Solución gráfica de modelos de programación lineal

Investigación de Operaciones 1

Ing. Eduardo López Sandoval

elopez@ulima.edu.pe

Limitaciones

Se aplica a modelos de programación lineal de dos variables de decisión.

- Podría aplicarse también en modelos con tres variables de decisión, pero con ayuda de software que permita graficar en 3D.

Si bien es cierto que administrativamente no se utiliza, la solución gráfica ayuda al posterior entendimiento de dos aspectos:

- La solución analítica, la cual utilizan los softwares de administración de modelos (*Lingo*, *Solver*, etc)
- El impacto en la solución óptima ante variaciones en los parámetros del modelo de programación lineal.

Ejemplo de aplicación

- Una empresa debe determinar cuántos lotes de camisetas y casacas debe producir diariamente. La información técnica – económica se muestra en la Tabla 1
- Asimismo:
  - Se debe utilizar al menos 4 horas diarias de mano de obra.
  - Se dispone de 6 horas diarias de maquinaria.
  - La producción de casacas no debe exceder el doble de la producción de camisetas y visceversa.

Tabla 1

Producto	Utilidad por lote (Miles de Soles)	Requerimiento de mano de obra (horas / lote)	Requerimiento de maquinaria (horas / lote)
Camisetas	2	2	1
Casacas	3	1	1

Planteamiento del modelo de programación lineal

- Las variables de decisión son:
  - $\boldsymbol{x_1: Cantidad\ de\ lotes\ de\ camisetas\ a\ producir.}$
  - $\boldsymbol{x_2: Cantidad\ de\ lotes\ de\ casacas\ a\ producir.}$
- El modelo de programación lineal que maximiza las utilidades diarias de la empresa sería el siguiente:

$$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$Sujeto\ a:$$

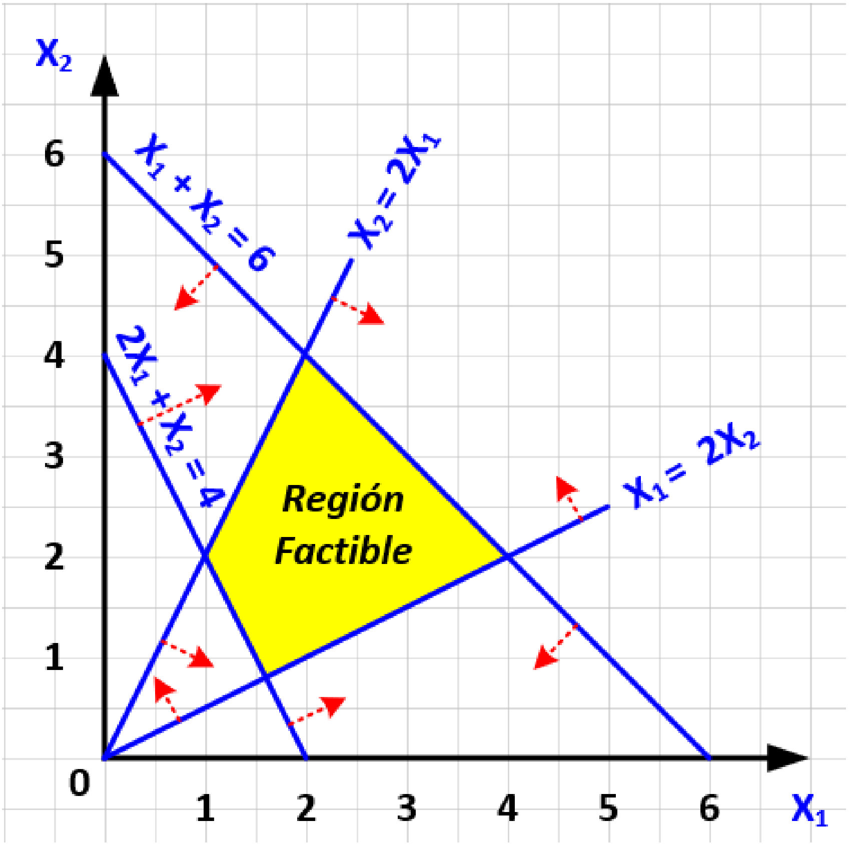
$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_2 & \leq & 2x_1 \\ x_1 & \leq & 2x_2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

