

4. Realce de la imagen en el dominio de la frecuencia

- a) Antecedentes.
 - b) Introducción a la transformada de Fourier y al dominio de la frecuencia.
 - c) Filtros de suavizamiento en el dominio de la frecuencia.
 - d) Filtros de realce en el dominio de la frecuencia.
 - e) Notas para la implementación.
-

Filtros de suavizamiento en el dominio de la frecuencia

- Como se ha indicado con anterioridad los *bordes* y otras *transiciones abruptas* en los niveles de gris (como el ruido) de una imagen contribuyen significativamente a los componentes de *altas frecuencias* de su transformada de Fourier. Por lo tanto el *suavizamiento* (emborronamiento) en el dominio de la frecuencia se lleva a cabo *eliminando* los componentes de *altas frecuencias* de la transformada dada. El modelo básico es:

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

$F(u, v)$ es la transformada de Fourier de la imagen, y $H(u, v)$ es el filtro *paso-bajas*.

Filtro paso-bajas ideal

- El *filtro paso-bajas* más simple es aquel que “*corta*” todas aquellas componentes de *alta frecuencia* de la transformada de Fourier que están por arriba de una distancia D_0 del origen (centro) de la transformada. A este tipo de filtro se le llama *filtro ideal paso-bajas* y está definido por la siguiente función de transferencia:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

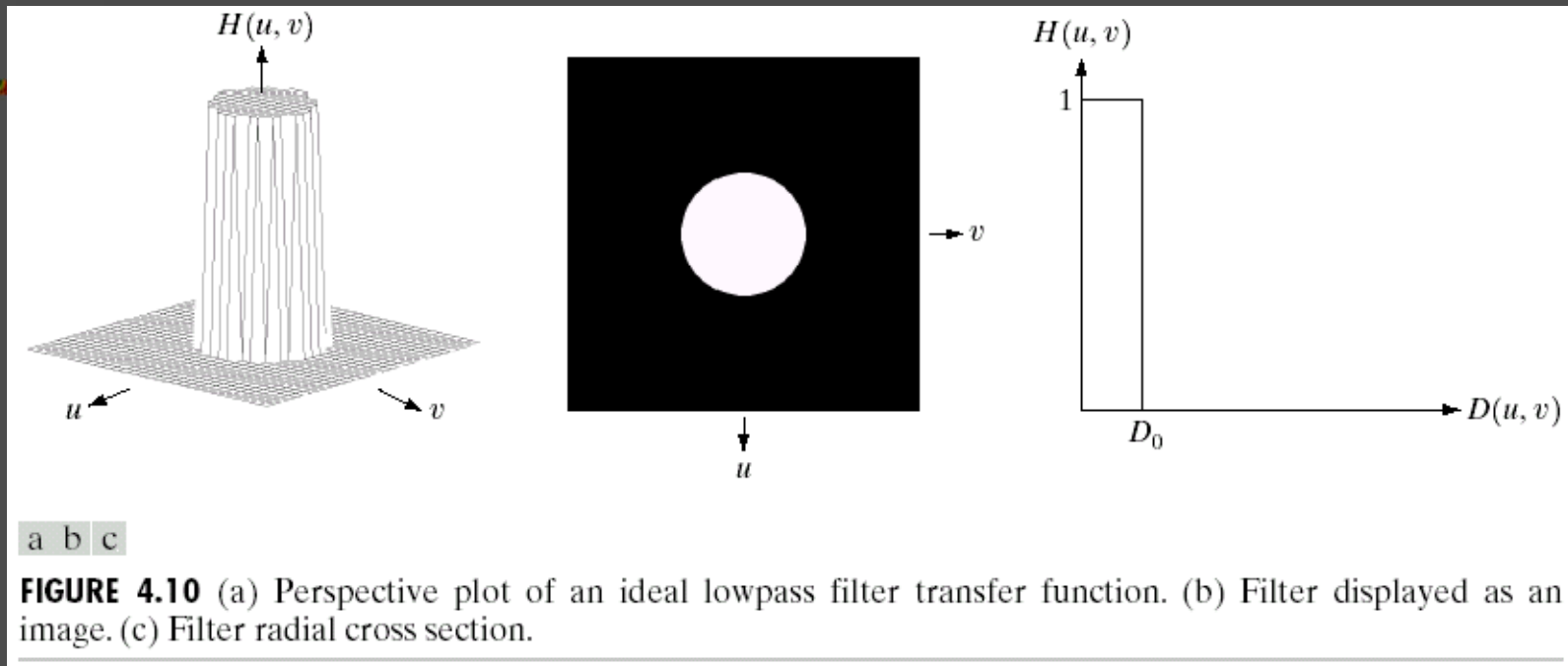
Donde D_0 especifica una cantidad no negativa, y $D(u, v)$ es la distancia del punto (u, v) al centro de la transformada.

Filtro paso-bajas ideal

- Si la imagen en cuestión es de tamaño $M \times N$, sabemos que su transformada es del mismo tamaño, y su centro está en $(u,v)=(M/2,N/2)$ debido a que la transformada ha sido centrada. En este caso la distancia de cualquier punto (u,v) al centro (origen) de la transformada de Fourier está dada por:

$$D(u,v) = [(u - M / 2)^2 + (v - N / 2)^2]^{1/2}$$

Filtro paso-bajas ideal



- El filtro ideal indica que todas las frecuencia dentro del círculo de radio D_0 pasan sin atenuación, mientras todas las frecuencias fuera del círculo se eliminan por completo. Como estamos considerando filtros simétricos y circulares, este filtro se define con la función de transferencia de (c) rotada 360° respecto al origen.

