

# Programa del Curso

---

1. Introducción.
  2. Fundamentos de la imagen digital.
  3. Realce de la imagen en el dominio espacial.
  4. Realce de la imagen en el dominio de la frecuencia.
  5. Restauración de la imagen.
  6. Representación del color.
  7. Compresión de imágenes.
-

## 4. Realce de la imagen en el dominio de la frecuencia

---

- a) Antecedentes.
  - b) Introducción a la transformada de Fourier y al dominio de la frecuencia.
  - c) Filtros de suavizamiento en el dominio de la frecuencia.
  - d) Filtros de realce en el dominio de la frecuencia.
  - e) **Notas para la implementación.**
-

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- **TRANSLACIÓN:** el par de transformadas de Fourier tiene las siguientes propiedades de translación:

$$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

y

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$$

Donde la flecha doble significa par de transformadas.

Cuando  $u_0=M/2$  y  $v_0=N/2$ , entonces:

$$\begin{aligned} e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} &= e^{j\pi(x+y)} \\ &= (-1)^{x+y} \end{aligned}$$

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$

y

$$f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$$

Las cuales hemos utilizado para centrar la transformada. Para implementar en una computadora estas variables irán desde  $u=1$  a  $M$  y  $v=1$  a  $N$ , para las cuales el centro de la transformada estará en  $u=(M/2)+1$  y  $v=(N/2)+1$ .

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- **DISTRIBUTIVIDAD Y ESCALA:** de la definición de transformada de Fourier tenemos:

$$\mathfrak{T}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \mathfrak{T}[f_1(x, y)] + \mathfrak{T}[f_2(x, y)]$$

y en general:

$$\mathfrak{T}[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \mathfrak{T}[f_1(x, y)] \cdot \mathfrak{T}[f_2(x, y)]$$

En otras palabras la TF es distributiva sobre la adición pero no sobre la multiplicación. Lo mismo aplica para la TF *inversa*.

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

Similarmente, sean dos escalares  $a$  y  $b$  entonces:

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

y

$$f(ax, ay) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a, v/b)$$

Esta es la propiedad de *escala*.

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- **ROTACIÓN:** si introducimos coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$$

Entonces  $f(x,y)$  y  $F(u,v)$  se vuelven  $f(r,\theta)$  y  $F(\omega,\varphi)$ , respectivamente. Sustituyendo en la definición de TDF tenemos:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

Esta expresión indica que rotar  $f(x,y)$  por un ángulo  $\theta_0$  rota  $F(u,v)$  por el mismo ángulo. Similarmente  $F(u,v)$  rota  $f(x,y)$  por el mismo ángulo.

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- **PERIODICIDAD Y CONJUGADO SIMÉTRICO:** la TDF tiene las siguientes propiedades de periodicidad:

$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$$

La transformada *inversa* también es periódica:

$$f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$$

La idea de conjugado simétrico ya se ha introducido antes:

