,05**.

# Coeficientes R2 e R2 Ajustado

Qual percentual de variabilidade é explicado pelas variáveis usadas no modelo?

| *Estatística de regressão* | |
|---|---|
| R múltiplo | 0,66 |
| **R-Quadrado** | **0,44** |
| R-quadrado ajustado | 0,41 |
| Erro padrão | 132352,0 |
| Observações | 40 |

$R^2$: 44% da variabilidade do preço é explicada pelo modelo com tamanho e idade.

$R^2$ ajustado: sempre é um pouco menor que o $R^2$; deve ser utilizado para comparar modelos com diferentes quantidades de variáveis.

ANOVA

| | *gl* | *SQ* | *MQ* | *F* | *F de significação* |
|---|---|---|---|---|---|
| Regressão | 2 | 5,135E+11 | 2,567E+11 | 1,466E+01 | 0,000 |
| Resíduo | 37 | 6,481E+11 | 1,752E+10 | | |
| Total | 39 | 1,162E+12 | | | |

| | *Coeficientes* | *Erro padrão* | *Stat t* | *valor-P* | *95% inferiores* | *95% superiores* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Interseção | 440107,0 | 182742,3 | 2,408 | 0,021 | 69836,0 | 810378,1 |
| tamanho | 6772,1 | 1555,7 | 4,353 | 0,000 | 3620,0 | 9924,2 |
| idade do prédio | -19129,7 | 8372,9 | -2,285 | 0,028 | -36094,8 | -2164,5 |

# Coeficientes

Valores que compõe a equação.

| *Estatística de regressão* | |
|---|---|
| R múltiplo | 0,66 |
| R-Quadrado | 0,44 |
| R-quadrado ajustado | 0,41 |
| Erro padrão | 132352,0 |
| Observações | 40 |

ANOVA

| | *gl* | *SQ* | *MQ* | *F* | *F de significação* |
|---|---|---|---|---|---|
| Regressão | 2 | 5,135E+11 | 2,567E+11 | 1,466E+01 | 0,000 |
| Resíduo | 37 | 6,481E+11 | 1,752E+10 | | |
| Total | 39 | 1,162E+12 | | | |

| | ***Coeficientes*** | *Erro padrão* | *Stat t* | *valor-P* | *95% inferiores* | *95% superiores* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Interseção | **440107,0** | 182742,3 | 2,408 | 0,021 | 69836,0 | 810378,1 |
| tamanho | **6772,1** | 1555,7 | 4,353 | 0,000 | 3620,0 | 9924,2 |
| idade do prédio | **-19129,7** | 8372,9 | -2,285 | 0,028 | -36094,8 | -2164,5 |

$$\hat{y} = 440107 + 6772{,}1 \cdot tamanho - 19129{,}7 \cdot idade$$

# Regras Gerais

Modelo é útil para prever o preço, se o valor-p do teste F é menor que 0,05.

O R2 indica quanto da variabilidade de y é explicado pelas variáveis preditoras. Pode ser necessário incluir mais variáveis no modelo para aumentar este coeficiente.

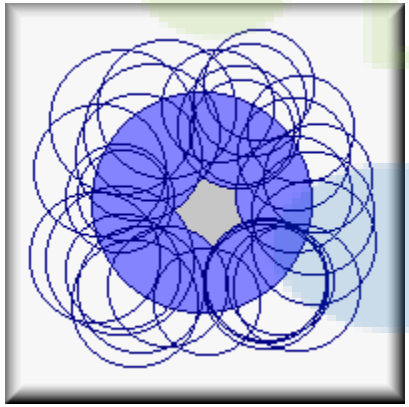
Há evidências de que uma variável está relacionada com o valor previsto, se o valor-p for menor que 0,05.

O objetivo da regressão é encontrar os coeficientes que permitem construir a equação de regressão e fazer as previsões.