Filtro paso-bajas ideal

- En un filtro ideal al punto de transición entre $H(u,v)=1$ y $H(u,v)=0$ se le llama *frecuencia de corte* (D_0). Este tipo de cortes no pueden llevarse a cabo en la vida real con componentes electrónicos.
 - Una manera de establecer la *localización de la frecuencia de corte* es establecer círculos que comprendan cantidades específicas de *potencia total* de la imagen P_T .
-

Filtro paso-bajas ideal

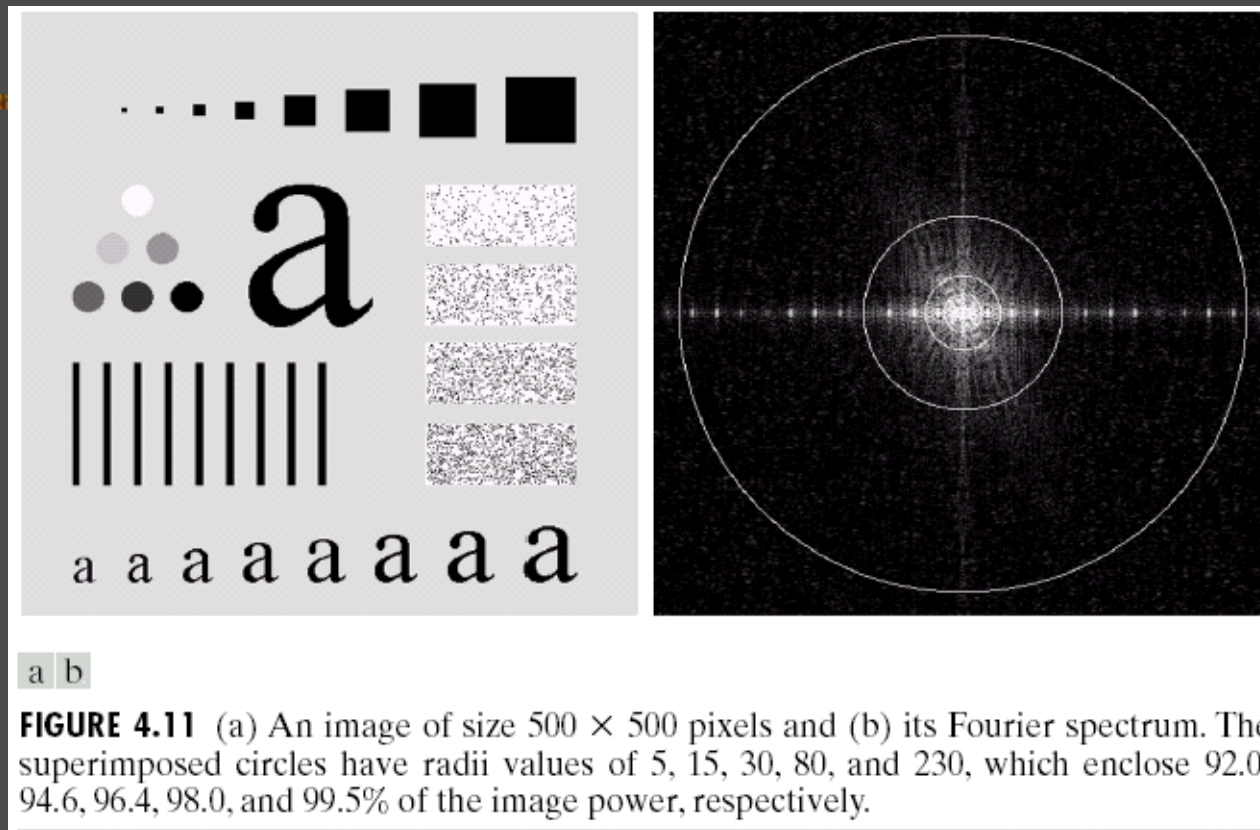
- Esta cantidad se obtiene sumando los componentes del *espectro de potencia* en cada punto (u,v) para $u=0, 1, 2, \dots, M-1$ y $v=0, 1, 2, \dots, N-1$, esto es:

$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)$$

- Si la transformada está centrada, un círculo de radio r con el origen en el centro de la transformada, éste encierra un *porcentaje* α del espectro de potencia, donde:

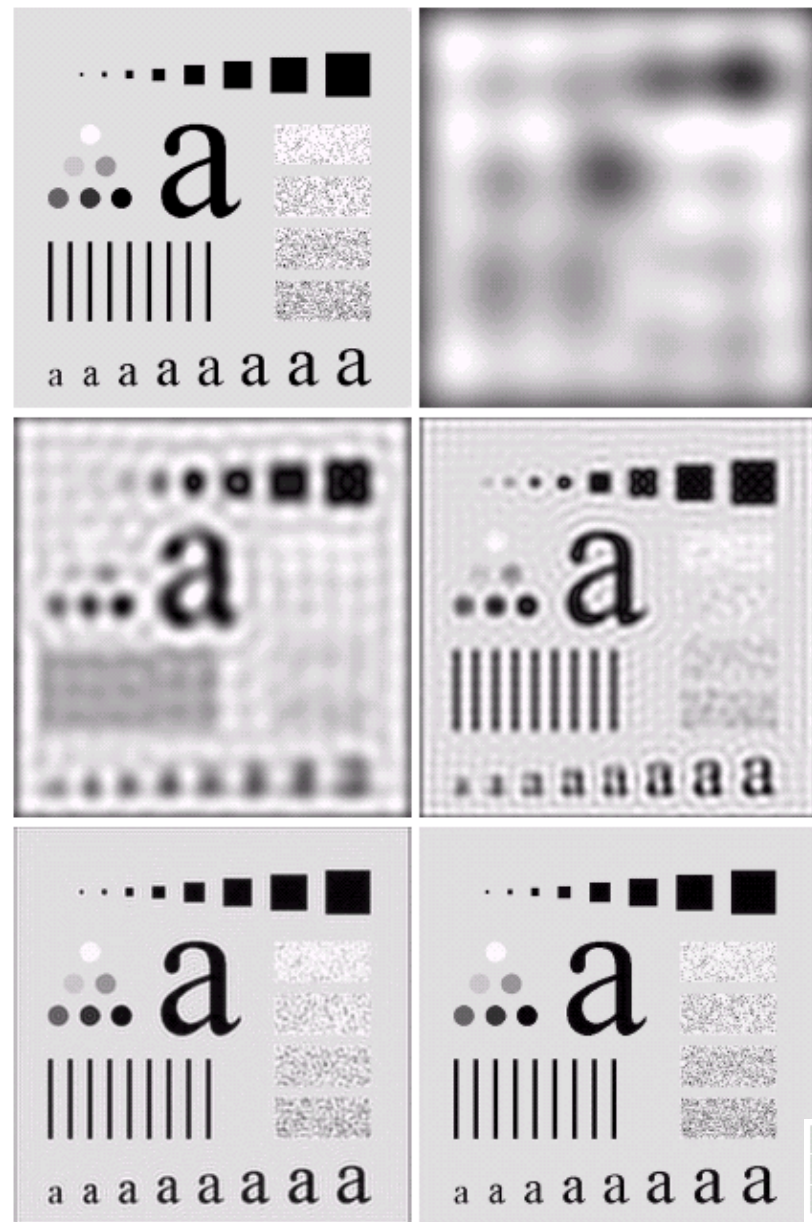
$$\alpha = 100 \left[\sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \right]$$

Filtro paso-bajas ideal



- El espectro de Fourier de esta imagen muestra círculos superimpuestos que corresponden a *radios* de: 5, 15, 30, 80 y 230 píxeles. Estos círculos encierran un porcentaje α de 92.0, 94.5, 96.4, 98.0 y 99.5%, respectivamente.

Filtro paso-bajas ideal



Al aplicar los círculos definidos en la figura anterior:

- a) Imagen original.
- b) Demasiado borrosa, esto indica que la mayoría de la información de la imagen se encuentra contenida en el 8% del espectro de potencia.
- c) Del (c) al (e): Se ve un efecto de anillo que se vuelve más fino en textura conforme se eliminan frecuencias altas. Este efecto anillo es típico de filtros ideales.
- f) Esta imagen es muy parecida a la original, poca info. contenida 0.5%

a b
c d
e f

FIGURE 4.12 (a) Original image. (b)–(f) Results of ideal lowpass filtering with cutoff frequencies set at radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). The power removed by these filters was 8, 5.4, 3.6, 2, and 0.5% of the total, respectively.

Filtro paso-bajas ideal

- El emborronamiento y el efecto de anillo del filtro ideal se pueden explicar con referencia al *teorema de convolución*. La transformada de Fourier de la imagen original $f(x,y)$ y la imagen emborronada $g(x,y)$ se relacionan en el espacio de la frecuencia con la ecuación:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

- El *teorema de convolución* nos dice que el proceso correspondiente en el dominio espacial es:

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

donde $h(x,y)$ es la transformada de Fourier inversa de $H(u,v)$

Filtro paso-bajas ideal

- La clave para entender el emborronamiento como un proceso de convolución en el dominio espacial recae en la naturaleza de $h(x,y)$. Por ejemplo, el filtro ideal de radio 5 que causó tanto emborronamiento visto en el ejemplo anterior se muestra en la siguiente figura:

Filtro paso-bajas ideal

- a) Filtro $H(u,v)$
- b) Mismo filtro en el espacio de la imagen $h(x,y)$. El componente central es el responsable del filtrado, los componentes radiales son responsables del efecto de anillo del filtro ideal.
- c) Imagen de 5 puntos en el dominio espacial (son como funciones impulso).
- d) Convolución de b) con c) (dominio espacial) tiene el efecto como si copiáramos 5 veces el filtro $h(x,y)$. Esto muestra el efecto del emborronamiento de los 5 puntos usando $h(x,y)$. También aquí se nota el efecto anillo, con interferencia entre ellos.