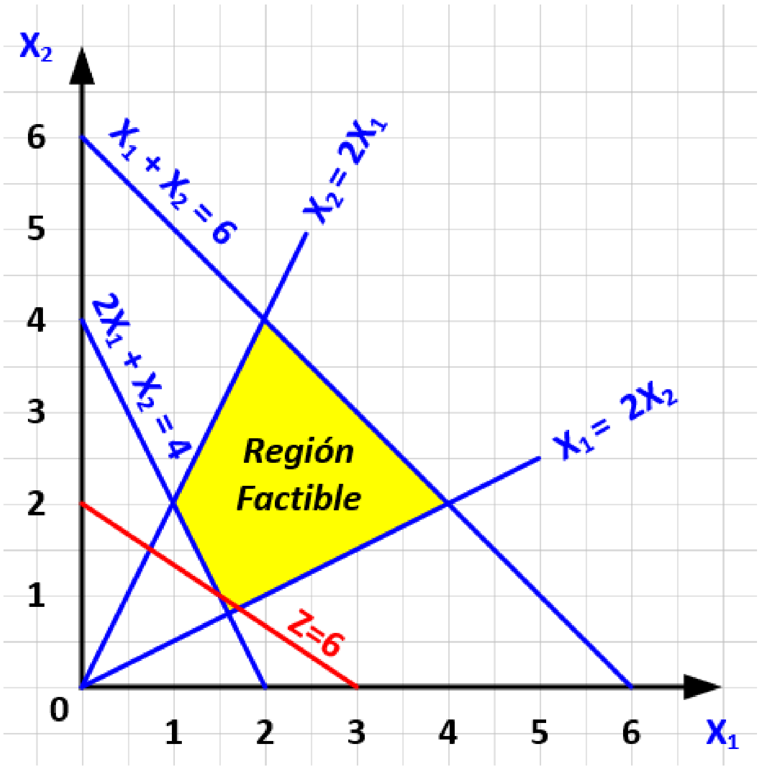
Paso 1: Determinar la región factible del modelo

- Se traza un sistema de coordenadas cartesianas y se asocia arbitrariamente una variable de decisión a cada eje.
- Luego, se debe determinar la región factible del modelo:
    - Es el lugar geométrico de todos los pares ordenados (x1,x2) que satisfacen a todas las restricciones.

Región factible del modelo:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 2x_1 + 3x_2 \\
&Sujeto\ a: \\
&2x_1 + x_2 \geq 4 \\
&x_1 + x_2 \leq 6 \\
&x_2 \leq 2x_1 \\
&x_1 \leq 2x_2 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



