

Programa del Curso

1. Introducción.
 2. Fundamentos de la imagen digital.
 3. Realce de la imagen en el dominio espacial.
 4. Realce de la imagen en el dominio de la frecuencia.
 5. Restauración de la imagen.
 6. Representación del color.
 7. Compresión de imágenes.
-

4. Realce de la imagen en el dominio de la frecuencia

- a) Antecedentes.
 - b) Introducción a la transformada de Fourier y al dominio de la frecuencia.
 - c) Filtros de suavizamiento en el dominio de la frecuencia.
 - d) Filtros de realce en el dominio de la frecuencia.
 - e) Notas para la implementación.
-

Antecedentes

- El matemático francés *Jean Baptiste Joseph Fourier* nació en 1768 en la ciudad de Auxerre. La contribución por la cual más se le recuerda está escrita en su libro llamado “*La teoría análitica del calor*” (1822).
 - Su contribución establece que cualquier función que se repite de manera periódica puede ser expresada como la *suma de senos y/o cosenos* de diferentes frecuencias cada una multiplicada por un coeficiente diferente. A lo anterior se le conoce como “*series de Fourier*”.
-

Serie de Fourier

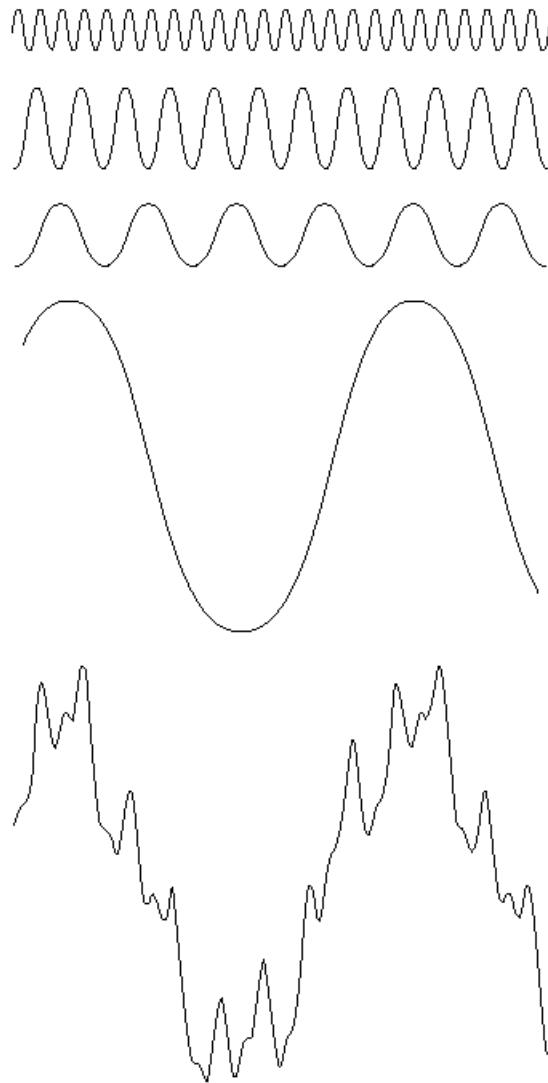


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

La función del final es la suma de las cuatro funciones representadas arriba de ella.

Antecedentes

- Las funciones *pares que no son periódicas* (pero cuya área bajo la curva es finita) pueden ser expresadas como la *integral de senos y/o cosenos* multiplicados por una función ponderada (pesos). A esta formulación se la conoce como “*transformada de Fourier*” y su utilidad es todavía mayor que el de las *series de Fourier*.
- Ambas representaciones comparten la importante característica que *la función*, expresada en series o en transformada de Fourier, puede ser *reconstruida* (recobrada) completamente *via el proceso inverso*, sin pérdida de información.

