

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Teorema de clasificación de superficies

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Rodrigo De Pool
Tutor: Javier Aramayona

Curso 2019-2020

Resumen

El trabajo comprende un estudio riguroso de las superficies topológicas y su clasificación:

El primer bloque inicia introduciendo las nociones elementales de superficies compactas y procede a demostrar que, bajo hipótesis de compactidad, toda superficie es topológicamente equivalente: o a una esfera, o a una suma conexa finita de toros, o a una suma conexa finita de planos proyectivos.

TODO: 1. Mencionar superficies **2do numerables!** 2. Mencionar a Kerekjartos 3. Explicar someramente las diferencias entre Kerekjartos e Ian Richards. Hablar en términos de subconjuntos del cjto de Cantor. 4. Que quede claro lo difícil del paper. Has más largo esta segunda sección 5. Que quede bonito, AQUÍ SE DECIDE TU NOTA 6. Traducirlo al inglés (recuerda: Has ->contains y Result by)

Posteriormente, estudiaremos el resultado Kérjártó, que generaliza la clasificación retirando la exigencia de compactidad. En esta nueva incursión hará falta definir el concepto de ‘frontera ideal’, un invariante topológico que será el invariante topológico para el manejo de superficies genéricas. Por último, se reproducirá una construcción de Ian Richards [2] que permite crear un representante para cada clase de equivalencia de superficies homeomorfas.

Abstract

This essay has a mathematical approach to topological surfaces and their classification:

Firstly, basic notions of compact surfaces will be introduced, from which a proof of their classification will be given. As a result we will find that any compact surface is homeomorphic either to: a sphere, or a finite *connected sum* of torus, or a finite *connected sum* of projective planes.

Afterwards, we will proceed to study the classification eliminating the hypothesis of compactness. For this, we will require to introduce new concepts like the ideal boundary. Finally, we will present a result from Ian Richards [2] that constructs a surface homemorphic to any given surface.

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Introducción a las superficies topológicas	1
1.2	Orientación de superficies	2
1.3	Superficies compactas	3
1.3.1	Expresión canónica	5
1.4	Suma conexa	5
1.4.1	Expresiones canónicas de sumas conexas	8
1.5	Triangulación de una superficie	9
2	Clasificación de superficies compactas	15
2.1	Primer paso	15
2.2	Segundo paso	17
2.3	Tercer paso	18
2.4	Cuarto paso	19
2.5	Quinto paso	20
2.6	Desenlace final	20
2.7	Superficies con borde y su clasificación	21
3	Hacia las superficies no compactas	23
4	Anexo: Algunos resultados que utilizamos en el trabajo	25
5	COSAS QUE NO HE UTILIZADO	27

CAPÍTULO 1

Introducción

El trabajo abarcará un estudio de las superficies topológicas y su clasificación:

Primero, introduciremos la noción de superficie de forma rigurosa y definiremos los conceptos de suma conexa y triangulación, ambas herramientas que facilitarán el manejo de estos objetos. Para acabar con este primer bloque, enunciaremos y demostraremos el teorema de clasificación que nos garantiza que toda superficie compacta es topológicamente equivalente: o a una esfera; o a una *suma* finita de toros; o a una *suma* finita de planos proyectivos.

Como segundo objetivo, estudiaremos el resultado de Kérèjártó. El teorema generaliza la clasificación retirando la exigencia de compacidad. Antes de sumergirnos en el teorema, serán necesarias nuevas herramientas. Por ello, introduciremos las nociones de finales, frontera ideal y clases de orientabilidad. Veremos entonces que dos superficies serán homeomorfas si y solo si comparten frontera ideal, clase orientabilidad y género.

Finalmente, examinaremos algunos resultados sobre la clasificación. Por un lado, comprobaremos que toda frontera ideal de una superficie no compacta es homeomorfa a un subconjunto del conjunto de Cantor. Además, estudiaremos la demostración del recíproco dada por Ian Richards [2], esto es, que para todo subconjunto del conjunto de Cantor existe una superficie que le tiene por frontera ideal. Adicionalmente, esta prueba nos dará un método constructivo con el cual generar superficies representantes para cada clase de equivalencia (topológica) de superficies.

1.1. Introducción a las superficies topológicas

El concepto de superficie topológica busca generalizar la idea de *superficie* en el sentido usual. Más concretamente, buscamos abarcar todo conjunto que comparta localmente las propiedades topológicas de una superficie en \mathbb{R}^n .

Definición 1.1. Diremos que un espacio topológico, S , es una **superficie topológica** si para todos sus puntos existe un entorno homeomorfo a $U^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$. Además, a S se le exige ser Hausdorff, segundo numerable y conexo.¹

Consideremos los siguientes ejemplos sencillos de superficies topológicas:

1. El conjunto $U^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, dotado de la topología de subespacio, es trivialmente una superficie.
2. El cuadrado sin bordes

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

al ser dotado de la topología de subespacio, también es ejemplo de superficie.

3. Dado un homeomorfismo cualquiera:

$$f : S \rightarrow X$$

tendremos que si S es una superficie topológica, entonces $f(S)$ también lo es.

Por otro lado, si consideramos el cuadrado con sus bordes (\bar{C}), el conjunto no compone un ejemplo de superficie tal y como lo definimos. En este conjunto los puntos que pertenecen a las aristas no tienen entornos homeomorfos a U^2 . Veremos que \bar{C} es una ‘superficie con borde’, concepto que estudiaremos más adelante.

1.2. Orientación de superficies

Las superficies se dividen en dos clases: Las orientables y las no orientables. Intentaremos en esta sección esbozar el concepto de orientabilidad sin llegar a un completo rigor matemático.

En el plano definir una orientación equivale a elegir un sentido de rotación positivo. Por ejemplo, se podría elegir que girar en contra de las agujas del reloj se considera la rotación *positiva*. En \mathbb{R}^2 , una vez fijada la orientación, podemos desplazarnos por un camino cerrado y comprobar que el sentido de rotación positivo al final y al inicio del camino coinciden, en este caso decimos que el camino *conserva la orientación*. Si, por el contrario, ocurriese que los sentidos de rotación fueran distintos, diríamos que el camino *invierte la orientación* (esto nunca ocurre en \mathbb{R}^2). En general, conviene definir la orientación como la elección de una base de vectores, esta definición, además de equivalente que a la ya presentada, permite generalizar la orientabilidad a \mathbb{R}^n .