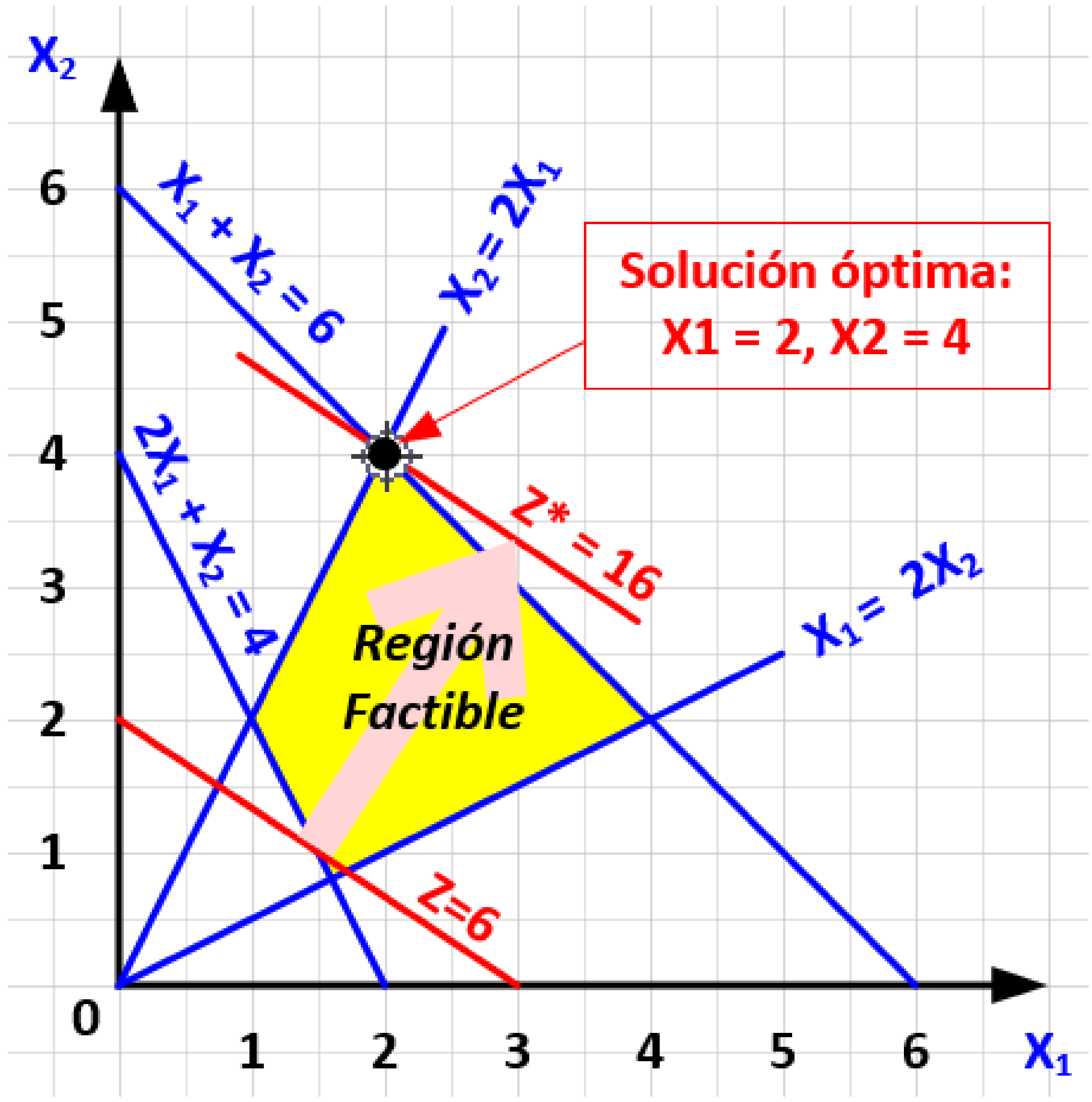


Paso 2: Graficar la *recta de isoutilidad*

- Es la recta que representa a la función objetivo, a la cual se le asigna un valor arbitrario.
  - Un buen criterio para asignar el valor arbitrario, es el mínimo común múltiplo de los coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo.
- La función objetivo del modelo es:
  - $Z = 2x_1 + 3x_2$
- Asignando como valor arbitrario $Z = 6$ se tiene la siguiente recta de isoutilidad: $6 = 2x_1 + 3x_2$

Paso 3: determinar la solución óptima y el valor óptimo

- Se desplaza la recta de isoutilidad, en dirección de crecimiento de Z, hasta que sea tangente a la región factible.
- El punto de tangencia es la **solución óptima**.
- El **valor óptimo** de la función objetivo **(Z*)** se obtiene reemplazando la solución óptima en la función objetivo:
  - Z* = 2(2) + 3(4) = 16

