

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Teorema de clasificación de superficies

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Rodrigo De Pool
Tutor: Javier Aramayona

Curso 2019-2020

Resumen

Aquí va algo

Abstract

Here goes something

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Introducción a las superficies topológicas	1
1.2	Superficies compactas	2
1.3	Suma conexa	4
1.4	Triangulación de una superficie	7
2	Clasificación de superficies compactas	11
3	Hacia las superficies no compactas	13
4	Algunos resultados que no sé si incluiremos	15

CAPÍTULO 1

Introducción

El trabajo presenta un estudio de las superficies topológicas y su clasificación. Primero, se estudiarán algunas herramientas, como la suma conexa y la triangulación, que serán útiles para demostrar el teorema de clasificación bajo la hipótesis de compacidad. Luego, nos acercaremos al resultado de Kérèjártó en el que se retira la exigencia de compacidad, para ello se introducirán nuevas nociones como el de finales y el de frontera ideal. Por último, examinaremos una demostración donde Ian Richards [2] construye una superficie representante para cada clase de equivalencia topológica, desvelando una interesante relación entre las superficies y los subconjuntos del conjunto de Cantor.

1.1. Introducción a las superficies topológicas

Para formalizar el concepto de superficie necesitamos primero definir las variedades topológicas:

Definición 1.1. Un conjunto, \mathcal{X} , dotado de una topología, diremos que es una n -variedad si es Hausdorff y para todo punto existe un entorno homeomorfo a una bola abierta n dimensional.

Ejemplos

1. El conjunto $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$, dotado de la topología de subespacio, es una 3-variedad.
2. Un cuadrado lleno, dotado también de la topología de subespacio, no es una variedad. Los puntos que pertenecen a las aristas no tienen entornos homeomorfos a bolas.
3. Nótese que, al no exigir conexión, un conjunto como $\bigcup_{i=0}^{\infty} (i, i + \frac{1}{2})$ también es una variedad.

[Es, quizás, importante destacar que la condición de T_2 no se sigue del resto de la definición ?]

Definición 1.2. Llamaremos entonces *superficie* a toda 2-variedad conexa que cumple el segundo axioma de numerabilidad.

La definición generaliza el concepto intuitivo que se suele manejar de superficies. La esfera, el toro o una banda de Möbius sin el borde, son ejemplos de superficies si consideramos sus conjuntos junto a la topología de subespacio.

[Se debería quizás explicar por qué la condición de segundo numerable no es redundante?]

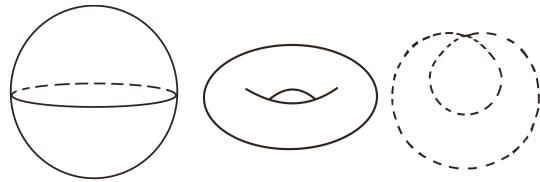


Figura 1.1: Ejemplos de superficies: Esfera, toro y banda de Möbius

[Cuando se exige T_2 y segundo numerable se suele argumentar que pretenden evitar ejemplos patológicos de conjuntos que los matemáticos no consideramos como superficies. Debería agregar eso?]

1.2. Superficies compactas

Alimentemos la curiosidad del lector con algunos suculentos ejemplos de superficies compactas:

La esfera

El conjunto $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ claramente conforma un ejemplo de superficie compacta. Alternativamente, se puede expresar la esfera como el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| \leq 1\}$, realizando la identificación 1.1 y dotando al conjunto resultante de la topología cociente.

$$(1.1) \quad (x, y) \equiv (x, -y), \quad \forall (x, y) \in fr(D)$$

Se puede comprobar que ambas formas de definir la esfera son homeomorfas.

El toro

Si se toma el cuadrado cerrado $X = \{(x, y) \in R^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ con la topología de subespacio, el *toro* se construye de identificar los puntos de X según 1.2 y dotar al conjunto resultante de la topología cociente.

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (x, -1) &\equiv (x, 1) & x \in [-1, 1] \\ (-1, y) &\equiv (1, y) & y \in [-1, 1] \end{aligned}$$

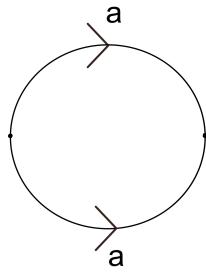


Figura 1.2: Esfera como espacio cociente

En la figura 1.3 se representa gráficamente el toro. Las aristas con el mismo símbolo indican aristas a identificar en el sentido indicado por las flechas.