En \mathbb{R}^n elegir una **orientación** consiste en elegir qué bases vectoriales son *positivas* y cuales son *negativas*. Veamos como realizar esta clasificación: Sea \mathcal{B} el conjunto de bases de \mathbb{R}^n , y sean B_1 y B_2 dos bases de este conjunto, entonces podemos definir la siguiente relación:

$$B_1 \sim B_2 \iff \det(B_1 B_2) > 0$$

¹Si retiramos la hipótesis de conexión y sustituimos U^2 por U^n , obtenemos una *n-variedad* topológica. Sin embargo, en este trabajo nos limitamos al estudio de las 2-variedades conexas (superficies).

Se puede comprobar con las propiedades de los determinantes que \sim define una relación de equivalencia. Tendremos entonces que definir una **orientación** en \mathbb{R}^n equivale a asignar a una clase de equivalencia la etiqueta de *orientación positiva* y a la otra la etiqueta de *orientación negativa*, i.e, equivale a definir una σ :

$$\sigma : \mathcal{B}/\sim \longrightarrow \{-1, 1\}$$

Observamos entonces que la orientación queda totalmente determinada por la elección de una base B de \mathbb{R}^n que catalogamos como *positiva*.

Para el caso de una superficie topológica abstracta, podemos imaginarla localmente como un abierto de \mathbb{R}^2 en donde elegimos una orientación. Si en la superficie todos los caminos cerrados conservan la orientación, diremos que la superficie es **orientable**, como por ejemplo una esfera. Inversamente, si existiese un camino cerrado que invierte la orientación (cambia el sentido de rotación), entonces diremos que la superficie es **no orientable**, como es el caso de una banda de Möbius. En las próximas secciones veremos varios ejemplos de ambas superficies.

Se puede demostrar que la orientabilidad es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos). En el contexto del teorema de clasificación de superficies, observaremos como la orientabilidad de la superficie nos delimitará las clases de equivalencia a las que una superficie puede pertenecer.

(PREGUNTA: Qué tal? Agrego ejemplos? los detallo y dibujo? Debería añadir rigor?)

1.3. Superficies compactas

En nuestro objetivo de acercarnos a una clasificación completa de superficies, empezaremos por estudiar el caso de las superficies compactas. Para ello necesitaremos primero hacernos con un bagaje de ejemplos de superficies compactas elementales. Sin más preámbulo, alimentemos la curiosidad del lector con estos suculentos ejemplos:

La esfera

El conjunto $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ claramente conforma un ejemplo de superficie compacta. Alternativamente, se puede expresar la esfera como el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| \leq 1\}$, realizando la identificación 1.1 y dotando al conjunto resultante de la topología cociente.

$$(1.1) \quad (x, y) \equiv (x, -y), \quad \forall (x, y) \in fr(D)$$

Se puede comprobar que ambas formas de definir la esfera son homeomorfas.

El toro

Si se toma el cuadrado cerrado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ con la topología de subespacio, el **toro** se construye de identificar los puntos de X

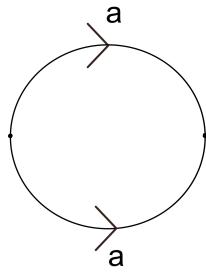


Figura 1.1: Esfera como espacio cociente

según 1.2 y dotar al conjunto resultante de la topología cociente.

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (x, -1) &\equiv (x, 1) & x \in [-1, 1] \\ (-1, y) &\equiv (1, y) & y \in [-1, 1] \end{aligned}$$

En la figura 1.2 se representa gráficamente el toro. Las aristas con el mismo símbolo indican aristas a identificar en el sentido indicado por las flechas.

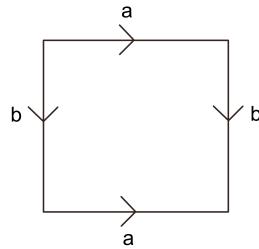


Figura 1.2: Toro como espacio cociente

El plano proyectivo

Por su parte, el **plano proyectivo** corresponde al disco $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ en el cual se identifican los puntos antipodales de la frontera. Se ilustra esta identificación en la figura 1.3.

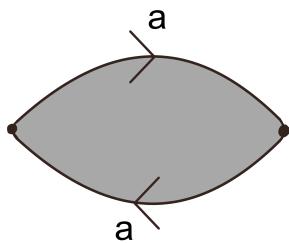


Figura 1.3: Plano proyectivo como espacio cociente

De los tres ejemplos de superficies compactas dadas hasta ahora, este es el único de una superficie no orientable.

Después de haber visto los ejemplos, es razonable cuestionarse si los espacios cocientes que tratamos en ellos son realmente conjuntos compactos. El siguiente lema nos demuestra que, en efecto, las superficies obtenidas son compactas.

Lema 1.2. *Sea X un espacio topológico e Y un espacio cociente que resulta de identificar puntos en X . Entonces:*

$$X \text{ compacto} \Rightarrow Y \text{ compacto}$$

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ la función cociente que asocia a cada punto su clase de equivalencia; f es claramente sobreyectiva y, por ser cociente, es continua.

Siendo X compacto tenemos entonces que $f(X) = Y$ también lo es. \square

En nuestros ejemplos todas las superficies vienen de identificar puntos en conjuntos compactos. Se sigue entonces del lema que las superficies son a su vez compactas.

1.3.1. Expresión canónica

Las figuras 1.1, 1.2 e 1.3, de cada ejemplo respectivamente, sugieren una forma visual de definir superficies compactas: formamos un polígono con un número par de lados e identificamos sus aristas a pares.

Más aún, se puede definir una notación con la que referirnos a estos polígonos: Partiendo de cualquier vértice recorremos la figura en el sentido de las agujas del reloj, se anotan los símbolos según se recorre la respectiva arista y se agrega el exponente 1 o -1, según si la flecha va en el mismo sentido del recorrido o en sentido contrario.

Con esta notación: nos referimos a la esfera (figura 1.1) como aa^{-1} ; al toro (figura 1.2) como $aba^{-1}b^{-1}$; y al plano proyectivo (figura 1.3) como aa . Llamaremos **expresión canónica** a estas formas de referirnos a la esfera, al toro y al plano proyectivo, respectivamente.

La notación sugerida facilita enormemente la definición de nuevas superficies. Utilicemos esta herramienta para introducir un último ejemplo de superficie compacta:

Botella de Klein

La **botella de Klein** es la superficie que corresponde con la expresión $aba^{-1}b$.