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$



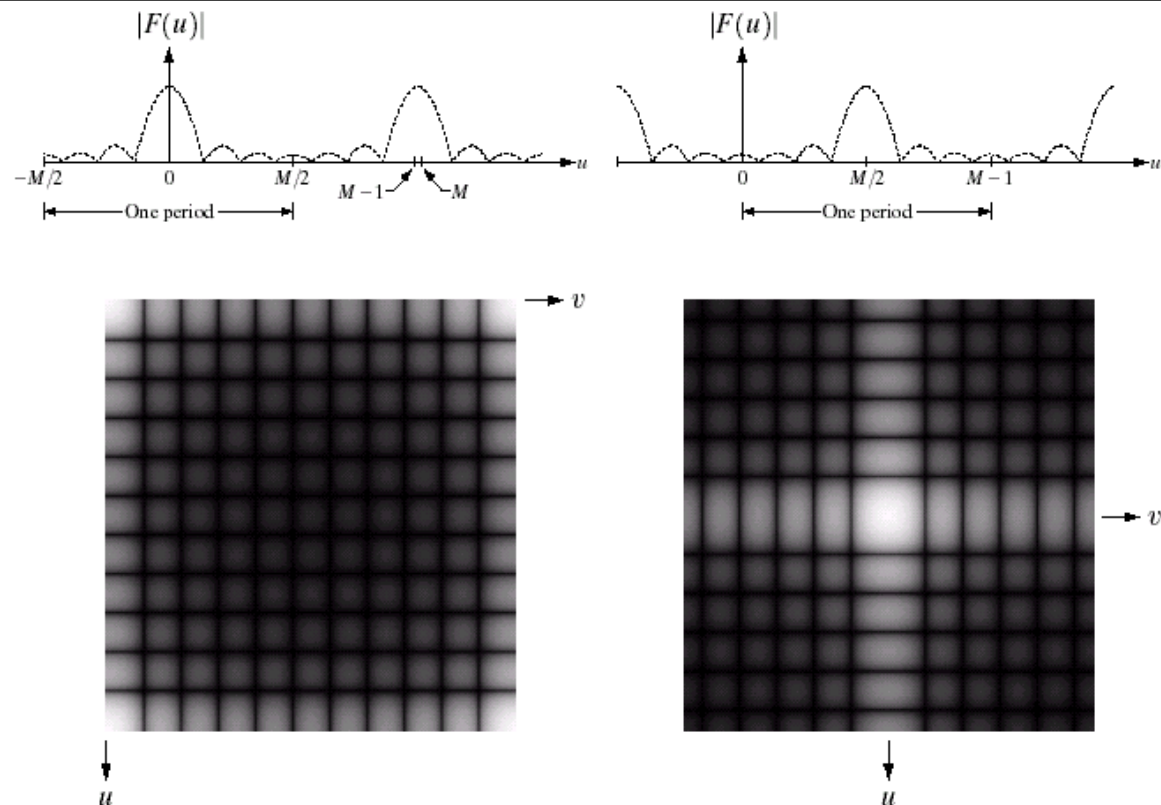
# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

La propiedad de *periodicidad* indica que  $F(u)$  tiene periodo de tamaño  $M$ , y la propiedad de *simetría* indica que el espectro se centra en el origen. Para desplegar un periodo completo, es necesario mover el origen de la transformada al punto  $u=M/2$  multiplicando  $f(x)$  por  $(-1)^x$  antes de realizar la transformada. Lo mismo para 2D.

a b  
c d

**FIGURE 4.34**

(a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval  $[0, M - 1]$ .  
(b) Shifted spectrum showing a full period in the same interval.  
(c) Fourier spectrum of an image, showing the same back-to-back properties as (a), but in two dimensions.  
(d) Centered Fourier spectrum.



# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- **SEPARABILIDAD:** la TDF puede expresarse en forma separada:

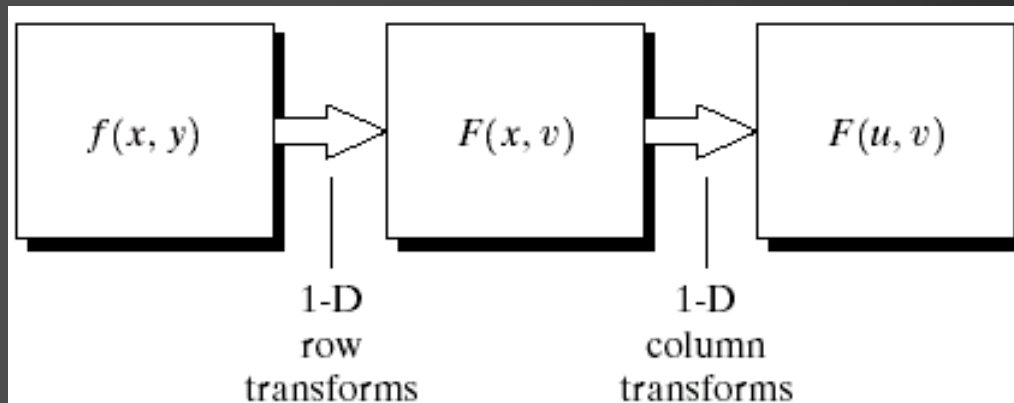
$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M} \end{aligned}$$

