

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# Teorema de clasificación de superficies

**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

*Autor:* Rodrigo De Pool  
*Tutor:* Javier Aramayona

Curso 2019-2020



## Resumen

El trabajo comprende un estudio riguroso de las superficies topológicas y su clasificación:

El primer bloque inicia introduciendo las nociones elementales de superficies compactas y procede a demostrar que, bajo hipótesis de compacidad, toda superficie es topológicamente equivalente: o a una esfera, o a una suma conexa finita de toros, o a una suma conexa finita de planos proyectivos.

Posteriormente, estudiaremos el resultado Keréjártó, que generaliza la clasificación retirando la exigencia de compacidad. En esta nueva incursión hará falta definir el concepto de ‘borde ideal’, un invariante topológico que describe cómo subsuperficies compactas dividen a la superficie en cuestión. Demostraremos que, fijado el ‘género’ y la ‘clase de orientabilidad’, una superficie viene determinada topológicamente por su borde ideal.

Luego, daremos representantes para las clases de equivalencia de la clasificación no compacta. Utilizando un resultado topológico veremos que todo borde ideal es homeomorfo a un subconjunto del conjunto de Cantor. Más aún, estudiaremos una especie de recíproco descrito por Ian Richards en [2]: Dado un subconjunto cualquiera del conjunto de Cantor construiremos una superficie que lo tiene por borde ideal. Esta construcción nos permitirá dar el representante para cada clase de equivalencia. Finalmente, haremos un breve apunte sobre la numerabilidad de las superficies homeomorfas según las hipótesis de la clasificación.

## Abstract

This essay contains a mathematical approach to topological surfaces and their classification:

Firstly, basic notions of compact surfaces will be introduced, from which a proof of their classification will be given. As a result we will find that any compact surface is homeomorphic either to: a sphere, or a finite *connected sum* of torus, or a finite *connected sum* of projective planes.

Afterwards, we will proceed to study the Kerékjártó’s theorem, the classification without the hypothesis of compactness. For this, we will require to introduce the concept of ideal boundary, a topological invariant that describes how a surface is divided by its compact subsurfaces. The theorem will guarantee that, with a ‘genus’ and ‘orientability class’, a surface will be topologically determined by its ideal boundary.

Furthermore, we will give a representative for each equivalence class of the classification. A topological result will prove that any ideal boundary is homeomorphic to a subset of the Cantor set. Evenmore, a construction by Ian Richards will prove that given any subset of the Cantor set one can construct a surface that has it as ideal boundary. This construction will allows us to present such representatives. Lastly, we will briefly discuss the numerability of homeomorphic surfaces.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Introducción a las superficies topológicas . . . . .	1
1.1.1	Orientación de superficies . . . . .	2
1.2	Superficies compactas . . . . .	2
1.2.1	Expresión canónica . . . . .	4
1.3	Suma conexa . . . . .	5
1.3.1	Expresiones canónicas de sumas conexas . . . . .	6
1.4	Triangulación de una superficie . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Clasificación de superficies compactas</b>	<b>13</b>
2.1	Primer paso . . . . .	13
2.2	Segundo paso . . . . .	15
2.3	Tercer paso . . . . .	16
2.4	Cuarto paso . . . . .	17
2.5	Quinto paso . . . . .	18
2.6	Desenlace final . . . . .	18
2.7	Superficies con borde y su clasificación . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Hacia las superficies no compactas</b>	<b>21</b>
3.1	Introducción a las superficies no compactas . . . . .	21
3.1.1	El borde ideal . . . . .	23
3.2	Teorema de Kerékjárto . . . . .	25
3.2.1	Idea de la demostración . . . . .	26
3.3	Construcción de una superficie con borde ideal dado . . . . .	26
3.3.1	Construcción de representantes para superficies no compactas .	29
<b>4</b>	<b>Anexo: Algunos resultados que utilizamos en el trabajo</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>COSAS QUE NO HE UTILIZADO</b>	<b>33</b>



# CAPÍTULO 1

## Introducción

---

En este capítulo introduciremos la noción de superficie topológica de manera rigurosa. Además, nos familiarizaremos con los conceptos de suma conexa y triangulación, ambas herramientas esenciales para probar la clasificación de superficies compactas.

### 1.1. Introducción a las superficies topológicas

El concepto de superficie topológica busca generalizar la idea de *superficie* en el sentido usual. Más concretamente, buscamos abarcar todo conjunto que comparta localmente las propiedades topológicas de una superficie en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1.** Diremos que un espacio topológico,  $S$ , es una **superficie topológica** si para todos sus puntos existe un entorno homeomorfo a  $U^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ . Además, a  $S$  se le exige ser Hausdorff, segundo numerable y conexo.<sup>1</sup>

Consideremos los siguientes ejemplos de superficies topológicas:

1. El conjunto  $U^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ , dotado de la topología de subespacio, es una superficie.
2. El cuadrado sin bordes

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

al ser dotado de la topología de subespacio, también es un ejemplo de superficie.

3. Dado un homeomorfismo cualquiera:

$$f : S \rightarrow X$$

tendremos que si  $S$  es una superficie topológica, entonces  $f(S)$  también lo es.

---

<sup>1</sup>Si retiramos la hipótesis de conexión y sustituimos  $U^2$  por  $U^n$ , obtenemos una **n-variedad** topológica. Sin embargo, en este trabajo nos limitamos al estudio de las 2-variedades conexas (superficies).

Por otro lado, si consideramos el cuadrado con sus bordes ( $\overline{C}$ ), el conjunto no compone un ejemplo de superficie tal y como lo definimos. En este conjunto los puntos que pertenecen a las aristas no tienen entornos homeomorfos a  $U^2$ . Veremos que  $\overline{C}$  es una ‘superficie con borde’, concepto que estudiaremos más adelante (véase la sección 2.7).

### 1.1.1. Orientación de superficies

Las superficies se dividen en dos clases: Las orientables y las no orientables. No ahondaremos con formalidad matemática este concepto. Por su parte, asumiremos que las superficies tratadas pueden dotarse de una estructura diferencial y con ello podemos recurrir a la noción de orientabilidad estudiada en el grado. Sin embargo, bastaría con extender el concepto de orientabilidad de modo que los resultados aquí propuestos valieran para cualquier superficie topológica.

El principal resultado que usaremos al respecto es que la orientabilidad es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos). En el contexto del teorema de clasificación de superficies, observaremos como la orientabilidad de la superficie nos delimita las clases de equivalencia a las que una superficie puede pertenecer.

## 1.2. Superficies compactas

En nuestro objetivo de acercarnos a una clasificación completa de superficies, empezaremos por estudiar el caso de las superficies compactas. Para ello necesitaremos primero hacernos con un bagaje de ejemplos de superficies compactas elementales. Sin más preámbulo, alimentemos la curiosidad del lector con estos suculentos ejemplos:

### La esfera

El conjunto  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  conforma un ejemplo de superficie compacta. Alternativamente, se puede expresar la esfera como el disco  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1\}$ , realizando la identificación 1.1 y dotando al conjunto resultante de la topología cociente.

$$(1.1) \quad (x, y) \equiv (x, -y), \quad \forall (x, y) \in fr(D)$$

Se puede comprobar que ambas formas de definir la esfera son homeomorfas.

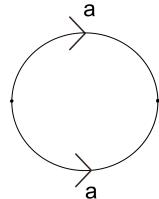


Figura 1.1: Esfera como espacio cociente

### El toro

Si se toma el cuadrado cerrado  $\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$  con la topología de subespacio, el **toro** se construye al identificar los puntos de  $X$  según 1.2 y dotar al conjunto resultante de la topología cociente.

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (x, -1) &\equiv (x, 1) & x \in [-1, 1] \\ (-1, y) &\equiv (1, y) & y \in [-1, 1] \end{aligned}$$

En la figura 1.2 se representa gráficamente el toro. Las aristas con el mismo símbolo indican aquellas a identificar en el sentido fijado por las flechas.

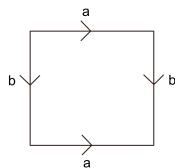


Figura 1.2: Toro como espacio cociente

La definición de toro aquí expuesta es homeomorfa a la superficie de revolución en  $\mathbb{R}^3$  estudiada en el grado. Esta definición será conveniente más adelante en el teorema de clasificación de superficies compactas.

### El plano proyectivo

Por su parte, el **plano proyectivo** corresponde al disco  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$  en el cual se identifican los puntos antipodales de la frontera. Se ilustra esta identificación en la figura 1.3.

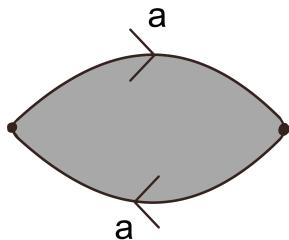


Figura 1.3: Plano proyectivo como espacio cociente

De los tres ejemplos de superficies compactas dadas hasta ahora, este es el único de una superficie no orientable.

Después de haber visto los ejemplos, es razonable cuestionarse si los espacios cocientes que tratamos son realmente conjuntos compactos. El siguiente lema nos demuestra que, en efecto, las superficies obtenidas son compactas.

**Lema 1.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico e  $Y$  un espacio cociente que resulta de identificar puntos en  $X$ . Entonces:*

$$X \text{ compacto} \Rightarrow Y \text{ compacto}$$

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow Y$  la función cociente que asocia a cada punto su clase de equivalencia;  $f$  es sobreyectiva y, por ser cociente, es continua.