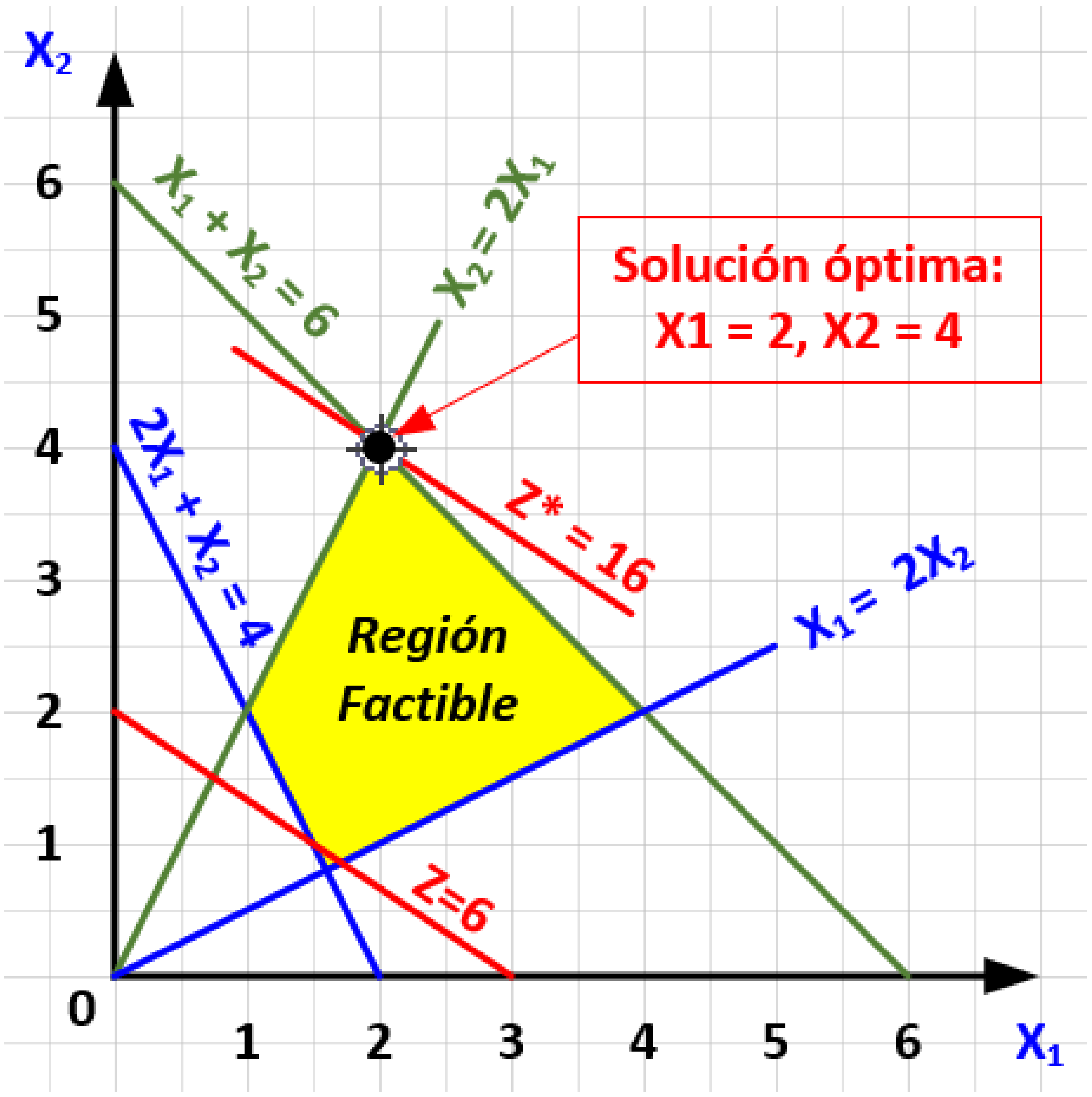


Informe administrativo

- Se debe producir 2 lotes de camisetas y 4 lotes de casacas.
- La máxima utilidad que se obtendría asciende a 16000 Soles.