4. Realce de la imagen en el dominio de la frecuencia

- a) Antecedentes.
 - b) Introducción a la transformada de Fourier y al dominio de la frecuencia.
 - c) Filtros de suavizamiento en el dominio de la frecuencia.
 - d) Filtros de realce en el dominio de la frecuencia.
 - e) Notas para la implementación.
-

Transformada de Fourier unidimensional y su inversa

- La Transformada de Fourier, $F(u)$, de una función continua de una sola variable, $f(x)$, se define por la ecuación:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad \text{donde } j = \sqrt{-1}$$

- De la misma manera dada $F(u)$, podemos obtener $f(x)$ por medio de la *transformada inversa de Fourier*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du \quad \text{donde } j = \sqrt{-1}$$

- A estas dos ecuaciones se les conoce como el *par de transformadas de Fourier*.

Transformada de Fourier bi-dimensional y su inversa

- El par de ecuaciones anterior se pueden extender a dos variables, u y v como sigue:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- De la misma manera la *transformada inversa de Fourier*:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

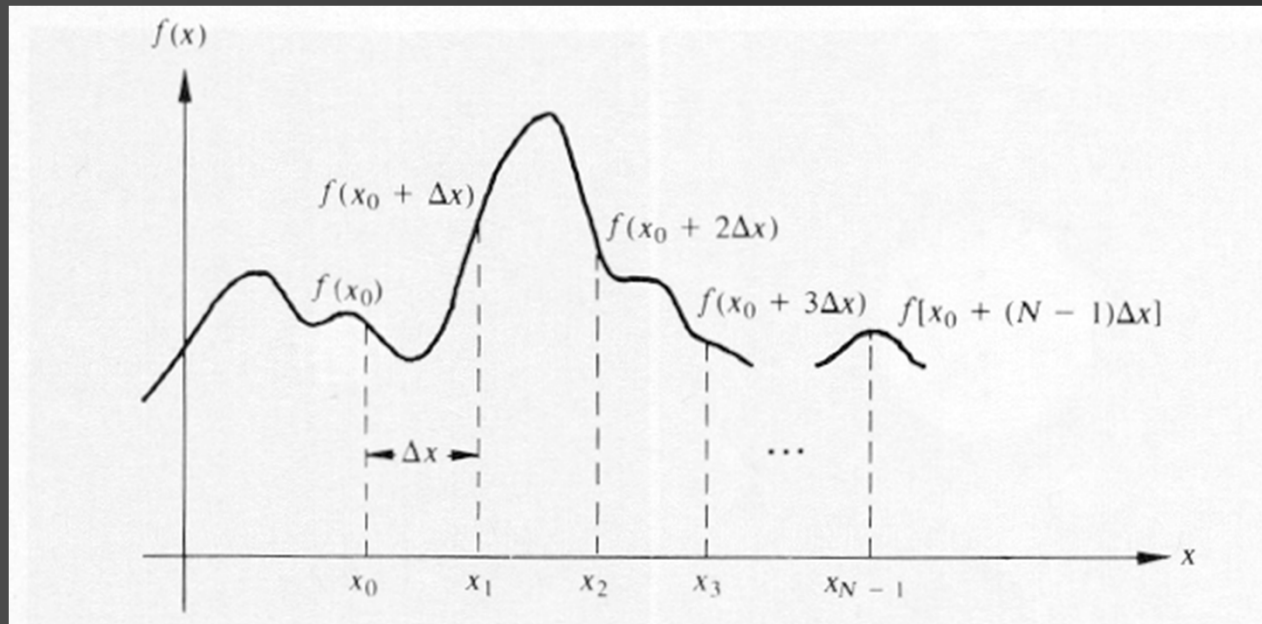
- Nosotros estamos interesados en la representación discreta de este par de ecuaciones.

Transformada de Fourier discreta

- Una función continua $f(x)$ se discretiza en una secuencia:

$$\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + [N-1]\Delta x)\}$$

tomando N o M muestras separadas por Δx unidades:



Transformada de Fourier discreta

- Donde x asume los valores discretos $(0, 1, 2, 3, \dots, M-1)$ entonces:

$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x)$$

- La secuencia $\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(M-1)\}$ denota cualquiera de las M muestras uniformemente espaciadas de la función continua correspondiente.
-

Transformada de Fourier discreta

- El *par de transformadas de Fourier* discretas de una función discreta de una variable, $f(x)$, con $x=0, 1, 2, 3, \dots, M-1$, está dada por las ecuaciones:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad \text{para } u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

y su inversa:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Transformada de Fourier discreta

- Para calcular $F(u)$ se sustituye $u=0$ en el término exponencial y se suma para todos los valores de x
- Se sustituye para $u=1$ en el término exponencial y se suma para todos los valores de x
- Repetimos para todos los M valores de u
- Toma $M*M=M^2$ sumas y multiplicaciones.

