



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Teorema de clasificación de superficies

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Rodrigo De Pool

Tutor: Javier Aramayona

Curso 2019-2020

Resumen

Aquí va un resumen.

Abstract

Here goes the abstract

Índice general

1	Introducción y preliminares	1
1.1	Introducción a las superficies topológicas	1
1.1.1	Superficies compactas	1
2	Algunos resultados de topología	5

CAPÍTULO 1

Introducción y preliminares

El trabajo presenta un estudio de las superficies topológicas y su clasificación. Primero, se estudiarán algunas herramientas, como el de suma conexa o triangulación, que serán útiles para demostrar el teorema de clasificación bajo la hipótesis de compacidad. Luego, nos acercaremos al resultado de [KEREKJARTOS] en el que se retira la exigencia de compacidad, para ello tendremos que introducir nuevas nociones como el de finales o frontera ideal. Por último, examinaremos la demostración constructiva de Ian Richards [2] que permite construir una superficie representante para cada clase de equivalencia topológica, y, además, desvela una interesante relación entre las 2-variedades conexas no compactas y los subconjuntos del conjunto de Cantor.

1.1. Introducción a las superficies topológicas

Para formalizar el concepto de superficie necesitamos primero definir las variedades topológicas:

Definición 1.1. Un conjunto, \mathcal{X} , dotado de una topología, diremos que es una n -variedad si es Hausdorff y para todo punto existe un entorno homeomorfo a una bola abierta n dimensional.

Llamaremos entonces *superficie* a toda 2-variedad conexa que cumple el segundo axioma de numerabilidad. La definición generaliza el concepto intuitivo que se suele manejar de superficies. Algunos ejemplos de superficies son: La esfera con la topología de usual o un toro con la topología de inducida de \mathcal{R}^3 , que son ambas orientables; o una banda de Möbius con la topología de subespacio, para el caso de una superficie no orientable.

[IMAGEN 1]

1.1.1. Superficies compactas

El toro y el plano proyectivo son dos superficies esenciales para entender la clasificación de superficies compactas. Por ende, se plantean algunos ejemplos para familiarizarnos con estas variedades.

Tomando el cuadrado cerrado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ con la topología de subespacio, el *toro* se construye de identificar:

$$\begin{aligned}(x, -1) &\equiv (x, 1) & x \in [-1, 1] \\ (-1, y) &\equiv (1, y) & y \in [-1, 1]\end{aligned}$$

Y dotar al conjunto resultante con la topología de espacio cociente. En la [REF A IMG2] se representa gráficamente el toro, las aristas con la misma letra se identifican siguiendo el sentido indicado por la flecha.

[IMAGEN 2]

Es un ejercicio simple pero extenso demostrar que el toro así definido es homeomorfo a la estructura de donut que se suele estudiar.

Por su parte, el *plano proyectivo* parte del mismo conjunto X y se construye con las identificaciones:

$$\begin{aligned}(x, -1) &\equiv (-x, 1) & x \in [-1, 1] \\ (-1, y) &\equiv (1, -y) & y \in [-1, 1]\end{aligned}$$

Utilizando en este caso también la topología cociente. Equivalentemente se puede definir como el espacio cociente que resulta de identificar los puntos diametralmente opuestos de S^2 .

[IMAGEN 3]

Las gráficas [REF IMG1] y [REF IMG2] nos permiten establecer una notación algebraica para referirnos a estas superficies: Iniciando en una arista cualquiera recorremos la figura en el sentido de las agujas del reloj y anotamos cada letra que encontramos, agregando un exponente a la -1 en caso de que el sentido de su flecha sea inverso al del recorrido. Con esto describiríamos [REF IMG1] como $aba^{-1}b^{-1}$ y [REF IMG2] como $abab$. La notación nos permite referirnos a nuevas superficies fácilmente, por ejemplo, $aba^{-1}b$ se correspondería con [REF IMG4] y aa^{-1} con [REF IMG5].

[IMAGEN 4](Botella de klein, OYE INTENTA HACER LA DEMS PARA ESTA SUPERFICIE)

[IMAGEN 5]

El siguiente lema [REF A LEMA] nos permitirá comprobar que todas las superficies tratadas hasta ahora son compactas.