1.4. Suma conexa

La suma conexa es un operador entre superficies. La idea será ir ‘sumando’ superficies compactas para generar nuevas. De hecho, si se me permite el *spoiler*, utilizaremos este operador en toros y planos proyectivos para construir superficies homeomorfas a

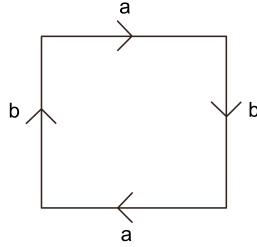


Figura 1.4: Botella de Klein

cualquier otra superficie compacta.

Procedamos a definir matemáticamente el operador:

Definición 1.3. Dadas dos superficies S_1 y S_2 , se define la **suma conexa** de ambas ($S_1 \# S_2$) como la superficie generada al recortar un disco de cada superficie y pegarlas a través del borde de los discos retirados. Más formalmente:

1. Para cada S_i , tomamos un subconjunto $D_i \subset S_i$ homeomorfo al disco cerrado $E^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$. Llamamos S'_i al complementario del interior de D_i .
2. Tomamos un homeomorfismo $\psi : D_1 \longrightarrow D_2$
3. Definimos entonces $S_1 \# S_2$ como $S'_1 \cup S'_2$ dotado de la topología cociente que resulta de la identificación:

$$x \equiv \psi(x), \quad \forall x \in D_1$$

Habría que comprobar que la suma conexa está bien definida y resulta en una nueva superficie. Este aspecto lo abordamos en lema 4.1.

Ejemplos

Utilizando la notación introducida hasta el momento presentamos algunos ejemplos de sumas conexas:

Suma conexa de toros

Sean T_1 y T_2 dos toros disjuntos, estudiemos $S = T_1 \# T_2$. Nos ayudamos de la figura 1.5 para ilustrar el proceso:

Primero, retiramos de cada toro el disco con frontera c_i , como vemos en la primera imagen. Nótese que podemos expresarlo como la segunda imagen porque todos los vértices del polígono están identificados. Finalmente, identificamos los bordes c_1 y c_2 , obteniendo el octágono que representa S , donde, de nuevo, todos los vértices representan el mismo punto.

Utilizando la notación para expresiones canónicas, de la figura 1.5 se deduce que S se puede expresar como $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.

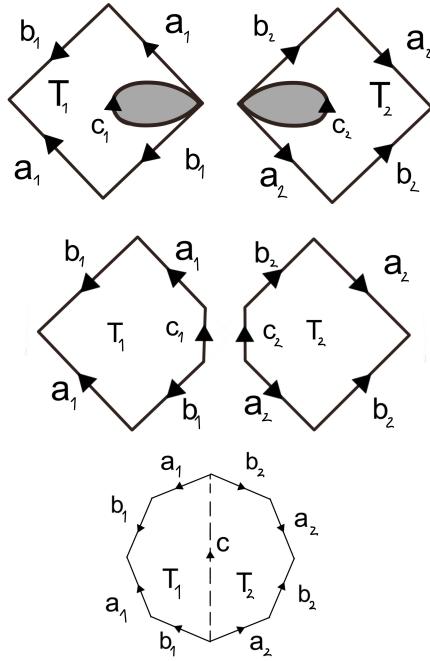
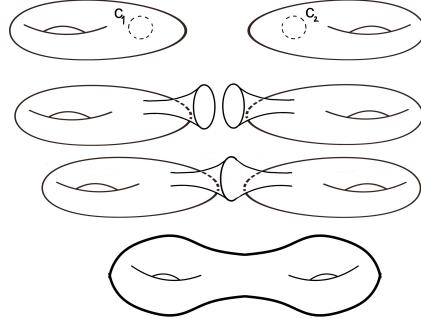


Figura 1.5: Suma conexa de dos toros

Figura 1.6: Suma conexa de dos toros como subvariedades de \mathbb{R}^3

Suma conexa de planos proyectivos

Podemos seguir un mecanismo parecido al anterior para realizar la suma conexa de dos planos proyectivos. En la figura 1.7 ilustramos la misma construcción para dos planos proyectivos. La expresión canónica de la superficie resultante es $a_1a_1a_2a_2$.

Suma conexa de esferas

En la figura 1.8 ilustramos la suma conexa de dos esferas. Curiosamente observamos que el resultado es otra esfera. Se puede comprobar que la esfera actúa como elemento neutro de la suma conexa.

Otra propiedad interesante de la suma conexa es que conserva la compacidad, i.e., si $S = S_1 \# S_2$, entonces S será compacta si lo son S_1 y S_2 . En los ejemplos de la suma de toros, planos proyectivos y esferas, basta con usar el lema 1.2 para demostrarlo.

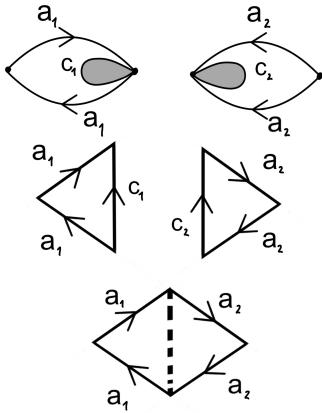


Figura 1.7: Suma conexa de dos planos proyectivos

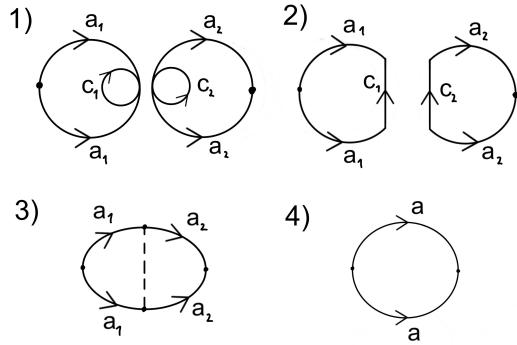


Figura 1.8: Suma conexa de dos esferas

1.4.1. Expresiones canónicas de sumas conexas

Los ejemplos mencionados en la sección anterior proporcionan un método para describir sumas conexas arbitrarias de esferas, toros y planos proyectivos. Basta repetir los mismos procedimientos para comprobar que:

- La suma conexa de n esferas es igual a una esfera:

$$(1.3) \quad aa^{-1}$$

- La suma conexa de n toros se puede escribir como:

$$(1.4) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

- La suma conexa de n planos proyectivos se puede describir como:

$$(1.5) \quad a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

A las expresiones 1.3, 1.4 y 1.5 las llamaremos *expresiones canónicas* de sus respectivas sumas conexas.