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad \text{para } u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- La transformada de Fourier y su inversa siempre existen! (ya que $f(x)$ es discreta y finita), no así en el caso continuo.

Transformada de Fourier discreta

- Los valores $u=0, 1, 2, \dots, M-1$ corresponden a muestras de la transformada continua en valores $0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, (M-1)\Delta u$
- Por ejemplo, $F(u)$ representa $F(u\Delta u)$, donde:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}$$

Transformada de Fourier discreta

- El concepto de *dominio de la frecuencia* tan mencionado con anterioridad, sigue directamente de la fórmula de *Euler*:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Sustituyendo esta expresión en la definición de transformada de Fourier y tomando en cuenta que $\cos(-\theta) = \cos \theta$, tenemos:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) [\cos 2\pi ux / M - j \sin 2\pi ux / M]$$

Para $u=0, 1, 2, \dots, M-1$

Transformada de Fourier discreta

- Para cada término de la transformada de Fourier (el valor $F(u)$ para cada valor de u) está compuesto por la suma de *todos* los valores de la función $f(x)$. Los valores de $f(x)$, a su vez, se multiplican por senos y cosenos de varias frecuencias. El dominio (valores de u) del rango de $F(u)$ se le llama *dominio de la frecuencia*, porque u determina la frecuencia de los componentes de la transformada.
- Cada término M de $F(u)$ se llama *componente de frecuencia* de la transformada. El uso de los términos *dominio de la frecuencia* y *componentes de frecuencia* no es realmente diferente de los términos *dominio del tiempo* y *componentes de tiempo*, cuando la variable que utilizamos en $f(x)$, es decir x , expresa la variable de tiempo.

Transformada de Fourier discreta

- Una analogía muy útil es el comparar a la *transformada de Fourier* con un *prisma*. El prisma es un dispositivo físico que separa la luz blanca en varios componentes de color, cada uno dependiendo de una longitud de onda (o frecuencia). La transformada de Fourier se puede ver como un “*prisma matemático*” que separa una función en sus varios componentes, también dependientes de su contenido de frecuencia. Este es un concepto muy poderoso que cae en el *corazón del filtrado lineal*, como veremos más adelante.
-

Transformada de Fourier discreta

- La transformada de Fourier de una función real es generalmente compleja y es común utilizar coordenadas polares para expresar $F(u)$:

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\phi(u)}$$

donde:

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$$

Se llama la *magnitud* o el *espectro de Fourier* y

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

Se llama *ángulo de fase* o *fase del espectro*.

Transformada de Fourier discreta

- Los términos $R(u)$ e $I(u)$ son las partes *real* e *imaginaria* de $F(u)$ respectivamente. En términos de realce de imágenes nos interesan primordialmente las propiedades del *espectro de Fourier*. Otra cantidad que se utilizará después, es el *espectro de potencia*, definido como el cuadrado del *espectro de Fourier*:

$$\begin{aligned} P(u) &= |F(u)|^2 \\ &= R^2(u) + I^2(u) \end{aligned}$$

El término *densidad espectral* también se utiliza para referirse al *espectro de potencia*.

