Parcial número 3

Metodo de rung kutta

Metodos numericos

U-ERRE

Universidad Regiomontana

Nombre de alumnos:

Rodrigo Jimenez Torres / 736454

Monterrey, Nuevo León. México a de 01 agosto del 2025

Definicion del metodo

El método de Runge-Kutta es una familia de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos métodos calculan una aproximación de la solución evaluando la derivada en varios puntos dentro de cada intervalo y combinando esas evaluaciones para obtener una mejor precisión que métodos más simples, como el de Euler

El más conocido de ellos es el de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4), que ofrece un buen equilibrio entre exactitud y costo computacional

Antecedentes del metodo

Fue desarrollado por los matematicos Carl Runge y Wilhelm kutta

Surge como una mejora del método de Euler y del método de Euler modificado, los cuales son más sencillos pero menos precisos

También se relaciona con los métodos de Taylor, ya que puede considerarse una aproximación a la expansión en serie de Taylor de una solución, sin necesidad de calcular derivadas de orden superior.

Formula

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Algoritmo

Definir la EDO y las condiciones iniciales x_0, y_0 y el paso h

Calcular k_1, k_2, k_3, k_4 usando las fórmulas anteriores.

Calcular y_{n+1} con la combinación ponderada de los k_i

Actualizar $x_{n+1} = x_n + h$

Repetir los pasos hasta alcanzar el valor deseado de x.

Aplicación en la vida cotidiana

Modelar el crecimiento de poblaciones.

Simular el movimiento de plantas o satélites en astronomia

Estudiar sistemas eléctricos y circuitos

Simular trayectoria de proyectiles o vehículos

En economía, para modelar cambios en precios o poblaciones económicas.

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2})$

$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2})$

$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

Ejemplo

$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

$x_0 = 0$

$x_1 = 1$

$x_n = 1$

$h = 0.1$

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
0	0	1	0	-0.1	-0.099	-0.1962	0.99010
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

$k_1 = -2(0)(1)^2$

$k_1 = 0$

$k_2 = -2[0 + \frac{0.1}{2}][0 + \frac{(0.1)(0)^2}{2}]$

$k_2 = -0.1$

$k_3 = -2[0 + \frac{0.1}{2}][1 + \frac{(0.1)(-0.1)^2}{2}]$

$k_3 = -0.99$

$k_4 = -2[0 + 0.1][1 + (0.1)(-0.099)]^2$

$k_4 = -0.1962$

$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6}[0 + 2(-0.1) + 2(-0.099) + (-0.1962)]$

$y_1 = 0.9910$

$n = 1$

$k_1 = -2[0.1][0.99010]^2$

$k_1 = -0.1960$

$k_2 = -2[0.1 + \frac{0.1}{2}][0.99010 + \frac{(0.1)(-0.1960)}{2}]$

$k_2 = -0.2882$

$k_3 = -2[0.1 + \frac{0.1}{2}][0.99010 + \frac{(0.1)(-0.2882)^2}{2}]$

$k_3 = -0.2855$

$k_4 = -2[0.1 + 0.1][0.99010 + (0.1)(-0.2855)^2]$

$k_4 = -0.3698$

$y_2 = 0.99010 + \frac{0.1}{6}[-0.1960 + 2(-0.2882) + 2(-0.2855) + (-0.3698)]$

$y_2 = 0.9645$

Runge-Kutta

$y = 0.5$

$y = 0.5036$

Euler mejora

$y = 0.5009$

Valor Real

$y = 0.5$