donde :

$$F(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N}$$

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

Para cada valor de  $x$ , y para valores de  $v=0,1,2,\dots, N-1$ , esta ecuación es una transformada de Fourier completa en 1D. En otras palabras,  $F(x,v)$  es la TF a lo largo de un renglón de  $f(x,y)$ . Variando  $x$  de  $0$  a  $M-1$ , calculamos la TF a lo largo de los *renglones* de  $f(x,y)$ . Hasta aquí la variable de frecuencia  $u$  permanece constante. Para completar la TF en 2D tenemos que variar  $u$  de  $0$  a  $M-1$ , lo cual resulta en calcular la TF de 1D a lo largo de cada *columna* de  $F(x,v)$ . Aplica para la TF *inversa*.



**FIGURE 4.35**  
Computation of the 2-D Fourier transform as a series of 1-D transforms.

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- **CÁLCULO DE LA TDF INVERSA UTILIZANDO EL ALGORITMO DE LA TDF DIRECTA:** Como hemos visto la TDF 2D puede calcularse con la aplicación de transformadas 1D. El par de TDF en 1D se definió anteriormente como:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$

para  $u=0,1,2,\dots, M-1$ , y:

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M}$$

para  $x=0,1,2,\dots, M-1$ , y:

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- Tomando el conjugado complejo de la ecuación anterior y dividiendo ambos lados por  $M$ , tenemos:

$$\frac{1}{M} f^*(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F^*(u) e^{-j2\pi ux/M}$$

Comparando esta ecuación, con la anterior  $F(u)$ , muestra que el lado derecho de esta ecuación es la *TDF directa*. Por lo tanto, utilizando  $F^*(u)$  como la entrada del algoritmo designado para el cálculo de la transformada directa nos da una cantidad  $f^*(x)/M$ . Tomando el conjugado complejo y multiplicándolo por  $M$  nos da la *transformada inversa*  $f(x)$  que buscamos.

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- Usando el mismo análisis para dos variables tenemos:

$$\frac{1}{MN} f^*(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

Tomando el conjugado complejo (o la parte real, en caso de funciones reales) de este resultado y multiplicándolo por  $MN$  nos da la *transformada inversa*  $f(x, y)$  que buscamos.

Cuando se utiliza el algoritmo 1D para obtener la TF inversa 2D, no calculamos el conjugado complejo despues de procesar cada renglón o columna, en su lugar la función  $F^*(u, v)$  es tratada como si fuera  $f(x, y)$ .