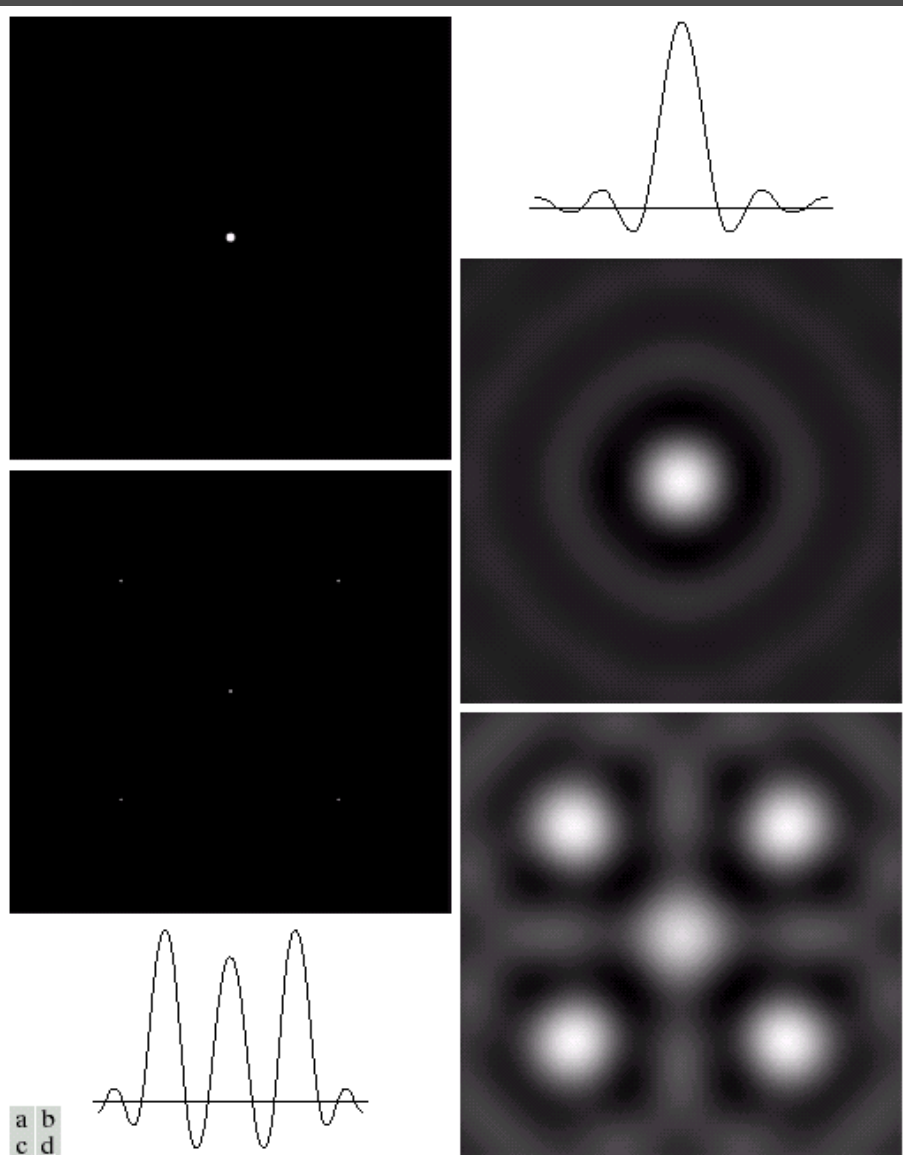


FIGURE 4.13 (a) A frequency-domain ILPF of radius 5. (b) Corresponding spatial filter (note the ringing). (c) Five impulses in the spatial domain, simulating the values of five pixels. (d) Convolution of (b) and (c) in the spatial domain.

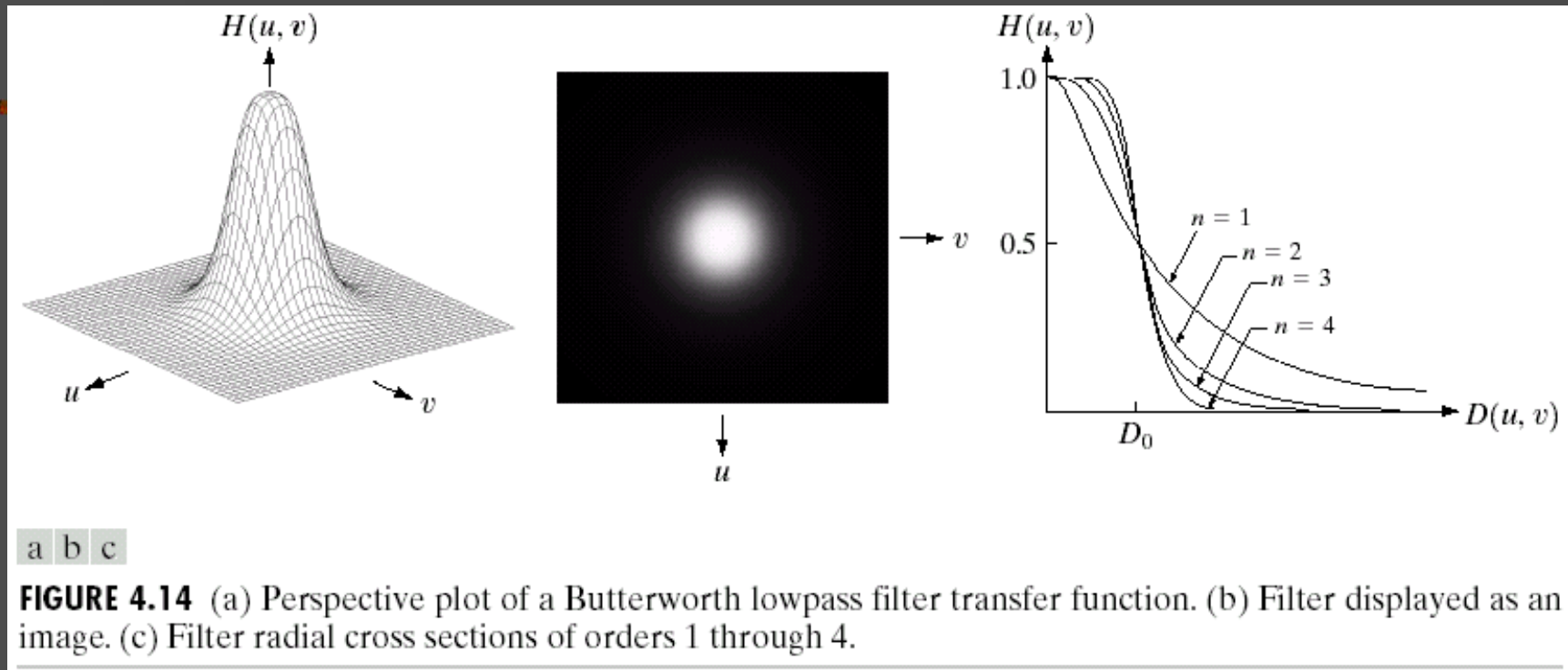
Filtro paso-bajas Butterworth

- La función de transferencia de un *filtro paso-bajas Butterworth* de orden n , y con una *frecuencia de corte* a una distancia D_0 del origen, está definido como:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

donde $D(u, v)$ es la función de distancia definida con anterioridad.

