Prueba de Hipótesis

Clases de hipótesis, Tipos de errores, Tipos de prueba de hipótesis, Prueba de hipótesis para la media de una población

ESTADÍSTICA APLICADA

PROF. MSC. VILMA S. ROMERO ROMERO

5TO CICLO | 19-09-2022

UNIVERSIDAD DE LIMA

Hipótesis Estadística

Es una aseveración sobre el valor específico de un parámetro de la población (o sobre los valores de varias características de la población), que puede ser verdadera o no.

- El sueldo promedio de un recién egresado de Ingeniería de Sistemas es de 3250 soles.
  - $H : \mu = 3250$
- La proporción de todas las personas mayores de 65 años que necesitarán servicios de atención a largo plazo en algún momento de su vida es superior a 0.70.
  - $H : \pi > 0.70$

Clases de Hipótesis

1) **Hipótesis Nula (H_0)**
   - Afirmación acerca del valor de un parámetro de la población, que se supone verdadera.
   - Expresa la creencia por defecto que se mantiene en ausencia de datos.
   - Hipótesis que se probará.

2) **Hipótesis Alternativa (H_1)**
   - Afirmación que es favorecida si la muestra proporciona evidencia suficiente de que la hipótesis nula es falsa.
   - Representa el cambio en el estándar actual o en el estado existente.

Nota: La H_0 o H_1 puede ser **simple** si solamente asume un valor, o puede ser **compuesta** si asume más de un valor.

UNIVERSIDAD DE LIMA

Tipos de Errores

Al tomar una decisión basada en la información proporcionada por una muestra aleatoria, se puede llegar a cometer dos tipos de errores:

El **error tipo I** se cometе cuando se rechaza H_0 siendo realmente H_0 verdadera. Es decir, se favorece erróneamente la H_1.

El **error tipo II** se comete cuando no se rechaza H_0 siendo realmente H_0 falsa. Es decir, se favorece erróneamente la H_0.

UNIVERSIDAD DE LIMA

Ejemplo:

Un nuevo y más caro procedimiento para detectar el cáncer de páncreas se está evaluando para saber si es más eficiente que el método usado frecuentemente.

Solución:

Planteamiento de Hipótesis:

- H_0: El nuevo método no es mejor que el método usado frecuentemente.
- H_1: El nuevo método es mejor que el método usado frecuentemente.

Entonces, los errores son:

- **Error tipo I**: Afirmar erróneamente que el nuevo método es mejor que el frecuentemente usado.
- **Error tipo II**: Afirmar erróneamente que el nuevo método no es mejor que el frecuentemente usado.

Cuadro de Decisiones

Decisión	**H_0 es verdadera**	**H_0 es falsa**
No rechazar H_0	Decisión correcta	**Error tipo II**
Rechazar H_0	**Error tipo I**	Decisión correcta

Los tipos de errores son inversamente proporcionales para cualquier prueba dada y tamaño de muestra fijo.

- Cuanto menor es el riesgo de cometer un error tipo I, tanto mayor es la probabilidad de cometer un error de tipo II.

- α: Probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es verdadera.

$$\boxed{\alpha = P(\text{Error tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera})}$$

- β: Probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es falsa.

$$\boxed{\beta = P(\text{Error tipo II}) = P(\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa})}$$

- α: Nivel de significación
- $\mathbf{1} - \beta$: **Potencia** de la prueba

Tipos de Prueba de Hipótesis

■ Prueba Bilateral o de dos colas:

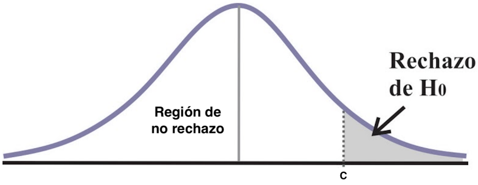
$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- C1 y C2 son valores críticos.

Tipos de Prueba de Hipótesis

■ Prueba de cola derecha o superior:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$



■ Prueba de cola izquierda o inferior:

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

- C es un punto crítico.

