Gráficas y Juegos

Semestre 2023-1

Distancia en Gráficas

Profesora:
Dra. María del Rocío Sánchez López

Ayudante:
Erik Quintero Villeda

1. Distancia

Sea G una gráfica, donde V es el conjunto de vértices de G. Sean v y u en V, se define la **distancia** del vértice v al vértice u como la longitud de la vu-trayectoria más corta.

- La distancia entre v y u se denota como $d(v, u)$.
- $d(v, u) = min\{l(T) : T$ es una vu-trayectoria$\}$.
- Si para dos vértices u y v en G no existe una uv-trayectoria en G, se entiende que la distancia es infinito.

2. Propiedades

La distancia entre dos vértices v y u cumple con las siguientes propiedades.

- $d(v, u) \geq 0$ para todo v, u en V.
- $d(v, u) = 0$ si y sólo si $v = u$.
- $d(v, u) = d(u, v)$ para todo v, u en V.
- $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ para todo u, v, w en V.

3. Excentricidad

Dada G una gráfica, donde V es su conjunto de vértices, se define la **excentricidad** de un vértice v en V como la distancia de v al vértice más lejano de V.

$$exc(v) = max\{d(v, u) : u \in V\}.$$

3.1. Ejemplo

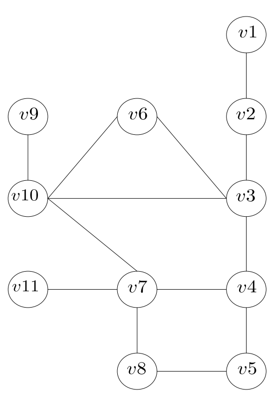

Tabla de distancias

	$v1$	$v2$	$v3$	$v4$	$v5$	$v6$	$v7$	$v8$	$v9$	$v10$	$v11$	
$v1$	0	1	2	3	4	3	4	5	4	3	5	$exc(v1) = 5$
$v2$	1	0	1	2	3	2	3	4	3	2	4	$exc(v2) = 4$
$v3$	2	1	0	1	2	1	2	3	2	1	3	$exc(v3) = 3$
$v4$	3	2	1	0	1	2	1	2	3	2	2	$exc(v4) = 3$
$v5$	4	3	2	1	0	3	2	1	4	3	3	$exc(v5) = 4$
$v6$	3	2	1	2	3	0	3	4	3	2	4	$exc(v6) = 4$
$v7$	4	3	2	1	2	3	0	1	2	1	1	$exc(v7) = 4$
$v8$	5	4	3	2	1	4	1	0	3	2	2	$exc(v8) = 5$
$v9$	4	3	2	3	4	3	2	3	0	1	3	$exc(v9) = 4$
$v10$	3	2	1	2	3	2	1	2	1	0	2	$exc(v10) = 3$
$v11$	5	4	3	2	3	4	1	2	3	2	0	$exc(v11) = 5$

Figura 1: Gráfica G y la tabla de distancias de los vértices de G.

4. Diámetro y radio

Dada una gráfica G.

- Se define el **diámetro** de G como el máximo de las excentricidades de los vértices de G.

$$diam(G) = max\{exc(v) : v \in V\}$$

- Se define el **radio** de G como el mínimo de las excentricidades de los vértices de G.

$$rad(G) = min\{exc(v) : v \in V\}$$

Para la gráfica de la figura 1 tenemos que $diam(G) = 5$ y $rad(G) = 3$.

5. Resultados

- **Teorema:** Si G es una gráfica inconexa, entonces $diam(G) \leq 2$.
- **Teorema:** Para toda gráfica G se cumple que $rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$.
- Si G es una gráfica inconexa, entonces $rad(G) = diam(G) = \infty$.

6. Vértices centrales y centro de una gráfica

- Sea G una gráfica tal que V es su conjunto de vértices. Decimos que $v \in V$ es un **vértice central** de G cuando $exc(v) = rad(G)$.
- Al conjunto conformado por todos los vértices centrales de G le llamamos el **centro** de G denotado por $C(G)$.

6.1. Ejemplo:

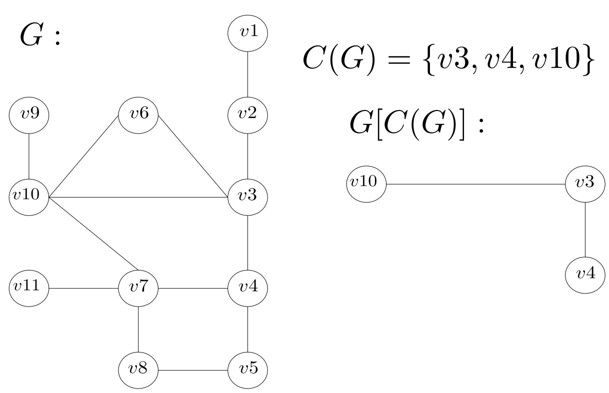

Figura 2: Gráfica G y la gráfica inducida por $C(G)$.