2.3 Sistemas bidimensionales lineales e invariantes

Si existe una salida única para una entrada dada, el mapeo entrada - salida se conoce como **sistema**.

El análisis de sistemas bidimensionales es muy similar al de sistemas en 1D por lo que empezaremos con sistemas en 1D y luego extenderemos los conceptos a 2D. Un sistema S que mapea una entrada $x(n)$ a una salida $y(n)$ se representa como:

$$y(n)=S(x(n)) \tag{2.3.1}$$

Este concepto de sistema es muy amplio. Sin cierto tipo de restricciones la caracterización de un sistema requeriría el conocimiento de la relación completa entre las entradas y las salidas, ya que el conocimiento de un conjunto de entradas y salidas podría no permitir determinar el sistema si por ejemplo el sistema tiene memoria o es variante con el tiempo.

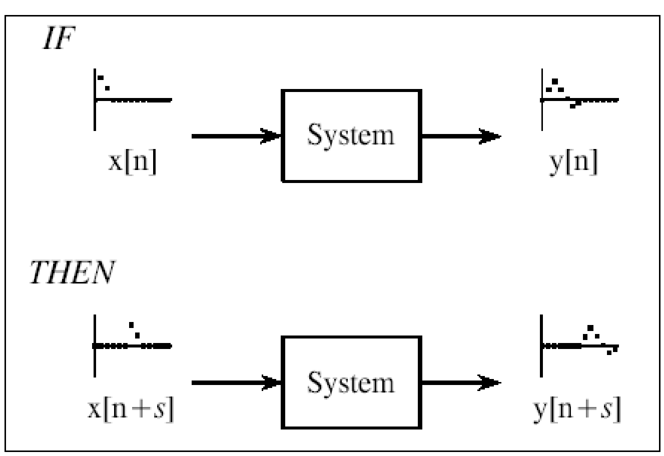
Dos restricciones importantes que ayudan a simplificar de manera importante la caracterización de un sistema es asumir que **el sistema es lineal** e **invariante con el tiempo**.

Supongamos que la señal de entrada $x(n)$ es retrasada k unidades de tiempo, es decir, $x(n-k)$ y de nuevo aplicamos el mismo sistema S, si las características del sistema no cambian con el tiempo, entonces la salida del sistema deberá ser $y(n-k)$, es decir, la salida será la misma como respuesta a $x(n)$ excepto que estará retrasada por las mismas k unidades que fue retrasada la señal de entrada.

Un sistema es invariante al corrimiento o ***invariante en el tiempo*** *si*

$$S(x(n-k)) = y(n-k) \tag{2.3.2}$$

para cualquier señal de entrada $x(n)$ en cualquier tiempo k.



Ejemplo: Si decimos “hola” en el teléfono, la otra persona siempre escuchara “hola”, sin importar a qué hora del día lo diga.

Entonces, si la salida $y(n,k) = y(n-k)$, para todos los valores posibles de k, el sistema es invariante en el tiempo. Por otro lado, si $y(n,k) \neq y(n-k)$, incluso para un valor de k, el sistema es variante en el tiempo.

Linealidad

En la naturaleza existen muchos tipos de sistemas que desearíamos analizar. Afortunadamente la mayoría de esos sistemas caen dentro de una clasificación. Esa clasificación es la de sistemas lineales. Los sistemas lineales se rigen por un conjunto de propiedades que facilitan su estudio y análisis. Los sistemas no lineales son mucho más difíciles de analizar. Es importante saber cuándo un sistema se clasifica como sistema lineal. Un ***sistema lineal*** es aquel que ***satisface la homogeneidad*** y ***el principio de superposición.***

