Parcial número 3
Metodo de diferencias divididas
Metodos numericos

U-ERRE
Universidad Regiomontana

Nombre de alumnos:

Rodrigo Jimenez Torres / 736454

Monterrey, Nuevo León. México a de 28 julio del 2025

Método de romberg

El método de Romberg es una integracion numérica que mejora la precisión de la regla del trapecio mediante la extrapolacion de Richardson. Parte de calcular aproximaciones sucecivas de la integral con intervalos cada vez más pequeños y combina estos resultados para obtener una estimación mas precisa.

Antecedentes

Se basa en la Regla del trapecio y la idea de que el error disminuye conforme el paso h se hace menor.

Utiliza la extrapolación de Richardson, que consiste en combinar estimaciones con diferente h para eliminar los términos principales del error.

Relacion con otros metodos

Trapecio

Simpson

Cuadratura de Gaus

Formula

$$R \quad \frac{A_j \cdot R(k,j-1) - R(k-1,j-1)}{A_j - 1}$$

$R(k,0)$ es la aproximacion de la integual con 2^k subintervalos

$R(k,j)$ es la extrapolacion al eliminar errores de orden superior.

Algoritmo

Escogen el número de subordinacion inicial y el número de iteraciones deseadas.

Calcular $R(0,0)$ usando la regla del trapecio con un solo intervalo.

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$;

Calcular $R(k,0)$ usando la regla del trapecio con 2^k intervalos.

Para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, calcular (R,j) usando la formula de extrapolacion.

Repetir hasta que la diferencia entre las aproximaciones socesivas sea menor a un error deseado.

La mejor aproximación está en la esquina superior derecha de la tabla $R(k,k)$.

Aplicacion en la vida cotidiana

- Calculo de áreas y volumenes en ingeneria y fisica cuando la funcion no se puede integrar exactamente
- Evaluacion de integrales definidas en simulaciones de sistemas dinamicos
- Procesamiento de señales e imagenes
- En finanzas para estimar valores presentes de flujos complejos cuando las funciones no tiene antiderivadas conocidas

Metodo de Richardson

Definicion

La extrapolacion de Richardson es una tecnica para mejorar la precision de un calculo aproximando eliminando los términos principales der error.

Se aplica cuando el error de un método depende de una potencia conocida de h.

Antecedentes

- Fue propuesto por Lewis Fry Richardson
- Se utiliza ampliamente en integracion y diferienciacion numerica.

Relacion con el metodo

Metodo de integracion

Diferenciacion numerica

Metodos iterativos para ecuacion diferenciales

Formula

$$A^{\cdot} = \frac{2^p A\left(\frac{h}{2}\right) - A(h)}{2^p - 1}$$

Algoritmo

Calcular aproximacion $A(h)$ con un tamaño de paso h.

Calcular la aproximacion $A\left(\frac{h}{2}\right)$ con un paso menor.

Aplicar la fórmula de Richardson para combinar ambas aproximaciones y eliminar el término principal del error

Repetir hasta conseguir la pecisión deseada.

Aplicacion en la vida cotidiana

- Mejorar en los calculos de áreas derivadas e integrales.
- En fisica, para mediciones experimentales
- En Simulacion computacionales para obtener resultados más pecisos sin un gran aumento del costo computacional.

	K_0	K_1	K_2	K_3
$n=2$	T_2^0	T_2^1	T_2^2	T_2^3
$n=4$	T_4^0	T_4^1	T_4^2	
$n=8$	T_8^0	T_8^1		
$n=16$	T_{16}^0			

$$T_n^k = \frac{4^k T_{2n}^{k-1} - T_n^{k-1}}{}$$

$$\underset{n=2}{\overset{k=1}{T_2^1}} = \frac{4^1 T_4^0 - T_2^0}{4^1 - 1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots\ldots f(x_n)\right]$$