Filtro paso-bajas Butterworth



- A diferencia del *filtro ideal*, el *filtro Butterworth* no tienen una discontinuidad abrupta que establezca una *frecuencia de corte* clara entre frecuencias que pasan y frecuencias que se filtran. Para filtros con funciones de transferencia *suaves* se acostumbra poner la *frecuencia de corte* en puntos donde $H(u, v)$ está por debajo de cierta fracción de su valor máximo. En el caso de la ecuación anterior $H(u, v) = 0.5$ (50% por debajo de su valor máximo 1) cuando $D(u, v) = D_0$.

Filtro paso-bajas Butterworth

En este ejemplo se aplica un filtro Butterworth con $n=2$ y D_0 igual a un radio de 5, como el mostrado en la figura del ejemplo anterior con esta misma imagen. A diferencia de ese ejemplo, con el filtro Butterworth tenemos una transición de emborronamiento más suave en función del *incremento* de la *frecuencia de corte*. Además el efecto de anillo no es visible en ninguna de las imágenes procesadas, este hecho es atribuido a esta transición suave entre frecuencias bajas y altas.



Filtro paso-bajas Butterworth

■ Un filtro Butterworth de orden 1 no tiene anillos. Los anillos no son generalmente perceptibles en filtros de orden 2, pero pueden convertirse en factores significativos en filtros de ordenes mayores. La siguiente figura muestra un ejemplo de filtros Butterworth en el dominio espacial con ordenes de 1, 2, 5 y 20 utilizando una frecuencia de corte de 5 pixeles.

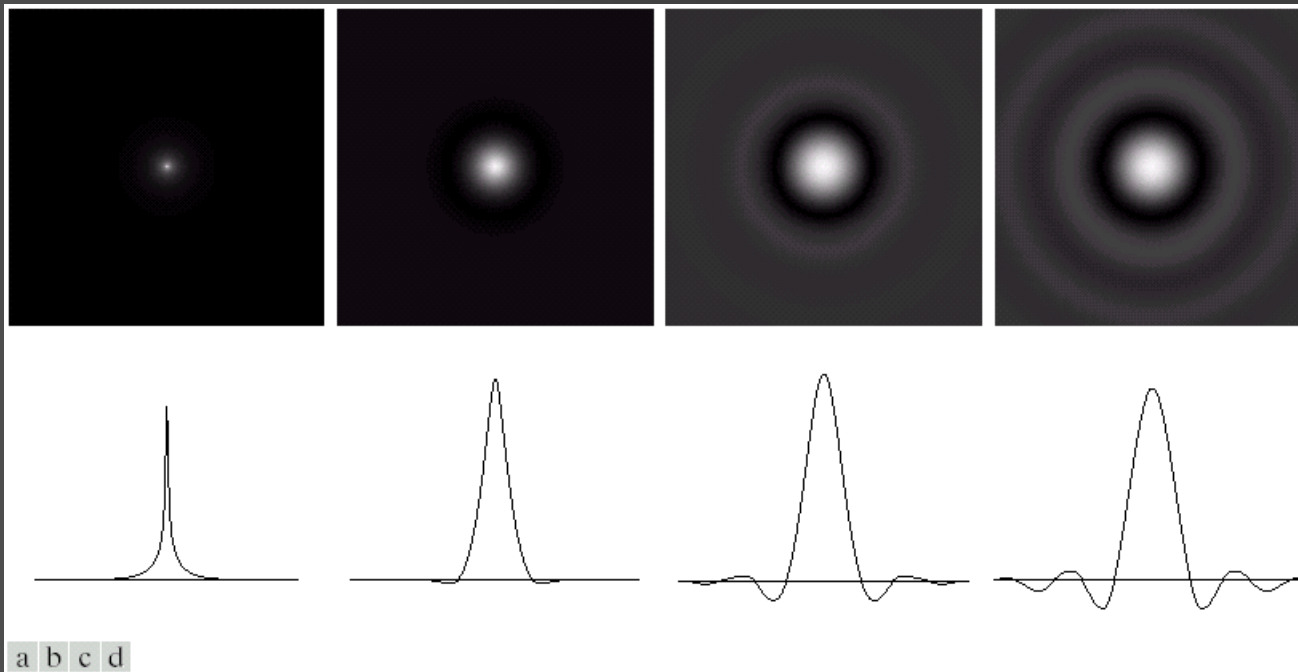


FIGURE 4.16 (a)–(d) Spatial representation of BLPFs of order 1, 2, 5, and 20, and corresponding gray-level profiles through the center of the filters (all filters have a cutoff frequency of 5). Note that ringing increases as a function of filter order.

Un filtro Butterworth de orden 2 es generalmente un buen compromiso entre un filtrado paso-bajos efectivo y una característica de anillos aceptable.

