Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Teorema de clasificación de superficies

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

Autor: Rodrigo De Pool
Tutor: Javier Aramayona

Curso 2019-2020

Resumen

Aquí va algo

Abstract

Here goes something

Índice general

CAPÍTULO 1

Cachos sueltos

El trabajo presenta un estudio de las superficies topológicas y su clasificación. Primero, se estudiarán algunas herramientas, como el de suma conexa o triangulación, que serán útiles para demostrar el teorema de clasificación bajo la hipótesis de compacidad. Luego, nos acercaremos al resultado de [KEREKJARTOS] en el que se retira la exigencia de compacidad, para ello tendremos que introducir nuevas nociones como el de finales o frontera ideal. Por último, examinaremos la demostración constructiva de Ian Richards [2] que permite construir una superficie representante para cada clase de equivalencia topológica, y, además, desvela una interesante relación entre las 2-variedades conexas no compactas y los subconjuntos del conjunto de Cantor.

1.1. Introducción a las superficies topológicas

Para formalizar el concepto de superficie necesitamos primero definir las variedades topológicas:

Definición 1.1. Un conjunto, $\mathcal{X}$, dotado de una topología, diremos que es una *n-variedad* si es Hausdorff y para todo punto existe un entorno homeomorfo a una bola abierta n dimensional.

Llamaremos entonces *superficie* a toda 2-variedad conexa que cumple el segundo axioma de numerabilidad. La definición generaliza el concepto intuitivo que se suele manejar de superficies. Algunos ejemplos de superficies son: La esfera con la topología de usual o un toro con la topología de inducida de $\mathcal{R}^3$, que son ambas orientables;o una banda de Möbius con la topología de subespacio, para el caso de una superficie no orientable.

[IMAGEN 1]

1.1.1. Superficies compactas

El toro y el plano proyectivo son dos superficies esenciales para entender la clasificación de superficies compactas. Por ende, se plantean algunos ejemplos para familiarizarnos con estas variedades.

Tomando el cuadrado cerrado $X = \{(x, y) \in R^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1\}$ con la topología de subespacio, el *toro* se construye de identificar:

$$(x, -1) \equiv (x, 1) \quad x \in [-1, 1]$$
$$(-1, y) \equiv (1, y) \quad y \in [-1, 1]$$

Y dotar al conjunto resultante con la topología de espacio cociente. En 1.1.1 se representa gráficamente el toro (las aristas con la misma letra se identifican siguiendo el sentido indicado por la flecha).

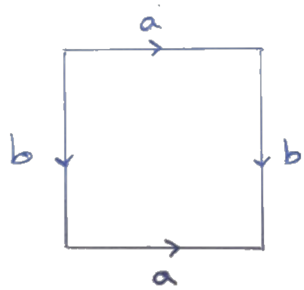

Figura 1.1: Toro

Es un ejercico simple pero extenso demostrar que el toro así definido es homeomorfo a la estructura de donut que se suele estudiar.

Por su parte, el *plano proyectivo* parte del mismo conjunto X y se construye con las identificaciones:

$$(x, -1) \equiv (-x, 1) \quad x \in [-1, 1]$$
$$(-1, y) \equiv (1, -y) \quad y \in [-1, 1]$$

Utilizando en este caso también la topología cociente. Equivalentemente se puede definir como el espacio cociente que resulta de identificar los puntos diametralmente opuestos de S^2.

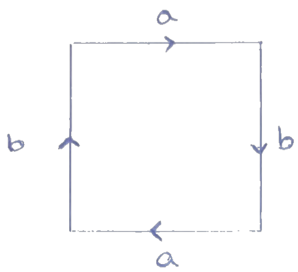

Figura 1.2: Plano proyectivo

Las gráficas [REF IMG1] y [REF IMG2] nos permiten establecer una notación algebraica para referirnos a estas superficies: Inciando en una arista cualquiera recorremos la figura en el sentido de las agujas del reloj y anotamos cada letra que encontramos, agregando un exponente a la -1 en caso de que el sentido de su flecha sea inverso al del recorrido. Con esto describiríamos [REG IMG1] como $aba^{-1}b^{-1}$ y [REF IMG2] como $abab$. La notación nos permite referirnos a nuevas superficies fácilmente, por ejemplo, $aba^{-1}b$ se correspondería con [REF IMG4] y aa^{-1} con [REF IMG5].

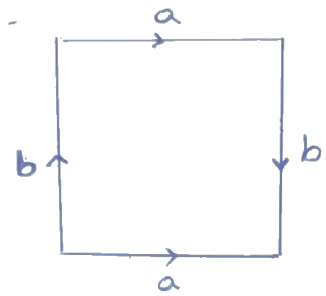

Figura 1.3: Botella de Klein

[IMAGEN 5]

El siguiente lema [REF A LEMA] nos permitirá comprobar que todas las superficies tratadas hasta ahora son compactas.

