Teorema de clasificación de superficies topológicas

Junio 2020

Definición

S es superficie topológica si

- *Localmente homeomorfo a una bola en* $\mathbb{R}^2$.
- *Hausdorff, segundo numerable y conexo (*orientable).*

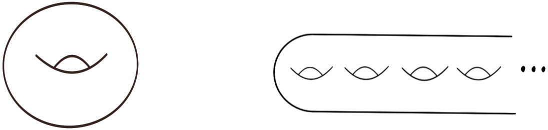


Figura: Una superficie compacta y otra no compacta

Suma conexa

Definición

La suma conexa es un operador entre superficies:

$$S' = S_1 \# S_2$$

S' resulta de de retirar un disco abierto de cada superficie e identificarlas por el borde.

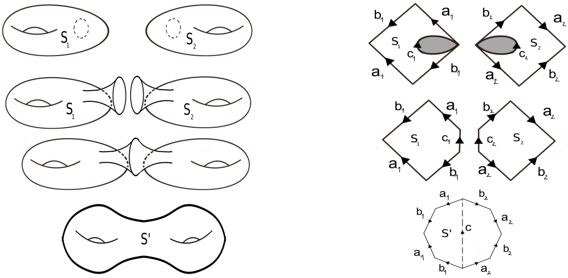


Figura: Suma conexa de toros

Definición

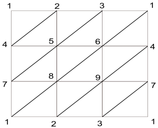
Una triangulación de una superficie S es una colección de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ que recubren a la superficie y cumplen:

- *Todo T_i es homeomorfo a un triangulo en $\mathbb{R}^2$.*
- *Dos conjuntos T_i y T_j distintos o son disjuntos o comparten solo un vértice o comparten toda una arista.*

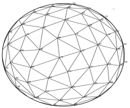
Triangulación

Ejemplos

Toro y esfera triangulados



(a)

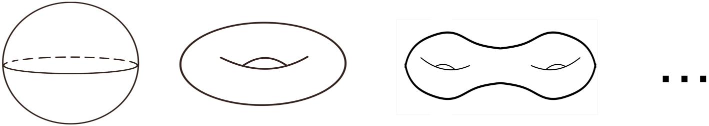

(b)

Teorema de Tibor Radó

Toda superficie separable es triangulable.

Teorema

Toda superficie compacta orientable es homeomorfa o a una esfera o una suma conexa de n toros.



Demostración.

Primero, se utiliza el teorema de Tibor Radó para expresar una superficie como un polígono donde todas las aristas del borde están identificadas a pares.

Luego, mediante cortes e identificaciones obtenemos un nuevo polígono que es equivalente o a una esfera o una suma conexa de n toros.

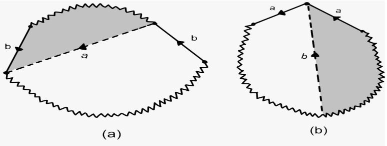
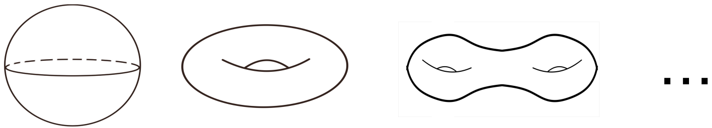
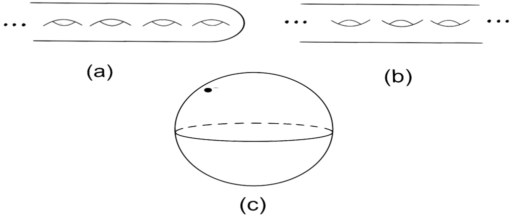


Figura: recorte e identificación



Llamaremos *género* de una superficie compacta al número n de toros al que es homeomorfa. Si es homeomorfa a una esfera diremos que tiene género 0.

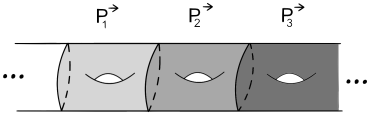
Superficies no compactas:



Para las superficies no compactas el género ya no caracteriza totalmente a la superficie.

Un *extremo* es una sucesión de subconjuntos encajados $P_1 \supset P_2 \supset \ldots$ que son:

- Conexos, no acotados y de frontera compacta
- Para cualquier subconjunto compacto $A \subset S$, existe un n con $P_n \cap A = \emptyset$.



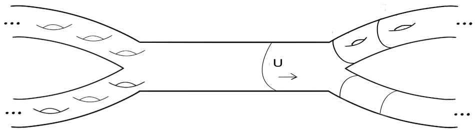
Definición

El borde ideal $B(S)$ de una superficie es el conjunto de extremos salvo equivalencia.

Sobre $B(S)$ tomamos la topología que tiene por base el conjunto

$$\{U^* : U \subset S, \text{ no acotado de frontera compacta}\}$$

donde U^* es el conjunto de extremos contenidos en U.



El subconjunto de extremos de género infinito se denota por $B'(S)$. Se suele llamar borde ideal a la tupla $(B(S), B'(S))$.

Teorema

Sean S y S' dos superficies orientables del mismo género, entonces serán homeomorfas si y solo si lo son sus bordes ideales como tuplas de espacios.

Demostración.

El homeomorfismo entre bordes ideales nos permite definir las sucesiones de subsuperficies compactas $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ y $A'_1 \subset A'_2 \subset \ldots$ de modo que:

- Recubren a S y S', respectivamente.
- Para todo n existe el homeomorfismo entre subsuperficies $f_n : A_n \longrightarrow A'_n$.

El homeomorfismo entre las superficies S y S' será $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

□

Proposición

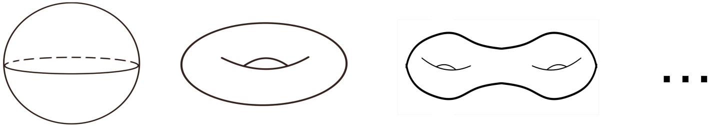
El borde ideal de una superficie $(B(S), B'(S))$ *es homeomorfo a* (X, Y) *con* Y *cerrado de* X, *y* X *un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.*

Teorema

Para todo par (X, Y) *anterior, podemos construir una superficie con ese borde ideal.*

Cardinalidad de superficies salvo homeomorfismo:

- Hay $\aleph_0$ superficies compactas



- Hay $\aleph_1$ superficies no compactas (cantidad de subconjuntos cerrados del conjuntos de Cantor no homeomorfos entre sí).
- Hay $\aleph_2$ superficies **no** segundo numerables.