Prueba de Hipótesis

Prueba de hipótesis para una proporción poblacional, Prueba de hipótesis para la varianza de la población

ESTADÍSTICA APLICADA
PROF. MSC. VILMA S. ROMERO ROMERO
5TO CICLO | 19-09-2022

UNIVERSIDAD DE LIMA

Prueba de hipótesis para una proporción poblacional

Esquema:

Dada una muestra aleatoria de tamaño n (muestra suficientemente grande), una prueba de hipótesis con respecto a la **proporción poblacional p** (la fracción de individuos u objetos con una característica específica, o la probabilidad de éxito), con nivel de significancia α se realiza de la siguiente manera:

Hipótesis	**Estadístico de Prueba**	**Región Crítica**	**Regla de Decisión** **Rechazar H_0**
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$\langle -\infty; Z_\alpha \rangle$	$Z_0 < Z_\alpha$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$		$\langle Z_{1-\alpha}; \infty \rangle$	$Z_0 > Z_{1-\alpha}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$Z_0 \dot{\sim} N(0,1)$	$\langle -\infty; Z_{\alpha/2} \rangle \cup \langle Z_{1-\alpha/2}; \infty \rangle$	$Z_0 < Z_{\alpha/2}$ o $Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$

UNIVERSIDAD DE LIMA

Ejemplo 1:

"Lima Brasa" afirma que el 90 por ciento de sus pedidos se entregan dentro de los 10 minutos posteriores al momento en que se realiza el pedido. Una muestra de 100 pedidos reveló que 82 fueron entregados dentro del tiempo prometido. Con un nivel de significancia del 10%, ¿se puede concluir que menos del 90 por ciento de los pedidos se entregan en menos de 10 minutos?

Solución:

1) Se formulan las hipótesis:
   $H_0 : p = 0.90$
   $H_1 : p < 0.90$

2) $\alpha = 0.10$

3) El estadístico de prueba es: $Z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ y los datos tienen una distribución binomial.

4) Región crítica: $RC = \langle -\infty; Z_{0.10} \rangle = \langle -\infty; -1.282 \rangle$

5) Valor del estadístico de prueba es:

$$Z_0 = \frac{0.82 - 0.90}{\sqrt{\frac{0.90(0.10)}{100}}} = -2.667$$

6) **Decisión y conclusión:** Como $Z_0 = -2.667 \in RC$; por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Entonces, hay suficiente evidencia para decir que menos del 90% de los clientes reciben sus pedidos en menos de 10 minutos, al 10% de significación.

UNIVERSIDAD DE LIMA

Ejemplo 2:

La gestión de una cadena de hoteles evita intervenir en la gestión local de sus franquicias a menos que los problemas se vuelvan demasiado comunes como para ignorarlos. La gerencia cree que es mejor dejar que el personal local resuelva los problemas a menos que la medida de satisfacción caiga por debajo del 33%. Una encuesta de 80 huéspedes que recientemente se quedaron en la franquicia en Cusco descubrió que solo el 20% de los huéspedes indicaron que regresarían a ese hotel la próxima vez que visiten la ciudad. ¿Debería intervenir la gerencia en la franquicia en Cusco? Utilizar un $\alpha = 0.025$

UNIVERSIDAD DE LIMA

Solución:

1) Se formulan las hipótesis:
   $H_0 : p \geq 0.33$
   $H_1 : p < 0.33$

2) $\alpha = 0.025$

3) El estadístico de prueba es: $Z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ y los datos tienen una distribución binomial.

4) Región crítica: $RC = \langle -\infty; Z_{0.025} \rangle = \langle -\infty; -1.96 \rangle$

5) Valor del estadístico de prueba es:

$$Z_0 = \frac{0.20 - 0.33}{\sqrt{\frac{0.33(0.67)}{80}}} = -2.473$$

6) **Decisión y conclusión:** Como $Z_0 = -2.473 \in RC$; por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Entonces, hay suficiente evidencia para decir que H_1 es verdadera, a un nivel de significancia del 2.5%.

Esto indica que la gerencia debería intervenir en la franquicia en Cusco.