Procedimiento de una Prueba de Hipótesis

- **PASO 1**: Plantear la hipótesis nula y alternativa.
- **PASO 2**: Escoger el nivel de significación α.
- **PASO 3**: Seleccionar el estadístico de prueba.
- **PASO 4**: Establecer la región crítica y la regla de decisión.
- **PASO 5**: Calcular el valor del estadístico de prueba con la información proporcionada de la muestra aleatoria, para ser comparado con los valores críticos.
- **PASO 6**: Tomar una decisión: Rechazar H_0 si el valor del estadístico de prueba pertenece a la zona de rechazo y no rechazarla en caso contrario.

Prueba de hipótesis para la media de una población

Caso : Varianza poblacional (σ^2) es desconocida

- Generalmente es poco probable que se conozca la desviación estándar de la población.
  - **Factor clave:** Tamaño de la muestra (n).
  - $n \geq 30 \Rightarrow$ Desviación estándar muestral será suficientemente cercana a la desviación estándar de la población $\Rightarrow$ Usar una **prueba Z**, usar la desviación estándar muestral en lugar de la desviación estándar poblacional.
  - $n < 30 \Rightarrow$ Desviación estándar muestral no será suficientemente cercana a la desviación estándar de la población $\Rightarrow$ Usar una **prueba t**.

Hipótesis	Estadístico de Prueba	Región Crítica	Regla de Decisión Rechazar H_0
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$		$\left\langle -\infty; t_{(n-1,\alpha)} \right\rangle$	$t_0 < t_{(n-1,\alpha)}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$t_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\left\langle t_{(n-1,1-\alpha)}; \infty \right\rangle$	$t_0 > t_{(n-1,1-\alpha)}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$t_0 \sim t_{(n-1)}$	$\left\langle -\infty; t_{(n-1,\alpha/2)} \right\rangle \cup \left\langle t_{(n-1,1-\alpha/2)}; \infty \right\rangle$	$t_0 < t_{(n-1,\alpha/2)}$ o $t_0 > t_{(n-1,1-\alpha/2)}$

Ejemplo 3:

La cadena de supermercados Tottus ha instalado sistemas de autochequeo para que los compradores puedan escanear sus propios artículos y pagar ellos mismos. Una muestra de 15 días en la tienda Tottus del Jockey Plaza mostró un promedio de 109.4 clientes que utilizan el servicio de autopago con una desviación estándar de 9.963 clientes.

¿Es razonable concluir que el número promedio de clientes que utilizan el sistema de autopago es más de 100 por día? Usar un nivel de significación del 5%.

Solución:

1) Se formulan las hipótesis:
   $H_0 : \mu \leq 100$
   $H_1 : \mu > 100$

2) $\alpha = 0.05$

3) El estadístico de prueba es: $t_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(14)}$ y se asume que los datos tienen una distribución normal.

4) Región crítica: $RC = \left\langle t_{(14,0.95)}; \infty \right\rangle = \langle 1.761; \infty \rangle$

5) Valor del estadístico de prueba es:

$$t_0 = \frac{109.4 - 100}{\frac{9.963}{\sqrt{15}}} = 3.654$$

6) **Decisión y conclusión:** Como $t_0 = 3.654 \in RC$; por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Existe evidencia que sugiere que el número medio de clientes que utilizan el sistema de autopago es más de 100 por día, con el 5% de significación.

Ejemplo 4:

Una determinada ruta de entrega diaria de panes y pasteles incluye ocho supermercados y cuatro tiendas de conveniencia. El tiempo medio histórico para completar estas entregas (a las 12 tiendas) y regresar al centro de distribución es de 6.5 horas. Se ha asignado un nuevo conductor a esta ruta y se obtuvo una muestra aleatoria de los tiempos de finalización de su ruta (en horas).

$$6.61 \quad 6.25 \quad 6.40 \quad 6.57 \quad 6.35 \quad 5.95 \quad 6.53 \quad 6.29$$

Suponga que la población se distribuye de manera normal. Con $\alpha = 0.01$, ¿hay alguna evidencia que sugiera que el nuevo conductor ha podido acortar el tiempo de finalización de la ruta?

Solución:

1) Se formulan las hipótesis:
   $H_0 : \mu = 6.5$
   $H_1 : \mu < 6.5$

2) $\alpha = 0.01$

3) El estadístico de prueba es: $t_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(7)}$ y se asume que los datos tienen una distribución normal.