4. Realce de la imagen en el dominio de la frecuencia

- a) Antecedentes.
 - b) Introducción a la transformada de Fourier y al dominio de la frecuencia.
 - c) Filtros de suavizamiento en el dominio de la frecuencia.
 - d) **Filtros de realce en el dominio de la frecuencia.**
 - e) Notas para la implementación.
-

Filtros de realce en el dominio de la frecuencia

- A diferencia de los filtros *paso-bajos* aplicados en el dominio de la frecuencia vistos en la sección anterior para el emborronamiento de la imagen, el *realce de la imagen* (proceso inverso al emborronamiento) puede llevarse a cabo en el dominio de la frecuencia utilizando *friltros paso-altas*, los cuales *atenúan* los componentes de *frecuencias bajas* sin alterar la información de las frecuencias altas de la transformada de Fourier.
-

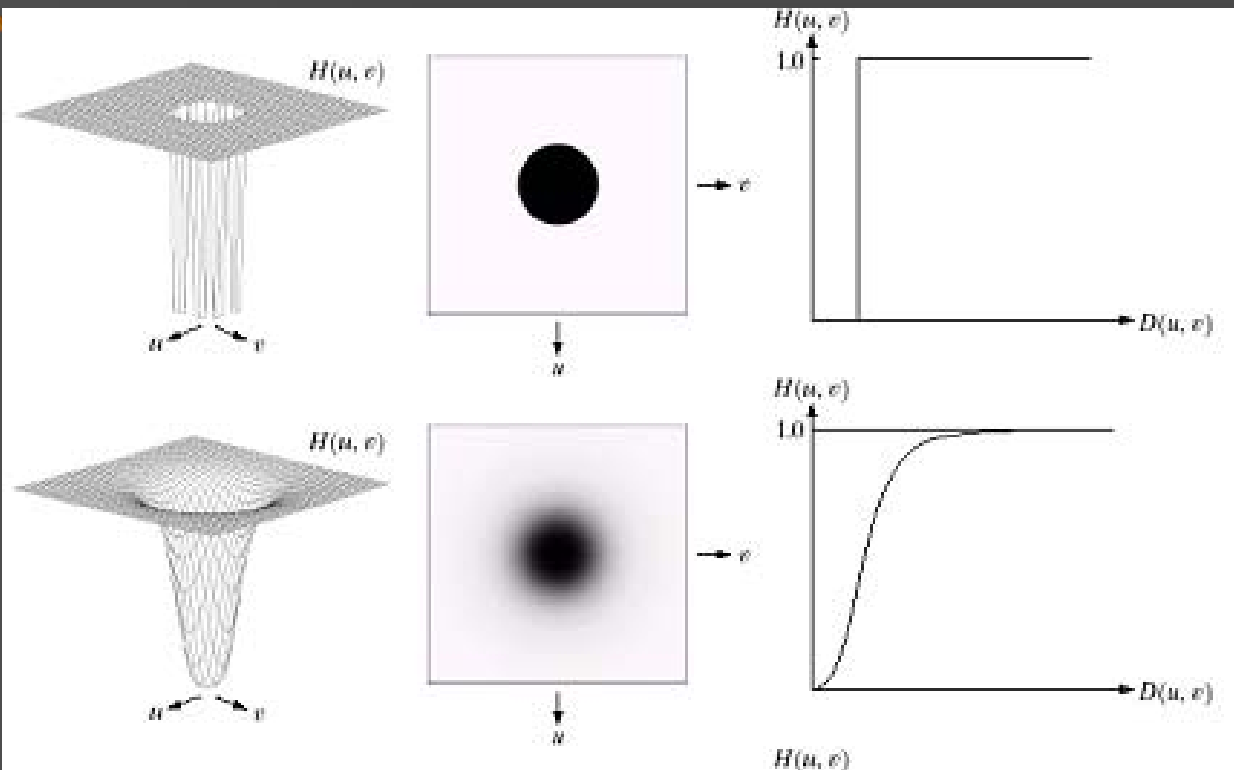
Filtros de realce en el dominio de la frecuencia

- Debido a que la función de los filtros de realce realizan el proceso inverso a los de emborronamiento, la *función de transferencia de los filtros paso-altas* se obtiene de la relación:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

donde $H_{lp}(u, v)$ es la función de transferencia correspondiente al filtro *paso-bajas*. Esto es, mientras un *filtro paso-bajas* atenúa frecuencias, el *filtro paso-altas* las deja pasar y viceversa.

Filtros de realce en el dominio de la frecuencia



a b c
d e f
g h i

FIGURE 4.22 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

Representación de los *filtros paso-altas ideal* (arriba) y *Butterworth* (abajo).

El filtro Butterworth representa una transición de frecuencias mucho más suave que el filtro ideal.