Prueba de hipótesis para la varianza de la población

Esquema:

Dada una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población normal con varianza σ^2, una prueba de hipótesis sobre la varianza poblacional σ^2 con nivel de significancia α se realiza de la siguiente manera:

Hipótesis	Estadístico de Prueba	Región Crítica	Regla de Decisión Rechazar H_0
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\chi_0^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$	$\left\langle 0; \chi^2_{(n-1,\alpha)} \right\rangle$	$\chi_0^2 < \chi^2_{(n-1,\alpha)}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$		$\left\langle \chi^2_{(n-1,1-\alpha)}; \infty \right\rangle$	$\chi_0^2 > \chi^2_{(n-1,1-\alpha)}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$\left\langle 0; \chi^2_{(n-1,\alpha/2)} \right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}; \infty \right\rangle$	$\chi_0^2 < \chi^2_{(n-1,\alpha/2)}$ o $\chi_0^2 > \chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}$

Ejemplo 3:

La empresa “Caenli” fabrica cartón para cartones plegables hecho completamente de material reciclado. Un producto específico está diseñado para tener un grosor de 375 micrómetros con una desviación estándar de 7 micrómetros. Se obtuvo una muestra aleatoria de 21 piezas de cartón de la línea de montaje y se encontró que la varianza muestral fue de 15.6 micrómetros^2. Suponga que la distribución del grosor es normal y sea un $\alpha = 0.05$. Considere una prueba bilateral para determinar si el cartón se fabrica con la variación de grosor diseñada.

Solución:

1) Se formulan las hipótesis:
   $H_0 : \sigma^2 = 49$
   $H_1 : \sigma^2 \neq 49$

2) $\alpha = 0.05$

3) El estadístico de prueba es: $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(20)}$ y los datos tienen una distribución normal.

4) Región crítica:

$$RC = \left\langle 0; \chi^2_{20,0.025} \right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{(20,0.975)}; \infty \right\rangle = \langle 0; 9.5908 \rangle \cup \langle 34.1696; \infty \rangle$$

5) Valor del estadístico de prueba es:

$$\chi_0^2 = \frac{(20)15.6}{49} = 6.3673$$

6) **Decisión y conclusión:** Como $\chi_0^2 = 6.3673 \in RC$; por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Existe evidencia que sugiere que la varianza poblacional del grosor es diferente de 49, con el 5% de significación.

Ejemplo 4:

La cantidad promedio de galones de helado vendidos durante un día de verano en cierta heladería es de 354 galones con una desviación estándar de 25.7 galones. Esta información se utiliza para planificar programas de producción y solicitar suministros. Se obtuvo una muestra aleatoria de los días de verano, y la cantidad de helado vendido cada día (en galones) se muestra en la siguiente tabla.

360	347	346	347	338	370	362	356	330	339
372	358	387	359	343	372	369	349	344	334

¿Hay alguna evidencia que sugiera que la verdadera varianza poblacional en el helado comprado por día es diferente de 660.49 galones^2? Suponga normalidad y use un $\alpha = 0.01$.

Solución:

1) Se formulan las hipótesis:
   $H_0 : \sigma^2 = 660.49$
   $H_1 : \sigma^2 \neq 660.49$

2) $\alpha = 0.01$

3) El estadístico de prueba es: $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(19)}$ y los datos tienen una distribución normal.

4) Región crítica:

$$RC = \left\langle 0; \chi^2_{(19,0.005)} \right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{(19,0.995)}; \infty \right\rangle = \langle 0; 6.8440 \rangle \cup \langle 38.5823; \infty \rangle$$

UNIVERSIDAD DE LIMA

5) Valor del estadístico de prueba es:

$$\chi_0^2 = \frac{(19)222.52}{660.49} = 6.4011$$

6) **Decisión y conclusión:** Como $\chi_0^2 = 6.4011 \in RC$; por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Existe evidencia que sugiere que la verdadera varianza poblacional es diferente de 660.49, con el 1% de significación.

Recursos Adicionales I

Devore, J. (2019). *Introducción a la probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Cengage, 1 edition. Tomado de http://webaloe.ulima.edu.pe/portalUL/bi/baseDatosEtech/index.jsp?BD=BI_RUTA_CENGAGE.

Johnson, R. A. (2012). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Pearson Educación, 8 edition. Tomado de http://webaloe.ulima.edu.pe/portalUL/bi/baseDatosEtech/index.jsp?BD=BI_RUTA_PEARSON.

Mendenhall, W., Beaver, R. J., and Beaver, B. M. (2015). *Introducción a la probabilidad y estadística*. Cengage, 14 edition. Tomado de http://webaloe.ulima.edu.pe/portalUL/bi/baseDatosEtech/index.jsp?BD=BI_RUTA_CENGAGE.

UNIVERSIDAD DE LIMA

Recursos Adicionales II

Millones, R., Barreno, E., Vásquez, F., and Castillo, C. (2017). *Estadística Descriptiva y Probabilidades: Aplicaciones en la ingeniería y los negocios*. Lima: Fondo Editorial de la Universidad de Lima, 1 edition. Código Biblioteca U.Lima: 519.53 E.

Triola, M. (2018). *Estadística*. Pearson Educación, 12 edition. Tomado de http://webaloe.ulima.edu.pe/portalUL/bi/baseDatosEtech/index.jsp?BD=BI_RUTA_PEARSON.

UNIVERSIDAD DE LIMA