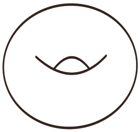
Teorema de clasificación de superficies topológicas

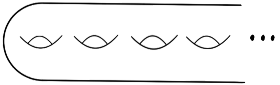
Junio 2020

Superficie topológica

- Localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
- Hausdorff, segundo numerable y conexo (*orientable).

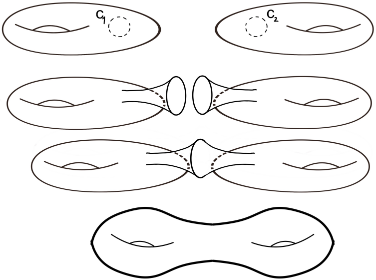
Algunos ejemplos





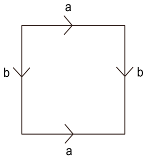
Suma conexa

Operador entre superficies

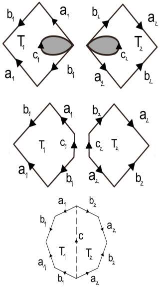


Ejemplos de suma conexa

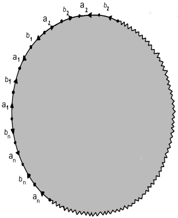
Toro, suma conexa de dos y de *n* toros:



(a)



(b)

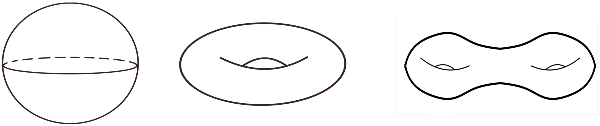


(c)

Teorema de clasificación de superficies compactas

Toda superficie compacta orientable es homeomorfa a una esfera o a una suma conexa de n toros.

Observación: Al n se le llama *género*.

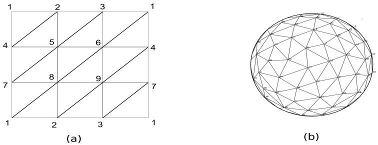


...

Triangulación

Teorema (Radó 1925)

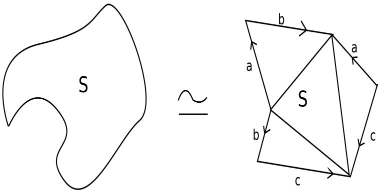
Toda superficie separable es triangulable.



Toro y esfera triangulados.

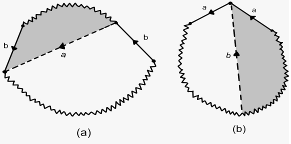
Paso 1

Se usa el resultado de Radó para expresar una superficie como un polígono con las aristas identificadas a pares.



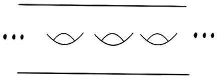
Paso 2

Se realizan cortes e identificaciones para obtener el polígono anterior equivalente a la suma conexa de n toros.



Ejemplos de superficies no compactas

(a)



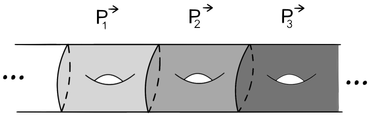
(b)

Observación: El género ya no caracteriza una superficie.

Extremo

Subconjuntos $P_1 \supset P_2 \supset \ldots$ que cumplen:

- Conexos, no acotados y de frontera compacta.
- $\forall A \subset S$ compacto, $\exists n$ con $P_n \cap A = \emptyset$.

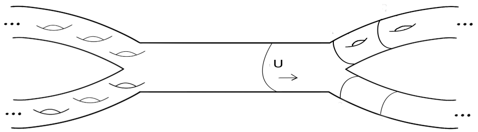


Borde ideal

$B(S)$ es el conjunto de extremos salvo equivalencia.

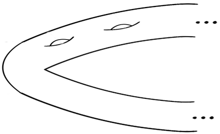
Topología de B(S)

Para $U \subset S$ no acotado de frontera compacta, definimos U^* como el conjunto de extremos contenidos en U.



Los U^* forman una base de una topología.

Los extremos pueden ser de género infinito o planos.



El conjunto $B'(S)$ de extremos de género infinito es un cerrado. Llamamos borde ideal a la tupla $(B(S), B'(S))$.

Teorema (Kerékjártó 1923)

El tipo topológico de una superficie orientable está determinado por su género y borde ideal.

Se construyen inductivamente las tuplas (A_i, A'_i, f_i) con:

- A_i y A'_i subsuperficies compactas.
- $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ (igual con S').
- $f_i : A_i \longrightarrow A'_i$ homeomorfismo.

Proposición

El borde ideal de toda superficie es homeomorfo a un par (X,Y):

- *X subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.*
- *Y cerrado de X.*

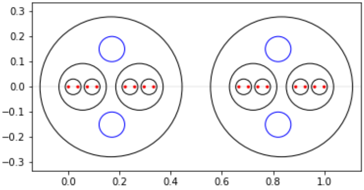
Teorema (Richards 1963)

Para todo par (X, Y) anterior, podemos construir una superficie con ese borde ideal.

Idea de la demostración

Por cada $p \in X$ construimos un extremo:

- Plano si $p \in X \setminus Y$.
- De género infinito si $p \in Y$.



Cardinalidad de superficies salvo homeomorfismo:

- Hay $\aleph_0$ superficies compactas.
- Hay $2^{\aleph_0}$ superficies no compactas.
- Hay $2^{2^{\aleph_0}}$ superficies **no** segundo numerables.