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

Data Science Academy

# Regularização

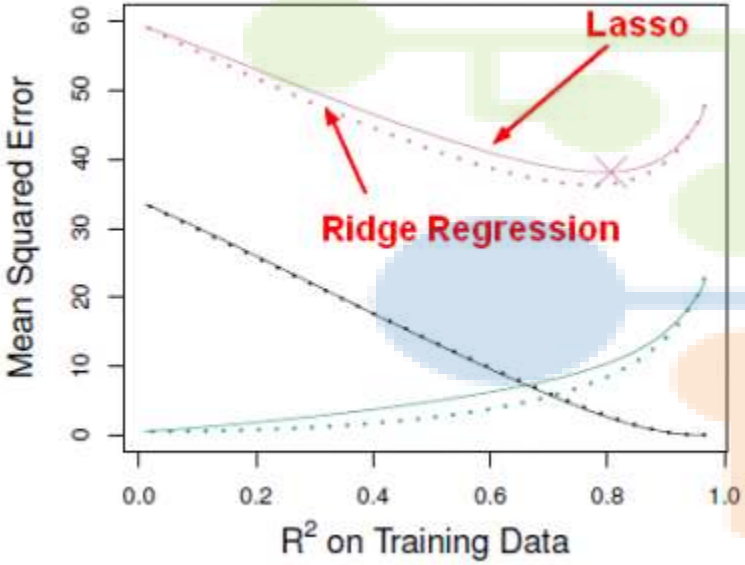


Isso significa que muitas variáveis seriam ajustadas e o modelo ficaria super estimado, com uma variância infinita , sendo inviável o método dos mínimos quadrados

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


Temos basicamente 3 métodos que nos auxiliam quando o número de variáveis é maior que o número de observações:

- Seleção de um subconjunto de coeficientes
- Reduzir a dimensão
- Reduzir o valor dos coeficientes (Regularização)




Uma regressão com diversos coeficientes regressores torna o modelo como um todo muito mais complexo e pode tirar características de interpretabilidade