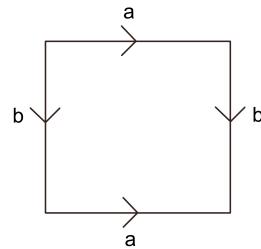


Figura 1.3: Toro como espacio cociente

Es un ejercicio simple pero extenso demostrar que el toro así definido es homeomorfo a la estructura de donut que se suele estudiar.

El plano proyectivo

Por su parte, el **plano proyectivo** corresponde al disco $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ en el cual se identifican los puntos de la frontera diametralmente opuestos.

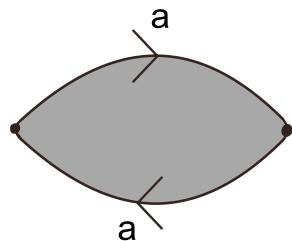


Figura 1.4: Plano proyectivo como espacio cociente

De los tres ejemplos de superficies compactas este es el único de una superficie no orientable. Se mencionó anteriormente a la banda de Möbius sin el borde, sin embargo, ese ejemplo no satisface la compacidad.

Un no ejemplo

Podríamos pensar que un cuadrado cerrado compone otro ejemplo de superficie compacta. Sin embargo, no es así. A pesar de cumplir con la compacidad, ser conexo, ser Hausdorff y segundo numerable, ya vimos anteriormente que no es una variedad. El cuadrado pertenece al conjunto de las *superficies con borde* que mencionaremos más adelante.

Cabe cuestionarse sobre la compacidad de los ejemplos planteados en esta sección. El siguiente lema nos demuestra que, en efecto, las superficies tratadas son compactas.

Lema 1.3. *Sea X un espacio topológico e Y un espacio cociente que resulta de identificar puntos en X . Entonces:*

$$X \text{ compacto} \Rightarrow Y \text{ compacto}$$

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ la función cociente que asocia a cada punto su clase de equivalencia; f es claramente sobreyectiva y, por ser cociente, es continua.

Siendo X compacto tenemos entonces que $f(X) = Y$ también lo es. \square

Expresión canónica

Las figuras 1.2, 1.3 e 1.4, sugieren una forma visual de definir superficies compactas tomando polígonos e identificando sus aristas a pares.

Más aún, se puede definir una notación con la que referirnos a estos polígonos: Partiendo de cualquier vértice recorremos la figura en sentido de las agujas del reloj, se anotan los símbolos según se recorre la respectiva arista y se agrega un exponente -1 en el caso de que la flecha vaya en el sentido contrario al recorrido.

De este modo, nos referimos a la esfera (figura 1.2) como aa^{-1} , al toro (figura 1.3) como $aba^{-1}b^{-1}$ y al plano proyectivo (figura 1.4) como aa . Llamaremos *expresión canónica* a estas formas de referirnos a la esfera, al toro y al plano proyectivo, respectivamente.

Una vez familiarizados con esta notación se facilita la definición de nuevas superficies:

Definición 1.4. La botella de *Klein* es la superficie que corresponde con la expresión $aba^{-1}b$

1.3. Suma conexa

El operador que definimos a continuación nos permitirá generar infinidad de nuevas superficies partiendo de las ya estudiadas. De hecho, si se me permite el *spoiler*, con este operador y los ejemplos anteriores podemos construir **cualquier** superficie compacta.

Definición 1.5. Dadas dos superficies S_1 y S_2 podemos definir la suma conexa de ambas, $S_1 \# S_2$, como la superficie generada al recortar un disco de cada superficie y pegarlas a través del borde de los discos retirados. Más formalmente:

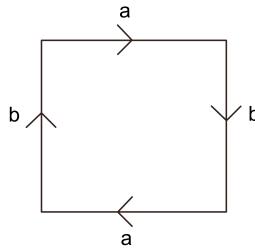


Figura 1.5: Botella de Klein

1. Para cada S_i tomamos un subconjunto $D_i \subset S_i$ homeomorfo al disco cerrado de dos dimensiones E^2 . Llamamos S'_i al complementario del interior de D_i .
2. Tomamos un homeomorfismo $\psi : D_1 \longrightarrow D_2$
3. Definimos entonces $S_1 \# S_2$ como $S'_1 \cup S'_2$ dotado de la topología cociente que resulta de identificar los puntos x y $\psi(x)$ para todo punto de la frontera de D_1 .