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

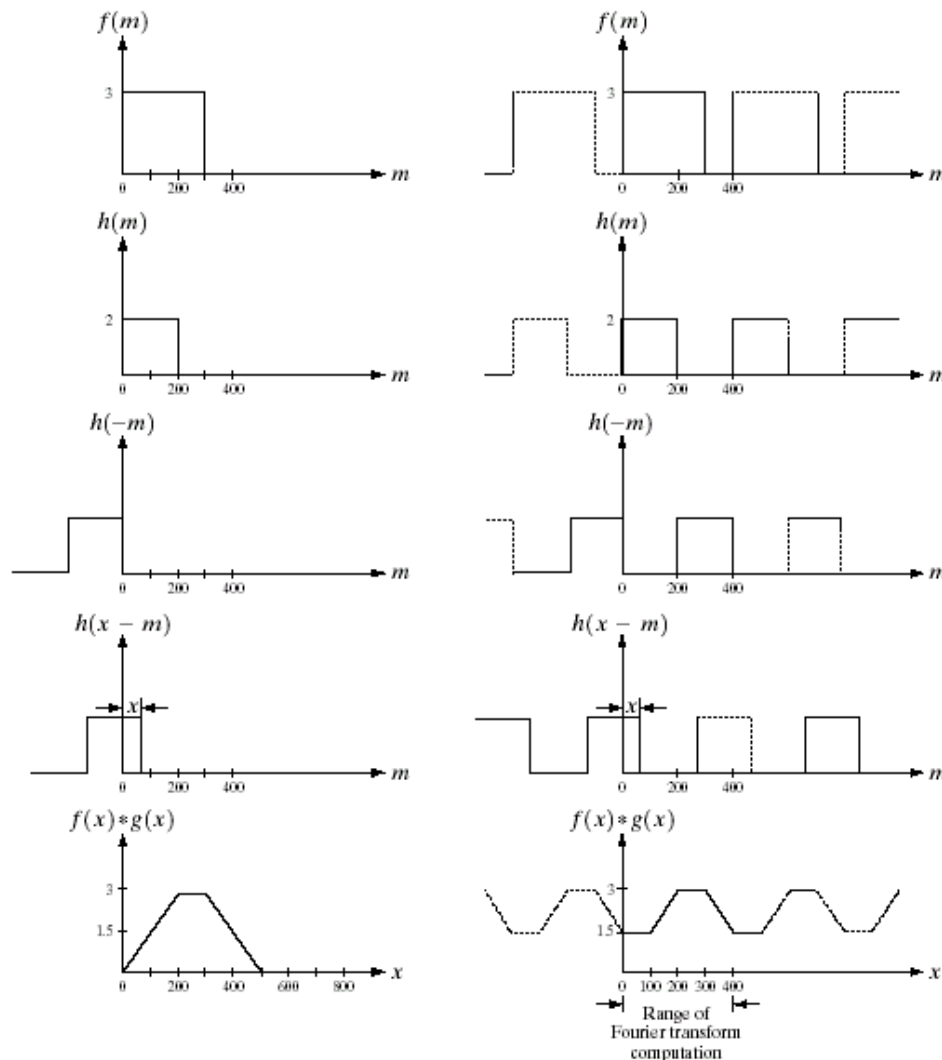
- **MAS SOBRE DE PERIODICIDAD: LA NECESIDAD DE RELLENO (PADDING).** Como se explicó con anterioridad, basados en el teorema de convolución, multiplicar en el dominio de la frecuencia es equivalente a convolucionar en el dominio espacial, y *viceversa*. Cuando trabajamos con variables discretas y la TF debemos recordar la periodicidad de todas las funciones involucradas. La periodicidad es parte del proceso y no se puede ignorar.
- Recordando, la convolución en 1D está definida como:

$$f(x) * h(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(x-m)$$

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

a f  
b g  
c h  
d i  
e j

**FIGURE 4.36** Left: convolution of two discrete functions. Right: convolution of the same functions, taking into account the implied periodicity of the DFT. Note in (j) how data from adjacent periods corrupt the result of convolution.



La *columna izquierda* de la figura muestra el concepto de convolución en 1D, de las funciones  $f(m)$  y  $h(m)$ .

La columna de la derecha muestra el mismo ejemplo pero ahora considerando que las *funciones son periódicas*. La periodicidad hace que existan valores involucrados en el cálculo que no estaban presentes antes. Existe por ejemplo un error (valor constante) en el intervalo de **0-100** en el resultado, debido al producto hecho con el segmento de  $f(m)$  cuando  $x=0$  (figuras i y j).



# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

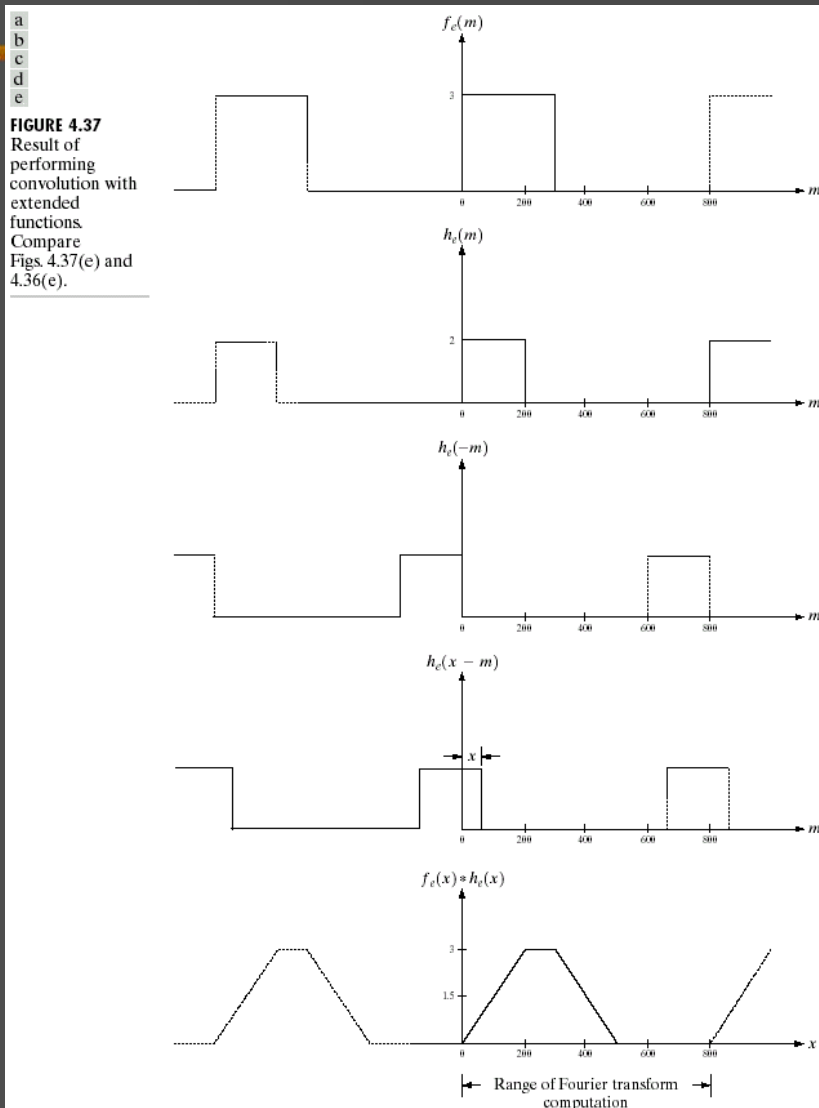
- Tendríamos el mismo problema si calculamos la convolución en el dominio de la frecuencia (haciendo el producto de las TF). El resultado tendría datos erróneos al principio y le faltarían datos al final.
- La solución de este problema es sencillo. Suponga que  $f$  y  $h$  consisten en  $A$  y  $B$  puntos, respectivamente. Le *añadimos ceros* a ambas funciones de manera que tengan *periodos idénticos*, denotados por  $P$ . Este procedimiento genera funciones *extendidas* o *rellenas* (*padded*) dadas por:

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \end{cases}$$

y

$$g_e(x) = \begin{cases} g(x) & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0 & B \leq x \leq P \end{cases}$$

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D



En este ejemplo las funciones han sido extendidas, se ha elegido  $P=A+B-1$  así que sabemos que los periodos de convolución serán adyacentes.

El resultado de la convolución da el resultado correcto esperado. Lo mismo ocurre si hicieramos la convolución en el dominio de la frecuencia: (1) TDF de las funciones extendidas, (2) multiplicar las transformadas, (3) obtener la TDF *inversa*.

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

- Estos conceptos se pueden extender a funciones 2D y siguen la misma línea de razonamiento. Suponga que tenemos 2 imágenes  $f(x,y)$  y  $h(x,y)$  de tamaños  $A \times B$  y  $C \times D$  respectivamente. Se asume que estos arreglos son periódicos con un periodo  $P$  en la dirección- $x$  y  $Q$  en la dirección- $y$ . Para evitar errores:  $P \geq A+C-1$ , y  $Q \geq B+D-1$ .