Siendo  $X$  compacto tenemos entonces que  $f(X) = Y$  también lo es.  $\square$

En nuestros ejemplos todas las superficies vienen de identificar puntos en conjuntos compactos. Se sigue entonces del lema que las superficies son a su vez compactas.

### 1.2.1. Expresión canónica

Las figuras 1.1, 1.2 y 1.3, de cada ejemplo respectivamente, sugieren una forma visual de definir superficies compactas: formamos un polígono con un número par de lados e identificamos sus aristas por parejas.

Más aún, se puede definir una notación con la que referirnos a estos polígonos: Partiendo de cualquier vértice recorremos la figura en el sentido de las agujas del reloj, se anotan los símbolos según se recorre la respectiva arista y se agrega el exponente 1 o -1, según si la flecha va en el mismo sentido del recorrido o en sentido contrario.

Con esta notación: nos referimos a la esfera (figura 1.1) como  $aa^{-1}$ ; al toro (figura 1.2) como  $aba^{-1}b^{-1}$ ; y al plano proyectivo (figura 1.3) como  $aa$ . Llamaremos **expresión canónica** a estas formas de referirnos a la esfera, al toro y al plano proyectivo, respectivamente.

La notación sugerida facilita enormemente la definición de nuevas superficies. Utilicemos esta herramienta para introducir un último ejemplo de superficie compacta:

### Botella de Klein

La **botella de Klein** es la superficie que corresponde con la expresión  $abab$ .

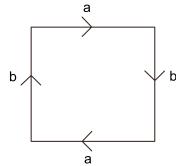


Figura 1.4: Botella de Klein

La botella de Klein compone un ejemplo de superficie no orientable que, además, no es representable en  $\mathbb{R}^3$  como una superficie regular.

### 1.3. Suma conexa

La suma conexa es un operador entre superficies. La idea será ir ‘sumando’ superficies compactas para generar nuevas. De hecho, si se me permite el *spoiler*, utilizaremos este operador en toros y planos proyectivos para construir superficies homeomorfas a **cualquier** otra superficie compacta.

Procedamos a definir matemáticamente el operador:

**Definición 1.3.** Dadas dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ , se define la **suma conexa** de ambas ( $S_1 \# S_2$ ) como la superficie generada al recortar un disco de cada superficie y pegarlas a través del borde de los discos retirados. Más formalmente:

1. Para cada  $S_i$ , tomamos un subconjunto  $D_i \subset S_i$  homeomorfo al disco cerrado  $E^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ . Llamamos  $S'_i$  al complementario del interior de  $D_i$ .
2. Tomamos un homeomorfismo  $\psi : D_1 \longrightarrow D_2$
3. Definimos entonces  $S_1 \# S_2$  como  $S'_1 \cup S'_2$  dotado de la topología cociente que resulta de la identificación:

$$x \equiv \psi(x), \quad \forall x \in D_1$$

Habría que comprobar que la suma conexa está bien definida y resulta en una nueva superficie. Este aspecto lo abordamos en lema 4.1.

### Ejemplos

Utilizando la notación introducida hasta el momento presentamos algunos ejemplos de sumas conexas:

#### Suma conexa de toros

Sean  $T_1$  y  $T_2$  dos toros disjuntos, estudiemos  $S = T_1 \# T_2$ . Nos ayudamos de la figura 1.5 para ilustrar el proceso:

Primero, retiramos de cada toro el disco con frontera  $c_i$ , como vemos en la primera imagen. Nótese que podemos expresarlo como la segunda imagen porque todos los vértices del polígono están identificados. Finalmente, identificamos los bordes  $c_1$  y  $c_2$ , obteniendo el octágono que representa  $S$ , donde, de nuevo, todos los vértices representan el mismo punto.

Utilizando la notación para expresiones canónicas, de la figura 1.5 se deduce que  $S$  se puede expresar como  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ .

#### Suma conexa de planos proyectivos

Podemos seguir un mecanismo parecido al anterior para realizar la suma conexa de dos planos proyectivos. En la figura 1.7 ilustramos la misma construcción para dos planos proyectivos. La expresión canónica de la superficie resultante es  $a_1 a_1 a_2 a_2$ .

#### Suma conexa de esferas

En la figura 1.8 ilustramos la suma conexa de dos esferas, que es otra esfera. En

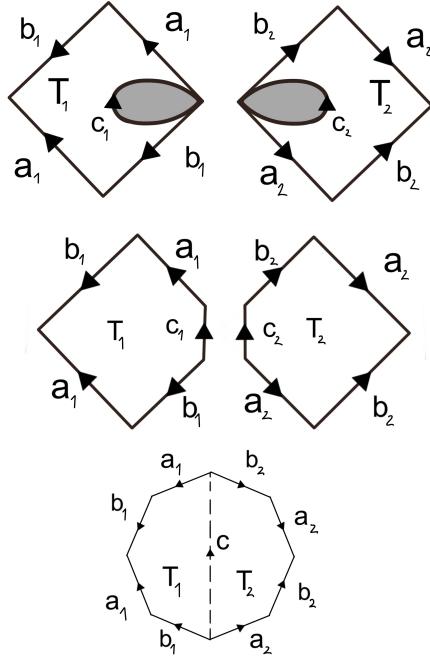
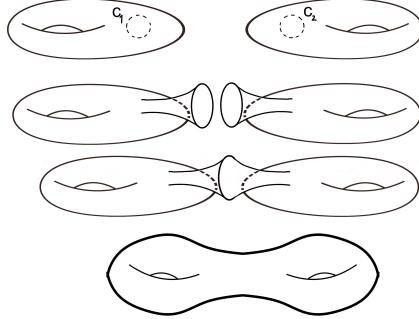


Figura 1.5: Suma conexa de dos toros

Figura 1.6: Suma conexa de dos toros como subvariedades de  $\mathbb{R}^3$ 

general, se puede comprobar que la esfera actúa como elemento neutro de la suma conexa.

Otra propiedad interesante de la suma conexa es que conserva la compacidad, i.e., si  $S = S_1 \# S_2$ , entonces  $S$  será compacta si lo son  $S_1$  y  $S_2$ . En los ejemplos de la suma de toros, planos proyectivos y esferas, basta con usar el lema 1.2 para demostrarlo.

### 1.3.1. Expresiones canónicas de sumas conexas

Los ejemplos mencionados en la sección anterior proporcionan un método para describir sumas conexas arbitrarias de esferas, toros y planos proyectivos. Basta repetir los mismos procedimientos para comprobar que:

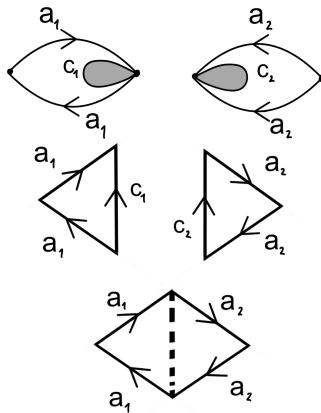


Figura 1.7: Suma conexa de dos planos proyectivos

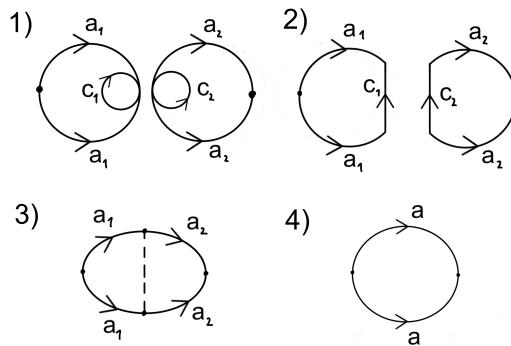


Figura 1.8: Suma conexa de dos esferas

- La suma conexa de  $n$  esferas es igual a una esfera:

$$(1.3) \quad aa^{-1}$$

- La suma conexa de  $n$  toros se puede escribir como:

$$(1.4) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

- La suma conexa de  $n$  planos proyectivos se puede describir como:

$$(1.5) \quad a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

A las expresiones 1.3, 1.4 y 1.5 las llamaremos *expresiones canónicas* de sus respectivas sumas conexas.

Antes de dar el asunto por concluido, veamos un último ejemplo de suma conexa:

**Lema 1.4.** *La suma conexa de dos planos proyectivos es homeomorfa a una botella de Klein*

*Demostración.* En la demostración trataremos al plano proyectivo como el disco unidad identificando los puntos diametralmente opuestos.

Seleccionamos del plano proyectivo el subconjunto  $D = \{(x, y) : \|y\| \geq \frac{1}{2}, \|x\| \leq \sqrt{1 - y^2}\}$  homeomorfo al disco cerrado. Retiramos  $D$  como se muestra en la figura 1.9, los segmentos discontinuos representan la frontera del disco por la cual se ha de realizar la suma conexa.

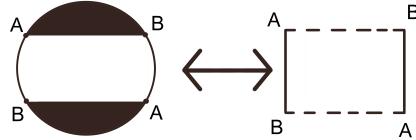


Figura 1.9: Plano proyectivo menos un subconjunto homeomorfo al disco cerrado

Partiendo de dos planos proyectivos,  $I$  e  $II$ , retiramos el disco como en la figura 1.9. Luego procedemos a identificar ambos conjuntos como se indica en la figura 1.10.