En el lema 4.4 comprobamos que la suma conexa está bien definida y resulta en una nueva superficie.

De la definición se deduce rápidamente que el operador $\#$ es conmutativo y asociativo. [Incluyo esto bien explicado?–] El hecho de que sea conmutativo se debe a que la topología cociente no se va a alterar si se cambia el orden de la unión. La asociatividad se sigue de que el disco de pegado puede ser seleccionado en una de las dos superficies (cualquier elección es homeomorfa por definición), luego, seleccionando adecuadamente los discos, tendremos codominios iguales en la función cociente y, por tanto, también lo serán las topologías inducidas. [-]

Ejemplos

Sean T_1 y T_2 dos toros disjuntos, tenemos que $S = T_1 \# T_2$ es un donut de dos agujeros. Para construirlo primero retiramos de los toros un disco como se muestra en la primera figura de la imagen 1.6, nótese que podemos expresarlo como la segunda figura porque todos los vértices del polígono están identificados. Finalmente, identificamos los bordes de ambos discos (c_1 y c_2), obteniendo el octágono que representa a S , donde, de nuevo, todos los vértices representan el mismo punto.

Se deduce de 1.6 que la superficie S obtenida se puede expresar en notación algebraica como $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.

En la figura 1.8 realizamos la misma construcción para dos planos proyectivos. Se deduce que podemos expresar la suma de dos planos proyectivos como $a_1 a_1 a_2 a_2$.

Por último, en la figura 1.9 realizamos la suma conexa de dos esferas. Curiosamente observamos que el resultado es otra esfera. Se puede comprobar que la esfera actúa como elemento neutro de la suma conexa [lo compruebo?].

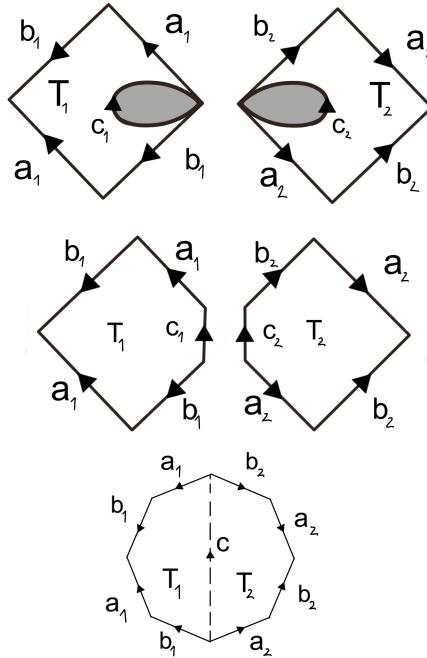


Figura 1.6: Suma conexa de dos toros

Expresiones canónicas de sumas conexas

Los ejemplos mencionados en la sección anterior proporcionan un método para describir sumas conexas arbitrarias de esferas, toros y planos proyectivos. Se sigue directamente de dichos ejemplos que:

- La suma conexa de n esferas es igual a una esfera:

$$(1.3) \quad aa^{-1}$$

- La suma conexa de n toros se puede escribir como:

$$(1.4) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

- La suma conexa de n planos proyectivos se puede describir como:

$$(1.5) \quad a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

A las expresiones 1.3, 1.4 y 1.5 las llamaremos *expresiones canónicas* de sus respectivas sumas conexas.

Antes de dar el asunto por comprendido, veamos un último ejemplo de suma conexa:

Lema 1.6. *La suma conexa de dos planos proyectivos es una botella de Klein*

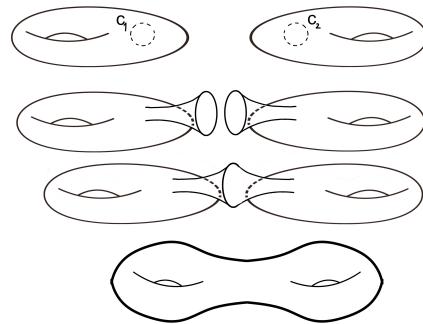
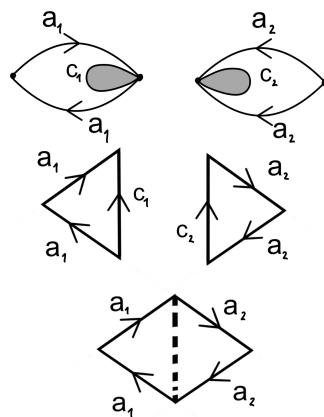
Figura 1.7: Suma conexa de dos toros como subvariedades de \mathbb{R}^3 

Figura 1.8: Suma conexa de dos planos proyectivos

Demostración. En la demostración trataremos al plano proyectivo como el disco unidad identificando los puntos diametralmente opuestos.