Se dice que un sistema es lineal si

$$S(ax_0(n)) \to ay_0(n)$$

y

$$S(bx_1(n)) \to by_1(n)$$

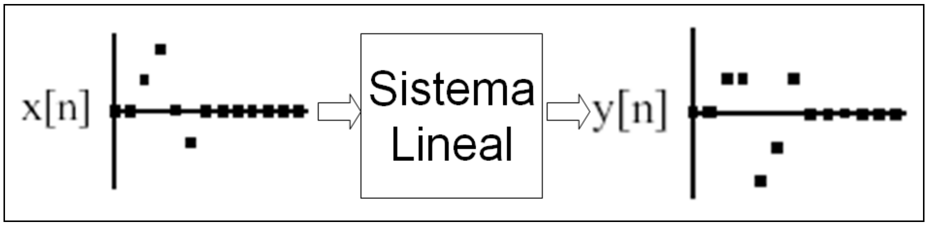
Entonces

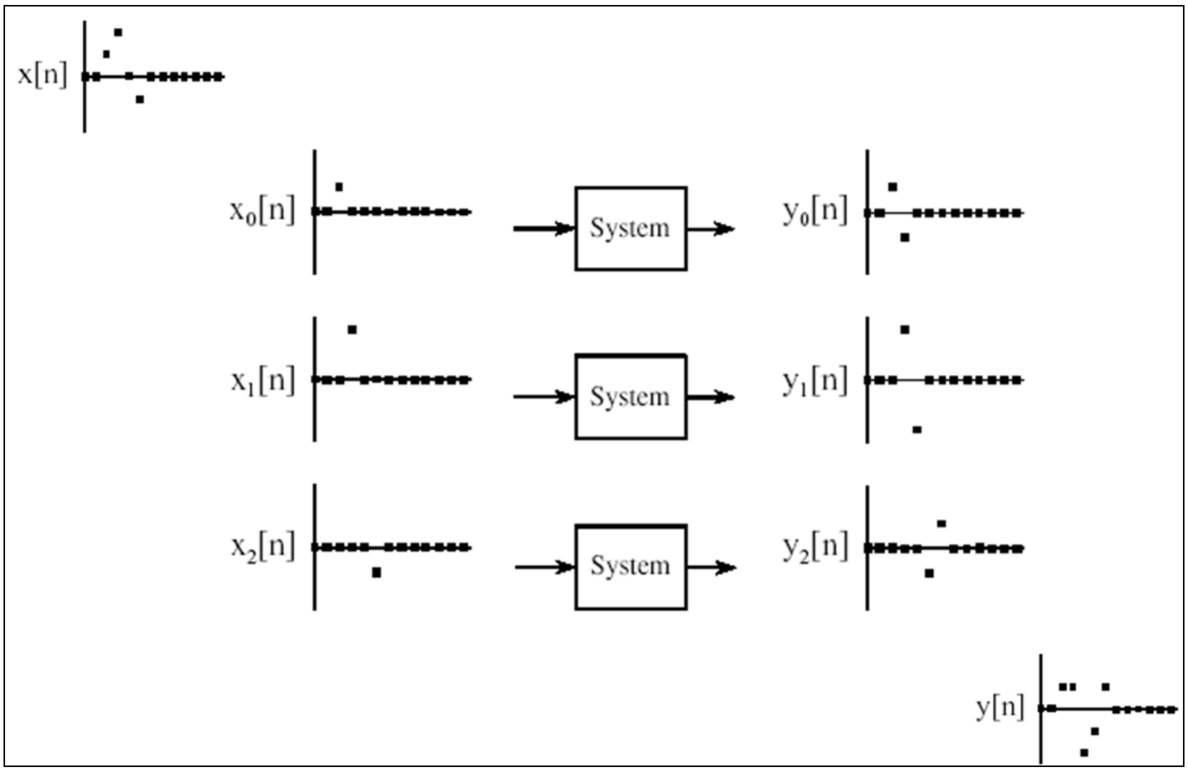
$$S(ax_0(n) + bx_1(n)) = ay_0(n) + by_1(n) \qquad (2.3.3)$$

La ecuación (2.3.3) se conoce como ***principio de superposición***. Así un sistema es lineal si satisface el principio de superposición.

Superposición es la estrategia con que podemos analizar sistemas y señales. Si una señal de entrada $x[n]$, que produce una señal de salida $y[n]$ la descomponemos en señales más simples $x_0[n]$, $x_1[n]$, $x_2[n]$,..., y hacemos pasar cada una de estas componentes por el sistema obteniendo $y_0[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$,..., sintetizando estas señales obtenemos $y[n]$. Se entiende como *Síntesis* el proceso de combinar señales escalandolas (es decir multiplicando las señales por constantes) y después sumándolas.

Ejemplo:

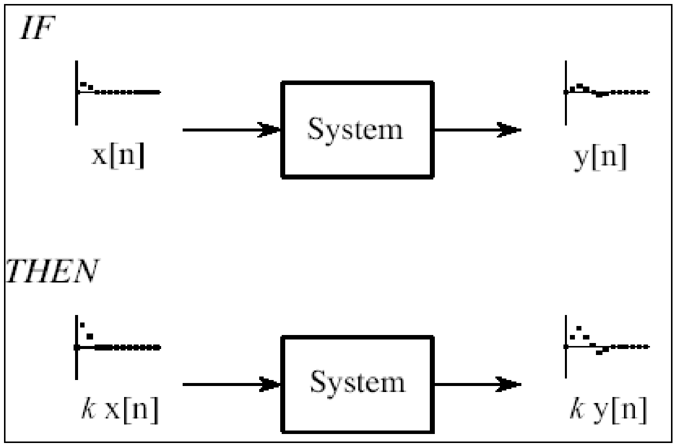




La señal de salida obtenida sintetizando las componentes es igual a la obtenida pasando la señal de entrada original por el sistema. En vez de tratar de comprender como se comporta el sistema para señales complicadas, se dividen en señales sencillas y se suman sus respuestas.