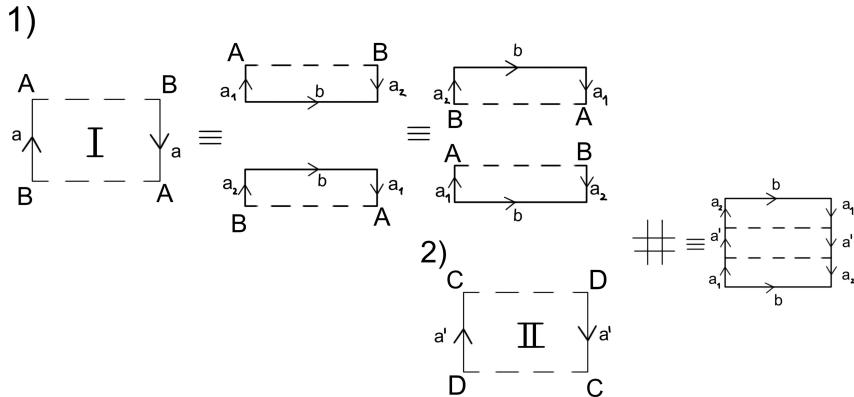


Figura 1.10: Botella de Klein =  $I \# II$

La figura final obtenida es una Botella de Klein. □

El ávido lector se habrá dado cuenta de un detalle de la demostración: ¡retirar un disco de un plano proyectivo lo convierte en una banda de Möbius!

## 1.4. Triangulación de una superficie

Una triangulación, en caso de existir, pretende expresar una superficie como un conjunto de triángulos identificados por las aristas. La noción de triangulación, *a priori* inofensiva, será un ingrediente clave para poder manipular superficies compactas. Se define rigurosamente como:

**Definición 1.5.** Una **triangulación** de una superficie compacta  $S$ , consiste en un conjunto de cerrados,  $\{T_1, \dots, T_n\}$ , que recubren a  $S$  y en una familia de homeomorfismos,  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ , que cumplen:

$$\phi_i : T'_i \longrightarrow T_i$$

Donde  $T'_i$  es un triángulo del plano  $\mathbb{R}^2$ . Además, se exige que para cualesquiera dos  $T_i$  y  $T_j$  con  $i \neq j$ , se cumpla una de las siguientes condiciones: o son conjuntos totalmente disjuntos; o comparten un vértice en común y solo eso; o tienen toda una arista en común y solo eso.

Adicionalmente, llamaremos **vértice** a todo elemento de  $S$  que se corresponde por algún  $\phi_i$  con un vértice en el plano. Y llamaremos **arista** a todo subconjunto de  $S$  que tenga por imagen una arista de algún  $T'_i$ . A una superficie que admite una triangulación la llamaremos una superficie **triangulable**.

**Observación:** La definición se puede extender para superficies no compactas si permitimos que el conjunto de triángulos sea numerables, y exigiendo que todo punto del conjunto tenga un entorno que interseque solo a un número finito de triángulos.

Intuitivamente, podemos pensar en una triangulación como una teselación por triángulos de una superficie dada. Estudiemos algunos ejemplos concretos para familiarizarnos con el concepto:

El toro se puede triangular como ilustra la figura 1.11. Fijémonos que basta con definir una lista de triángulos, con sus respectivos vértices, para concretar una triangulación. En la figura indicada la lista sería:

[TODO:Lista de triángulos]

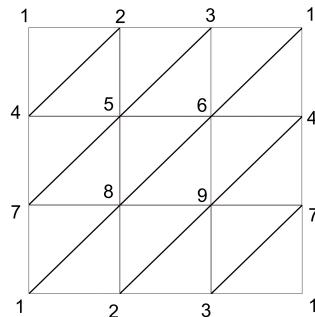


Figura 1.11: Triangulación del toro

En la figura 1.12 señalamos un par de intentos de simplificar la triangulación del toro. Sin embargo, notemos que ninguna de las dos imágenes son triangulación del toro. La primera, aunque satisface las condiciones de triangulación, no es homeomorfa al toro; La segunda ni siquiera satisface las condiciones.

Para el caso del plano proyectivo, se propone en la figura 1.13 una triangulación.

## Resultados sobre la triangulación

Primero, veamos un par de lemas que nos enmarcan el comportamiento de las triangulaciones:

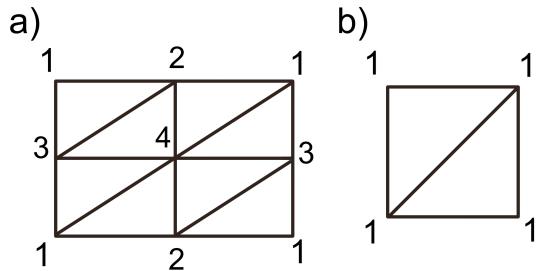


Figura 1.12: Ejemplos de cosas que no son triangulaciones

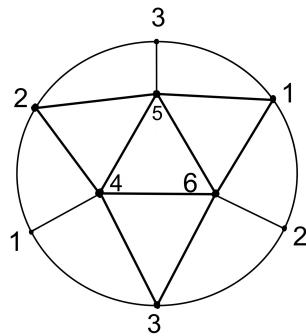


Figura 1.13: Triangulación del plano proyectivo

**Lema 1.6.** *Sea  $S$  una superficie triangulable entonces una arista lo es de exactamente dos triángulos.*

*Demuestra.* Supongamos que una arista lo es de uno o más de dos triángulos. Elegimos un  $x \in S$  de dicha arista. Por un lado, sabemos que un entorno de  $x$  es homeomorfo a

$$U^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$$

Por otra parte, veamos los distintos casos:

- (a) Si la arista lo fuese de un único triángulo, entonces tendríamos entornos de  $x$  homeomorfos a

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 1\}$$

- (b) Si la arista lo fuese de  $n \geq 3$  triángulos. Entonces tendríamos entornos de  $x$  homeomorfos a pegar  $n$  conjuntos de la forma de  $H^2$  (podemos hacerlos disjuntos trasladándolos). Más rigurosamente, el conjunto a cocientar sería

$$\bigcup_{i=1}^n \{(x + 10i, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 10i)^2 + y^2 < 1, y \geq 1\}$$

Identificando los puntos con  $y = 0$ . En la figura 1.14 ilustramos el caso para  $n = 3$ .

En cualquiera de los dos casos estaríamos incurriendo en un absurdo, con lo que concluimos la demostración.  $\square$

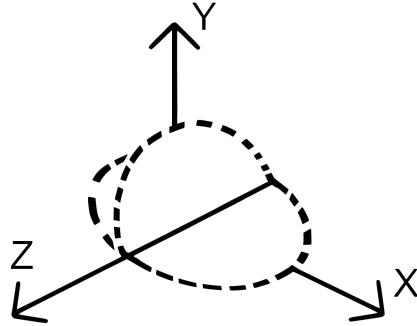


Figura 1.14: Identificación por la frontera de  $H^2$

**Lema 1.7.** *Sea  $S$  una superficie triangulable y  $v \in S$  un vértice en esa triangulación, entonces podemos ordenar el conjunto de todos los triángulos con vértice  $v$  cíclicamente,  $T_0, T_1, \dots, T_n = T_0$ , de manera que  $T_i$  y  $T_{i+1}$  tienen toda una arista en común para todo  $0 \leq i \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Fijado un vértice  $v$ , podemos utilizar el lema anterior (1.6) para hacer una partición del conjunto de triángulos que tienen a  $v$  por vértice. Si ocurriese que hay más de un conjunto disjunto en la partición, entonces  $v$  no podría tener un entorno homeomorfo a  $U^2$ .  $\square$

La idea de triangulación compone una herramienta potente para el manejo de superficies en general. Sin embargo, para usarla primero es necesario probar que de hecho existe tal triangulación. Por suerte, el siguiente resultado del matemático Tibor Radó nos garantiza su existencia. Enunciamos el teorema sin, lamentablemente, dar la correspondiente demostración.

#### Teorema 1.8. Teorema de triangulación

*Toda superficie separable es triangulable.*

En el contexto de este trabajo, las superficies son segundo numerables por definición. Por tanto, todas las superficies son separables y con ello triangulables.

Con este teorema concluimos el arsenal de herramientas que nos hará falta para emprender la demostración del teorema de clasificación de superficies compactas.



# CAPÍTULO 2

## Clasificación de superficies compactas

---

**Teorema 2.1.** *Teorema de clasificación de superficies compactas*

*Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos.*

### Idea de la demostración

El primer paso de la demostración será probar que podemos tratar cualquier superficie compacta como un polígono en  $\mathbb{R}^2$  con sus aristas identificadas a pares. Para esta parte de la demostración nos serviremos del teorema 1.8 de *T. Radó*.

Posteriormente, utilizando la representación en  $\mathbb{R}^2$ , iremos modificando la figura con transformaciones homeomorfas. Cada transformación supondrá una simplificación del polígono obtenido. Tras aplicar todos los pasos, comprobaremos que el polígono final se corresponde con una de las expresiones canónicas introducidas en la sección 1.3.1. Este resultado final necesita del lema 4.2 demostrado en el anexo. Dicho lema garantiza que la suma conexa de un plano proyectivo y un toro es homeomorfa a la suma de tres planos proyectivos.