Seleccionamos del plano proyectivo el subconjunto $D = \{(x, y) : |y| \geq \frac{1}{2}, |x| \leq \sqrt{1 - y^2}\}$ homeomorfo al disco cerrado. Retiramos D como se muestra en la figura 1.10, los segmentos discontinuos representan la frontera del disco por la cual se ha de realizar la suma conexa.

Partiendo de dos planos proyectivos, I e II , retiramos el disco como en la figura 1.10. Luego procedemos a identificar ambos conjuntos como se indica en la figura 1.11.

La figura final obtenida es una *Botella de Klein*. □

El ávido lector se habrá dado cuenta de un detalle curioso de la demostración, retirar un disco de un plano proyectivo lo convierte en una banda de Möbius!

1.4. Triangulación de una superficie

Una triangulación, en caso de existir, pretende expresar una superficie como un conjunto de triángulos pegados por las aristas. La noción de triangulación, *a priori*

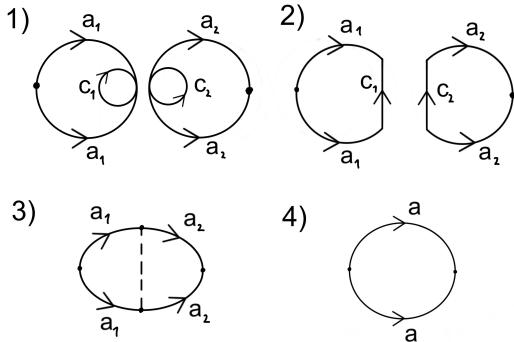


Figura 1.9: Suma conexa de dos esferas

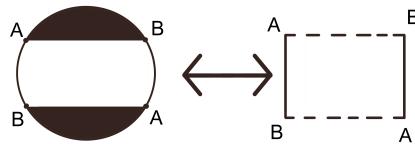


Figura 1.10: Plano proyectivo menos un subconjunto homemorfo al disco cerrado

inofensiva, será un ingrediente clave para poder manipular superficies compactas. Se define rigurosamente como:

Definición 1.7. Una triangulación de una superficie compacta, S , consiste en subconjuntos cerrados, T_1, \dots, T_n , que cubren a S y una familia de homeomorfismos, ϕ_1, \dots, ϕ_n , que cumplen:

$$\phi_i : T'_i \longrightarrow T_i$$

Donde T'_i es un triángulo del plano \mathbb{R}^2 . Además, se exige que, tomando T_i y T_j con $i \neq j$, se cumpla una de las siguientes condiciones:

- Son conjuntos totalmente disjuntos.
- Comparten un solo vértice en común y solo eso (Llamamos vértice a todo elemento de S que se corresponde por algún ϕ_i con un vértice en el plano).
- Tienen toda una arista en común y solo eso (Llamamos arista a la imagen de una arista de algún T'_i por ϕ_i).

Ejemplos

En la figura 1.12 vemos un ejemplo de triangulación del toro compuesta por los triángulos: [Lista de triángulos]

Observe que en la imagen 1.13 ninguna de las dos figuras son triangulaciones del toro. La primera, aunque triangulación, no es homeomorfo al toro; La segunda ni siquiera satisface las condiciones de triangulación.

