

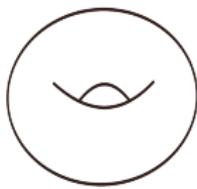
# Teorema de clasificación de superficies topológicas

Junio 2020

## Superficie topológica

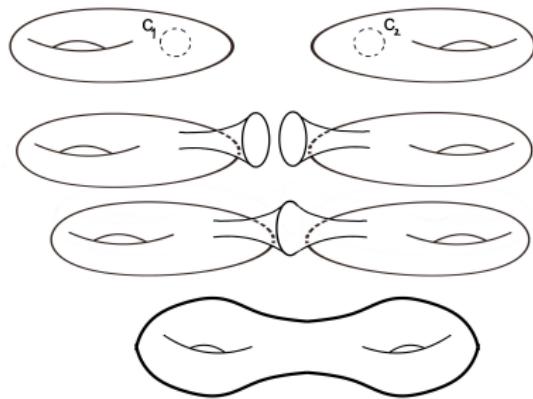
- Localmente homeomorfo a una bola en  $\mathbb{R}^2$ .
- Hausdorff, segundo numerable y conexo (\*orientable).

## Algunos ejemplos



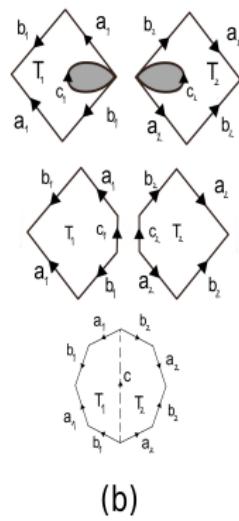
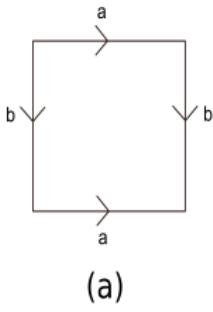
## Suma conexa

Operador entre superficies



# Ejemplos de suma conexa

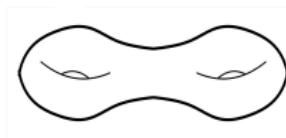
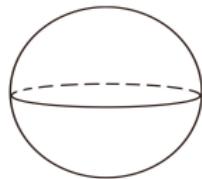
Toro y suma conexa de dos toros:



# Clasificación de superficies compactas

## Teorema de clasificación de superficies compactas

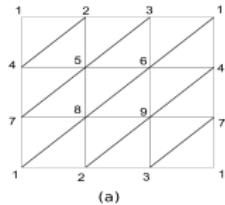
Toda superficie compacta orientable es homeomorfa a una esfera o a una suma conexa de  $n$  toros.



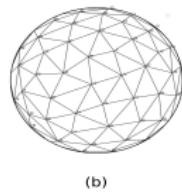
...

## Teorema (Radó 1925)

Toda superficie separable es triangulable.



(a)

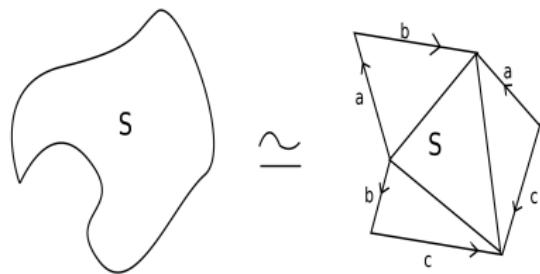


(b)

Toro y esfera triangulados.

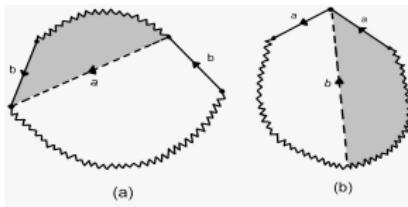
## Paso 1

Se usa el resultado de Radó para expresar una superficie como un polígono con las aristas identificadas a pares.