Antes de dar el asunto por concluido, veamos un último ejemplo de suma conexa:

Lema 1.4. *La suma conexa de dos planos proyectivos es una botella de Klein*

Demuestra. En la demostración trataremos al plano proyectivo como el disco unidad identificando los puntos diametralmente opuestos.

Seleccionamos del plano proyectivo el subconjunto $D = \{(x, y) : |y| \geq \frac{1}{2}, |x| \leq \sqrt{1 - y^2}\}$ homeomorfo al disco cerrado. Retiramos D como se muestra en la figura 1.9, los segmentos discontinuos representan la frontera del disco por la cual se ha de realizar la suma conexa.

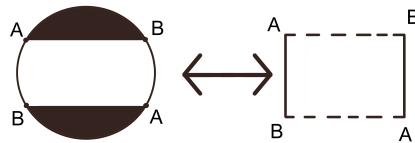


Figura 1.9: Plano proyectivo menos un subconjunto homemorfo al disco cerrado

Partiendo de dos planos proyectivos, I e II , retiramos el disco como en la figura 1.9. Luego procedemos a identificar ambos conjuntos como se indica en la figura 1.10.

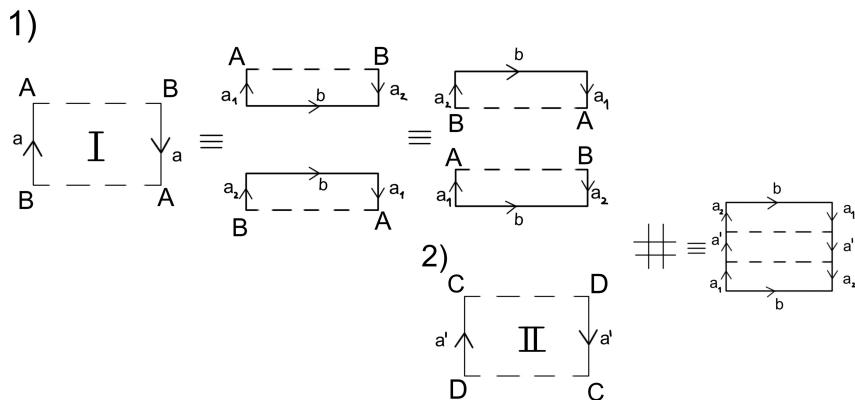


Figura 1.10: Botella de Klein = $I \# II$

La figura final obtenida es una Botella de Klein. □

El ávido lector se habrá dado cuenta de un detalle curioso de la demostración, retirar un disco de un plano proyectivo lo convierte en una banda de Möbius!

1.5. Triangulación de una superficie

Una triangulación, en caso de existir, pretende expresar una superficie como un conjunto de triángulos identificados por las aristas. La noción de triangulación, *a priori* inflexible, será un ingrediente clave para poder manipular superficies compactas. Se define rigurosamente como:

Definición 1.5. Una **triangulación** de una superficie compacta, S , consiste en subconjuntos cerrados, $\{T_1, \dots, T_n\}$, que cubren a S y en una familia de homeomorfismos, $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, que cumplen:

$$\phi_i : T'_i \longrightarrow T_i$$

Donde T'_i es un triángulo del plano \mathbb{R}^2 . Además, se exige que para cualesquiera dos T_i y T_j con $i \neq j$, se cumpla una de las siguientes condiciones:

- Son conjuntos totalmente disjuntos.
- Comparten un vértice en común y solo eso.
- Tienen toda una arista en común y solo eso.

Adicionalmente, llamaremos **vértice** a todo elemento de S que se corresponde por algún ϕ_i con un vértice en el plano. Y llamaremos **arista** a todo subconjunto de S que tenga por imagen una arista de algún T'_i .

Intuitivamente, podemos pensar en una triangulación como una teselación por triángulos de una superficie dada. Estudiemos algunos ejemplos concretos para familiarizarnos con el concepto:

El toro se puede triangular como ilustra la figura 1.11. Fijémonos que basta con definir una lista de triángulos, con sus respectivos vértices, para concretar una triangulación. En la figura indicada la lista sería: [Lista de triángulos]

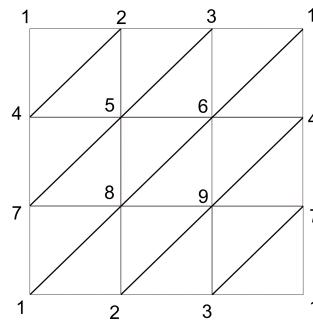


Figura 1.11: Triangulación del toro

En la figura 1.12 señalamos un par de intentos de simplificar la triangulación del toro. Sin embargo, notemos que ninguna de las dos imágenes son triangulación del toro. La primera, aunque triangulación, no es homeomorfa al toro; La segunda ni siquiera satisface las condiciones de triangulación.

Para el caso del plano proyectivo, se propone en la figura 1.13 una triangulación.

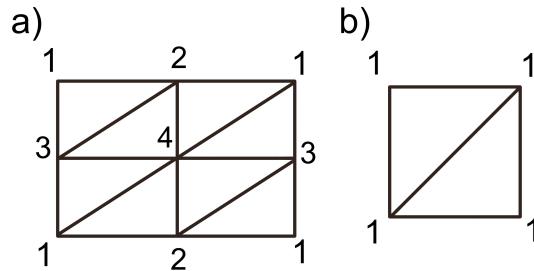


Figura 1.12: Ejemplos de cosas que no son triangulaciones

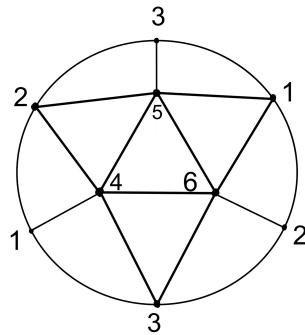


Figura 1.13: Triangulación del plano proyectivo

Resultados sobre la triangulación

Primero, veamos un par de lemas que nos enmarcan el comportamiento de las triangulaciones:

Lema 1.6. *Sea S una superficie triangulable entonces una arista lo es de exactamente dos triángulos.*

Demuestra. Supongamos que una arista lo es de uno o más de dos triángulos. Elegimos un $x \in S$ de dicha arista. Por un lado, sabemos que un entorno de x es homeomorfo a

$$U^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$$

Por otra parte, veamos los distintos casos:

- (a) Si la arista lo fuese de un único triángulo, entonces tendríamos entornos de x homeomorfos a

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 1\}$$

- (b) Si la arista lo fuese de $n \geq 3$ triángulos, entonces tendríamos entornos de x homeomorfos a pegar n conjuntos de la forma de H^2 (podemos hacerlos disjuntos trasladándolos). Más rigurosamente, el conjunto a cocientar sería

$$\bigcup_{i=1}^n \{(x + 10i, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 10i)^2 + y^2 < 1, y \geq 1\}$$

Identificando los puntos con $y = 0$. En la figura 1.14 ilustramos el caso para $n = 3$.

