Inteligencia Artificial
Modelado de Restricciones Especiales

Nicolás Rojas-Morales
nicolas.rojasm@usm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Disyunción

Restricción:
De dos restricciones al menos una debe darse. Debe cumplirse una de las restricciones, no necesariamente las dos.

$$\{f(x) \leq 0\} \text{ ó } \{g(x) \leq 0\}$$

Variables:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{obliga a } g(x) \leq 0 \text{ y relaja la otra restricción} \\ 0 & \text{obliga a } f(x) \leq 0 \text{ y relaja la otra restricción} \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq M_1 \cdot \delta \\ g(x) &\leq M_2 \cdot (1 - \delta) \end{aligned}$$

Cumplir k de N ecuaciones

Restricción:
De N ecuaciones se deben cumplir al menos k, siendo $k < N$

$$\{f_1(x) \leq 0\}, \ldots, \{f_N(x) \leq 0\}$$

Variables:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la restricción } i \text{ se cumple} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned} f_i(x) &\leq M_i \cdot (1 - y_i) \\ \sum_{i=1}^{N} y_i &\geq k \end{aligned}$$

Seleccionar el valor de una función entre N valores posibles

Restricción: Seleccionar entre N valores: Una ecuación con múltiples valores posibles.

$$f(x) = \begin{cases} v_1 \\ \dots \\ v_N \end{cases}$$

Variables:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la ecuación toma el valor } i\text{-ésimo} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

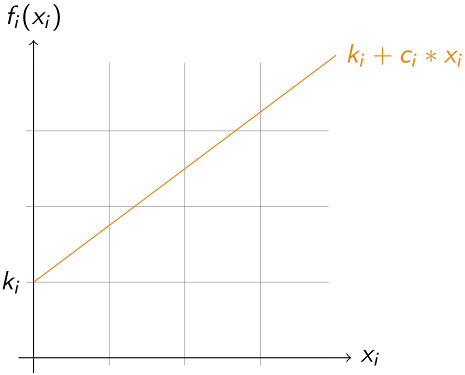
Restricciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i &= 1 \end{aligned}$$

Modelado de costos fijos (1/2)

- Costo con un término fijo si la variable toma un valor estrictamente positivo

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ k_i + c_i * x_i & x_i > 0 \end{cases}$$



Modelado de costos fijos (2/2)

- Variable auxiliar binaria:

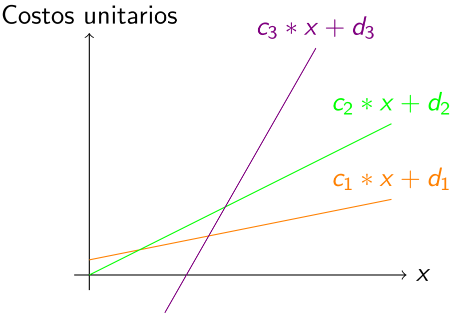
$$y_i = \begin{cases} 1 & x_i > 0 \\ 0 & x_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Mín} & k_i * y_i + c_i * x_i \\ x_i \leq M * y_i & (\text{ M valor grande}) \end{array}$$

Modelado de funciones minimax (1/2)

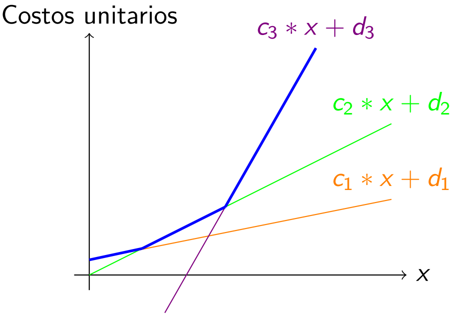
- Modelado de la minimización del máximo costo:
  Mín $f(x)$, $A * x = b$, $x \geq 0$
  donde
  $f(x) = \text{Máx } \{\{c_1 * x + d_1\}, \{c_2 * x + d_2\}, \ldots, \{c_p * x + d_p\}\}$
  $x, c_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}$

- Gráficamente: En una dimensión



Modelado de funciones minimax (1/2)

- Modelado de la minimización del máximo costo:
  Mín $f(x)$, $A * x = b$, $x \geq 0$
  donde
  $f(x) = \text{Máx}\ \{\{c_1 * x + d_1\}, \{c_2 * x + d_2\}, \ldots, \{c_p * x + d_p\}\}$
  $x, c_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}$



- Gráficamente: En una dimensión

Modelado de funciones minimax (2/2)

$$
\begin{aligned}
&\text{Mín } z \\
&z \geq c_1 * x + d_1 \\
&z \geq c_2 * x + d_2 \\
&\dots \\
&z \geq c_p * x + d_p \\
&A * x = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Modelado de implicaciones lógicas

Caso 1.a: De variables binarias a restricciones $\leq$

Restricción

IF $\delta = 1$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i \leq b$

Formulación

$\sum_i a_i \cdot x_i \leq b + (1 - \delta) \cdot M$

Consecuencia

Como $A \rightarrow B$ equivale a $\neg B \rightarrow \neg A$
IF $\sum_i a_i \cdot x_i > b$ THEN $\delta = 0$