Una vez obtenidas las expresiones canónicas de 1.3.1, habremos concluido que la superficie inicial es homeomorfa o a una esfera, o a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.

### 2.1. Primer paso

Buscamos demostrar que cualquier superficie compacta  $S$  es homeomorfa a un polígono en  $\mathbb{R}^2$  con sus aristas identificadas a pares.

Por el teorema 1.8 tenemos que  $S$  es triangulable. Sean  $T_1, T_2, \dots, T_n$  los triángulos de  $S$  y sean  $T'_1, T'_2, \dots, T'_n$  los correspondientes triángulos en  $\mathbb{R}^2$ , tenemos los homeomorfismos:

$$\phi_i : T'_i \longrightarrow T_i$$

Podemos asumir que los  $T'_i$  son disjuntos (en caso de que no lo fueran, bastaría componerlos con una traslación). Además, podemos organizar los triángulos de tal forma que todo  $T_i$  tenga al menos una arista  $e_i$  en común con algún triángulo  $T_1, \dots, T_{i-1}$  para  $2 \leq i \leq n$ . Elegiremos  $T_2$  con una arista en común con  $T_1$ ,  $T_3$  con una arista en común con  $T_1$  o  $T_2$ , y así sucesivamente. Nótese que si en algún punto no pudiésemos elegir un  $T_k$ , tendríamos entonces dos conjuntos disjuntos  $\{T_1, \dots, T_{k-1}\}$  y  $\{T_k, \dots, T_n\}$ , pero esto dividiría a  $S$  en dos conjuntos cerrados disjuntos contradiciendo la hipótesis de conexión.

Sea  $T' = \bigcup T'_i$ , definimos la función

$$\phi : T' \longrightarrow S$$

como  $\phi|_{T'_i} = \phi_i$  para todo  $i$ . La función  $\phi$  es sobreyectiva y continua<sup>1</sup>. Al ser  $T'$  compacto y  $S$  Hausdorff, entonces  $\phi$  es cerrada, de lo que se sigue que  $S$  tiene la topología cociente inducida por  $\phi$ .

El polígono que queremos construir será descrito como espacio cociente de  $T'$ . Por hipótesis, tenemos que  $e_i$  es arista de los triángulos  $T_i$  y  $T_j$  para algún  $1 \leq j < i$ , y a su vez  $\phi^{-1}(e_i)$  es arista de  $T'_i$  y  $T'_j$ . Identificamos ambos triángulos en  $T'$  a lo largo de la arista  $\phi^{-1}(e_i)$ . El mismo procedimiento se puede aplicar para las aristas  $e_2, e_3, \dots, e_n$ , obteniendo como resultado un conjunto cociente  $D$  del conjunto inicial  $T'$ . La función  $\phi$  induce una nueva función continua  $\psi : D \longrightarrow S$ . De nuevo, al ser  $D$  compacto y  $S$  Hausdorff, tenemos que  $\psi$  es cerrada y con ello que  $S$  tiene la topología cociente inducida por esta función.

Veamos que  $D$  es homeomorfo al disco cerrado  $E^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ :

- (a) Tenemos que el triángulo  $T'_i$  en  $\mathbb{R}^2$  es homeomorfo a  $E^2$ .
- (b) Dados dos discos cerrados  $E_1^2$  y  $E_2^2$ , si los identificamos por un segmento cerrado de sus fronteras, obtenemos un espacio cociente homeomorfo, de nuevo, a un disco cerrado. De aquí se sigue que, si tenemos dos triángulos  $T'_i$  y  $T'_j$  identificados por una de sus aristas, entonces el espacio resultante es homeomorfo a  $E^2$ .

Utilizando (a) y (b) tenemos que el espacio cociente  $D$  obtenido a partir de  $T'$ , es topológicamente equivalente a un disco cerrado. Además, sabemos que el espacio cociente que induce  $\psi$  coincidirá con el disco cerrado en el cual segmentos de su frontera están identificados a pares; esto se sigue del proceso de construcción de  $D$ , teniendo en cuenta que al identificar la arista  $\phi^{-1}(e_i)$  de dos triángulos, el resto de aristas en la frontera siguen emparejadas (sabemos que van por parejas por el lema 1.6).

En la figura 2.1 tenemos un tetraedro triangulado.

Ilustramos en la figura 2.2 cómo se representaría el mismo tetraedro como el espacio cociente  $D$  descrito en esta sección.

A partir de aquí, manipularemos la superficie compacta  $S$  como si de un polígono se tratase. Asumiendo que las aristas del polígono están identificadas a pares y sin ningún orden ni dirección particular.

---

<sup>1</sup>Para probar la continuidad basta con escribir cualquier abierto en  $S$  como unión finita de la partición de triángulos.

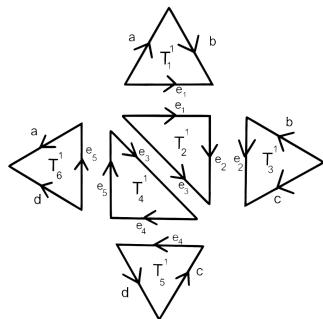


Figura 2.1: Tetraedro triangulado

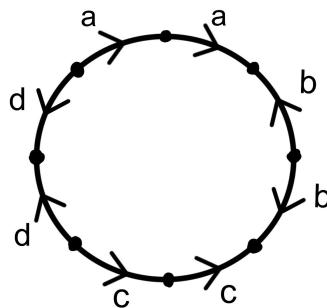


Figura 2.2: Tetraedro como espacio cociente de un disco

## 2.2. Segundo paso

El segundo paso consiste en la eliminación de aristas adyacentes de primera especie.

Del primer paso hemos obtenido el polígono  $D$  que representa a la superficie  $S$  si se identifican sus aristas a pares. El polígono identificado lo podemos expresar con la misma notación que usamos para las expresiones canónicas (véase la sección 1.3.1). Por ejemplo, en el caso de la figura 2.2, la expresión canónica sería:

$$a^{-1}abb^{-1}cc^{-1}d^{-1}d$$

Si en esta expresión un par de aristas con el mismo símbolo aparecen con exponentes  $+1$  y  $-1$  ( $\dots a \dots a^{-1}$ , por ejemplo), entonces diremos que el par es de *primera especie*. Si aparecen ambas con el exponente  $+1$ , o ambas con  $-1$ , diremos que el par es de *segunda especie*. En el caso de la figura 2.2 tenemos que los cuatro pares de aristas son de primera especie y, además, adyacentes.

En este paso buscaremos eliminar las aristas adyacentes de primera especie, i.e., con la forma  $aa^{-1}$  o  $a^{-1}a$ . Suponiendo que el polígono tenga al menos 4 lados, la figura 2.3 indica cómo podríamos eliminar esta arista de nuestra expresión. El mismo procedimiento se sigue aplicando mientras haya aristas adyacentes de primer orden ó hasta que la expresión tenga únicamente dos aristas. En este último caso, tenemos que la expresión será  $aa$  o  $aa^{-1}$ , es decir, homeomorfo a una esfera o a un plano proyectivo (véase la sección 1.2.1). En caso de que haya más de dos aristas y no queden aristas de primera especie se continúa al siguiente paso.

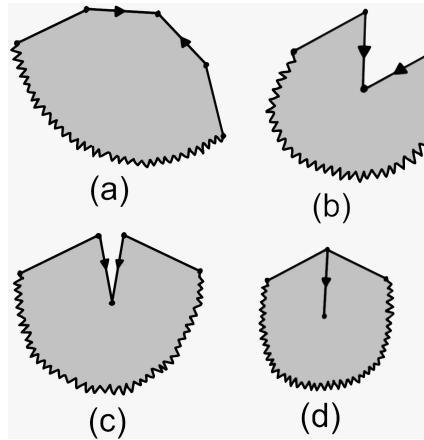


Figura 2.3: Eliminando adyacencias de primera especie

### 2.3. Tercer paso

En este paso procederemos a transformar el polígono  $D$ , obtenido del paso anterior, para que todos sus vértices estén identificados entre sí, es decir, buscamos que todos los vértices representen el mismo punto en la superficie  $S$ .

Podemos dividir los vértices en clases de equivalencia según qué vértices están identificados. Supongamos que al menos hay dos clases de equivalencias e intentemos eliminar una de ellas.

Como hay dos clases de equivalencia, entonces existen al menos dos vértices adyacentes  $P$  y  $Q$  que no pertenecen a la misma clase. En la figura 2.4 se ilustra el procedimiento. Sabemos que  $a$  y  $b$  no pueden estar identificados<sup>2</sup>, entonces cortamos e identificamos a lo largo de la línea  $c$  tal y como se muestra la figura. Al finalizar la transformación, tenemos un vértice menos de la clase  $P$  y uno más de la clase  $Q$ . Una vez eliminado el vértice, se aplica el segundo paso nuevamente de ser posible y se repite el procedimiento. Tras un número finito de pasos habremos eliminado la clase de equivalencia de  $P$ . Iteramos de forma análoga hasta que tengamos una única clase de equivalencia de vértices del polígono.

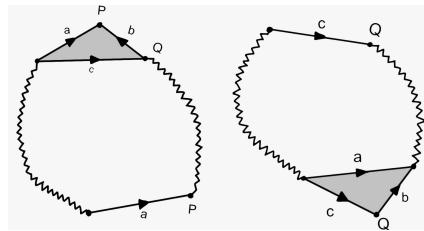


Figura 2.4: Reduciendo clases de equivalencia de vértices

<sup>2</sup>No puede ser par de primera especie porque ya hemos aplicado el segundo paso, y no puede ser par de segunda especie porque los vértices son distintos.