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \text{ y } 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \text{ y } B \leq y \leq Q \end{cases}$$

y

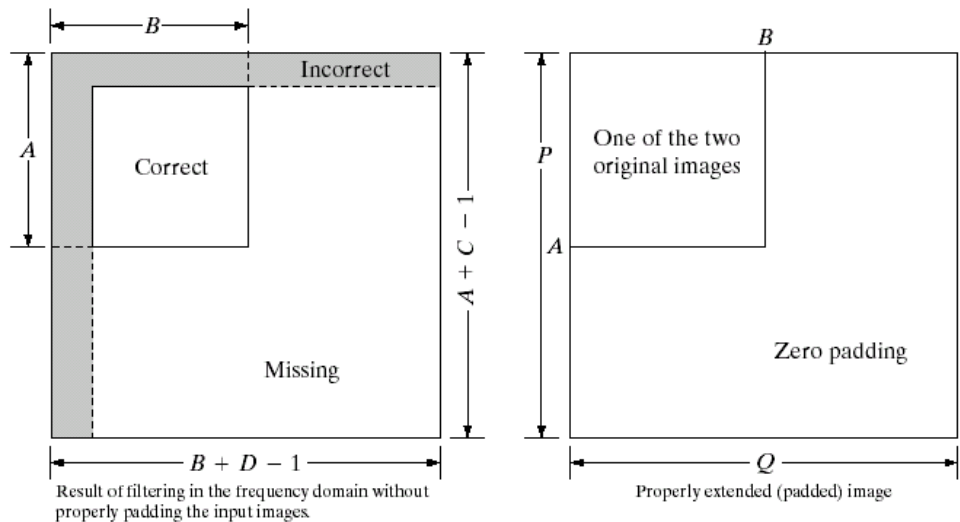
$$h_e(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \text{ y } 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq P \text{ y } D \leq y \leq Q \end{cases}$$

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D

---

- El tema del rellenado es central en el filtrado. Cuando implementamos cualquier filtro en el dominio de la frecuencia, lo hacemos multiplicando la función de transferencia del filtro por la transformada de la imagen que queremos procesar. Por el teorema de convolución, sabemos que ésto es lo mismo que convolucionar la representación espacial de las funciones de filtro y la imagen. Por lo tanto, si no implementamos un relleno (padding) apropiado, los resultados serán erróneos.
-

# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D



a b  
c

**FIGURE 4.38**

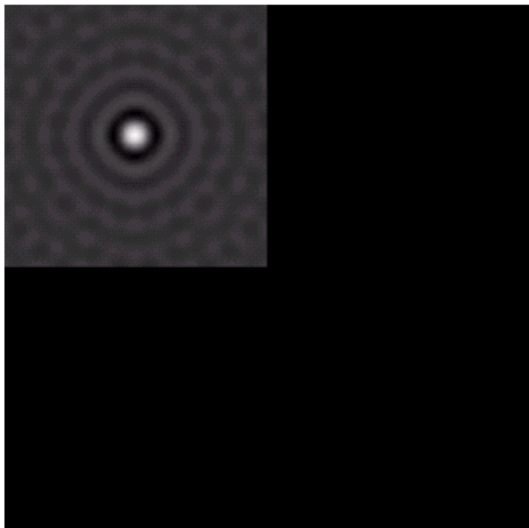
Illustration of the need for function padding.

(a) Result of performing 2-D convolution without padding. (b) Proper function padding. (c) Correct convolution result.

$f$  y  $h$  son cuadradas y del mismo tamaño, y  $h$  es la *TDF inversa* del filtro  $H(u, v)$ .

- Muestra la convolución sin relleno ni en  $f$  ni  $h$ , del tamaño original de la imagen de entrada  $A \times B$ .
- Ambas funciones rellenas, el resultado correcto de tamaño  $P \times Q$ , el tamaño de la imagen  $A \times B$ , son los valores que conservamos como resultado.