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


# Shirinkage Methods
# (Métodos de Encolhimento)

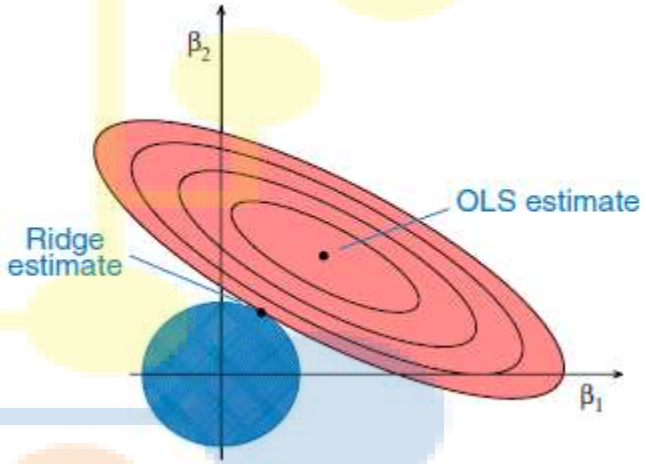
## Ridge Regression

## LASSO Regression
(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


# Ridge Regression

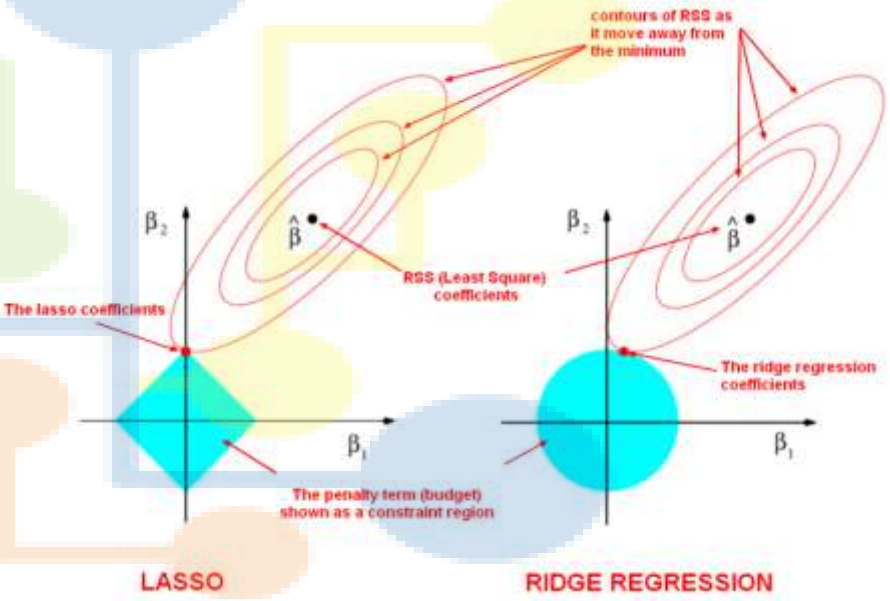
A Ridge Regression é um método de regularização do modelo que tem como principal objetivo suavizar atributos que sejam relacionados uns aos outros e que aumentam o ruído no modelo (multicolinearidade).

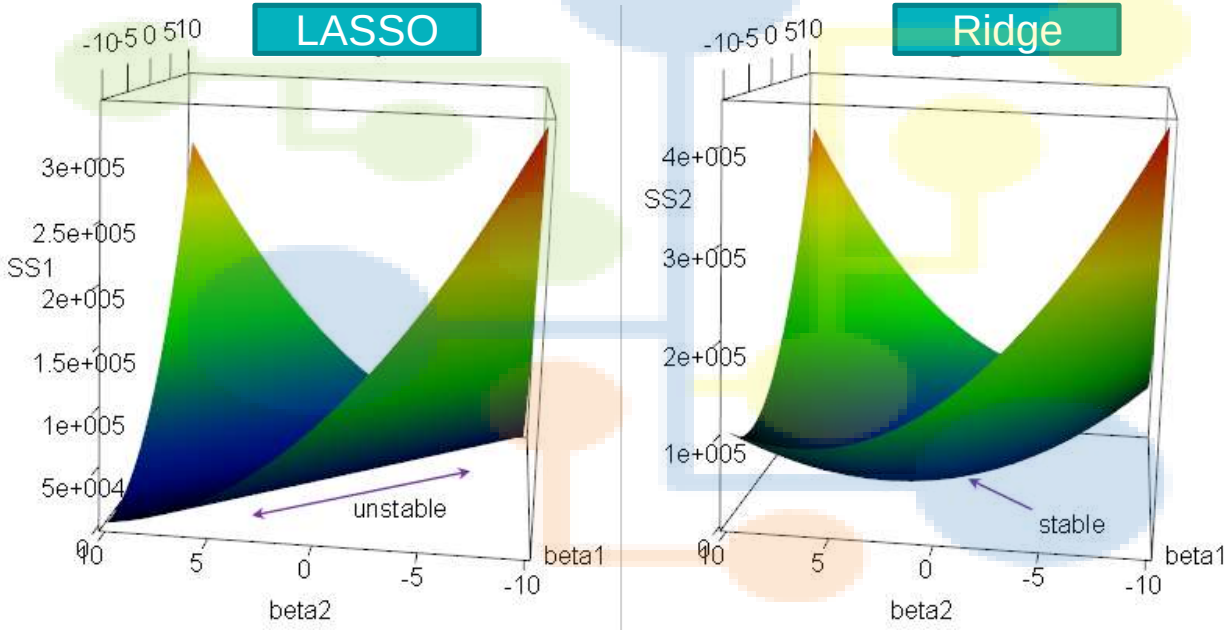


# LASSO Regression

(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

O LASSO tem o mesmo mecanismo de penalização dos coeficientes com um alto grau de correlação entre si, mas que usa o mecanismo de penalizar os coeficientes de acordo com o seu valor absoluto.