Lema 1.2. *Sea X un espacio topológico e Y un espacio cociente que resulta de identificar puntos en X. Entonces:*

$$X \textit{ compacto} \Rightarrow Y \textit{ compacto}$$

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ la función cociente que asocia a cada punto su clase de equivalencia; f es claramente sobreyectiva y, por ser cociente, es continua.
Siendo X compacto tenemos entonces que $f(X) = Y$ también lo es. □

Definimos a continuación un operador que nos permitirá generar infinidad de nuevas superficies partiendo de las ya estudiadas (de hecho, si se me permite el *spoiler*, podremos generar todas las superficies compactas posibles).

Definición 1.3. Dadas dos superfices S_1 y S_2 podemos definir la suma conexa de ambas, $S_1 \# S_2$, como la superficie generada a partir de los siguientes pasos:

1. Para cada S_i tomamos un subconjunto $D_i \subset S_i$ homeomorfo al disco cerrado de dos dimensiones E^2. Llamamos S'_i al complementario del interior de D_i.

2. Sea ϕ_i el homeomorfismo que manda D_i al disco cerrado E^2, definimos el homeomorfismo ψ que manda la frontera de D'_1 a la frontera de D'_2 como:

$$\psi = ((\phi_2 \mid_{fr(D_2)})^{-1}) \circ (\phi_1 \mid_{fr(D_1)})$$

3. Definimos entonces $S_1 \# S_2$ como $S'_1 \cup S'_2$ dotado de la topología cociente que resulta de identificar los puntos x y $\psi(x)$ para todo punto de la frontera de D_1.

Para confirmar la validez de estar definición hay que aclarar varios puntos:

1. Primero, por qué podemos asegurar en el punto 1 de la definición que existe un subconjunto homeomorfo a un disco.

   Demostración. Tomamos un punto $p \in S_i$ cualquiera. Como S_i es una 2-variedad, entonces existe un homeomorfismos g que manda un entorno, U, del punto p al círculo abierto.

   Tomamos $E_{\frac{1}{2}}$ el disco cerrado de radio $\frac{1}{2}$, y $U' = g^{-1}(E_{\frac{1}{2}})$. Tenemos que $g\mid_{U'}$ es un homeomorfismo de un subconjunto de S_i a $E_{\frac{1}{2}}$ que a su vez es homeomorfo al disco cerrado de radio 1. (HACE FALTA?) $\square$

2. Segundo, tenemos que asegurarnos que en el punto 2 las fronteras de D_1 y D_2 tienen la misma imagen.

   Demostración. Comencemos por aclarar una sutileza en la definición: Cuando hablamos de D_i homeomorfos a E^2, nos referimos a homeomorfos como subconjuntos de las superficies, no como conjuntos independientes dotados de la topología del subconjunto.

   Partiendo de eso, basta con probar que dado un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, y el conjunto cerrado $B \subset X$, entonces $f(fr(B))) = fr(f(B))$. Para esto basta con probar que dado un homeomorfismo $f : U \subset X \longrightarrow V \subset Y$, con U y V cerrados, se cumple que $f(fr(U)) = fr(V)$. Esto se sigue directamente de que $f(\mathring{B}) = \mathring{f(B)}$, que a su vez es resultado inmediato de las propiedades de homeomorfismos. (HACE FALTA?) $\square$

3. Tercero, habría que comprobar que, en efecto, el objeto obtenido es una superficie. Es decir, comprobar que todo punto tiene un entorno homeomorfo al disco abierto, que el espacio es T2 y que es conexo.

   Demostración. (HACE FALTA?) $\square$

4. Y, finalmente, tenemos que comprobar que esta definición es independiente de los conjuntos D_i escogidos e independiente de los homeomorfismos.

   Demostración. (HACE FALTA?) $\square$

[Nota: sigo acaso demasiado la estructura que hay en el libro de massey? es esto un plagio? No sabría plantearlo de otra forma, su hilo argumental tiene todo el sentido del mundo]

CAPÍTULO 2

Algunos resultados de topología

Cosas que empecé a escribir pero que probablemente no haga falta incluir en el TFG. Son definiciones elementales de topo y algunos lemas

Definición 2.1. Un conjunto $\mathcal{X}$ es no conexo si existen dos conjuntos cerrados, $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$, tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ y $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$.

Definición 2.2. Un conjunto $\mathcal{X}$ se dice conexo si no cumple la definición anterior.

Para considerar gráficamente el toro se asigna a cada arista de un cuadrado unidad una letra y un sentido. Si dos aristas comparten letra, entonces son puntos identificados según el sentido de la flecha. Mostramos en 1.1.1 la representación visual del toro.

Partiendo de la notación gráfica se puede establecer una notación algebraica. Empezando en uno de los vértices recorremos el borde de la figura en el sentido de las agujas del reloj, si el sentido de la arista corresponde con el del recorrido entonces escribimos la letra, si es contrario entonces escribimos la letra elevado a -1. En el caso del toro tenemos: $aba^{-1}b^{-1}$

Definición 2.3. Se llama plano proyectivo al cuadrado unidad, identificando los puntos:

- $(x, 1)$ con $(1 - x, 0)$ para $0 \leq x \leq 1$
- $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para $0 \leq y \leq 1$

La topología que se considera es la cociente, inducida por el cuadrado cerrado con la topología usual.

