Teoria da computação

Problem set 1

Rodrigo Santos

Universidade NOVA de Lisboa

Exercício 1

Sejam A, B, e C quaisquer conjuntos. Demonstre cada uma das seguintes igualdades:

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Comecemos por explicitar que para demonstrar a igualdade temos que provar que (1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$, e (2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Vamos provar (1). Deste modo consideremos $x \in A \cup (B \cap C)$ arbitrário. Temos dois casos possíveis, (a) $x \in A$ ou (b) $x \in (B \cap C)$. (a) Se $x \in A$ então, $x \in (A \cup B)$ pela definição de união pois $A \subseteq (A \cup B)$. De forma análoga $x \in (A \cup C)$. Portanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ pela definição de interseção pois $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$. Se $x \in (B \cap C)$ então, $x \in B$ e $x \in C$ pela definição de interseção. Portanto como $x \in B$, $x \in (A \cup B)$ pela definição de união pois $B \subseteq (A \cup B)$. Similarmente $x \in C$, $x \in (A \cup C)$. Concluimos que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ pela definição de interseção pois $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$. Juntando (a) e (b) percebemos que se $x \in A \cup (B \cap C)$, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Portanto $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Vamos provar (2). Deste modo consideremos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ arbitrário. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$. Temos dois casos possíveis, (c) $x \in A$ ou (d) $x \notin A$. Comecemos por (c), se $x \in A$ então $x \in A \cup (B \cap C)$ pela definição de união pois $A \subseteq A \cup (B \cap C)$. Segue-se (d), se $x \notin A$ então $x \in B$ e $x \in C$. Pela definição de interseção se $x \in B$ e $x \in C$ então $x \in (B \cap C)$. Como $(B \cap C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ e $x \in (B \cap C)$ implica que $x \in A \cup (B \cap C)$. Juntando (c) e (d), se $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ então $x \in A \cup (B \cap C)$. Pelo que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Agregando (1) e (2) chegamos a conclusão que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. Logo $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.