En cualquier de los dos casos estaríamos incurriendo en un absurdo, con lo que concluimos la demostración. \square

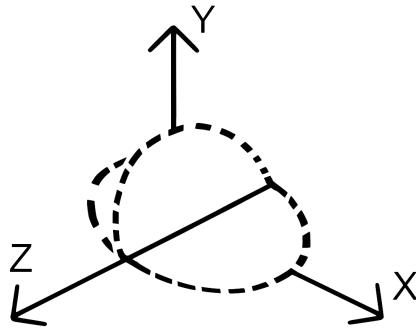


Figura 1.14: Identificación por la frontera de H^2

Lema 1.7. *Sea S una superficie triangulable y $v \in S$ un vértice en esa triangulación, entonces podemos ordenar el conjunto de todos los triángulos con vértice v cíclicamente, $T_0, T_1, \dots, T_n = T_0$, de manera que T_i y T_{i+1} tienen toda una arista en común para todo $0 \leq i \leq n - 1$.*

Demostración. Fijado un vértice v , podemos utilizar el lema anterior (1.6) para hacer una partición del conjunto de triángulos que tienen a v por vértice. Si ocurriese que hay más de un conjunto disjunto en la partición, entonces v no podría tener un entorno homeomorfo a U^2 . \square

Observación: En ambos lemas utilizamos que U^2 solo puede ser homeomorfo a otros abiertos conexos de \mathbb{R}^2 (Demostrar esto no es tan sencillo y requiere del uso de grupos fundamentales).

La triangulación nos servirá más adelante como herramienta potentísima para demostrar el teorema de clasificación de superficies compactas. Comprobaremos que con ella podremos expresar cualquier superficie topológica compacta, por abstracta que sea, como un conjunto de triángulos. Intuitivamente, podemos pensar en la triangulación como una teselación por triángulos de una superficie. Para el caso de una esfera o un toro uno puede imaginarse tales teselaciones.

La triangulación compone una herramienta potente para el manejo de superficies compactas. Comprobaremos más adelante que nos permite manipular la superficie como si se tratara de triángulos en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, primero es necesario probar que *de facto* existe tal triangulación, requisito que parece especialmente intimidante para el caso de conjuntos abstractos. Por suerte, el matemático Tibor Radó demostró un teorema que nos garantiza que toda superficie compacta es triangulable. Enunciamos el teorema sin, lamentablemente, dar demostración.

Teorema 1.8. *Teorema de triangulación Toda S superficie compacta es triangulable.*

Con este teorema concluimos el arsenal de herramientas que nos hará falta para emprender la demostración del teorema de clasificación de superficies compactas.

CAPÍTULO 2

Clasificación de superficies compactas

Teorema 2.1. *Teorema de clasificación de superficies compactas Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos.*

Idea de la demostración

El primer paso de la demostración será probar que podemos tratar cualquier superficie compacta como un polígono en \mathbb{R}^2 con sus aristas identificadas a pares. Para esta parte de la demostración nos serviremos del teorema 1.8 de *T. Radó*.

Posteriormente, utilizando la representación en \mathbb{R}^2 , iremos modificando la figura con transformaciones homeomorfas. A cada transformación iremos simplificando el polígono que se obtiene. Tras aplicar todos los pasos, comprobaremos que el polígono final corresponderá con una de las expresiones canónicas introducidas en la sección 1.4.1. Para conseguir este resultado final nos hará falta el lema 4.2 demostrado en el anexo, este resultado nos garantiza que la suma conexa de un plano proyectivo y un toro es homeomorfa a la suma de tres planos proyectivos.

Habiendo llegado a las expresiones canónicas de 1.4.1, habremos concluido que la superficie inicial es homeomorfa o a una esfera, o a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.

2.1. Primer paso

Buscamos demostrar que cualquier superficie compacta S es homeomorfa a un polígono \mathbb{R}^2 con sus aristas identificadas a pares.

Por el teorema 1.8 tenemos que S es triangulable. Sean T_1, T_2, \dots, T_n los triángulos de S y sean T'_1, T'_2, \dots, T'_n los correspondientes triángulos en \mathbb{R}^2 , tenemos los homeomorfismos:

$$\phi_i : T'_i \longrightarrow T_i$$

Podemos asumir que los T'_i son disjuntos (en caso de que no lo fueran, bastaría con componer con una traslación). Además, podemos organizar los triángulos de forma tal que todo T_i tiene al menos una arista e_i en común con algún triángulo T_1, \dots, T_{i-1} para $2 \leq i \leq n$; para ello elegimos T_2 que tenga una arista en común con T_1 , elegimos T_3 que tenga una arista en común con T_1 o T_2 , y así sucesivamente. Si en algún punto no pudiésemos elegir un T_k , tendríamos entonces dos conjuntos disjuntos $\{T_1, \dots, T_{k-1}\}$ y $\{T_k, \dots, T_n\}$, pero esto dividiría a S en dos conjuntos cerrados disjuntos contradiciendo la hipótesis de conexión.

Sea $T' = \bigcup T'_i$, definimos la función

$$\phi : T' \longrightarrow S$$

como $\phi|_{T'_i} = \phi_i$ para todo i . Claramente ϕ es sobreyectiva y continua¹. Al ser T' compacto y S Hausdorff, entonces ϕ es cerrada, de lo que se sigue que S tiene la topología cociente inducida por ϕ .