## 2.4. Cuarto paso

Ahora buscaremos hacer adyacentes todos los pares de aristas de segunda especie.

En la figura 2.5 ilustramos el proceso. Partimos de que tenemos dos aristas  $b$  de segunda especie no adyacentes, y procedemos a cortar e identificar a través de  $a$ . Como resultado, hemos cambiado un par no adyacente a uno adyacente. Repetimos el mismo procedimiento hasta que todas las aristas de segunda especie sean adyacentes.

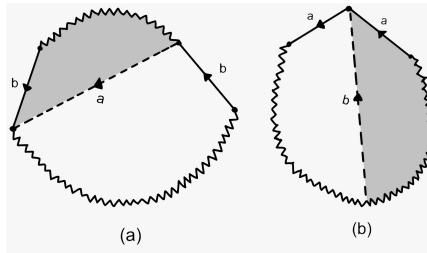


Figura 2.5: Transformando en adyacentes aristas de segunda especie

En caso de no haber ninguna arista de primera especie, tendremos unas expresión de la forma  $a_1a_1a_2a_2\dots a_na_n$ , con lo que concluimos que la superficie es homeomorfa a la suma conexa de  $n$  planos proyectivos (véase 1.3.1).

En caso de haber un par de aristas de primera especie, denotémosla por  $c$ , probaremos que necesariamente existe otro par de primera especie que las intercala. En otras palabras, necesariamente existe otro par de aristas de primera especie,  $d$ , tal que la expresión obtenida es de la forma  $c\dots d\dots c^{-1}\dots d^{-1}\dots$

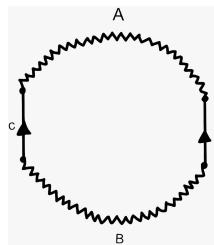


Figura 2.6: Par de primera especie tras el paso 4

Para probar esto, supongamos que no existe el par  $d$ . Bajo este supuesto, el aspecto del polígono  $D$  sería similar a 2.6, donde  $A$  y  $B$  son ambas sucesiones de aristas. Por el cuarto paso, todas las aristas de segunda especie son adyacentes, con lo que, bajo el supuesto de que no existe  $d$ , no existiría ninguna arista de  $A$  identificada con una de  $B$ , ni viceversa. Sin embargo, ello implicaría que los vértices finales e iniciales de la arista  $c$  no están identificados<sup>3</sup>, incurriendo así en una contradicción con el tercer paso.

<sup>3</sup>El lema 1.7 nos permite crear un argumento por contradicción: Si hubiera algún vértice identificado en  $A$  y  $B$ , entonces podríamos identificar un par de aristas de este vértice entre sendas sucesiones (pero esto no ocurre por hipótesis).

## 2.5. Quinto paso

En este paso haremos adyacentes los pares de aristas de primera especie que estén intercalados como se indica en el paso anterior.

Supongamos que nuestro polígono tiene la expresión  $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$  (véase la figura 2.7 (a)). Primero, cortamos a lo largo de  $c$  y pegamos las aristas  $b$ , obteniendo la figura 2.7 (b). Seguidamente, cortamos a lo largo de  $d$  y pegamos  $c$ , con lo que obtenemos la figura 2.7 (c). Nótese que hemos transformado nuestra expresión cambiando los pares  $a$  y  $b$ , por  $cdc^{-1}d^{-1}$ . De los pasos se sigue que los vértices siguen manteniendo una única clase de equivalencia.

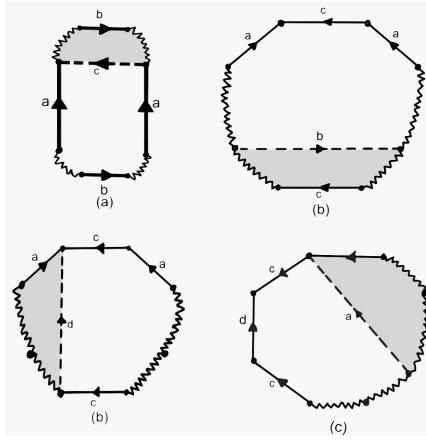


Figura 2.7: Haciendo adyacentes pares de primera especie intercalados.

Repetimos el mismo procedimiento hasta que todos los pares de aristas de primera especie estén agrupados de la forma  $cdc^{-1}d^{-1}$ . Si no hay pares de arista de segunda especie, la expresión sería

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

con lo que la superficie es equivalente a una suma conexa de  $n$  toros (véase la sección 1.3.1).

## 2.6. Desenlace final

Tras los cinco pasos anteriores hemos tenido en cuenta los casos en los que la superficie es homeomorfa a una esfera, una suma conexa de  $n$  planos proyectivos o una suma conexa de  $m$  toros. Consideremos ahora el caso en el que la expresión tiene tanto aristas de segunda especie (adyacentes), como aristas de primera especie (agrupadas en conjuntos de cuatro). La expresión de este último caso corresponde con una suma conexa de  $n$  toros y  $m$  planos proyectivos:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} c_1 c_1 \dots c_m c_m$$

Utilizando el lema 4.2 en el anexo, tenemos que cada suma de toro más plano proyectivo puede sustituirse por la suma conexa de tres planos proyectivos. Del lema se sigue que, en este último caso, nuestra superficie corresponde con una suma conexa de  $m + 2n$  planos proyectivos, con lo que queda demostrado el teorema.

En virtud de lo mencionado sobre orientabilidad en la sección 1.1.1, podemos reformular el teorema de clasificación como:

**Teorema.** *Toda superficie compacta orientable es topológicamente equivalente a una esfera o una suma conexa de  $n$  toros. Toda superficie compacta no orientable es homeomorfa a una suma conexa de  $n$  planos proyectivos.*

Definimos entonces el **género** de una superficie compacta como el valor de  $n$  que le corresponde por homeomorfismo en el teorema anterior. En caso de que la superficie sea homeomorfa a una esfera diremos que tiene género 0.

Para probar que el género está bien definido hace falta demostrar que las clases de equivalencia mencionadas no son homeomorfas entre sí. Una prueba se construye en [1] utilizando la relación 2.1 entre el género ( $g$ ) y la característica de Euler ( $x$ ), y demostrando la invariancia topológica de la característica.

$$(2.1) \quad g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - x) & \text{si la superficie es orientable} \\ 2 - x & \text{si la superficie no es orientable} \end{cases}$$

## 2.7. Superficies con borde y su clasificación

La noción de superficie con la que hemos trabajado hasta ahora no contempla ‘bordes’. Por ejemplo, si tomamos el cuadrado cerrado

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

comprobamos que no satisface la definición 1.1: el punto  $(0, 0)$  no tiene ningún entorno homeomorfo a  $U^2$ . Ampliaremos entonces el concepto de superficie:

**Definición 2.2.** Diremos que un espacio topológico  $S$  es una **superficie con borde** si cumple ser conexo, Hausdorff y segundo numerable. Donde, además, se cumple que todo punto en  $S$  tiene un entorno homeomorfo a  $U^2$  o a

$$H^2 = \{(x, y) \in U^2 : y \geq 0\}$$

Llamaremos **borde** de la superficie al conjunto de puntos que tienen entornos homeomorfos a  $H^2$ , e **interior** de la superficie al conjunto de puntos con entornos homeomorfos  $U^2$ .

Utilizando el teorema 2.1 y un razonamiento similar al de su demostración, se puede probar la clasificación para las superficies con borde:

**Teorema 2.3.** *Dos superficies con borde compactas son homeomorfas si y solo si tienen el mismo número de componentes de borde, son ambas orientables o ambas no orientables, y tienen la misma característica de Euler.*

Una demostración rigurosa se puede leer en [1]. Equivalentemente, podemos enunciar el teorema como: Toda superficie con  $k$  componentes de borde es homeomorfa a una esfera, o a una suma conexa de  $n$  toros o a una suma conexa de  $n$  planos proyectivos, en los cuales retiramos  $k$  discos abiertos. Este enunciado alternativo nos permite hablar de género también para el caso de las superficies con borde.

Con esto cerramos finalmente la clasificación para superficies compactas y podemos sumergirnos en el mundo más variado de la no compacidad.

## CAPÍTULO 3

# Hacia las superficies no compactas

---

En este capítulo extenderemos la clasificación a superficies no compactas y construiremos una superficie representante para cada clase de equivalencia.

El teorema de clasificación de Kerékjártó se basará en la clasificación de superficies compactas, estudiada en el capítulo anterior, y en el concepto de ‘borde ideal’, que introduciremos en este capítulo. El borde ideal será un invariante definido a partir de una superficie dada, que a su vez será un espacio topológico totalmente inconexo, separable y compacto. Finalmente, el teorema nos garantizará que, fijado el género y la ‘clase de orientabilidad’, dos superficies son homeomorfas si y solo si sus fronteras ideales también lo son.

Las propiedades topológicas del borde ideal nos permitirán formular una especie de recíproco. Por un lado, veremos que todo borde ideal es homeomorfo a un subconjunto del conjunto de Cantor. Por el otro, estudiaremos una construcción de Ian Richards que asigna a todo subconjunto del conjunto de Cantor una superficie cuyo borde ideal es homeomorfo al subconjunto dado. Este resultado nos permitirá dar un representante para cada clase de equivalencia de la clasificación de superficies. Por último, discutiremos brevemente la numerabilidad de las clases de superficies homeomorfas.