Homogeneidad

Decimos que un sistema es homogéneo cuando un cambio en la amplitud de la señal de entrada produce una variación proporcional en la señal de salida. Si una señal de entrada $x[n]$ produce una señal de salida $y[n]$, una señal de entrada $kx[n]$ dará lugar a una señal $ky[n]$, como se observa en la siguiente figura:



Si el sistema cumple con estas condiciones entonces pertenece a la clase de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLI).

Usando estas dos propiedades se puede definir el teorema de convolución el cual se presenta a continuación:

2.4 Convolución bidimensional

La señal de entrada $x(n)$ se "convoluciona" con la respuesta al impulso del sistema $h(n)$ para obtener la salida $g(n)$, la cual se denota como [2]:

$$g(n) = f(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)h(n-m) \qquad (2.3.4)$$

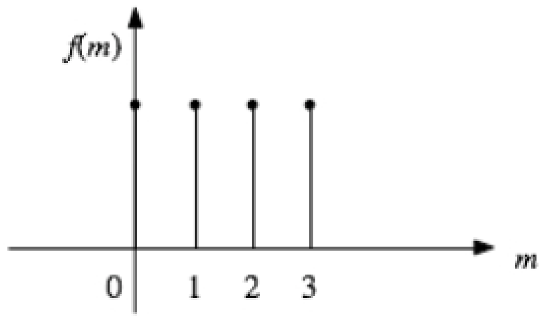
Propiedades de la convolución

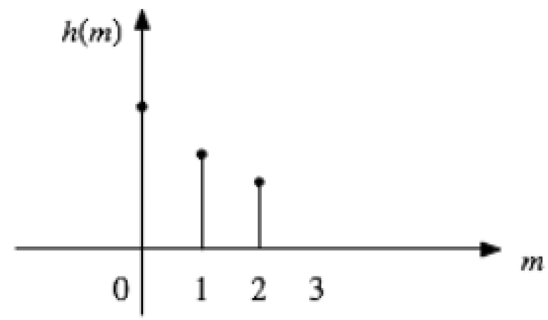
$$Conmutativa: \; f(n) * h(n) = h(n) * f(n)$$

$$Asociativa: \; [f(n) * h_1(n)] * h_2(n) = f(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

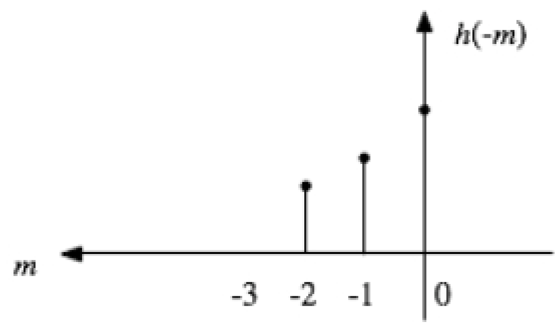
$$Distributiva: \; f(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = f(n) * h_1(n) + f(n) * h_2(n)$$

Ejemplo: Sean $f(m)$ y $h(m)$ como se muestren en la siguiente figura:





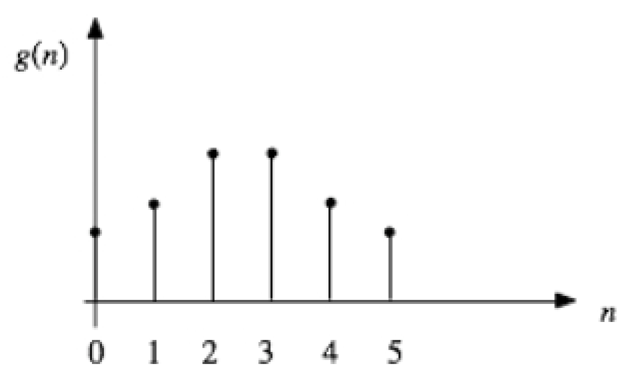
$h(-m)$ se puede graficar como:



Por lo que al encontrar

$$g(n) = \sum_{m=0}^{3} f(m)h(n-m)$$

queda:



Ejemplo:

Dadas dos secuencias discretas x(n) y h(n):

x(n) = [0.25 0.5 1 0.25]

h(n) = [1 1 0.5 0.5]

Se calcula y(n) = x(n)*h(n) multiplicando los términos solapados de x(n) y h(-n) efectuando la suma de productos.