El polígono que queremos construir será descrito como espacio cociente de T' . Por hipótesis, tenemos que e_i es arista de los triángulos T_i y T_j para algún $1 \leq j < i$, y a su vez $\phi^{-1}(e_i)$ es arista de T'_i y T'_j . Identificamos ambos triángulos en T' a lo largo de la arista $\phi^{-1}(e_i)$. El mismo procedimiento se puede aplicar para las aristas e_2, e_3, \dots, e_n , obteniendo como resultado un conjunto cociente D del conjunto inicial T' . La función ϕ induce una nueva función continua $\psi : D \longrightarrow S$. De nuevo, al ser D compacto y S Hausdorff, tenemos que ψ es cerrada y con ello que S tiene la topología cociente inducida por esta función.

Veamos que D es homeomorfo al disco cerrado $E^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$:

- (a) Tenemos que el triángulo T'_i en \mathbb{R}^2 es homeomorfo a E^2 .
- (b) Dados dos discos cerrados E_1^2 y E_2^2 , si los identificamos por un segmento cerrado de sus fronteras, obtenemos un espacio cociente homeomorfo, de nuevo, a un disco cerrado. De aquí se sigue que, si tenemos dos triángulos T'_i y T'_j identificados por una de sus aristas, entonces el espacio resultante es homeomorfo a E^2 .

Utilizando (a) y (b) tenemos que el espacio cociente D obtenido a partir de T' , es topológicamente equivalente a un disco cerrado. Además, sabemos que el espacio cociente que induce ψ coincidirá con el disco cerrado en el cual segmentos de su frontera están identificados a pares; esto se sigue del proceso de construcción de D , teniendo en cuenta que al identificar la arista $\phi^{-1}(e_i)$ de dos triángulos, el resto de aristas en la frontera siguen emparejadas (sabemos que van por parejas por el lema 1.6).

En la figura 2.1 tenemos un tetraedro triangulado

Ilustramos en la figura 2.2 cómo se representaría el mismo tetraedro como el espacio cociente D descrito en esta sección.

A partir de aquí, manipularemos la superficie compacta S como si de un polígono se tratase. Asumiendo que las aristas del polígono están identificadas a pares y sin ningún orden ni dirección particular.

¹Para probar la continuidad basta con escribir cualquier abierto en S como unión finita de la partición de triángulos.

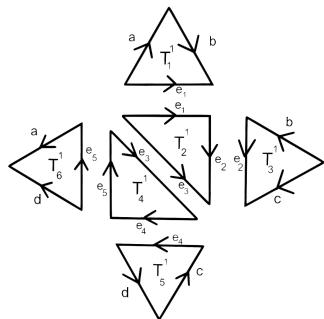


Figura 2.1: Tetraedro triangulado

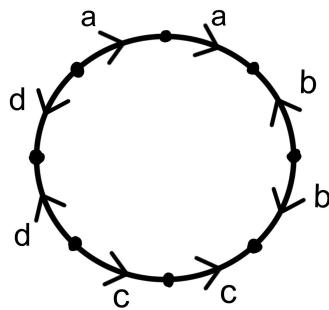


Figura 2.2: Tetraedro como espacio cociente de un disco

2.2. Segundo paso

El segundo paso consiste en la eliminación de aristas adyacentes de primera especie.

Del primer paso hemos obtenido el polígono D que representa a la superficie S si se identifican sus aristas a pares. El polígono identificado lo podemos expresar con la misma notación que usamos para las expresiones canónicas (véase la sección 1.4.1). Por ejemplo, en el caso de la figura 2.2, podemos expresarlo como:

$$a^{-1}abb^{-1}cc^{-1}d^{-1}d$$

Si en esta expresión un par de aristas con el mismo símbolo aparecen con exponentes $+1$ y -1 ($\dots a \dots a^{-1}$, por ejemplo), entonces diremos que el par es de *primera especie*. Si aparecen ambas con el exponente $+1$, o ambas con -1 , diremos que el par es de *segunda especie*. En el caso de la figura 2.2 tenemos que los cuatro pares de aristas son de primera especie y, además, adyacentes.

En este paso buscaremos eliminar las aristas adyacentes de primera especie, i.e., con la forma aa^{-1} o $a^{-1}a$. Suponiendo que el polígono tenga al menos 4 lados, la figura 2.3 indica como podríamos eliminar esta arista de nuestra expresión. El mismo procedimiento se sigue aplicando mientras haya aristas adyacentes de primer orden ó hasta que la expresión tenga únicamente dos aristas. En este último caso, tenemos que la expresión será aa o aa^{-1} , es decir, homeomorfo a una esfera o a un plano proyectivo (véase la sección 1.3.1). En caso de que haya más de dos aristas y no queden arista de primera especie se continúa al siguiente paso.

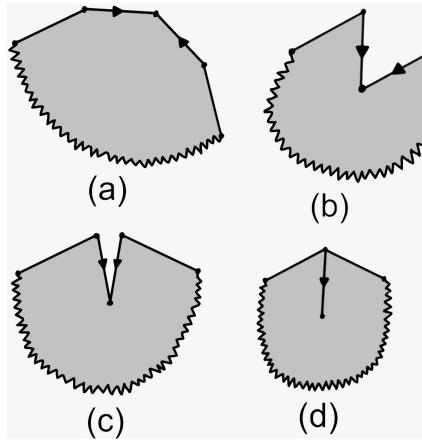


Figura 2.3: Eliminando adyacencias de primera especie

2.3. Tercer paso

En este paso procederemos a transformar el polígono D para que todos sus vértices estén identificados entre sí, es decir, buscamos que todos los vértices representen el mismo punto en la superficie S . Partamos del D resultante del paso 2.

Podemos dividir los vértices en clases de equivalencia según qué vértices están identificados. Supongamos que al menos hay dos clases de equivalencias e intentemos eliminar una de ellas.

Como hay dos clases de equivalencia, entonces existen al menos dos vértices adyacentes P y Q tal que no pertenecen a la misma clase, ilustramos en la figura 2.4 cómo procederemos. Sabemos que a y b no pueden estar identificados², entonces cortamos e identificamos a lo largo de la línea c como muestra la figura. Al finalizar la transformación, tenemos un vértice menos de la clase P y uno más de la clase Q . Una vez eliminado el vértice, se aplica el segundo paso nuevamente de ser posible y se repite el procedimiento. Tras un número finito de pasos habremos eliminado la clase de equivalencia de P . Iteramos de forma análoga hasta que tengamos una única clase de equivalencia de vértices del polígono.

