TAREA 2
Algebra Superior II
Prof. León Villalobos
2023

1. Usando congruencias:
   (a) encuentra el residuo de 4^{30} al dividirlo entre 23
   (b) encuentra el residuo de 16^{17} al dividirlo entre 17
   (c) demuestra que $2^{37}-1$ es múltiplo de 223
   (d) encuentra el residuo positivo de 12! al dividirlo entre 13
   (e) encuentra el residuo de $1!+2!+3!+...+11^5!$ al dividirlo entre 7
2. Demuestra que 229 divide a $13^{2k}+17^{2k}$ si es k impar ¿Qué pasa si es par?
3. Demuestra que si los coeficientes de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ son enteros impares entonces las raíces de la ecuación no pueden ser números racionales.
4. Se tiene un rectángulo cuyos catetos e hipotenusa son enteros. Demuestre que su área es divisible entre 12.
5. Demuestre que dados 52 números naturales cualesquiera, existen 2 de ellos cuya suma o diferencia es divisible entre 100.
6. Pruebe que la suma de 3 cubos consecutivos es múltiplo de 9.
7. Demuestra que la única terna de primos impares consecutivos es 3,5,7.
8. Encuentra el inverso multiplicativo de: 19 en $\mathbb{Z}_{21}$, 11 en $\mathbb{Z}_{12}$ y 24 en $\mathbb{Z}_{29}$.
9. ¿Cuáles son las unidades en $\mathbb{Z}_{15}$ de $\mathbb{Z}_{24}$?.
10. Muestra que el conjunto de unidades de $\mathbb{Z}_n$ es un grupo abeliano con el producto.
11. Encuentra todas las soluciones de:
    (a) $87x \overset{105}{\equiv} 57$
    (b) $42x \overset{96}{\equiv} 90$
12. Resuelve el siguiente sistema de congruencias
    $x \overset{4}{\equiv} 1$
    $2x \overset{5}{\equiv} 3$
    $4x \overset{7}{\equiv} 5$
13. Tres granjeros dividen en partes iguales el arroz que cultivaron. El primero divide su parte en porciones de 83 libras. El segundo lo divide en porciones de 110 libras. Y el tercero lo divide en porciones de 135 libras. Los tres van al mercado y venden la mayor cantidad de porciones posibles, cuando regresan al primero le sobran 32 libras de arroz, al segundo le sobran 70 libras y al tercero le sobran 30 libras. ¿Qué cantidad de arroz tenía cada uno?
14. Una banda de 17 ladrones roba un saco de billetes. Tratan de repartir los billetes equitativamente, pero sobran 3 billetes. Dos de los ladrones empiezan a pelear por el sobrante hasta que uno le dispara a otro. El dinero se redistribuye, pero esta vez sobran 10 billetes. De nuevo empieza la pelea y otro ladrón resulta muerto. Cuando el dinero se redistribuye no sobra nada.¿Cuál es la menor cantidad posible de billetes que los ladrones robaron?
15. Encuentra las soluciones enteras de:
    (a) $91x+221y=1053$
    (b) $11x+7y=200$
    (c) $71x+83y=1670$
16. Encuentra el menor entero positivo b tal que la ecuación diofantina tenga solución.
$$1111x+704y=15000+b$$
17. Consideramos la sucesión de las potencias positivas de 3, es decir la sucesión de los números $3,9,27,81,...$ etc. ¿Existe entre estos números uno cuyos últimos 3 dígitos son 001 (Sugerencia: primero demuestra que esto es equivalente al tener un entero x tal que $3^x \equiv 1(mod 100)$. Luego, toma 101 números distintos de la lista. Y Fíjate en sus residuos)
18. ¿Existe un entero k tal que $k^2 = 1111111111111111998$? (Sugerencia: demuestra que el cuadrado de cualquier entero es congruente con $0,1$, o 4 módulo 8)
19. Demuestra que cualquier primo p divide a $(p-1)!+1$.
20. Prueba el pequeño teorema de fermat: Si p es un primo, entonces $a^p \overset{p}{\equiv} a$, para todo entero a (sugerencia considera lo siguiente: Si $a \overset{p}{\not\equiv} 0(mod p)$. sabemos que a es invertible $(mod p)$), así que los residuos de sus $p-1$ múltiplos $a,2a,3a,...,(p-1)a$ son todos distintos, y distintos de cero, así que deben constituir a todos los $p-1$ residuos $1,2,...,p-1$)