### 3.1. Introducción a las superficies no compactas

Introducimos algunas definiciones que serán útiles para el manejo de las superficies no compactas.

**Definición 3.1.** Diremos que un subconjunto de una superficie  $S$  es **acotado** si su cierre es compacto en  $S$ .

**Definición 3.2.** Llamaremos **subsuperficie** de una superficie dada  $S$  a todo subconjunto que cumpla ser una superficie (posiblemente con borde).

La figura 3.1 ilustra una superficie no compacta con una subsuperficie  $S'$ , que además cumple ser un subconjunto acotado.

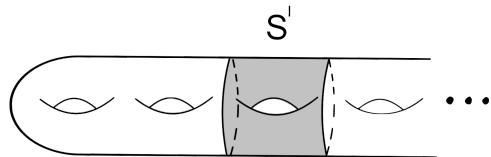


Figura 3.1: Superficie no compacta con subsuperficie  $S'$ .

### Sobre el género

El género de una superficie no compacta  $S$  se define a partir de los géneros de sus subsuperficies compactas:

**Definición 3.3.** Diremos que una superficie no compacta es **planar** (o de género 0) si toda subsuperficie compacta tiene género 0.

Por otra parte, si existe una subsuperficie compacta  $A \subset S$  de género  $m$ , tal que las componentes de  $S \setminus A$  son superficies de género 0, entonces diremos que  $S$  tiene género  $m$ . Fijémonos en que esta definición no entra en contradicción con la anterior cuando  $m = 0$ . Si una tal superficie  $A$  no existiera, entonces diremos que  $S$  tiene **género infinito**. En este último caso, se comprueba que existen subsuperficies compactas de género arbitrariamente grande.

La figura 3.1 es un ejemplo de superficie no compacta de género infinito.

### Sobre la orientabilidad

Similarmente al caso compacto, las superficies pueden ser orientables o no orientables. Adicionalmente, si una superficie  $S$  es no compacta y no orientable diremos que es **finitamente no orientable** si existe una subsuperficie  $A \subset S$  tal que todas las componentes de  $S \setminus A$  son orientables. En caso de que  $S$  no sea orientable y que no exista un  $A$  que cumpla esa propiedad, entonces diremos que la superficie es **infinitamente no orientable**. Observamos que una superficie infinitamente no orientable necesariamente tiene tener género infinito<sup>1</sup>, pero no al revés.

Una superficie  $S$  finitamente no orientable puede ser de **no orientabilidad par o impar** según si una subsuperficie compacta  $A$  lo suficientemente grande tiene género par o impar. Esta definición tiene sentido gracias al lema 4.2 que nos asegura que la suma conexa de un toro más un plano proyectivo es homeomorfa a la suma de tres

<sup>1</sup>Si fuese de género finito tendríamos un  $S \setminus A$  con componentes de género 0, pero toda superficie de género 0 es orientable.

planos proyectivos; lo que nos indica que el número de planos proyectivos no cambia módulo 2 si sumamos una superficie orientable.

**Definición 3.4.** Diremos que dos superficies pertenecen a la misma **clase de orientabilidad** si: ambas son orientables; o ambas son infinitamente no orientables; o ambas comparten ser finitamente no orientables de la misma paridad.

### 3.1.1. El borde ideal

El borde ideal es un espacio topológico que da una descripción de cómo subconjuntos compactos de una superficie la separan en conjuntos no acotados. Se construye como el conjunto de clases de equivalencia de los ‘extremos’, concepto que definimos a continuación:

**Definición 3.5.** Un **extremo** de una superficie  $S$  es una secuencia de conjuntos encajados  $P_1 \supset P_2 \supset \dots$ , donde  $P_i$  es un conjunto conexo no acotado de  $S$  que cumple:

- (a) La frontera de  $P_i$  es compacto para todo  $i$ ;
- (b) Para cualquier subconjunto acotado  $A \subset S$ ,  $P_i \cap A = \emptyset$  para  $i$  suficientemente grande.

Dados dos extremos  $p = P_1 \supset P_2 \supset \dots$  y  $p' = P'_1 \supset P'_2 \supset \dots$ , diremos que son equivalentes si para todo  $n$  existe un correspondiente  $N$  tal que  $P_n \subset P'_N$  y viceversa. Esta regla establece una relación de equivalencia. Denotaremos por  $p^*$  a la clase de equivalencia del extremo  $p$ .

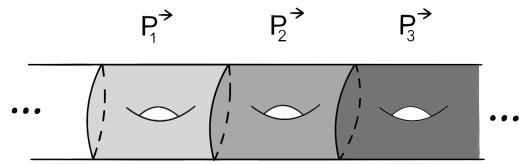


Figura 3.2: Ejemplo de un extremo (Los conjuntos  $P_i$  se acumulan hacia la derecha).

**Definición 3.6.** El **borde ideal** de una superficie  $S$  es el espacio topológico  $B(S)$  que tiene por elementos las clases de equivalencia de extremos, y tiene por base los conjuntos  $U^*$ : donde  $U \subset S$  es cualquier conjunto cuyo borde sea compacto; y los elementos de  $U^*$  son los extremos  $p^*$  que satisfagan que, fijado un representante  $p = P_1 \supset P_2 \supset \dots$ , existe un  $n$  con  $P_n \subset U$ .

Para probar que el borde ideal está bien definido es preciso comprobar que los elementos de cualquier  $U^*$  no dependen del representante escogido, esto se sigue directamente de la relación de equivalencia establecida entre extremos. Además, es necesario probar que el conjunto propuesto, en efecto, forma una base de una topología, para ello comprobamos que: eligiendo  $U = \emptyset$  tenemos el abierto  $U^* = B(S)$ ; tomando  $U = S$  tenemos el abierto  $U^* = \emptyset$ ; y en el siguiente lema veremos que  $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$ , que prueba que el conjunto es una base y con ello se demuestra que el espacio  $B(S)$  está bien definido.

**Lema 3.7.** *Dada una superficie  $S$  y dos conjuntos con frontera compacta  $U, V \subset S$ , entonces se cumple que  $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$ .*

*Demuestra*ción. Primero veamos que  $U^* \cap V^* \supset (U \cap V)^*$ :

$$p^* \in (U \cap V)^* \Rightarrow \exists n \quad P_n \subset (U \cap V) \Rightarrow p^* \in U^*, p^* \in V^*$$

Por otra parte, veamos  $U^* \cap V^* \subset (U \cap V)^*$ :

$$\begin{aligned} p^* \in U^*, p^* \in V^* &\Rightarrow \exists n, m \quad P_n \subset U, P_m \subset V \\ &\Rightarrow n' = \max(n, m), P_{n'} \subset U \cap V \\ &\Rightarrow p^* \in (U \cap V)^* \end{aligned}$$

□

Del mismo modo, conviene demostrar la misma propiedad para la unión:

**Lema 3.8.** *Dada una superficie  $S$  y dos conjuntos con frontera compacta  $U, V \subset S$ , entonces se cumple que  $U^* \cup V^* = (U \cup V)^*$ .*

*Demuestra*ción. Si  $U$  y  $V$  tienen frontera compacta entonces  $U \cup V$  también. El siguiente razonamiento comprueba  $U^* \cup V^* \subset (U \cup V)^*$ :

$$q^* \in U^* \cup V^* \Rightarrow \exists n \quad Q_n \subset U \vee Q_n \subset V \Rightarrow \exists n \quad Q_n \subset U \cup V \Rightarrow q^* \in (U \cup V)^*$$

El otro contenido lo comprobaremos por contradicción:

Supongamos que  $q^* \in (U \cup V)^*$ , pero que para todo  $n$  tenemos que  $Q_n \not\subset U$  y  $Q_n \not\subset V$ . Como la frontera de  $U \cup V$  y la de  $V^c$  son compactas, podemos elegir un  $n$  tal que  $fr(V^c) \cap Q_n = \emptyset$  y que  $Q_n \subset Int(U \cup V)$ . Entonces proponemos la partición de  $Q_n$  en los abiertos  $Int(V) \cap Int(U \cup V)$  e  $Int(V^c) \cap Int(U \cup V)$ , disjuntos y ambos con intersección con  $Q_n$  no vacía por la hipótesis inicial; sin embargo, esto contradice que  $Q_n$  sea conexo. □

**Definición 3.9.** Sea  $p^*$  el representante de un extremo  $p = P_1 \supset P_2 \supset \dots$ , diremos que  $p^*$  es **plano/orientable** si existe un  $N$  tal que para todo  $n > N$  los conjuntos  $P_n$  son superficies planas/orientables.

La definición anterior nos permite considerar los conjuntos  $B(S) \supset B'(S) \supset B''(S)$ , donde  $B'(S)$  es el conjunto de los extremos no planos y  $B''(S)$  es el conjunto de los extremos no orientables. A partir de ahora consideraremos el borde ideal como la terna  $(B(S), B'(S), B''(S))$ .