Transformada de Fourier discreta

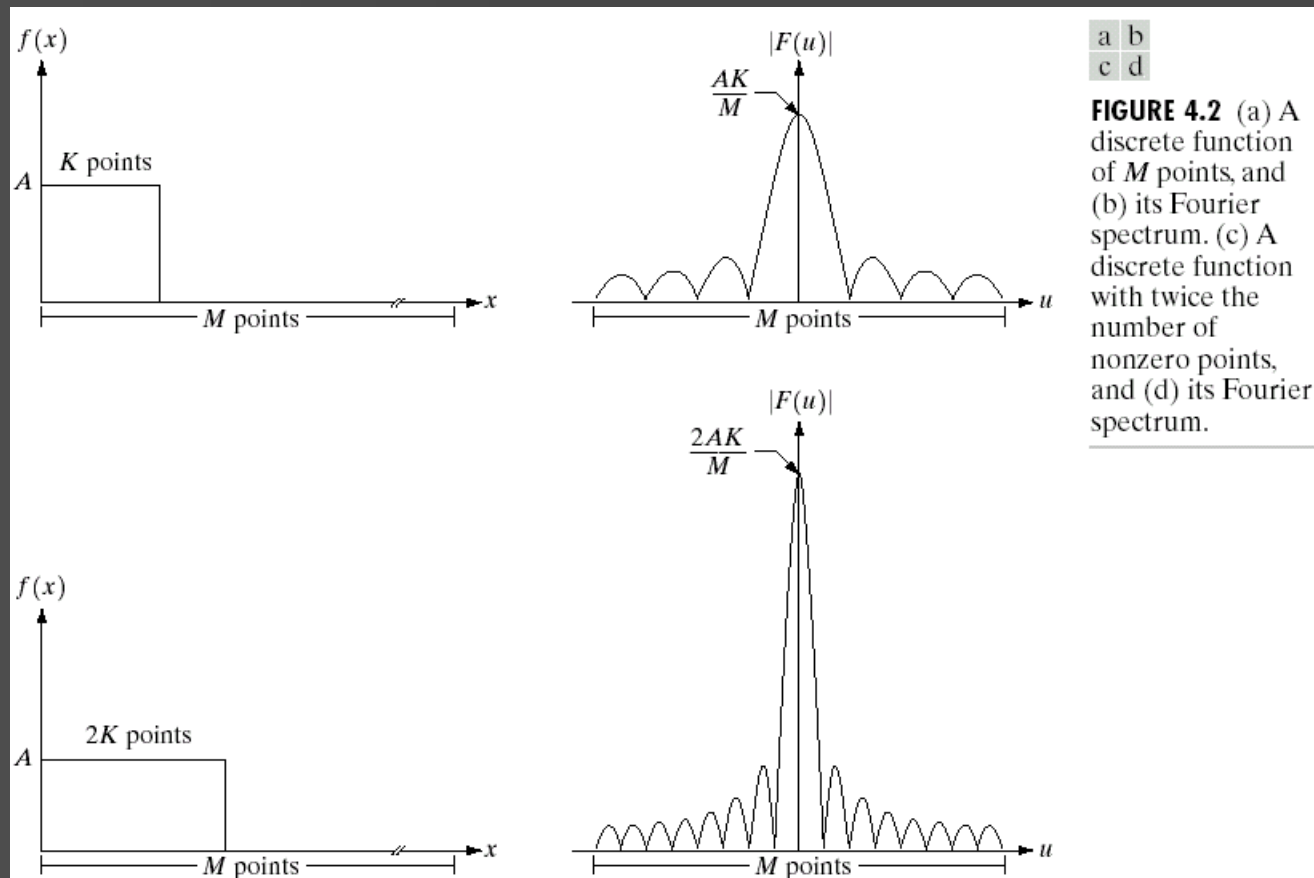


FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

1. $M=1024$, $A=1$ y $K=8$ puntos. El espectro está centrado en $u=0$.
2. Lo mismo, pero $K=16$ puntos. Note: a) la altura del espectro se dobla cuando el área bajo la curva en el dominio de x se dobla, y b) el número de ceros en el espectro en el mismo intervalo, se dobla si el tamaño de la función se dobla.

Transformada de Fourier discreta

■ Como mencionamos antes, en la transformada discreta de Fourier, la función $f(x)$ para $x=0,1,2,\dots,M-1$, representa M muestras de su contraparte continua. Es importante tener en cuenta que estas muestras no son necesariamente tomadas en valores enteros de x dentro del intervalo $[0, M-1]$. Están tomadas de manera igualmente espaciadas, pero en puntos arbitrarios. Esto se representa generalmente denotando x_0 como el primer punto de la secuencia. El primer valor de la secuencia muestreada será entonces $f(x_0)$. El siguiente estará a un intervalo de Δx de distancia, es decir $f(x_0 + \Delta x)$. El k -ésimo estará en $f(x_0 + k \Delta x)$ y el último en $f(x_0 + [M-1] \Delta x)$. Hemos usado la siguiente notación:

$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x)$$

Transformada de Fourier discreta

- La variable u (frecuencia) tiene una interpretación similar, pero la secuencia siempre empieza en la frecuencia verdadera cero. Por lo tanto, la secuencia para los valores de u es $0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, [M-1]\Delta u$. Por lo tanto, $F(u)$ se puede expresar como :

$$F(u) = F(u\Delta u)$$

para $u=0, 1, 2, \dots, M-1$. Este tipo de notación simplifica considerablemente las ecuaciones.

Dada la relación inversa entre una función y su transformación tenemos que Δx y Δu están inversamente relacionadas por la expresión:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}$$

Transformada de Fourier discreta bi-dimensional y su inversa

- La *transformada de Fourier discreta* de una función (imagen) $f(x,y)$ de tamaño $M \times N$ está dada por la ecuación:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

para $u=0,1,2,\dots,M-1$ y $v=0,1,2,\dots,N-1$

- De manera similar, dada $F(u,v)$, obtenemos $f(x,y)$ via la *transformada inversa discreta de Fourier*:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

para $x=0,1,2,\dots,M-1$ y $y=0,1,2,\dots,N-1$

Transformada de Fourier discreta bi-dimensional y su inversa

- Las ecuaciones anteriores comprenden al *par de transformadas discretas de Fourier bi-dimensionales* (DFT). Las variables u y v son las *variables de la transformada* o *variables de frecuencia*, mientras que x y y son las *variables espaciales* o *variables de la imagen*.
-

Transformada de Fourier discreta bi-dimensional y su inversa

- Se definen al *espectro de Fourier*, al *ángulo de fase* y al *espectro de potencia* de la siguiente manera, respectivamente:

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

$$\begin{aligned} P(u, v) &= |F(u, v)|^2 \\ &= R^2(u, v) + I^2(u, v) \end{aligned}$$

donde $R(u, v)$ e $I(u, v)$ son las partes *real* e *imaginaria* de $F(u, v)$ respectivamente.

Transformada de Fourier discreta bi-dimensional y su inversa

- Es de práctica común multiplicar la función de entrada ($f(x,y)$) por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular la transformada de Fourier. De las propiedades de los exponentes tenemos:

$$\mathfrak{F}[f(x,y)(-1)^{x+y}] = F(u - M/2, v - N/2)$$

donde $\mathfrak{F}[\bullet]$ denota la transformada de Fourier del argumento. Esta ecuación establece que el *origen* de la transformada de Fourier de $f(x,y)(-1)^{x+y}$ [que es $F(0,0)$] está localizada en $u=M-1$ y $v=N-1$. En otras palabras multiplicando $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ hace que $F(u,v)$ se recorra a las coordenadas de frecuencia $(M/2, N/2)$ que es el centro del area 2D ocupada por la DFT.

Transformada de Fourier discreta bi-dimensional y su inversa

- El valor de la transformada en $(u,v)=(0,0)$ es:

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

El cual es el *promedio* de $f(x,y)$. En otras palabras, si $f(x,y)$ es una imagen, el valor de *la transformada* de Fourier en el *origen* es igual al *promedio de los niveles de gris de la imagen*. Debido a que ambas frecuencias son cero en el origen, a $F(0,0)$ algunas veces se le llama *componente DC* del espectro. Esta terminología viene de la ingeniería electrónica y significa “*corriente directa*”.

Transformada de Fourier discreta bi-dimensional y su inversa

- Si $f(x,y)$ es *real*, su transformada de Fourier es igual a su *conjugado simétrico*, esto es:

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

donde “ $*$ ” indica la operación de conjugado estándar de un número complejo. De lo anterior sigue:

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

lo que indica que el *espectro de la transformada de Fourier es simétrico*. El conjugado simétrico y la propiedad de centrado discutidas previamente simplifican la *representación de filtros circulares simétricos en el dominio de la frecuencia* que veremos más adelante.