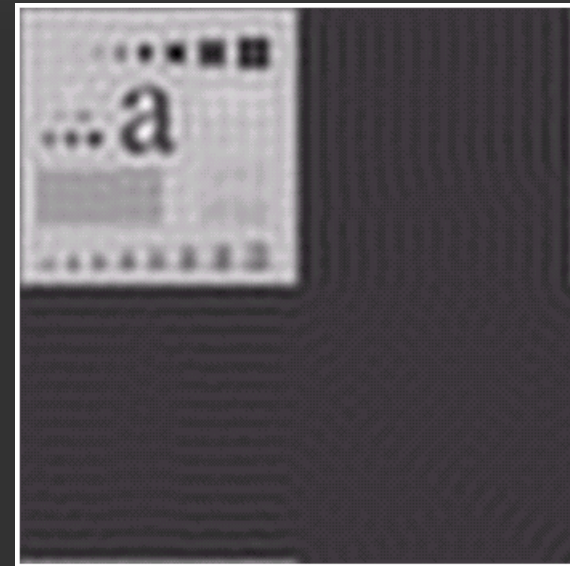
# Algunas propiedades adicionales de la transformada de Fourier en 2D



*Filtro paso bajas en el dominio del espacio (sólo se muestra la parte real) con relleno (padding).*

**FIGURE 4.39** Padded lowpass filter is the spatial domain (only the real part is shown).

*Resultado de filtrar la imagen con relleno (padding). Generalmente la imagen se *corta* (crop) a su tamaño original debido a que existe muy poca información de valor fuera de sus bordes.*



**FIGURE 4.40** Result of filtering with padding. The image is usually cropped to its original size since there is little valuable information past the image boundaries.

# Resumen de las propiedades de la transformada de Fourier en 2D

**TABLE 4.1**

Summary of some important properties of the 2-D Fourier transform.

| Property                  | Expression(s)  |
|---------------------------|--|
| Fourier transform         | $F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$   |
| Inverse Fourier transform | $f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$   |
| Polar representation      | $F(u, v) =  F(u, v)  e^{-j\phi(u, v)}$   |
| Spectrum                  | $ F(u, v)  = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}, \quad R = \text{Real}(F) \text{ and } I = \text{Imag}(F)$  |
| Phase angle               | $\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$  |
| Power spectrum            | $P(u, v) =  F(u, v) ^2$  |
| Average value             | $\bar{f}(x, y) = F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$   |
| Translation               | $f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$ <p>When <math>x_0 = u_0 = M/2</math> and <math>y_0 = v_0 = N/2</math>, then</p> $f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v) (-1)^{u+v}$ |

# Resumen de las propiedades de la transformada de Fourier en 2D

|                    |  |
|--------------------|--|
| Conjugate symmetry | $F(u, v) = F^*(-u, -v)$ $ F(u, v)  =  F(-u, -v) $  |
| Differentiation    | $\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (ju)^n F(u, v)$ $(-jx)^n f(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^n F(u, v)}{\partial u^n}$   |
| Laplacian          | $\nabla^2 f(x, y) \Leftrightarrow -(u^2 + v^2)F(u, v)$   |
| Distributivity     | $\Im[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \Im[f_1(x, y)] + \Im[f_2(x, y)]$ $\Im[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \Im[f_1(x, y)] \cdot \Im[f_2(x, y)]$   |
| Scaling            | $af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v), f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ ab } F(u/a, v/b)$  |
| Rotation           | $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$ $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$  |
| Periodicity        | $F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$ $f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$  |
| Separability       | <p>See Eqs. (4.6-14) and (4.6-15). Separability implies that we can compute the 2-D transform of an image by first computing 1-D transforms along each row of the image, and then computing a 1-D transform along each column of this intermediate result. The reverse, columns and then rows, yields the same result.</p> |