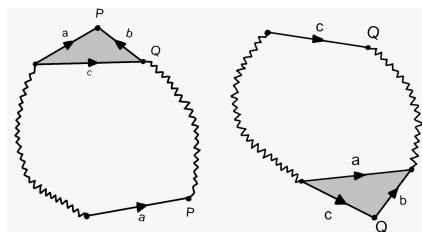


Figura 2.4: Reduciendo clases de equivalencia de vértices

²No puede ser par de primera especie porque ya hemos aplicado el segundo paso, y no puede ser par de segunda especie porque los vértices son distintos.

2.4. Cuarto paso

Ahora buscaremos hacer adyacentes todos los pares de aristas de segunda especie.

En la figura 2.5 ilustramos el proceso. Partimos de que tenemos dos aristas b de segunda especie no adyacentes, y procedemos a cortar e identificar a través de a . Como resultado hemos cambiado un par no adyacente a uno adyacente. Repetimos el mismo procedimiento hasta que todas las aristas de segunda especie sean adyacentes.

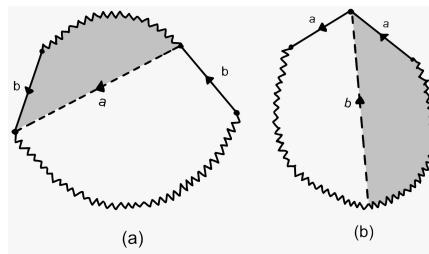


Figura 2.5: Transformando en adyacentes aristas de segunda especie

En caso de no haber ninguna arista de primera especie, entonces tendremos unas expresión de la forma $a_1a_1a_2a_2\dots a_na_n$, con lo que concluimos que la superficies es homeomorfa a la suma conexa de n planos proyectivos (véase 1.4.1).

En caso de haber un par de aristas de primera especie, denotémosla por c , probaremos que necesariamente existe otro par de primera especie que las intercala. En otras palabras, necesariamente existe otro par de aristas de primera especie, d , tal que la expresión obtenida es de la forma $c\dots d\dots c^{-1}\dots d^{-1}\dots$

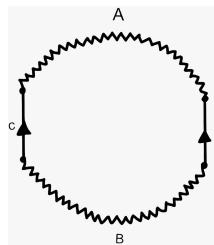


Figura 2.6: Par de primera especie tras el paso 4

Para probar esto, supongamos que no existe el par d . Bajo este supuesto el aspecto del polígono D sería similar a 2.6, donde A y B son ambas sucesiones de aristas. Por el cuarto paso, todas las aristas de segunda especie son adyacentes, con lo que, bajo el supuesto de que no existe d , entonces no existiría ninguna arista de A identificada con una de B , ni viceversa. Sin embargo, ello implicaría que los vértices finales e iniciales de la arista c no están identificados, con lo que incurrimos en una contradicción con el tercer paso (TODO: POR QUÉ NO PUEDEN HABER DOS VÉRTICES IDENTIFICADOS A PESAR DE NO HABER NINGUNA ARISTA?).

2.5. Quinto paso

En este paso haremos adyacentes los pares de aristas de primera especie que estén intercalados como se indica en el paso anterior.

Supongamos que nuestro polígono tiene la expresión $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$ (véase la figura 2.7 (a)). Primero, cortamos a lo largo de c y pegamos las aristas b , obteniendo la figura 2.7 (b). Seguidamente, cortamos a lo largo de d y pegamos c , con lo que obtenemos la figura 2.7 (c). Nótese que hemos transformado nuestra expresión cambiando los pares a y b , por $cdc^{-1}d^{-1}$. De los pasos se sigue que los vértices siguen manteniendo una única clase de equivalencia.

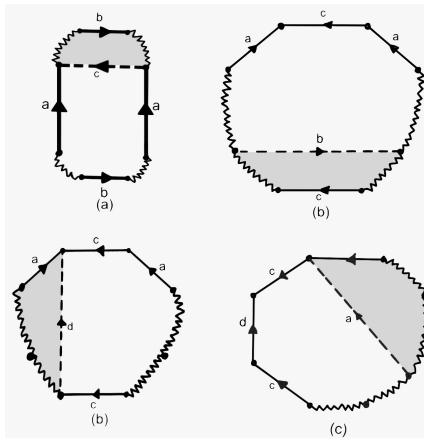


Figura 2.7: Haciendo adyacentes pares de primera especie intercalados.

Repetimos el mismo procedimiento hasta que todos los pares de aristas de primera especie estén agrupados de la forma $cdc^{-1}d^{-1}$. Si no hay pares de arista de segunda especie, la expresión sería

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

con lo que la superficie es equivalente a una suma conexa de n toros (véase la sección 1.4.1).

2.6. Desenlace final

Tras los cinco pasos anteriores hemos tenido en cuenta los casos en los que la superficie es homeomorfa a una esfera, una suma conexa de n planos proyectivos o una suma conexa de n toros. Consideremos ahora el caso en el que la expresión tiene tanto aristas de segunda especie (adyacentes), como aristas de primera especie (agrupadas en conjuntos de cuatro). La expresión de este último caso corresponde con una suma conexa de n toros y m planos proyectivos.

Utilizando el lema 4.2 en el anexo, tenemos que cada toro y plano proyectivo pueden ser sustituidos por tres planos proyectivos. Luego del lema se sigue que en este

caso nuestra superficie corresponde con una suma conexa de $m+2n$ planos proyectivos. Con esto concluimos la demostración.

En virtud de lo estudiado sobre orientabilidad en la sección 1.2, podemos reformular el teorema de clasificación como:

Teorema. *Toda superficie compacta orientable es topológicamente equivalente a una esfera o una suma conexa de n toros. Toda superficie compacta no orientable es homeomorfa a una suma conexa de n planos proyectivos.*

Definimos entonces el **género** de una superficie compacta como el valor de n que le corresponde por homeomorfismo en el teorema anterior. En caso de que la superficie sea homeomorfa a una esfera diremos que la superficie tiene género 0.