En la figura 1.1.1 observamos el plano proyectivo en notación visual.

En notación algebraica el plano proyectivo se escribe $abab$.

Sirviéndonos de la notación algebraica podemos definir *la botella de Klein* como $aba^{-1}b$

Lema 2.4. *El pseudolema más útil de toda la topología*

Al dilatar, comprimir, trasladar y cortar-identificar una figura, el objeto obtenido es homeomorfo al inicial. ¿Por qué?, se pregunta un matemático, porque todas las transformaciones son continuas. (¿Incluir en el TFG en tono seriesisímo?)

¿Ejemplillos de suma conexa de toros y planos proyectivos?

Lema 2.5. *La suma conexa de dos planos proyectivos es una botella de Klein.*

Demostración. Un plano proyectivo se puede entender como el disco unidad en el que se identifican los puntos diametralmente opuestos. Utilizando esta definición seleccionamos el subconjunto $D = \left\{(x, y) : |y| \geq \frac{1}{2}, |x| \leq \sqrt{1 - y^2}\right\}$, homeomorfo al disco cerrado, para realizar la suma conexa de los planos. En la figura 2.5 eliminamos el conjunto D e indicamos con líneas discontinuas los segmentos a identificar con la otra superficie.

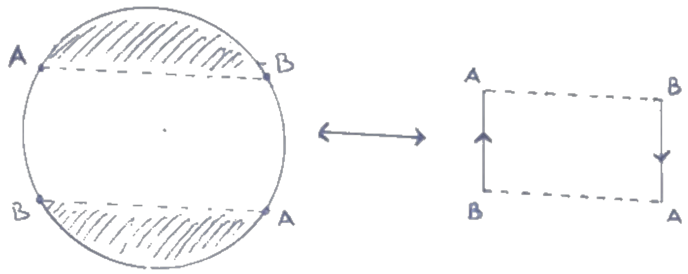

Figura 2.1: Plano proyectivo menos un subconjunto homemorfo al disco cerrado

Tomamos entonces dos planos proyectivos I e II y realizamos la suma conexa:

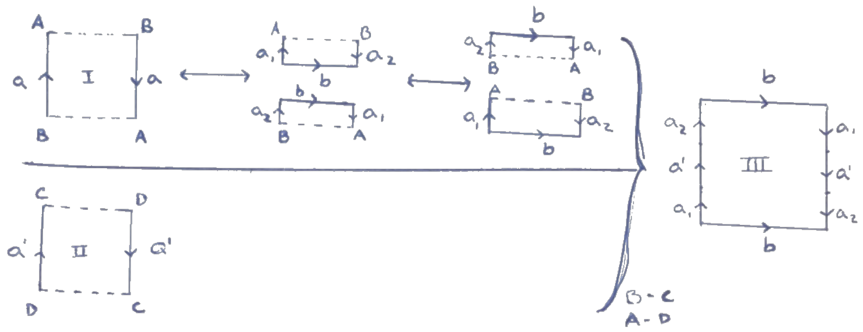

Figura 2.2: Suma conexa de planos proyectivos

La figura final obtenida (III) es una *Botella de Klein.* □

Definición 2.6. Una triangulación de una superficie compacta, S, consiste en subconjuntos cerrados, $T_1, ..., T_n$, que cubren a S y una familia de homeomorfismos, $\phi_1, ..., \phi_n$, que cumplen:

$$\phi_i : T_i' \longrightarrow T_i$$

Donde T_i' es un triángulo del plano $\mathbb{R}^2$. Además, tomando T_i y T_j con $i \neq j$, se cumple una de las siguientes condiciones:

- Son conjuntos totalmente disjuntos.
- Comparten un solo vértice en común y solo eso (Llamamos vértice a todo elemento de S que se corresponde por algún ϕ_i con un vértice en el plano).
- Tienen toda una arista en común y solo eso (Llamamos arista a la imagen de una arista de alguún T_i' por ϕ_i).

Teorema 2.7. *Teorema de Tibor Radó*

Toda S superficie compacta es triangulable.

(NO LO DEMOSTRAREMOS)

Lemas de triangulación

Lema 2.8. *Sea S una superficie triangulable entonces una arista lo es de exactamente dos triángulos.*

(TODO: FALTA DEMS)

Lema 2.9. *Sea S una superficie triangulable y $v \in S$ un vértice en esa triangulación, entonces podemos ordenar el conjunto de todos los triángulos con vértice v cíclicamente, $T_0, T_1, ..., T_n = T_0$, de manera que T_i y T_{i+1} tienen toda una arista en común para todo $0 \leq i \leq n-1$.*

(TODO: FALTA DEMS)

Teorema 2.10. *Teorema de clasificación de superficies compactas*

Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos.

Bibliografía

[1] William S. Massey: Introducción a la topología algebraica. *Editorial Reverté* **1** (2006), 1–29.

[2] Ian Richards *Classification of non compact surfaces...o algo asi*