Filtros de realce en el dominio de la frecuencia

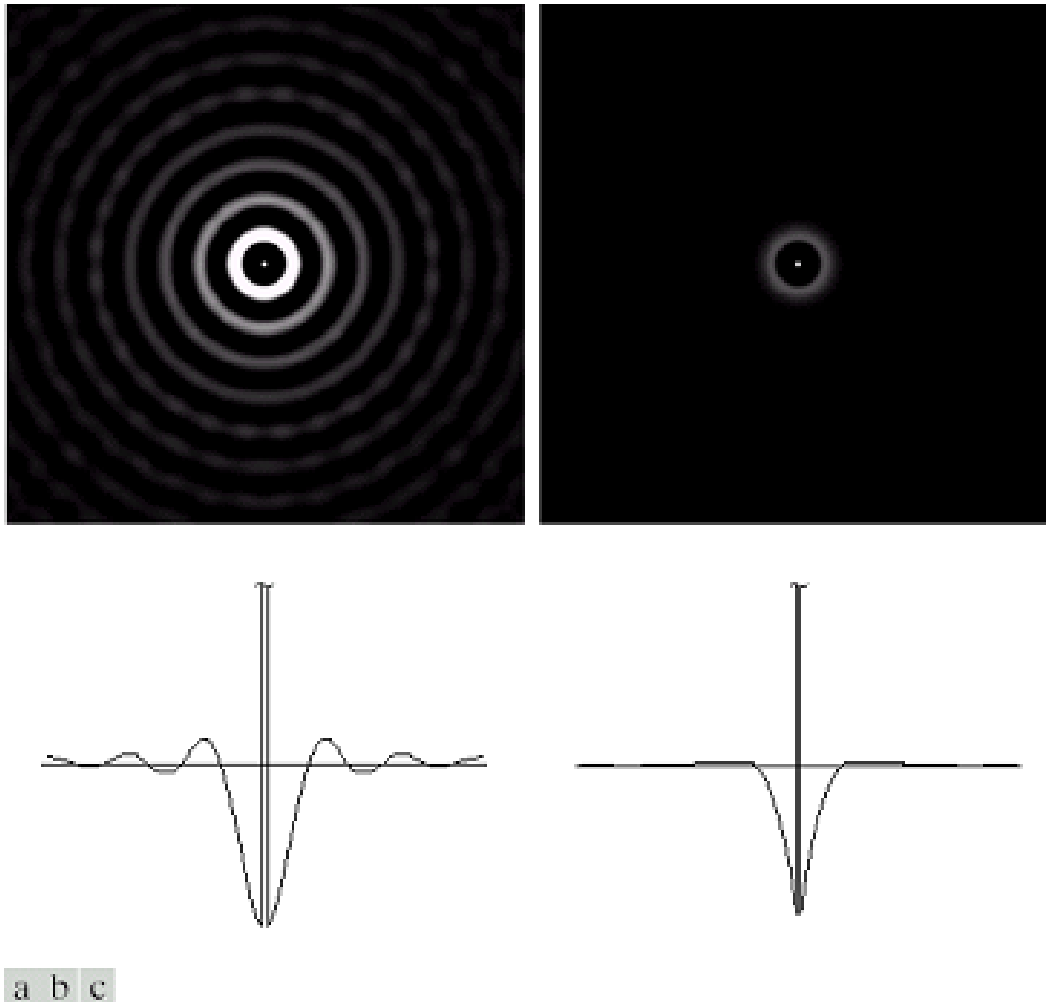


FIGURE 4.23 Spatial representations of typical (a) ideal, (b) Butterworth, domain highpass filters, and corresponding gray-level profiles.

Aquí se ilustra cómo se ven los *filtros paso-altas ideal* y *Butterworth* en el *dominio espacial*.

Recuerde que la representación espacial de un filtro en el dominio de la frecuencia se obtiene 1) multiplicando $H(u,v)$ por $(-1)^{u+v}$, 2) calculando la TDF *inversa* y 3) multiplicando la parte real de este resultado por $(-1)^{x+y}$.

Filtro ideal paso-altas

- Un filtro en 2-D *ideal paso-altas* se define como:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

donde D_0 es la distancia de corte medida desde el origen de la transformada, y $D(u, v)$ está dada por la misma métrica definida anteriormente. Este filtro es el *opuesto* del *filtro ideal paso-bajas* en el sentido de que pone en *cero* todas las *frecuencias dentro del círculo* de radio D_0 y *deja pasar* todas las *frecuencias que están fuera del círculo*. Como en el caso anterior, este filtro tampoco es realizable de manera física.

Filtro ideal paso-altas

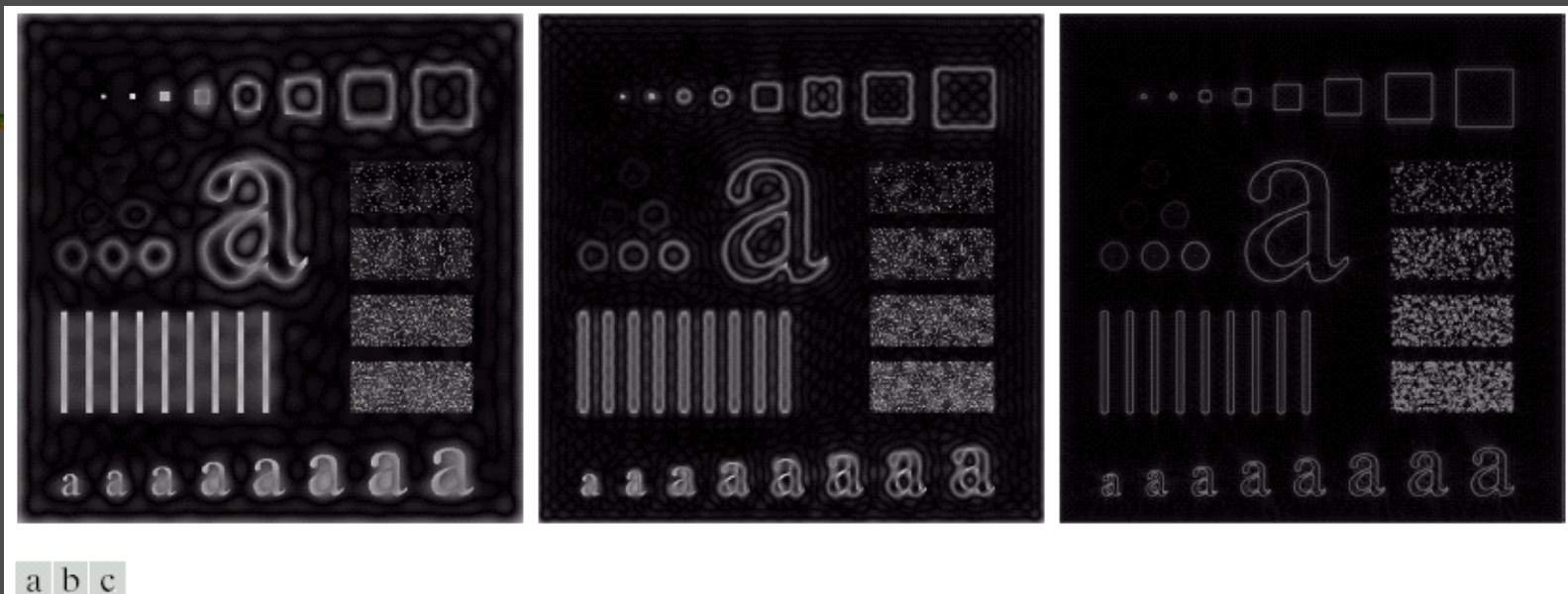


FIGURE 4.24 Results of ideal highpass filtering the image in Fig. 4.11(a) with $D_0 = 15$, 30, and 80, respectively. Problems with ringing are quite evident in (a) and (b).

