TAREA 1

Algebra Superior II

1. Con la contrucción de $\mathbb{Z}$ que se vio en clase demuestra que:
   (a) La suma es asociativa
   (b) La suma es conmutativa
   (c) El producto es conmutativo
   (d) $1 = \overline{(1,0)}$ y $-1 = \overline{(0,1)}$ son los únicos enteros que tienen inverso multiplicativo.
   (e) Las leyes de los signos.
   (f) $\leq$ es un orden total.
   (g) Si $a \leq b$ y $c \leq 0$ entonces $ac \geq bc$

2. Demuestra que las siguientes afirmaciones para enteros a y b son equivalentes
   (a) $a|b$
   (b) $-a|b$
   (c) $-a|-b$
   (d) $a|-b$

3. Para enteros a, b, c prueba las siguientes afirmaciones.
   (a) $a|b$ y $b \neq 0$ entonces $|a| \leq |b|$
   (b) Si $c|a$ y $c|b$ entonces c divide a cualquier combinación entera de a y b

4. Muestra que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen n números consecutivos ninguno de ellos primos (esto nos da una idea de la distribución irregular de los números primos) [Hint: considera los números $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, ..., (n+1)! + (n+1)$] .

5. Halla el máximo común divisor de las siguientes parejas de números y exprésalo como una combinación de tales números

   $(-120; 176)$, $(160; 186)$, $(256; -54)$, $(1014; 666)$

6. Te encuentras en el centro de un enorme cuarto oscuro que posee puertas numeradas del 1 al 100, todas ellas inicialmente cerradas. Un mago que se encuentra a tu lado comienza a pronunciar lentamente los números del 1 al 100, en orden ascendente. Cada vez que pronuncia el número i, las puertas que son múltiplos de i cambian magicamente de estado (se cierran si estaban abiertas, y se abren si estaban cerradas). Cuando el mago haya terminado de pronunciar el número 100, ¿Qué puertas habrán quedado abiertas?

7. Hallar el menor múltiplo de 945 que sea un cuadrado

8. Demuestra que el único conjunto de tres impares positivos consecutivos y primos es $\{3, 5, 7\}$

9. Demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es impar o n es 2 .

10. Demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo.

11. Demostrar que si $n \geq 2$, existe un primo p tal que $n < p < n!$

12. $2^{2^n} + 1 = F_n$ se le llama el n - ésimo número de Fermat.
    (a) Demuestra que $(F_n; F_m) = 1$ si $n \neq m$
    (b) Usa lo anterior para deducir que existe una infinidad de primos.

13. Muestra que dos enteros consecutivos son primos relativos.

14. Prueba que si $(a; b) = 1$ entonces $(a^n; b^m) = 1$ para toda $n, m \in \mathbb{Z}$

15. Si $(n; m) = 1$ y $nm = a^k$ con $k > 0$ entonces existen enteros x, y tales que $n = x^k$ y $m = y^k$.

16. Demuestra que para un conjunto no vacío ser ideal en $\mathbb{Z}$ es equivalente a ser cerrado bajo la resta.