4) Región crítica: $RC = \left\langle -\infty; t_{(7,0.01)} \right\rangle = \langle -\infty; -2.998 \rangle$

UNIVERSIDAD DE LIMA

5) Valor del estadístico de prueba es:

$$t_0 = \frac{6.3688 - 6.5}{\frac{0.2144}{\sqrt{8}}} = -1.7308$$

6) **Decisión y conclusión:** Como $t_0 = -1.7308 \notin RC$; por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula. No existe evidencia que sugiere que el nuevo conductor ha podido acortar el tiempo de finalización de la ruta, con el 1% de significación.

Ejemplo 5:

Un grupo de expertos afirma que el típico adolescente envió 50 mensajes de texto en promedio por día en el 2019. Para actualizar dicha estimación, se llamó a una muestra aleatoria de adolescentes y se les preguntó cuántos mensajes de texto enviaron el día anterior. Sus respuestas fueron:

$$51 \quad 175 \quad 47 \quad 49 \quad 44 \quad 54 \quad 145 \quad 203 \quad 21 \quad 59 \quad 42 \quad 100$$

Con $\alpha = 0.05$, ¿se puede concluir que el número promedio de mensajes de texto es mayor que 50?

Solución:

1) Se formulan las hipótesis:
   $H_0 : \mu = 50$
   $H_1 : \mu > 50$

2) $\alpha = 0.05$

3) El estadístico de prueba es: $t_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(11)}$ y se asume que los datos tienen una distribución normal.

4) Región crítica: $RC = \left\langle t_{(11,0.95);\infty} \right\rangle = \langle 1.796; \infty \rangle$

5) Valor del estadístico de prueba es:

$$t_0 = \frac{82.5 - 50}{\frac{59.49}{\sqrt{12}}} = 1.8925$$

6) **Decisión y conclusión:** Como $t_0 = 1.8925 \in RC$; por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Existe evidencia que sugiere que el número promedio de mensajes de texto es mayor que 50, con el 5% de significación.

p-value (valor p)

El **P-value** se define como la probabilidad de tener un valor, del estadístico calculado, más extremo (más grande o más pequeño) que el observado.

- **p-value** es una probabilidad que proporciona una medida de la evidencia contra la hipótesis nula proporcionada por la muestra.
  - p-values "pequeños" proporcionan evidencia en contra de H_0.
  - p-values "grandes" proporcionan evidencia a favor de H_0.
- Se conoce también como el nivel de signicación observado.

- Si **P-value** $\leq \alpha \Rightarrow$ Se rechaza la hipótesis nula (H_0)
- Si **P-value** $> \alpha \Rightarrow$ No se rechaza la hipótesis nula (H_0)

Recursos Adicionales I

Devore, J. (2019). *Introducción a la probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Cengage, 1 edition. Tomado de http://webaloe.ulima.edu.pe/portalUL/bi/baseDatosEtech/index.jsp?BD=BI_RUTA_CENGAGE.

Johnson, R. A. (2012). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Pearson Educación, 8 edition. Tomado de http://webaloe.ulima.edu.pe/portalUL/bi/baseDatosEtech/index.jsp?BD=BI_RUTA_PEARSON.

Mendenhall, W., Beaver, R. J., and Beaver, B. M. (2015). *Introducción a la probabilidad y estadística*. Cengage, 14 edition. Tomado de http://webaloe.ulima.edu.pe/portalUL/bi/baseDatosEtech/index.jsp?BD=BI_RUTA_CENGAGE.

Recursos Adicionales II

Millones, R., Barreno, E., Vásquez, F., and Castillo, C. (2017). *Estadística Descriptiva y Probabilidades: Aplicaciones en la ingeniería y los negocios*. Lima: Fondo Editorial de la Universidad de Lima, 1 edition. Código Biblioteca U.Lima: 519.53 E.

Triola, M. (2018). *Estadística*. Pearson Educación, 12 edition. Tomado de http://webaloe.ulima.edu.pe/portalUL/bi/baseDatosEtech/index.jsp?BD=BI_RUTA_PEARSON.

UNIVERSIDAD DE LIMA