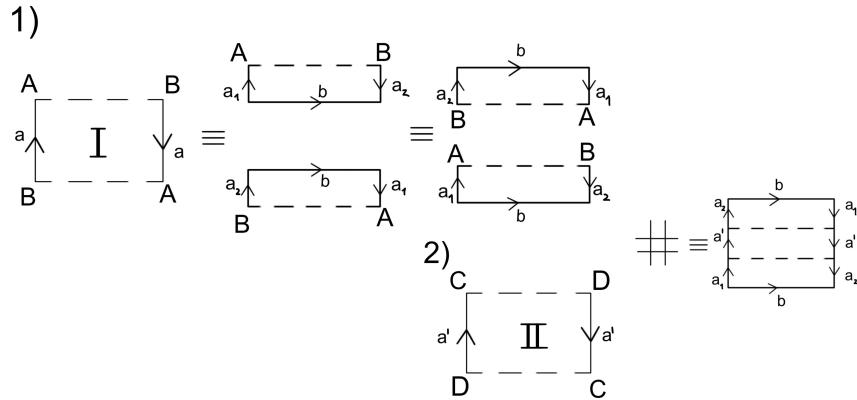
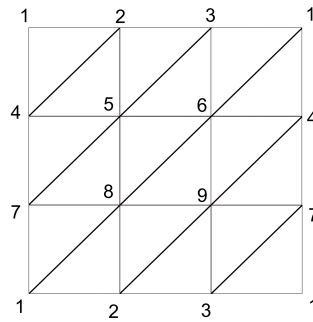
Figura 1.11: Botella de Klein = $I \# II$ 

Figura 1.12: Triangulación del toro

Lemas de la triangulación

Lema 1.8. *Sea S una superficie triangulable entonces una arista lo es de exactamente dos triángulos.*

Demuestra. TODO: En proceso, escribirla si hiciese falta

Si un punto de una arista pertenece a n triángulos \Rightarrow existe entorno del punto que está contenido dentro de estos n triángulos disjuntos y solo comparten la arista.

Una bola no puede ser homeomorfa a nada que no sea $n=2$. \square

Lema 1.9. *Sea S una superficie triangulable y $v \in S$ un vértice en esa triangulación, entonces podemos ordenar el conjunto de todos los triángulos con vértice v cíclicamente, $T_0, T_1, \dots, T_n = T_0$, de manera que T_i y T_{i+1} tienen toda una arista en común para todo $0 \leq i \leq n - 1$.*

Demuestra. TODO: En proceso, escribirla si hiciese falta

Que se puede conseguir es consecuencia de 1.8.

Que es único tengo que mirarlo en el libro \square

Los lemas nos aseguran que las triangulaciones se comportan de forma razonable.

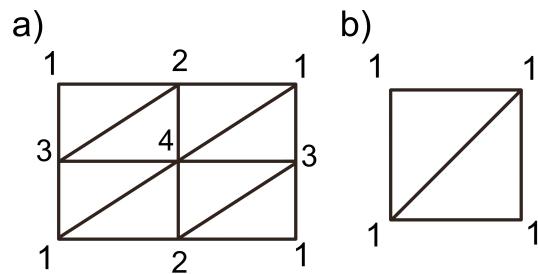


Figura 1.13: Ejemplos de cosas que no son triangulaciones

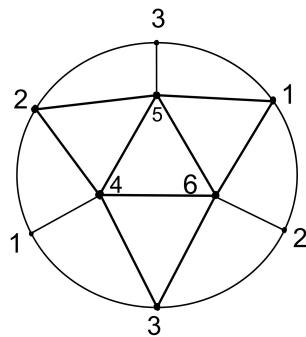


Figura 1.14: Triangulación del plano proyectivo

Una superficie compacta en \mathbb{R}^3 , como por ejemplo una esfera, es fácil imaginársela teselada por triángulos que la cubren. Tibor Radó garantiza con el siguiente teorema que este es el caso de cualquier superficie compacta.

Teorema 1.10. Teorema de triangulación

Toda S superficie compacta es triangulable.

Este teorema conforma la principal herramienta para demostración del teorema de clasificación de superficies compactas. Lamentablemente, no lo demostraremos.

[Nota: sigo acaso demasiado la estructura que hay en el libro de Massey? es esto un plagio? Me costaría plantearlo de otra forma, su hilo argumental tiene todo el sentido del mundo]

CAPÍTULO 2

Clasificación de superficies compactas

Teorema 2.1. *Teorema de clasificación de superficies compactas*

Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos.

Demostración. Da proof

□

CAPÍTULO 3

Hacia las superficies no compactas

[Complicaciones, citar resultados para superficies con borde]

[Introducir finales y frontera ideal]

[Demostrar algunos, citar otros, lemas de fronteras ideales]

[Tma de Kerekjartos sobre clasificación]

[Relación de espacios totalmente inconexos, separables (cjto denso numerable) y compacto con el Cjto de Cantor]

[Construcción de Ian Richards dando una superficie a cada posible frontera ideal]

CAPÍTULO 4

Algunos resultados que no sé si incluiremos

Cosas que empecé a escribir pero que probablemente no haga falta incluir en el TFG. Son definiciones elementales de topo y algunos lemas.