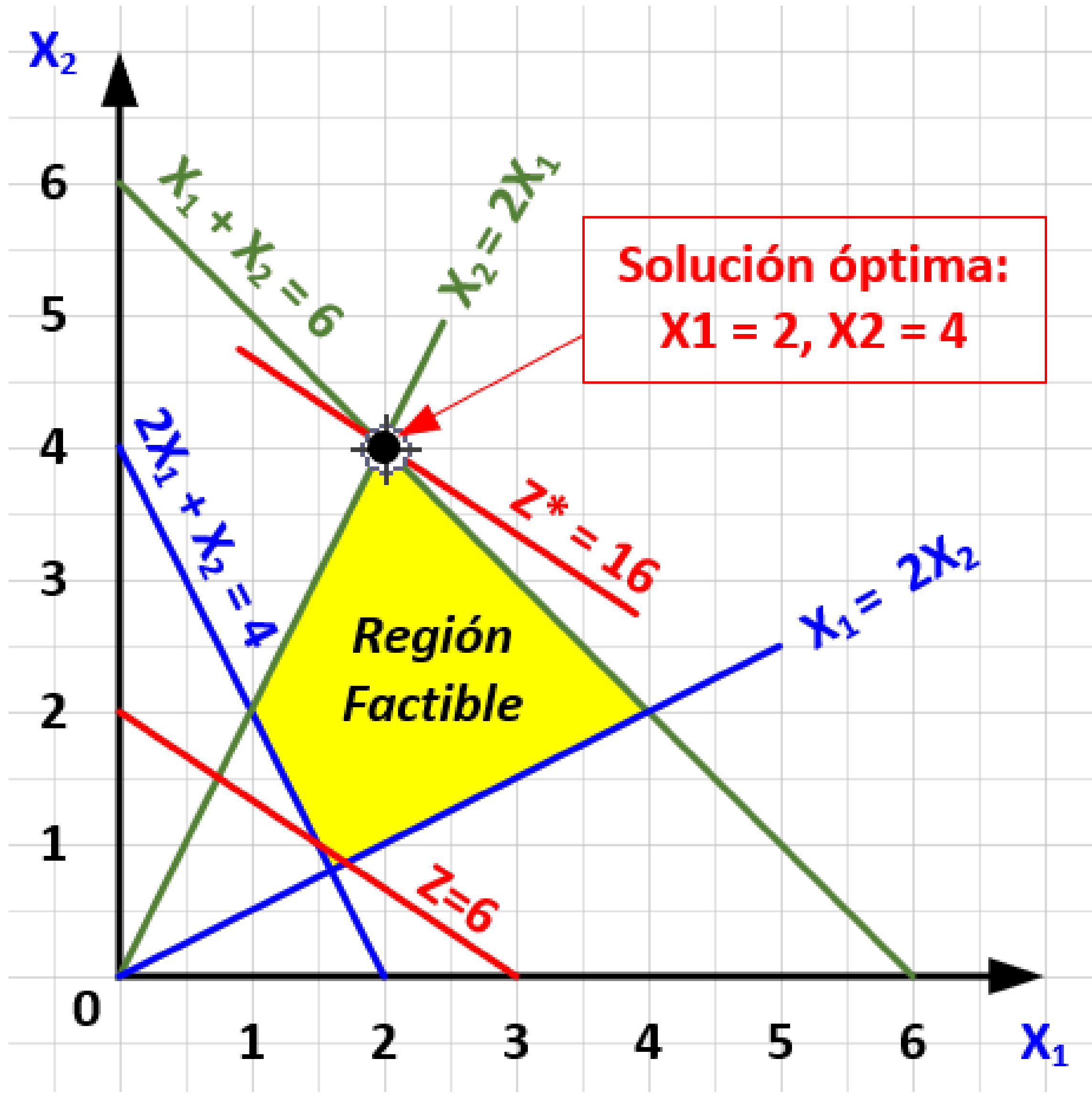
Otras consideraciones

- Una **restricción es activa** cuando, al evaluar la solución óptima en ella, el lado izquierdo se iguala al lado derecho.
- Las **restricciones activas** del modelo son:
  - $x_1 + x_2 \leq 6 \rightarrow \mathbf{2 + 4 = 6}$
  - $x_2 \leq 2x_1 \rightarrow \mathbf{4 = 2(2)}$



Otras consideraciones

- Una **restricción es redundante** cuando, al retirarla, **la región factible no cambia**.
- En este modelo, ninguna restricción es redundante.



Ejercicio 1.1 de la separata

- Crepier tiene como productos principales la fabricación de bolsos y mochilas para escolares, cuyos precios de venta por unidad son de $40 y $25 respectivamente. El proceso de fabricación consta de dos actividades: corte y costura.
- En la actividad de corte, se pueden cortar 10 bolsos/hora o 20 mochilas/hora y se dispone diariamente de 8 horas. En la actividad de costura, un bolso requiere 4 horas máquina, una mochila requiere 3 horas máquina y se dispone diariamente de 420 horas máquina.
- Se estima que diariamente se debe fabricar por lo menos 50 unidades en total (bolsos más mochilas). Finalmente la fabricación de bolsos al día debe ser menor o igual a la fabricación de mochilas al día, debido a que los escolares les gustan más las mochilas.

Preguntas:

a) Defina las variables de decisión del modelo y formule el modelo de programación lineal que permita optimizar la fabricación de estos productos a Crepier.

b) Utilizando el método gráfico, determine la región factible, la solución óptima, el valor óptimo de la función objetivo e indíquelos claramente en el gráfico. **(Respuesta: Z* = 3700)**

c) Suponga que el precio de venta de una mochila es de $30. ¿Corresponde a algún caso especial de solución? Justifique su respuesta, señale la solución óptima y el valor óptimo.

d) A partir de la solución gráfica obtenida en b), si el jefe de operaciones de Crepier indica que necesariamente se debe utilizar todas las horas de costura, ¿Cambiaría la región factible, la solución óptima o ambos? Justifique su respuesta.

e) A partir de la solución gráfica obtenida en b), suponga que el jefe de operaciones de Crepier desea conocer el plan de producción que genere la menor cantidad posible de desperdicio de tela. Se sabe que por cada bolso y por cada mochila se genera 0.5 kg y 0.6 kg de desperdicio de tela, respectivamente. Indique los cambios que debe hacer y determine el plan de producción y los kilogramos de desperdicio en total.

Preguntas adicionales:

f) ¿Conviene aumentar la disponibilidad de horas de corte? En caso convenga, ¿hasta qué valor sería conveniente?

g) Entre qué valores podría variar el precio de venta de una mochila sin que se vea afectada la solución óptima?

Muchas gracias