

Metodo de Punto Fijo

Definición

El metodo de punto fijo es un procedimiento numerico iterativo que permite encontrar una raíz de una ecuación $f(x)=0$ transformándola en una forma equivalente $x=g(x)$, donde la solución buscada es un punto fijo de la función g , es decir, un valor de x tal que $g(x)=x$

Formula

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Antecedentes del Metodo

- Este metodo tiene su origen en el análisis matematico y en los estudios sobre funciones continuas y convergencia
- Esta relacionado con el Teorema del punto fijo de Banach, que establece condiciones bajo las cuales una funcion tiene un punto fijo y el metodo converge

Relacion

Metodo de Newton-Raphson: Tambien puede ser visto como un tipo de punto fijo (con una transformacion especifica)

Metodo iteracion funcional: Con otros algoritmos que requieren resolver evaluaciones no lineales

Metodo de biseccion: se puede computar pero no necesita intervalos con cambio de signo, pero requiere una transformación adecuada de la funcion.

Aplicacion

Sistema de control: en la resolución de ecuacion para mantener el equilibrio o respuesta de sistemas dinamicos.

Análisis numerico computacional: utilizando en algoritmos de iteración cuando las derivadas no están disponibles o son costosas de calcular

Algoritmo

Despejar x

Funcion en g evaluada en $x_n = g(x_n)$

Aproximacion actual al punto fijo $= x_n$

Aproximación siguiente al punto fijo $= x_{n+1}$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{-x} - x \\ x_0 = 0 \\ \text{error} = 1\% \end{array} \right\} \text{excel}$$

Ejemplo

Paso 1

$$f(x) = 0$$

$$2e^{x^2} - 5x = 0$$

$$x = \frac{2e^{x^2}}{5}$$

$$x = \underbrace{0.4e^{x^2}}_{g(x)}$$

$$x_{n+1} = 0.4$$

Paso 2

$n=0$

$$x_{n+1} = g(x)$$

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_1 = 0.4e^{(0)^2}$$

$$x_1 = 0.4$$

Paso 3

$$\text{error} = \left| \frac{x_{\text{actual}} - x_{\text{anterior}}}{x_{\text{actual}}} \right| \cdot 100$$

$$= \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| \cdot 100 = \left| \frac{0.4 - 0}{0.4} \right| \cdot 100$$

Iteracion 6

$n=5$

$$x_6 = (0.4)e^{(0.5203)^2}$$

$$x_6 = 0.5243$$

$$\left| \frac{0.5243 - 0.5203}{0.5243} \right| \cdot 100$$

$$\text{error} = 0.77\%$$

Iteracion 2 $n=1$

Paso 2 $x_2 = g(x_1)$

$$x_2 = 0.4e^{(0.4)^2}$$

$$x_2 = 0.4694$$

Paso 3

$$\text{error} = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| \cdot 100$$

$$= \left| \frac{0.4694 - 0.4}{0.4694} \right| \cdot 100$$

$$= 14.78\%$$

Iteracion 7

$n=6$

$$x = (0.4)e^{(0.5243)^2}$$

$$x_7 = 0.5265$$

$$\left| \frac{0.5265 - 0.5243}{0.5265} \right| \cdot 100$$

$$\text{error} = 0.417\%$$

Iteracion 3

Paso 3

$n=2$ Paso 2

$$x_3 = g(x_2)$$

$$x_3 = 0.4e^{(0.4694)^2}$$

$$x_3 = 0.4985$$

$$\text{error} = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| \cdot 100$$

$$= \left| \frac{0.4985 - 0.4694}{0.4985} \right| \cdot 100$$

$$= 5.83\%$$

Comprobacion $f(x) = 0$

$$x_0 = 0.5243$$

$$f(x_0) = 0.5243$$

$$f(x_0) = 2e^{(0.5243)^2} - 5(0.5243)$$

$$= 0.011 \quad (\text{con un error del } 0.77\%)$$

$$f(x_7) = 2e^{(0.5265)^2} - 5(0.5265)$$

$$= 0.0063$$

$$x_5 = 0.5203$$

$$f(x_5) = 2e^{(0.5203)^2} - 5(0.5203)$$

$$= 0.02$$

Iteracion 4

$n=3$

$$\left| \frac{0.5128 - 0.4985}{0.5128} \right| \cdot 100$$

$$2.78\%$$

$$x_4 = g(x_3)$$

$$x_4 = 0.4e^{(0.4985)^2}$$

$$x_4 = 0.5128$$

Iteracion 5

$n=4$

$$x_0 = 0.4e^{(0.5128)^2}$$

$$\left| \frac{0.5203 - 0.5128}{0.5203} \right| \cdot 100$$

$$x_5 = 0.5203$$

$$\text{Error } 1.44\%$$

$n \quad x_n \quad x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{error}$

$$0 \quad 0 \quad 0.4 \quad 100\%$$

$$1 \quad 0.4 \quad 0.4694 \quad 14.78\%$$

$$2 \quad 0.4694 \quad 0.4985 \quad 5.83\%$$

$$3 \quad 0.4985 \quad 0.5128 \quad 2.78\%$$

4