- Ejemplo de aplicación del filtro *ideal paso-altas* para $D_0 = 15$, 30 y 80 píxeles. En a) se ve el efecto de anillo tan severo que distorsionan y engruesan los bordes de los objetos. Los bordes en los círculos de arriba no se ven bien porque son de intensidad muy cercana al fondo. En b) mejora la situación aunque la distorsión de los bordes sigue siendo evidente. Finalmente c) está más cercano a cómo deberían verse los filtros paso-altas. Los bordes están más limpios, menos distorsionados, y los pequeños objetos se han filtrado adecuadamente.

Filtro pasa-altas Butterworth

- La función de transferencia del *filtro paso-altas Butterworth* de orden n y con frecuencia de corte localizada en D_0 desde el origen está dado por:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

donde $D(u, v)$ es la métrica definida con anterioridad. Para el caso de *filtros paso-altas Butterworth* podemos esperar que se comporten de manera más suave que los filtros ideales. (refiérase a 4 páginas anteriores a ésta para ver la gráfica de esta función).

Filtro pasa-altas Butterworth

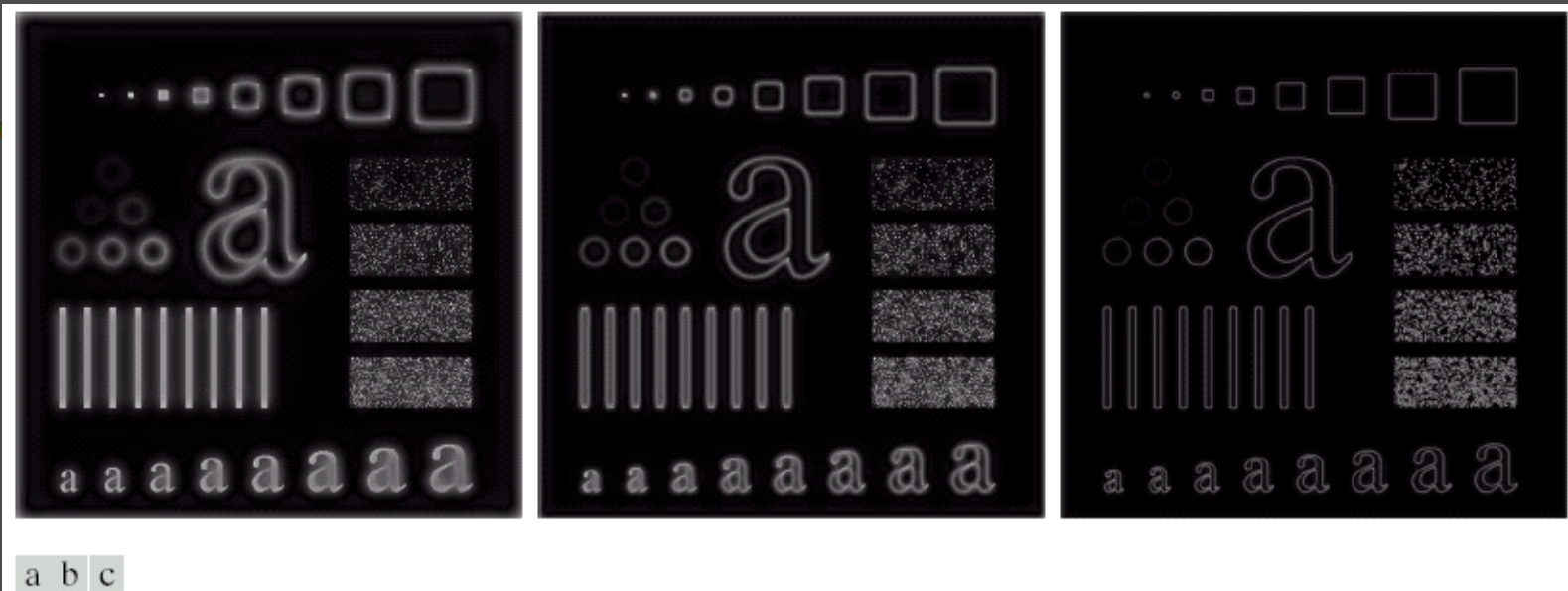


FIGURE 4.25 Results of highpass filtering the image in Fig. 4.11(a) using a BHPF of order 2 with $D_0 = 15$, 30, and 80, respectively. These results are much smoother than those obtained with an ILPF.

- Ejemplo de aplicación del filtro *Butterworth paso-altas* de orden $n=2$, para $D_0 = 15$, 30 y 80 píxeles. Los bordes están menos distorsionados hasta para las frecuencias de corte menores. Como los centros de ambos filtros (ideal y Butterworth, refiérase a 4 páginas anterior a ésta) son casi iguales, esperamos que su desempeño en filtrar objetos pequeños sea comparable. La transición de valores de frecuencias altas es mucho más suave que en el filtro ideal.