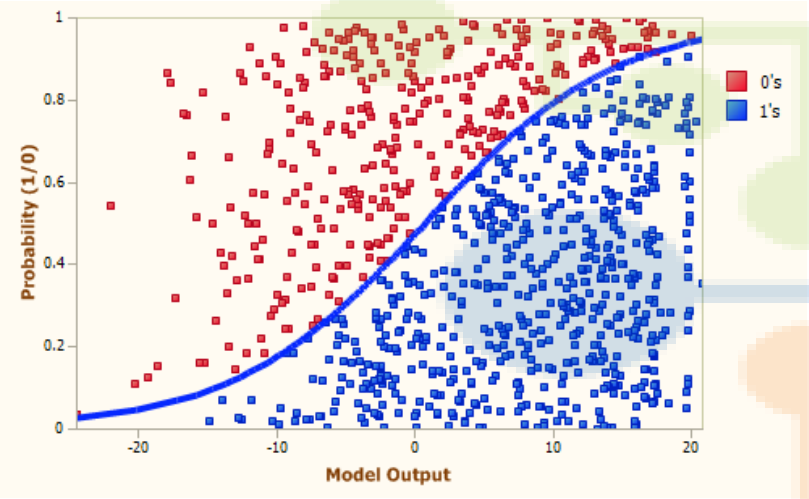



LASSO
Ridge
-10 -5 0 5 10
3e+005
2.5e+005
SS1
2e+005
1.5e+005
1e+005
5e+004
0
unstable
10
5
0
-5
-10
beta1
beta2
4e+005
SS2
3e+005
2e+005
1e+005
stable

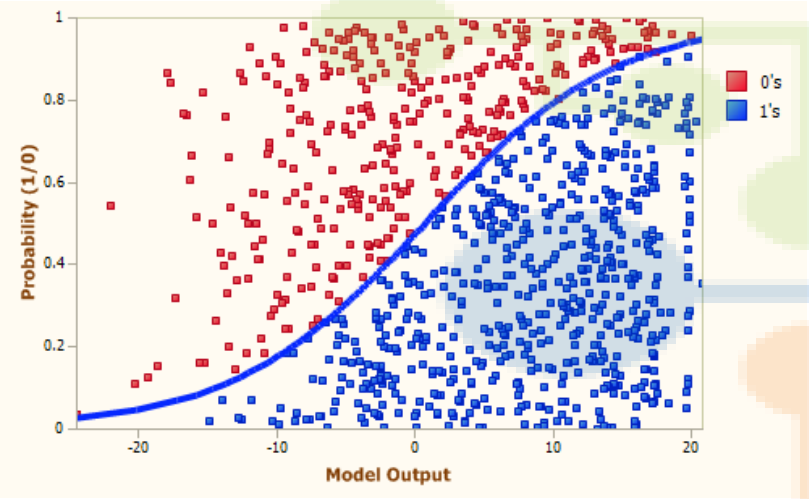
Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

Data Science Academy

# Regressão Logística




A regressão logística é uma técnica estatística que tem como objetivo modelar, a partir de um conjunto de observações, a relação “logística” entre uma variável resposta e uma série de variáveis explicativas numéricas (contínuas, discretas) e/ou categóricas.