Lema 1.2. *Sea X un espacio topológico e Y un espacio cociente que resulta de identificar puntos en X . Entonces:*

$$X \text{ compacto} \Rightarrow Y \text{ compacto}$$

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ la función cociente que asocia a cada punto su clase de equivalencia; f es claramente sobreyectiva y, por ser cociente, es continua.

Siendo X compacto tenemos entonces que $f(X) = Y$ también lo es. \square

Definimos a continuación un operador que nos permitirá generar infinidad de nuevas superficies partiendo de las ya estudiadas (de hecho, si se me permite el *spoiler*, podremos generar todas las superficies compactas posibles).

Definición 1.3. Sean S_1 y S_2 dos superficies disjuntas. Llamaremos *suma conexa* de ambas, $S_1 \# S_2$, a la superficie que resulta de: TODO CONTINUAR

[Nota: sigo acaso demasiado la estructura que hay en el libro de massey? es esto un plagio? No sabría plantearlo de otra forma, su hilo argumental tiene todo el sentido del mundo]

CAPÍTULO 2

Algunos resultados de topología

Cosas que empecé a escribir pero que probablemente no haga falta incluir en el TFG. Son definiciones elementales de topo y algunos lemas

Definición 2.1. Un conjunto \mathcal{X} es no conexo si existen dos conjuntos cerrados, \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 , tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ y $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$.

Definición 2.2. Un conjunto \mathcal{X} se dice conexo si no cumple la definición anterior.

Definición 2.3. Sea \mathcal{X} un espacio topológico con topología \mathcal{T}_X , sea \mathcal{Y} un conjunto, y f una función $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Entonces definimos la topología cociente:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \subset \mathcal{Y} : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$$

- Se puede comprobar \mathcal{T}_Y genera en efecto una topología de Y
- \mathcal{T}_Y es la topología más fina que hace continua a f
- Es usual trabajar con Y como una partición o conjunto de clases de equivalencia de X

Lema 2.4. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ continua, entonces:

$$X \text{ conexo} \Rightarrow Y \text{ conexo}$$

Demostración. content...

□

Lema 2.5. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ continua, entonces:

$$X \text{ compacto} \Rightarrow f(X) \text{ compacto}$$

(FALTA COROLARIO DE CUANDO F ES EXHAUSTIVA)

Lema 2.6. Sean X e Y espacios topológicos, X un compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ continua, entonces f es cerrada.

(FALTA COROLARIO DE QUE Y TIENE LA TOPO COCIENTE DETERMINADA POR F)

Definición 2.7. Una n -variedad es un espacio topológico de Hausdorff tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a la bola abierta n -dimensional.

Definición 2.8. A una 2-variedad conexa la llamaremos superficie.

Definición 2.9. Una triangulación de una superficie compacta, S , consiste en subconjuntos cerrados, T_1, \dots, T_n , que cubren a S y una familia de homeomorfismos, ϕ_1, \dots, ϕ_n , que cumplen:

$$\phi_i : T'_i \longrightarrow T_i$$

Donde T'_i es un triángulo del plano \mathbb{R}^2 . Además, tomando T_i y T_j con $i \neq j$, se cumple una de las siguientes condiciones:

- Son conjuntos totalmente disjuntos
- Comparten un solo vértice en común (Llamamos vértice a todo elemento de S que se corresponde por algún ϕ_i con un vértice en el plano).
- Tienen toda una arista en común y solo eso (Llamamos arista a la preimagen de una arista de algún T'_i por ϕ_i).

Teorema 2.10. *Teorema de Tibor Radó Toda S superficie compacta es triangulable.*

(NO LO DEMOSTRAREMOS)

LEMAS DE TRIANGULACIÓN

Lema 2.11. *Sea S una superficie triangulable entonces una arista lo es de exactamente dos triángulos.*

(TODO: FALTA DEMS)

Lema 2.12. *Sea S una superficie triangulable y $v \in S$ un vértice en esa triangulación, entonces podemos ordenar el conjunto de todos los triángulos con vértice v cíclicamente, $T_0, T_1, \dots, T_n = T_0$, de manera que T_i y T_{i+1} tienen toda una arista en común para todo $0 \leq i \leq n - 1$.*

(TODO: FALTA DEMS)

Bibliografía

- [1] WILLIAM S. MASSEY: Introducción a la topología algebraica. *Editorial Reverté*
1 (2006), 1–29.
- [2] IAN RICHARDS *Classification of non compact surfaces...o algo asi*