**Lema 3.10.** Los conjuntos  $B'(S)$  y  $B''(S)$  son cerrados.

*Demuestra&ntilde;n.* Veamos que  $A = (B'(S))^c$  es un abierto:

Sea  $p^* \in A$  entonces existe un  $n$  con  $P_n$  plano. Definimos el conjunto:

$$C = \bigcup_{p^* \in A} \text{Int}(P_n)^*$$

$C$  es abierto por ser unión de abiertos. Bastaría con ver que  $C = A$ : por un lado, se sigue de la definición que  $A \subset C$ ; por otro, si  $q^* \in C$  entonces existe un  $n$  y un  $m$  con  $q_m \subset \text{Int}(P_n)$ , como  $P_n$  es plano entonces  $q_m$  también, con lo que concluimos que  $q^* \in A \Rightarrow C \subset A$ .

Una demostración totalmente análoga comprueba que  $B = (B''(S))^c$  es abierto.  $\square$

**Ejemplo:** Si para todo subconjunto compacto  $A \subset S$ , se tiene que  $S \setminus A$  tiene como mucho  $m$  componentes no acotadas, y se cumple que para algún  $A$  el valor es exactamente  $m$ , entonces el conjunto  $B(S)$  consiste de  $m$  clases de equivalencia de extremos (donde cada uno puede ser plano, orientable y no plano, o no orientable). Si  $m = 0$  tenemos una superficie compacta.



Figura 3.3: Ejemplo con  $m = 4$ : dos extremos de género infinito orientables, uno de género infinito no orientables y un extremo plano.

La siguiente propiedad es conveniente en la demostración del teorema de Kerékjárto:

**Lema 3.11.** El borde ideal de una superficie separable es un espacio totalmente inconnexo, separable y compacto.

Una demostración rigurosa de este hecho se da en [3].

## 3.2. Teorema de Kerékjárto

**Teorema 3.12.** Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies separables del mismo género y clase de orientabilidad. Entonces  $S$  y  $S'$  son homeomorfa si y solo si las fronteras ideales (como ternas de espacios) son homeomorfas.

### 3.2.1. Idea de la demostración

La demostración sigue un razonamiento inductivo, para demostrarlo son necesarios varios pasos técnicos. En el trabajo daremos una idea de la demostración sin detenernos a analizar esos detalles.

[AGREGAR DEMOSTRACIÓN]

## 3.3. Construcción de una superficie con borde ideal dado

Recordemos que la proposición 3.11 nos garantiza que el borde ideal es un espacio espacio totalmente inconexo, separable y compacto. Demostraremos ahora que para cualquier terna de espacios topológicos  $X \supset Y \supset Z$ , con  $Y$  y  $Z$  cerrados de  $X$ , y con  $X$  totalmente inconexo, separable y compacto, existe una superficie que tiene borde ideal homeomorfo a esa terna. Ian Richards en [2] construye la superficie que da demostración a este hecho.

Primero, veamos el siguiente resultado que es pieza clave en la construcción:

**Lema 3.13.** *Cualquier espacio compacto, totalmente inconexo y separable es homeomorfo a un subconjunto del conjunto de Cantor.*

[TODO: Agregar referencia donde se demuestre?]

Con este resultado podemos proceder a enunciar y demostrar el teorema de Ian Richards:

**Teorema 3.14.** *Sea  $(X, Y, Z)$  una terna cualquiera de espacios compactos, separables y totalmente inconexos con  $Z \subset Y \subset X$ . Entonces existe una superficie  $S$  cuyo borde ideal es  $(B(S), B'(S), B''(S))$  que es topológicamente equivalente a  $(X, Y, Z)$*

### Idea de la demostración

La construcción partirá de una esfera a la cual retiraremos un conjunto de puntos y discos abiertos, cada punto representará un extremo y los discos serán convenientemente identificados para crear subsuperficies de género 1 (o bien un toro o bien un plano proyectivo). Configurando adecuadamente estos dos elementos conseguiremos un borde ideal homeomorfo a  $(X, Y, Z)$ .

Procederemos primero construyendo la superficie y luego comprobando que cumple la condición especificada.

### Demostración

Por el lema 3.13 podemos asumir que  $X$  es un subconjunto del conjunto de Cantor, el cual consideramos inmerso en el plano compactificado (homeomorfo a la esfera) como el conjunto de puntos  $(x, 0)$  con  $0 \leq x \leq 1$ , donde  $x$  tiene una expresión triádica sin el dígito 1.

Elegimos  $D'$  el conjunto de todos los discos cerrados del plano que tienen por diámetro los intervalos  $[\frac{n-1/3}{3^m}, \frac{n+4/3}{3^m}] \times \{0\}$ , con  $0 \leq n \leq 3^m$ , donde  $m$  es cualquier natural y  $n$  es un natural que admite una expresión triádica sin el dígito 1. Sea  $D$  el subconjunto de discos de  $D'$  que contienen al menos un punto de  $X$ .

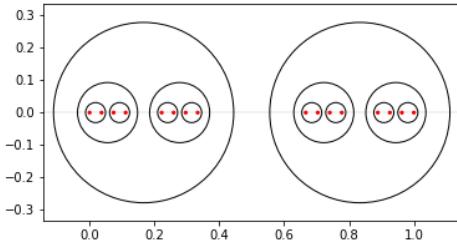


Figura 3.4: Discos de  $D'$ , en rojo puntos del conjunto de Cantor.

Los discos de  $D$  intersecados con  $X$  determinan una base de la topología de  $X$ . Los discos de  $D$  cumplen las siguientes dos propiedades:

1. Cuales quiera dos discos del conjunto son o bien disjuntos o bien uno está contenido dentro del otro (véase la figura 3.4).
2. Si tenemos una cadena de discos encajados  $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ , entonces la intersección de todos esos discos con el eje x es un único punto de  $X$ <sup>2</sup>. Más aún, se tiene que el conjunto de discos de  $D$  que contienen a un  $x \in X$  se pueden representar como una secuencia  $D_1 \supset D_2 \supset \dots$  cuya intersección es  $x$ .

Sea  $P^+$  y  $P^-$  los planos  $y > 0$  e  $y < 0$ , respectivamente. Para cada disco  $K$  en  $D$ , denotamos por  $K'$  y por  $K''$  los dos discos más grandes contenidos propiamente en  $K$  (Cualquier otro disco propiamente contenido en  $K$  estará por tanto contenido o en  $K'$  o en  $K''$ , véase la figura 3.4).

Ahora, para cada disco  $K$  en  $D$  elegimos dos discos abiertos  $C^+(K)$  y  $C^-(K)$ , cada uno contenido en  $K$  y que satisfagan:

- (a)  $C^+(K) \subset P^+$  y  $C^-(K) \subset P^-$
- (b)  $C^+(K)$  y  $C^-(K)$  no intersequen ni a  $K'$  ni a  $K''$ .
- (c)  $C^+(K)$  y  $C^-(K)$  son simétricos respecto al eje x.

Con lo que ningunos dos círculos  $C^\pm(K)$  se intersecan entre sí.

Construimos nuestra superficie  $S$  como la esfera homeomórfica al plano compactificado en el que retiramos los puntos de  $X$  y algunos de los círculos  $C^\pm(K)$ . Primero,

<sup>2</sup>Este hecho se comprueba viendo que podemos excluir cualquier otro punto de la intersección.

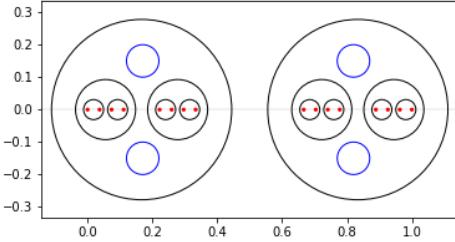


Figura 3.5: En azul mostramos posibles elecciones de  $C^\pm(K)$ .

retiramos los círculos  $C^\pm(K)$  que están dentro de un  $K \in D$  con  $K \cap Y \neq \emptyset$ . Si por el contrario  $K \cap Y = \emptyset$ , entonces no retiramos los círculos, este caso corresponderá con los extremos planos. A continuación, si ocurre que  $K \cap Y \neq \emptyset$  y  $K \cap Z = \emptyset$ , entonces identificamos la frontera de  $C^+(K)$  con la frontera de  $C^-(K)$  reflejando la primera en el eje x (preservando la orientación), estos corresponderán con los extremos de género infinito orientables. Por último, si  $K \cap Z \neq \emptyset$ , entonces identificamos los círculos por traslación (invirtiendo la orientación), en cuyo caso tendremos extremos de género infinito no orientables.

Queda ahora probar que la  $S$  obtenida tiene un borde ideal homeomorfo a la terna  $(X, Y, Z)$ :

De los puntos (1) y (2) anteriores se sigue que todo punto  $x \in X$  se puede representar como la intersección de una secuencia de discos  $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ , con  $D_i \in D$ . Utilizando la definición 3.5, observamos que dichas secuencias de discos son extremos. Esto nos permite definir la función que manda cada  $x$  a la correspondiente clase de extremos:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow B(S) \\ x &\longrightarrow f(x) = p^* \end{aligned}$$

Donde  $p^*$  es representante de  $p = D_1 \supset D_2 \supset \dots$  y se cumple:

$$\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$$

Veamos ahora que  $f$  define el homeomorfismo que buscamos.