A regressão logística é amplamente usada em ciências médicas e sociais, e tem outras denominações, como **modelo logístico**, **modelo logit**, e **classificador de máxima entropia.**

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


**Na Regressão Logística, a variável resposta é binária**

1 → acontecimento de interesse (sucesso)
0 → acontecimento complementar (insucesso)

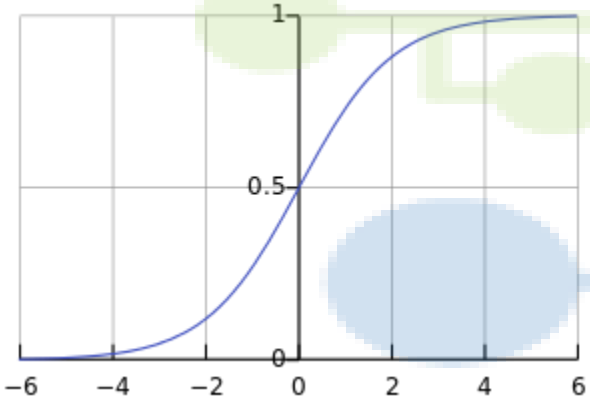
$$g(x) = \ln\left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right)$$

$$g(x) = ln\left(\frac{\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}{1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}\right) = ln\left(\frac{\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}{\frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}\right)$$

**Transformação logit**

$$g(x) = ln\left(e^{\beta_0+\beta_1 x}\right) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Logaritmo




Regressão Logística é útil para modelar a probabilidade de um evento ocorrer como função de outros fatores. É um modelo linear generalizado que usa como função de ligação a função logit.

A regressão logística é utilizada em áreas tais como:

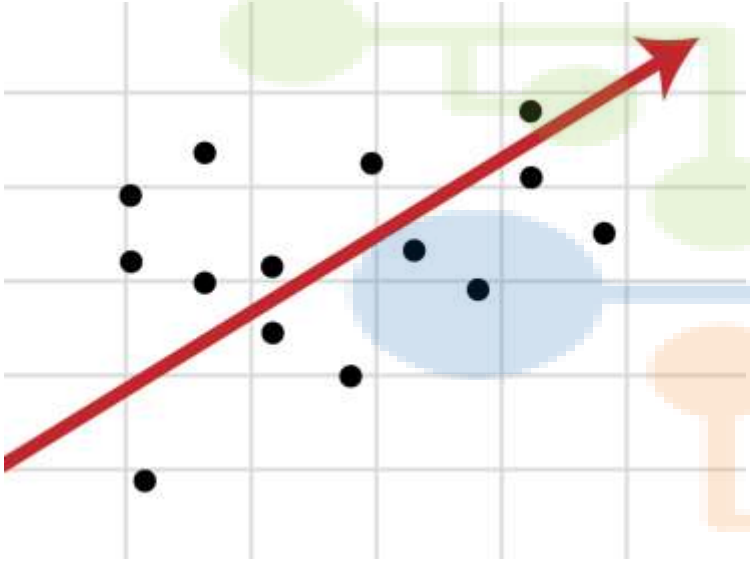
- Em medicina, permite por exemplo determinar os fatores que caracterizam um grupo de indivíduos doentes em relação a indivíduos saudáveis.
- Na área de seguros, permite encontrar frações de clientes que sejam sensíveis a determinada política securitária em relação a um dado risco particular.
- Em instituições financeiras, pode detectar os grupos de risco para a subscrição de um crédito.
- Em econometria, permite explicar uma variável discreta, como por exemplo as intenções de voto em atos eleitorais.