Definición 4.1. Un conjunto \mathcal{X} es no conexo si existen dos conjuntos cerrados, \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 , tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ y $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$.

Definición 4.2. Un conjunto \mathcal{X} se dice conexo si no cumple la definición anterior.

[Def de topo cociente] [Compacto va a compacto por f cont, conexo va a conexo]

Lema 4.3. *El pseudolema más útil de toda la topología*

Al dilatar, comprimir, trasladar y cortar-identificar una figura, el objeto obtenido es homeomorfo al inicial. ¿Por qué?, se pregunta un matemático, porque todas las transformaciones son continuas. (¿Incluir en el TFG en tono seriesísimo?)

Lema 4.4. *Para verificar que la suma conexa está bien definida hace falta aclarar varios puntos.*

1. *Tenemos que asegurar la existencia de un subconjunto homeomorfo a un disco.*

Demostración. Tomamos un punto $p \in S_i$ cualquiera. Como S_i es una 2-variedad, entonces existe un homeomorfismo g que manda un entorno, U , del punto p al círculo abierto.

Tomamos $E_{\frac{1}{2}}$ el disco cerrado de radio $\frac{1}{2}$, y $U' = g^{-1}(E_{\frac{1}{2}})$. Tenemos que $g|_{U'}$ es un homeomorfismo de un subconjunto de S_i a $E_{\frac{1}{2}}$ que a su vez es homeomorfo al disco cerrado de radio 1. \square

2. *Segundo, tenemos que asegurarnos que existe un tal ψ homeomorfismo:*

Demostración. Utilizando los g anteriores basta ver que $g(fr(D_i)) = fr(E^2)$, y luego componer las funciones para construir un homeomorfismo entre las fronteras. \square

3. Tercero, habría que comprobar que, en efecto, el objeto obtenido es una superficie. Es decir, comprobar que todo punto tiene un entorno homeomorfo al disco abierto, que el espacio es T_2 y que es conexo.

Demostración. Ideas (hace falta formalizarlo?) 1. Entorno homeomorfo a la bola: Tenemos que comprobarlo para los ptos frontera. Esta dems es engorrosa: Basta quizás con ver que localmente podemos tratar a los puntos de la frontera como si estuviesemos en R^2 , observando las construcciones de homeomorfismos podemos concluir que se puede crear un entorno homeomorfo a una bola al pegar dos semicírculos de cada superficie (vistas en R^2 localmente). 2. Conexión: Basta con probar que para todos los puntos del borde sus abiertos tienen puntos de ambas superficies. Esto se sigue directamente de la topología cociente inducida (analizar la definición con la función cociente, tendrás puntos en ambas superficies por tener abtos en ambas). 3. Ver que es T_2 resulta sencillo. Si los ptos son de superficies distintas, ya está, por ser disjuntas. Si son de la misma entonces también, porque antes eran t_2 . Si una es de la superficie, por concretar, de S^1 y la otra del borde, entonces tomamos los mismos abtos que antes separaban a los puntos, pero el abto del borde ya no es abto de la superficie cociente, es fácil comprobar que ese conjunto unión S^2' sí es un abto (por la def de topo cociente, todos los ptos serán interiores) y también es fácil ver que estos dos conjuntos serán disjuntos, por lo que hemos separado los dos ptos. \square

4. Y, finalmente, tenemos que comprobar que esta definición es independiente de los conjuntos D_i escogidos e independiente de los homeomorfismos.

Demostración. Ideas (hace falta formalizarlo?): 1. Que no depende del homeomorfismo es directo porque solo nos hace falta esa propiedad para establecer la topología cociente. Habiendo probado el punto anterior ya estaría. 2. Que no depende de la elección del disco se sigue de que podemos desplazar el disco por la superficie manteniendo el homeomorfismo con la superficie anterior. De no poder hacerlo entonces tendríamos que no se puede retirar un disco en la zona a la que estamos desplazándolo, pero en ese caso sencillamente no tomaríamos esa elección de disco por ser imposible. \square

Bibliografía

- [1] WILLIAM S. MASSEY: Introducción a la topología algebraica. *Editorial Reverté* **1** (2006), 1–29.
- [2] IAN RICHARDS *Classification of non compact surfaces...o algo así*