Transformada de Fourier discreta bi-dimensional y su inversa

- Finalmente, de manera similar al caso de 1D, tenemos la siguiente relación entre las muestras de los dominios del espacio y la frecuencia:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}$$

y

$$\Delta v = \frac{1}{M\Delta y}$$

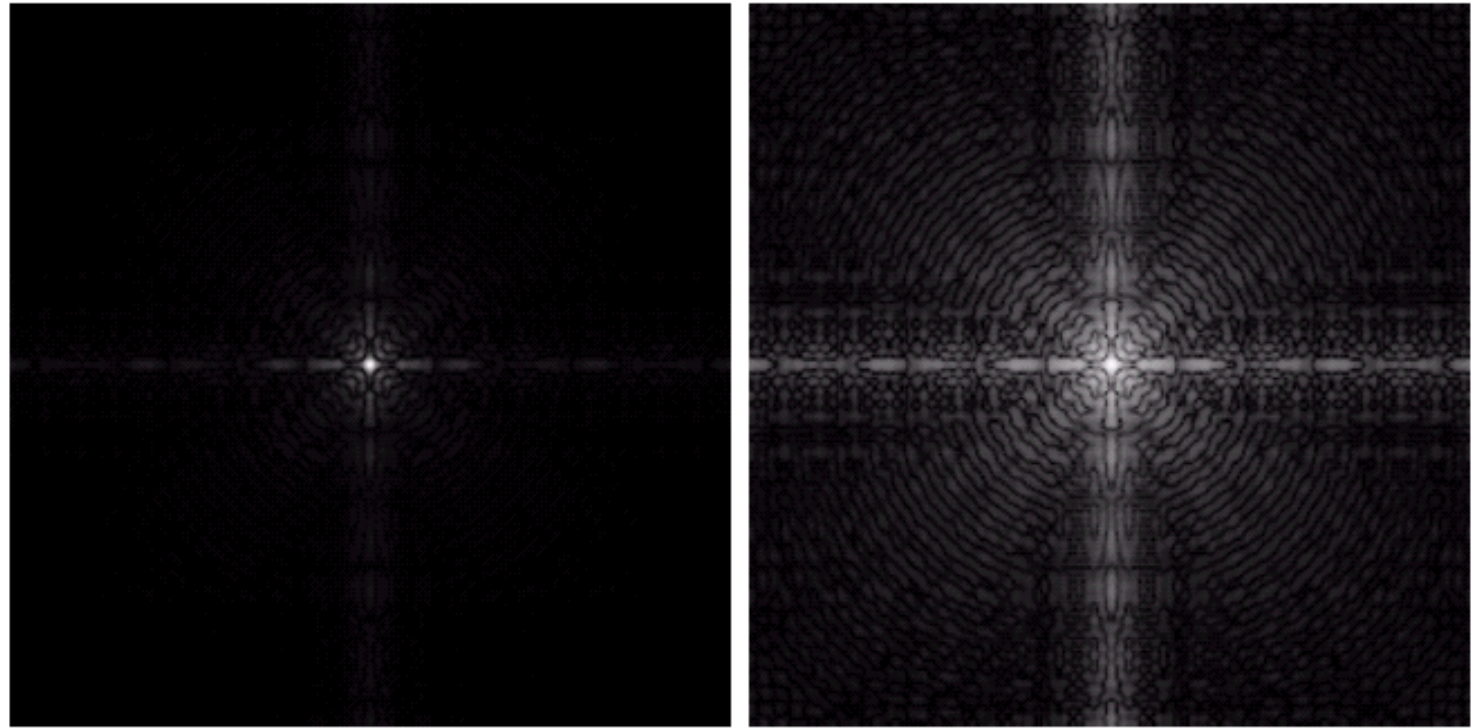
Para recordar: Transformaciones logarítmicas

a b

FIGURE 3.5

(a) Fourier spectrum.

(b) Result of applying the log transformation given in Eq. (3.2-2) with $c = 1$.



$s = c \log(1+r)$:

El espectro de Fourier tiene valores de 0 a 10^6 . Cuando estos valores se escalan linealmente a un desplegado de 8 bits los valores altos dominarán a los bajos (igualmente importantes).