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

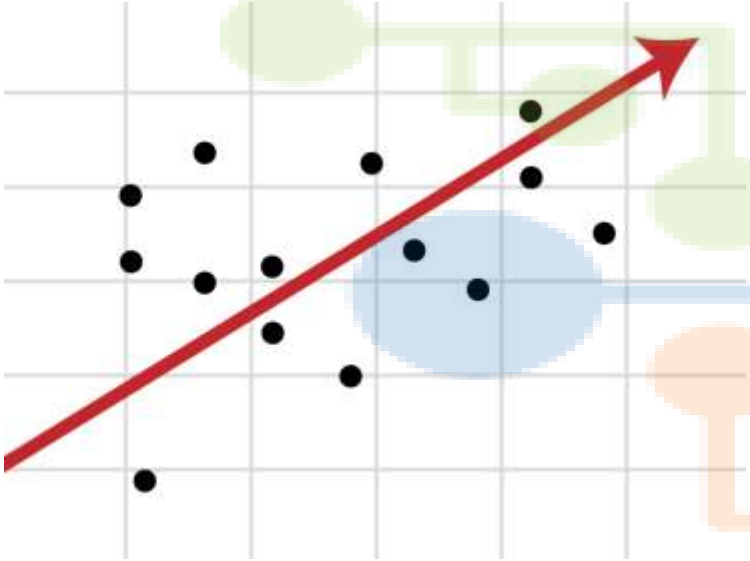
Data Science Academy

# Regressão
# Vantagens e Desvantagens

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d

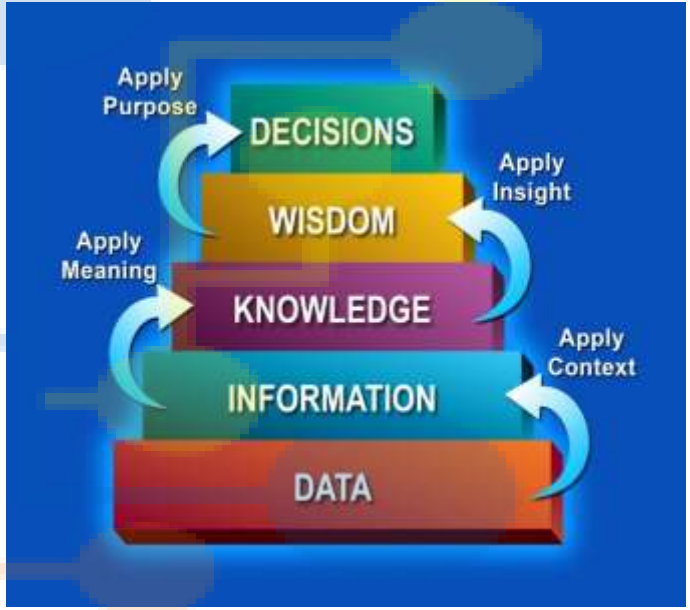
- **Simple Linear Regression**
- **Multiple Linear Regression**
- **Ridge Regression**
- **Lasso Regression**
- **Logistic Regression**
- Polynomial Regression
- Stepwise Regression
- Elastic Net Regression



Não coloque a culpa no modelo, se você não entregar o que ele está esperando

# Previsão do Futuro

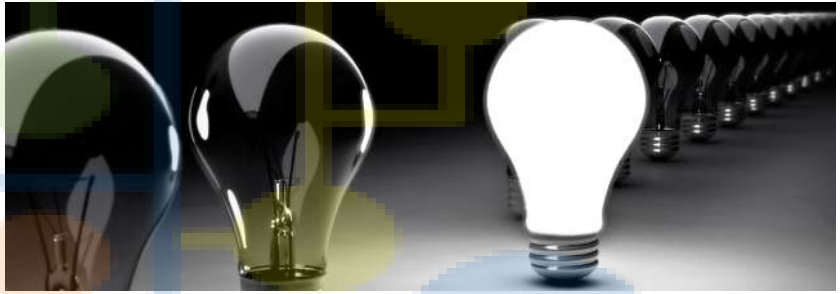
# Apoio à Tomada de Decisão



# Correção de Erros

Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


# Novos Insights

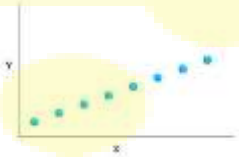


Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d


# Importantes Desvantagens:

Importantes Desvantagens:

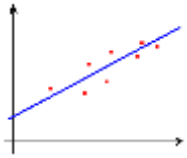
- Apenas consideram relacionamento linear



- Toma como base a média da variável dependente

- Sensível a Outliers

- Regressão Linear assume que os dados são independentes



Data Science Academy rodrigo.c.abreu@hotmail.com 5e207d48e32fc335fa60447d