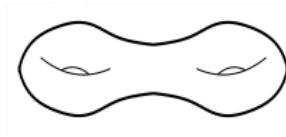
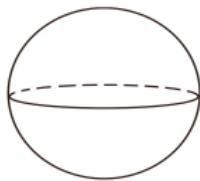
## Paso 2

Se realizan cortes e identificaciones para obtener un nuevo polígono equivalente a una esfera o a una suma conexa de  $n$  toros.



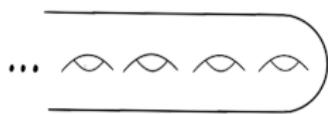
## Género

Número de toros al que una superficie es homeomorfo.

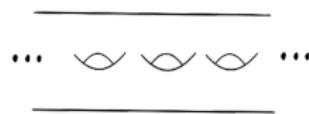


...

## Ejemplos de superficies no compactas



(a)

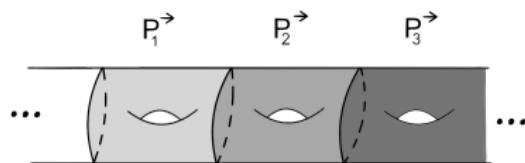


(b)

## Extremo

Subconjuntos  $P_1 \supset P_2 \supset \dots$  que cumplen:

- Conexos, no acotados y de frontera compacta
- $\forall A \subset S$  compacto,  $\exists n$  con  $P_n \cap A = \emptyset$ .

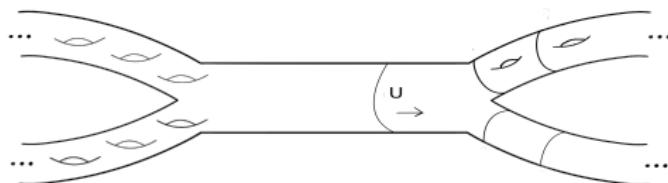


## Borde ideal

$B(S)$  es el conjunto de extremos salvo equivalencia.

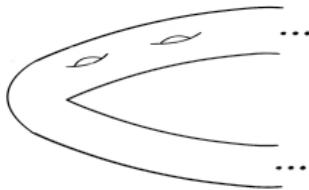
## Topología de $B(S)$

Para  $U \subset S$  no acotado de frontera compacta, definimos  $U^*$  como el conjunto de extremos contenidos en  $U$ .



Los  $U^*$  forman una base.

Los extremos pueden ser de género infinito o planos.



El conjunto  $B'(S)$  de extremos de género infinito es un cerrado.  
Llamamos borde ideal a la tupla  $(B(S), B'(S))$ .

# Clasificación de superficies no compactas

## Teorema (Kerékjártó 1923)

El tipo topológico de una superficie orientable está determinado por su género y borde ideal.

Se construyen inductivamente las tuplas  $(A_i, A'_i, f_i)$  con:

- $A_i$  y  $A'_i$  subsuperficies compactas.
- $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$  (igual con  $S'$ ).
- $f_i : A_i \longrightarrow A'_i$  homeomorfismo.

## Proposición

*El borde ideal de toda superficie es homeomorfo a un par  $(X, Y)$ :*

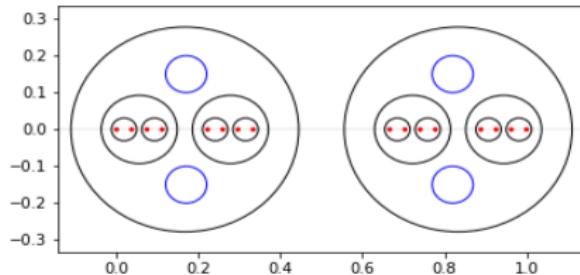
- $X$  subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.
- $Y$  cerrado de  $X$ .

# Representantes de superficies no compactas

Teorema (Richards 1963)

Para todo par  $(X, Y)$  anterior, podemos construir una superficie con ese borde ideal.

Idea de la demostración



Cardinalidad de superficies salvo homeomorfismo:

- Hay  $\aleph_0$  superficies compactas.
- Hay  $2^{\aleph_0}$  superficies no compactas.
- Hay  $2^{2^{\aleph_0}}$  superficies **no** segundo numerables.