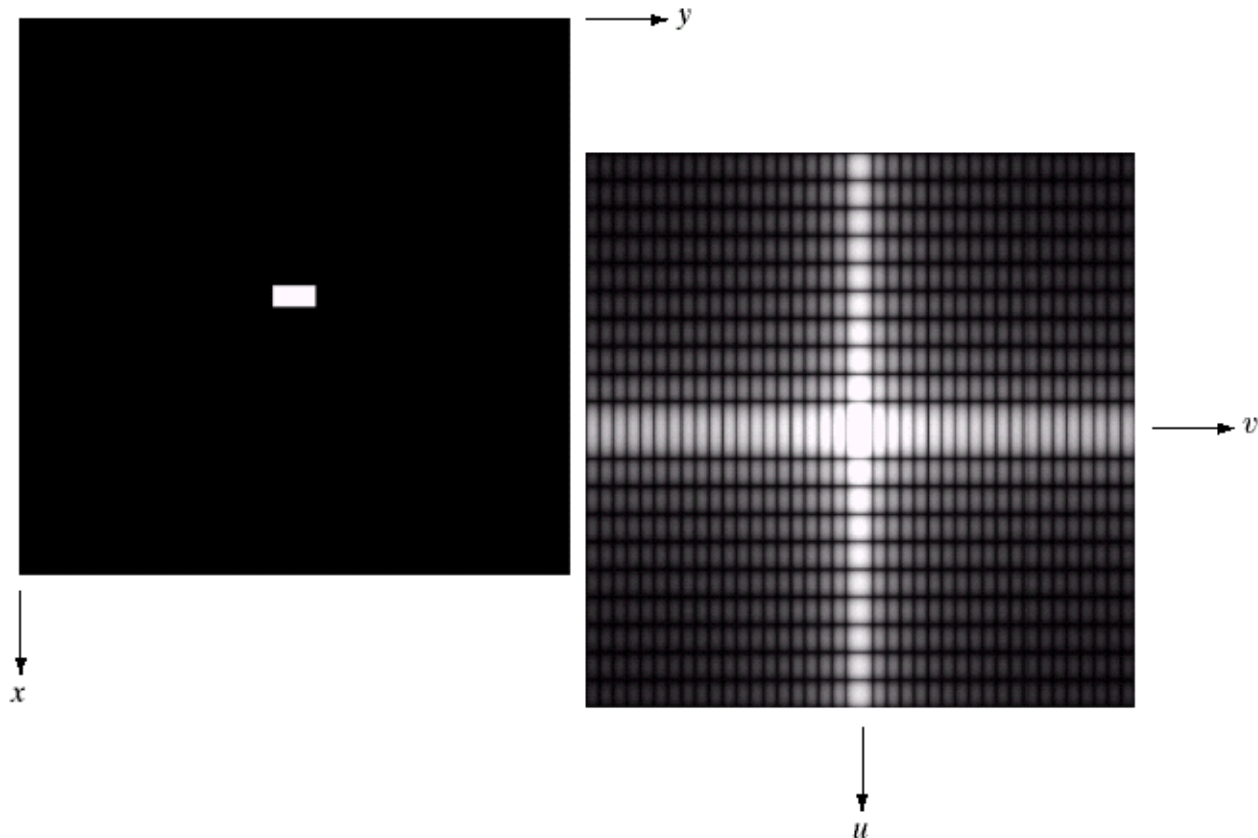
Transformada de Fourier

a b

FIGURE 4.3

(a) Image of a 20×40 white rectangle on a black background of size 512×512 pixels.

(b) Centered Fourier spectrum shown after application of the log transformation given in Eq. (3.2-2). Compare with Fig. 4.2.



Esta imagen fué multiplicada por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular la TF para poder centrar el espectro (note los ejes coordenados en cada caso). En el espectro, la separación de los ceros del espectro en la dirección u son exactamente dos veces la separación de los ceros en dirección v . Esto corresponde de manera inversa a la relación 1 a 2 del rectángulo de la imagen de entrada. Finalmente, el espectro fué procesado con una transformación logarítmica para el despliegado (ver notas capítulo 3).