Ejemplo

ciclo 1 $k=0$

$a=1$

$b=3$

$n=2$

$h=\frac{b-a}{n}=1$

$x_0=1$

$x_1=2$

$x_2=3$

$a=1$

$b=3$

$n=8$

$h=\frac{b-a}{n}=0.25$

$x_0 \quad 1 \longrightarrow f(x_0)=\frac{1}{2}$

$x_1 \quad 1.25 \longrightarrow f(x_1)=0.3632$

$x_2 \quad 1.5 \longrightarrow f(x_2)=0.2474$

$x_3 \quad 1.75 \longrightarrow f(x_3)=0.1686$

$x_4 \quad 2 \longrightarrow f(x_4)=\frac{2}{17}$

$x_5 \quad 2.25 \longrightarrow f(x_5)=0.0844$

$x_6 \quad 2.5 \longrightarrow f(x_6)=0.0624$

$x_7 \quad 2.75 \longrightarrow f(x_7)=0.0472$

$x_8 \quad 3 \longrightarrow f(x_8)=\frac{3}{82}$

$x_0=1 \rightarrow f(x_0)=\frac{1}{(1)^4+1}=\frac{1}{2}$

$x_1=2 \rightarrow f(x_1)=\frac{2}{(2)^4+1}=\frac{2}{17}$

$x_2=3 \rightarrow f(x_2)=\frac{3}{(3)^4+1}=\frac{3}{82}$

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+2\left(\frac{2}{17}\right)+\frac{3}{82}\right]=0.3859$$

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{0.25}{2}\left[\frac{1}{2}+2(0.3632)+2(0.2474)+2(0.7686)+2\left(\frac{2}{17}\right)+2(0.0844)+2(0.0624)+2(0.0472)+\frac{3}{82}\right]=T_8^0=0.3398$$

$a=1 \qquad K=0$

$b=3$

$n=4$

$h=0.5$

$x_0=1 \longrightarrow f(x_0)=\frac{1}{2}$

$x_1=1.5 \longrightarrow f(x_1)=\frac{1.5}{(1.5)^4+1}=$

$x_2=2 \longrightarrow f(x_2)=\frac{2}{17}$

$x_3=2.5 \longrightarrow f(x_3)=\frac{2.5}{(2.5)^4+1}=0.0624$

$x_4=3 \longrightarrow f(x_4)=\frac{3}{82}$

K_0	K_1	K_2
0.3854	T_2^1	T_2^3
0.3478	T_4^1	
0.3398		

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1} = \frac{0.5}{2}\left[\frac{1}{2}+2(0.2474)+2\left(\frac{2}{17}\right)+2(0.0624)+\frac{3}{82}\right]=T_4^0=0.3478$$

$$\frac{4^1 T_4^0 - T_2^0}{4^1 - 1} = \frac{4(0.3478)-(0.3859)}{3} = 0.3351$$

$$\frac{4^1 T_8^0 - T_4^0}{4^1 - 1} = \frac{4(0.3398)-(0.3478)}{3} = 0.3371$$

ciclo) $k=2$, $n=2$

$$T_2^3 = \frac{4^2 T_4^1 - T_2^1}{4^2 - 1} = \frac{16(0.3371)-(0.3351)}{15} = 0.3372$$

	K_0	K_1	K_2
$n=2$	0.3859	0.3351	0.3372
$n=4$	0.3478	0.3371	
$n=8$	0.3398		

Trapecio → 0.3397

$$\int_{-3}^{3} \ln(4x^2+4)\,dx$$

$a=-3$, $b=3$, $n=2$

$h = \frac{3-(-3)}{2} = 3$

$x_0 = -3$ $\quad f(x_0) = -0.0365$

$x_1 = 0$ $\quad f_{x_1} = 0$

$x_2 = 3$ $\quad f_{x_2} = 0.0365$

$f(x_0) = \frac{2.25}{(2.25)^4 + 1} =$ $\quad 0$

$a=-3$, $b=3$, $n=4$

$h = 1.5$

$x_0 = -3$ $\quad f(x_0) \approx -0.03658$

$x_1 = -1.5$ $\quad f(x_1) = -0.24742$

$x_2 = 0$ $\quad f(x_2) = 0$

$x_3 = 1.5$ $\quad f(x_3) = 0.24742$

$x_4 = 3$ $\quad f(x_4) = 0.36585$

0.24695

$a=-3, b=3, n=8$

0.75

$x_0 = -3$	0.03658
$x_1 = -2.25$	0.04135
$x_2 = -1.5$	0.36923
$x_3 = -0.75$	-1.04714
$x_4 = 0$	0
$x_5 = 0.75$	0.56973
$x_6 = 1.5$	0.24742
$x_7 = 2.25$	0.84444
$x_8 = 3$	0.36585
	-0.306365

-0.08231 -0.101618

0.20731

K_0	k_1	K_2
0	-0.08231	-0.101618
0.24695	0.20731	
-0.306365		