h(-n) es la secuencia móvil
x(n) es la secuencia fija

h(-n) = [0.5 0.5 1 1]

De modo que:

h_3	h_2	h_1	h_0	|	x_0	x_1	x_2	x_3	
					0.25	0.5	1	0.25	
$h(-k)$		0.5	0.5	1	1				$y0 = 1(0.25) = 0.25$
			0.5	0.5	1	1			$y1 = 1(0.25) + 1(0.5) = 0.75$
				0.5	0.5	1	1		$y2 = 0.5(0.25) + 1(0.5) + 1(1) = 1.625$
					0.5	0.5	1	1	
						0.5	0.5	1	
							0.5	0.5	
								0.5	

Se deja al lector completar y graficar los resultados del ejemplo.

Podemos extender el estudio de los SLI a dos dimensiones muy fácilmente y analizar el caso de manera muy similar a como se hace en una dimensión. Para ello, éstos sistemas deberán satisfacer los principios de homogeneidad, superposición y además de ser invariantes en el tiempo. En este caso la convolución bidimensional se define como [1] [2]:

$$g(x, y) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x-\alpha, y-\beta) \qquad (2.3.5)$$

y además todas las propiedades se conservan.

Ejemplo: Realizar la convolución $f(\alpha,\beta)*h(\alpha,\beta)$ dados:

$$f(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \text{ y } h(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

para resolver el problema, primero elegimos un origen (las coordenadas 0,0 en la imagen f y en el filtro h).

$$f(\alpha,\beta)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}0,0&&\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\end{array} \quad h(\alpha,\beta)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}0,0&&\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\end{array}$$

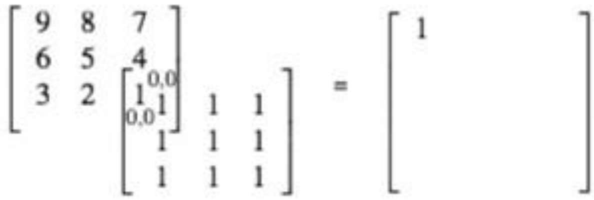
y encontramos $h(-\alpha,-\beta)$. La forma gráfica de hacerlo es girar a los elementos de h de derecha a izquierda y luego de abajo hacia arriba como se muestra a continuación:

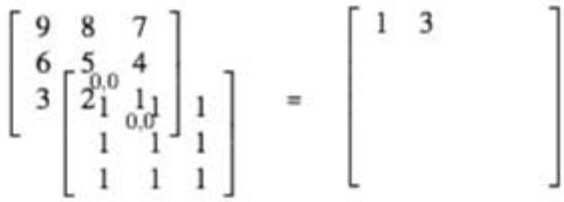
$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}0,0&&\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\end{array} \xleftarrow{Giro} \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&&0,0\end{array}\\ \begin{bmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{bmatrix}\end{array} \overset{Giro}{\uparrow} \begin{array}{c}\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}&&0,0\end{array}\end{array}$$

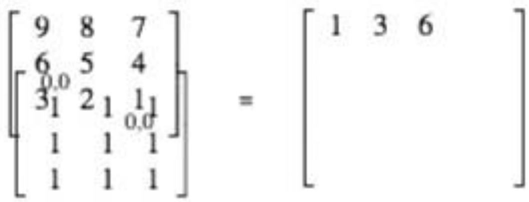
Por lo que:

$$h(-\alpha,-\beta)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}&&0,0\end{array}\end{array}$$

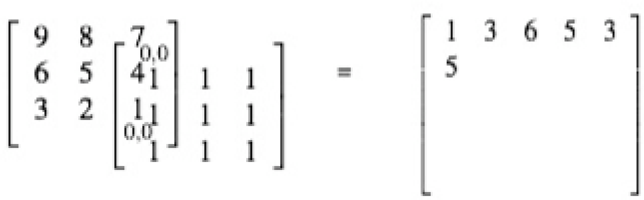
y realizamos la convolución superponiendo el origen de $h(-\alpha,-\beta)$ en el origen de $f(\alpha,\beta)$. El proceso se muestra en la siguiente figura:







Realizando las multiplicaciones y sumas correspondientes sobre el resto del renglón, entonces tendremos lo siguiente:



El cálculo final involucraría realizar las multiplicaciones y las sumas sobre los renglones y columnas. La siguiente matriz muestra el resultado de algunos elementos fila-columna; se deja al lector completar los que hacen falta.

$$g(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 12 & & & \\ 12 & & & & \\ 11 & & 28 & & \\ 7 & & & & 9 \end{bmatrix}$$

Referencias:

[1], [2] Gonzalez, R. C. , and Woods, P., Digital Image Processing, Addison Wesley, 2002