Para probar que el género está bien definido hace falta probar que las clases de equivalencia mencionadas no son homeomorfas entre sí. Una prueba se construye en el libro [1] utilizando la relación entre el género (g) y la característica de Euler (x) 2.1, y demostrando la invariancia topológica de la característica.

$$(2.1) \quad g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - x) & \text{si la superficie es orientable} \\ 2 - x & \text{si la superficie no es orientable} \end{cases}$$

2.7. Superficies con borde y su clasificación

La noción de superficie con la que hemos trabajado hasta ahora no contempla ‘bordes’. Por ejemplo, si tomamos el cuadrado cerrado

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

comprobamos que no satisface la definición 1.1: el punto $(0, 0)$ no tiene ningún entorno homeomorfo a U^2 . Ampliamos entonces el concepto de superficie:

Definición 2.2. Diremos que un espacio topológico, S , es una **superficie con borde** si cumple ser conexo, Hausdorff y segundo numerable. Donde, además, se cumple que todo punto en S tiene un entorno homeomorfo a U^2 o a

$$H^2 = \{(x, y) \in U^2 : y \geq 0\}$$

Llamaremos **borde** de la superficie al conjunto de puntos que tienen entornos homeomorfos a H^2 , e **interior** de la superficie al conjunto de puntos con entornos homeomorfos U^2 .

Utilizando el teorema 2.1 y un razonamiento similar de su demostración, se puede probar la clasificación para las superficies con borde:

Teorema 2.3. *Dos superficies con borde compactas son homeomorfas si y solo si tienen el mismo número de componentes de borde, son ambas orientables o ambas no orientables, y tienen la misma característica de Euler.*

Una demostración rigurosa se puede leer en [?]. Equivalentemente podemos enunciar el teorema como: Toda superficie con k componentes de borde es homeomorfa a una esfera, o a una suma conexa de n toros o a una suma conexa de n planos proyectivos, en los cuales ‘retiramos’ k discos abiertos. Esta enunciado alternativo nos permite hablar de género también para el caso de las superficies con borde.

Con esto cerramos finalmente la clasificación para superficies compactas y podemos sumergirnos en el mundo más variado de la no compacidad!

CAPÍTULO 3

Hacia las superficies no compactas

[Complicaciones, citar resultados para superficies con borde]

[Introducir finales y frontera ideal]

[Demostrar algunos, citar otros, lemas de fronteras ideales]

[Tma de Kerekjartos sobre clasificación]

[Relación de espacios totalmente inconexos, separables (cjto denso numerable) y compacto con el Cjto de Cantor]

[Construcción de Ian Richards dando una superficie a cada posible frontera ideal]

CAPÍTULO 4

Anexo: Algunos resultados que utilizamos en el trabajo

Lema 4.1. *Para verificar que la suma conexa está bien definida hace falta aclarar varios puntos.*

1. *Tenemos que asegurar la existencia de un subconjunto homeomorfo a un disco.*

Demostración. Tomamos un punto $p \in S_i$ cualquiera. Como S_i es una 2-variedad, entonces existe un homeomorfismo g que manda un entorno, U , del punto p al círculo abierto.

Tomamos $E_{\frac{1}{2}}$ el disco cerrado de radio $\frac{1}{2}$, y $U' = g^{-1}(E_{\frac{1}{2}})$. Tenemos que $g|_{U'}$ es un homeomorfismo de un subconjunto de S_i a $E_{\frac{1}{2}}$ que a su vez es homeomorfo al disco cerrado de radio 1. \square

2. *Segundo, tenemos que asegurarnos que existe un tal ψ homeomorfismo:*

Demostración. Utilizando los g anteriores basta ver que $g(fr(D_i)) = fr(E^2)$, y luego componer las funciones para construir un homeomorfismo entre las fronteras. \square

3. *Tercero, habría que comprobar que, en efecto, el objeto obtenido es una superficie. Es decir, comprobar que todo punto tiene un entorno homeomorfo al disco abierto, que el espacio es T_2 y que es conexo.*

Demostración. Ideas (hace falta formalizarlo?) 1. Entorno homeomorfo a la bola: Tenemos que comprobarlo para los ptos frontera. Esta dems es engorrosa: Basta quizás con ver que localmente podemos tratar a los puntos de la frontera como si estuviésemos en R^2 , observando las construcciones de homeomorfismos podemos concluir que se puede crear un entorno homeomorfo a una bola al pegar dos semicírculos de cada superficie (vistas en R^2 localmente). 2. Conexión: Basta con probar que para todos los puntos del borde sus abiertos tienen puntos de ambas superficies. Esto se sigue directamente de la topología cociente inducida (analizar

la definición con la función cociente, tendrás puntos en ambas superficies por tener abtos en ambas). 3. Ver que es T_2 resulta sencillo. Si los ptos son de superficies distintas, ya está, por ser disjuntas. Si son de la misma entonces también, porque antes eran t_2 . Si una es de la superficie, por concretar, de S_1 y la otra del borde, entonces tomamos los mismos abtos que antes separaban a los puntos, pero el abto del borde ya no es abto de la superficie cociente, es fácil comprobar que ese conjunto unión S_2' sí es un abto (por la def de topo cociente, todos los ptos serán interiores) y también es fácil ver que estos dos conjuntos serán disjuntos, por lo que hemos separado los dos ptos. \square

4. *Y, finalmente, tenemos que comprobar que esta definición es independiente de los conjuntos D_i escogidos e independiente de los homeomorfismos.*

Demostración. Ideas (hace falta formalizarlo?): 1. Que no depende del homeomorfismo es directo porque solo nos hace falta esa propiedad para establecer la topología cociente. Habiendo probado el punto anterior ya estaría. 2. Que no depende de la elección del disco se sigue de que podemos desplazar el disco por la superficie manteniendo el homeomorfismo con la superficie anterior. De no poder hacerlo entonces tendríamos que no se puede retirar un disco en la zona a la que estamos desplazándolo, pero en ese caso sencillamente no tomaríamos esa elección de disco por ser imposible. \square

Lema 4.2. *La suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos.*

Demostración. TODO \square

CAPÍTULO 5

COSAS QUE NO HE UTILIZADO

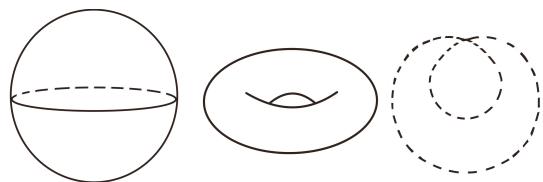


Figura 5.1: Ejemplos de superficies: Esfera, toro y banda de Möbius

Bibliografía

- [1] WILLIAM S. MASSEY: Introducción a la topología algebraica. *Editorial Reverté* **1** (2006), 1–40.
- [2] IAN RICHARDS *Classification of non compact surfaces...o algo así*