Como  $X \setminus Y$  y  $X \setminus Z$  son subconjuntos abiertos de  $X$ , entonces para todo punto  $p \in X \setminus Y$  existe un disco  $K \in D$  que contiene a  $p$  y cumple  $K \cap Y = \emptyset$ , y análogamente para  $p \in X \setminus Z$ . Por tanto, tendremos que  $Y$  y  $Z$  corresponden exactamente con los extremos no planos y los no orientables, respectivamente<sup>3</sup>. Esto indica que  $f$  induce los homeomorfismos adecuados cuando se restringe a los espacios  $Y$  y  $Z$ .

La función  $f$  es inyectiva porque dados dos puntos distintos  $x_1, x_2 \in X$  tenemos que, por ser  $X$  un espacio Hausdorff, existen dos abiertos  $U_1, U_2$  con intersección nula

<sup>3</sup>Esto se sigue de que  $X \setminus Y$  corresponde por construcción con los extremos planos, y  $X \setminus Z$  corresponde con los orientables

que los separan. Al mismo tiempo, por ser  $D$  una base de la topología de  $X$  entonces existen dos discos en  $D$  que cumplen  $x_1 \in K_1 \subset U_1$  y  $x_2 \in K_2 \subset U_2$ , pero como ambos discos tienen intersección vacía se sigue de la definición 3.5 que las secuencias necesariamente representan extremos no equivalentes<sup>4</sup>.

Por otra parte, vemos que  $f$  manda la base inducida por  $D^5$  de la topología de  $X$  al conjunto  $\{K^* : K \in D\}$ . Utilizando los lemas 3.8 y 3.7, podemos comprobar que dicho conjunto es una base de la topología de  $B(S)$ . Bastaría entonces con probar la sobreyectividad de  $f$  para demostrar que la función es, en efecto, un homeomorfismo.

Probemos que  $f$  es sobreyectiva: Como  $B(S)$  es Hausdorff, entonces todo punto  $p^* \in B(S)$  es intersección de una colección infinita  $\{K_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$  de conjuntos de la base  $\{K^* : K \in D\}$  de la topología de  $B(S)$ . Por la condición (1), la colección  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una secuencia encajada y representa un extremo  $p_1^* \in B(S)$ , pero entonces es necesario que  $p_1^* = p^*$ . Por la condición (2), se cumple que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = p'$ . Finalmente, por la construcción dada de  $f$  tenemos que  $f(p') = p_1^* = p^*$ , probando así la sobreyectividad y con ello concluyendo el teorema.

### 3.3.1. Construcción de representantes para superficies no compacta

Por el teorema de Kerékjártó, podemos tomar las superficies construidas en la demostración anterior como representantes para el caso de superficies planas, para superficies de género infinito orientables y para superficies de género infinito e infinitamente no orientables<sup>6</sup>. Faltaría por asignar un ‘modelo’ a las superficies de género finito y las superficies de género infinito pero finitamente no orientables.

En el caso de una superficie  $S$  de género finito  $m > 0$ , podemos asignar el representante  $S_1 \# S_2$ , donde  $S_1$  tiene borde ideal homeomorfo a  $S$  y se construye siguiendo la demostración anterior, y  $S_2$  es una superficie compacta que es o bien suma conexa de  $m$  toros (caso orientable) o bien suma conexa de  $m$  planos proyectivos (caso no orientable). Se sigue de las definiciones de borde ideal que sumar una superficie compacta no va a modificar el espacio topológico  $B(S)$ .

De manera similar, si la superficie  $S$  es de género infinito pero finitamente no orientable, el representante se construye igual que el caso anterior ( $S_1 \# S_2$ ), pero eligiendo  $S_2$  como suma conexa de 2 o 3 planos proyectivos según la paridad de la no orientabilidad.

Habiendo tenido en cuenta estos casos, ya tenemos una clasificación completa de las superficies no compactas.

## Numerabilidad de las clasificaciones

Por último, acabemos el trabajo preguntándonos por la cardinalidad del conjunto de superficies salvo homeomorfismo:

<sup>4</sup>Un razonamiento muy parecido sirve para demostrar que la función  $f$  está bien definida.

<sup>5</sup>Intersecando los discos con  $X$

<sup>6</sup>En estos casos las propiedades de género y clase de orientabilidad vienen ya determinadas por su borde ideal.

Del teorema de clasificación de superficies compactas, se concluye que existen  $\aleph_0$  clases equivalencia bajo la hipótesis compacidad. Por otra parte, utilizando la construcción de Ian Richards y contando el número de subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor, deducimos que, sin la hipótesis de compacidad, tenemos  $\aleph_1$  superficies no equivalentes. Más aún, si no se exige la condición de segundo numerabilidad en la definición, entonces tenemos que la cardinalidad asciende a  $2^{\aleph_1}$  [4]. Recordemos que esta condición fue siempre instrumento clave en nuestro trabajo ya que nos permitía suponer la existencia de una triangulación.

## CAPÍTULO 4

# Anexo: Algunos resultados que utilizamos en el trabajo

---

**Lema 4.1.** *Para verificar que la suma conexa está bien definida hace falta aclarar varios puntos.*

1. *Tenemos que asegurar la existencia de un subconjunto homeomorfo a un disco.*

*Demostración.* Tomamos un punto  $p \in S_i$  cualquiera. Como  $S_i$  es una 2-variedad, entonces existe un homeomorfismo  $g$  que manda un entorno,  $U$ , del punto  $p$  al círculo abierto.

Tomamos  $E_{\frac{1}{2}}$  el disco cerrado de radio  $\frac{1}{2}$ , y  $U' = g^{-1}(E_{\frac{1}{2}})$ . Tenemos que  $g|_{U'}$  es un homeomorfismo de un subconjunto de  $S_i$  a  $E_{\frac{1}{2}}$  que a su vez es homeomorfo al disco cerrado de radio 1.  $\square$

2. *Segundo, tenemos que asegurarnos que existe un tal  $\psi$  homeomorfismo:*

*Demostración.* Utilizando los  $g$  anteriores basta ver que  $g(fr(D_i)) = fr(E^2)$ , y luego componer las funciones para construir un homeomorfismo entre las fronteras.  $\square$

3. *Tercero, habría que comprobar que, en efecto, el objeto obtenido es una superficie. Es decir, comprobar que todo punto tiene un entorno homeomorfo al disco abierto, que el espacio es  $T_2$  y que es conexo.*

*Demostración.* Ideas (hace falta formalizarlo?) 1. Entorno homeomorfo a la bola: Tenemos que comprobarlo para los ptos frontera. Esta dems es engorrosa: Basta quizás con ver que localmente podemos tratar a los puntos de la frontera como si estuviésemos en  $R^2$ , observando las construcciones de homeomorfismos podemos concluir que se puede crear un entorno homeomorfo a una bola al pegar dos semicírculos de cada superficie (vistas en  $R^2$  localmente). 2. Conexión: Basta con probar que para todos los puntos del borde sus abiertos tienen puntos de ambas superficies. Esto se sigue directamente de la topología cociente inducida (analizar

la definición con la función cociente, tendrás puntos en ambas superficies por tener abtos en ambas). 3. Ver que es  $T_2$  resulta sencillo. Si los ptos son de superficies distintas, ya está, por ser disjuntas. Si son de la misma entonces también, porque antes eran  $t_2$ . Si una es de la superficie, por concretar, de  $S_1$  y la otra del borde, entonces tomamos los mismos abtos que antes separaban a los puntos, pero el abto del borde ya no es abto de la superficie cociente, es fácil comprobar que ese conjunto unión  $S_2'$  sí es un abto (por la def de topo cociente, todos los ptos serán interiores) y también es fácil ver que estos dos conjuntos serán disjuntos, por lo que hemos separado los dos ptos.  $\square$

4. *Y, finalmente, tenemos que comprobar que esta definición es independiente de los conjuntos  $D_i$  escogidos e independiente de los homeomorfismos.*

*Demostración.* Ideas (hace falta formalizarlo?): 1. Que no depende del homeomorfismo es directo porque solo nos hace falta esa propiedad para establecer la topología cociente. Habiendo probado el punto anterior ya estaría. 2. Que no depende de la elección del disco se sigue de que podemos desplazar el disco por la superficie manteniendo el homeomorfismo con la superficie anterior. De no poder hacerlo entonces tendríamos que no se puede retirar un disco en la zona a la que estamos desplazándolo, pero en ese caso sencillamente no tomaríamos esa elección de disco por ser imposible.  $\square$

**Lema 4.2.** *La suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos.*

*Demostración.* TODO  $\square$

# CAPÍTULO 5

## COSAS QUE NO HE UTILIZADO

---

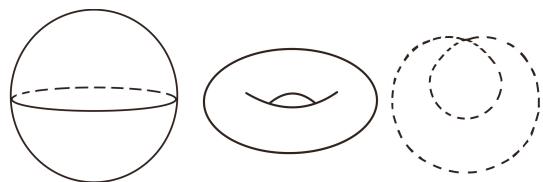


Figura 5.1: Ejemplos de superficies: Esfera, toro y banda de Möbius



# Bibliografía

---

- [1] WILLIAM S. MASSEY, Introducción a la topología algebraica. Reverté, 2006.  
Capítulo I.
- [2] IAN RICHARDS, *On the classification of noncompact surfaces*. 1963
- [3] AHLFORS L. V. y SARIO, *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, 1960.  
Capítulo I.
- [4] D. GAULD, *Non-metrisable manifolds*. Vol. 296, Springer, 2014