Caso 1.b: De variables binarias a restricciones $\geq$

Restricción

IF $\delta = 1$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$

Formulación

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + (1 - \delta) \cdot m$

Consecuencia

Como $A \rightarrow B$ equivale a $\neg B \rightarrow \neg A$
IF $\sum_i a_i \cdot x_i < b$ THEN $\delta = 0$

Caso 2.a: De restricciones $\geq$ a variables binarias

Restricción

IF $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$ THEN $\delta = 1$

Equivalencia

IF $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$ THEN $\delta = 1$ equivale a IF $\delta = 0$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i < b$
IF $\delta = 0$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon$

Formulación

$\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon + \delta \cdot M'$

Consecuencia

Como $A \rightarrow B$ equivale a $\neg B \rightarrow \neg A$
IF $\delta = 0$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i < b$

Caso 2.b: De restricciones $\leq$ a variables binarias

Restricción

IF $\sum_i a_i \cdot x_i \leq b$ THEN $\delta = 1$

Equivalencia

IF $\sum_i a_i \cdot x_i \leq b$ THEN $\delta = 1$ equivale a IF $\delta = 0$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i > b$
IF $\delta = 0$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + \epsilon$

Formulación

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + \epsilon + \delta \cdot m'$

Consecuencia

Como $A \rightarrow B$ equivale a $\neg B \rightarrow \neg A$
IF $\delta = 0$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i > b$

Caso 3: De variables binarias a restricciones $=$

Restricción

IF $\delta = 1$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i = b$

Equivalencia

IF $\delta = 1$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i = b$ equivale a:
IF $\delta = 1$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i \leq b$ AND $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$

Formulación

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + (1 - \delta) \cdot m$
$\sum_i a_i \cdot x_i \leq b + (1 - \delta) \cdot M$

Caso 4: De restricciones = a variables binarias

Restricción

IF $\sum_i a_i \cdot x_i = b$ THEN $\delta = 1$

Equivalencia

SI $\sum_i a_i \cdot x_i = b$ THEN $\delta = 1$ equivale a:
SI ($\sum_i a_i \cdot x_i \leq b$ AND $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$) THEN $\delta = 1$
SI $\delta = 0$ THEN ($\sum_i a_i \cdot x_i < b$ OR $\sum_i a_i \cdot x_i > b$)

Formulación

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + \epsilon + \delta_2 \cdot m'$
$\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon + \delta_1 \cdot M'$
$\delta_1 + \delta_2 - 1 \leq \delta$

Caso 5: De restricciones a restricciones (1)

Hint!: Usar que $A \Rightarrow B \Leftrightarrow BOR\neg A$

Caso 5.1

$\sum_i a_i \cdot x_i > b \Rightarrow \sum_i c_i \cdot x_i \leq d$
$\{\sum_i c_i \cdot x_i \leq d\}OR\{\sum_i a_i \cdot x_i \leq b\}$

Caso 5.2

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b \Rightarrow \sum_i c_i \cdot x_i \leq d$
$\{\sum_i c_i \cdot x_i \leq d\}OR\{\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon\}$

Caso 5.3

$\sum_i a_i \cdot x_i = b \Rightarrow \sum_i c_i \cdot x_i \geq d$
$\{\sum_i c_i \cdot x_i \geq d\}OR\{\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon\}OR\{\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + \epsilon\}$

Caso 5: De restricciones a restricciones (2)

Caso 5.4

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b \Rightarrow \sum_i c_i \cdot x_i = d$
$\{\{\sum_i c_i \cdot x_i \leq d\} AND \{\sum_i c_i \cdot x_i \geq d\}\} OR \{\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon\}$

Formulación

$\sum_i c_i \cdot x_i \leq d + \delta \cdot M$
$\sum_i c_i \cdot x_i \geq d + \delta \cdot m$
$\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon + (1 - \delta) \cdot M'$

Modelado de dobles implicaciones

Variables binarias y restricciones $\leq$

$\delta = 1 \Leftrightarrow \sum_i a_i \cdot x_i \leq b$

IF $\delta = 1$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i \leq b$

$\sum_i a_i \cdot x_i \leq b + (1 - \delta) \cdot M$

IF $\sum_i a_i \cdot x_i \leq b$ THEN $\delta = 1$

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + \epsilon + \delta \cdot m'$

Variables binarias y restricciones $\geq$

$\delta = 1 \Leftrightarrow \sum_i a_i \cdot x_i \geq b$

IF $\delta = 1$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + (1 - \delta) \cdot m$

IF $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$ THEN $\delta = 1$

$\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon + \delta \cdot M'$

Restricciones & restricciones

$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b \Leftrightarrow \sum_i c_i \cdot x_i \leq d$

IF $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$ THEN $\sum_i c_i \cdot x_i \leq d$

$$\sum_i c_i \cdot x_i \leq d + \delta \cdot K$$
$$\sum_i a_i \cdot x_i \leq b - \epsilon + (1 - \delta) \cdot M'$$

IF $\sum_i c_i \cdot x_i \leq d$ THEN $\sum_i a_i \cdot x_i \geq b$

$$\sum_i a_i \cdot x_i \geq b + \delta \cdot m$$
$$\sum_i c_i \cdot x_i \geq d + \epsilon + (1 - \delta) \cdot k'$$