

# Teoria da computação

Rodrigo Santos

April 7, 2024

## Problem set 2

### Exercício 1

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos quaisquer. Determine, justificando com uma demonstração ou um contra-exemplo, a veracidade das seguintes asserções

**(a) Se  $A$  é contável então  $A \cap B$  também é contável.**

Seja  $B$  arbitrário  $A \cap B \subseteq A$  para qualquer  $B$ , pela definição de interseção. Portanto  $\forall x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ . Temos que todos os elementos de  $A \cap B$  estão contidos em  $A$ , como  $A$  é contável,  $A \cap B$  é contável.

**(b) Se  $A$  não é contável, então  $A \cap B$  também não é contável.**

Seja  $A = \mathbb{R}$  que é não contável, *Cantor*. Seja  $B = \emptyset$  que é um conjunto contável. Temos então que  $A \cap B = \emptyset$  que é conjunto contável. Portanto arranjamos um contra-exemplo, em que  $A$  não é contável e  $A \cap B$  é contável. Logo a asserção inicial é falsa.

**(c) Se  $A$  é contável, então  $A \cup B$  também é contável.**

Seja  $A = \emptyset$  que é um conjunto contável. Seja  $B = \mathbb{R}$  que é um conjunto não contável, *Cantor*.  $A \cup B = \mathbb{R}$  que é um conjunto não contável. Portanto arranjamos um contra-exemplo, em que  $A$  é contável e  $A \cup B$  não é contável. Logo a asserção inicial é falsa.

**(d) Se  $A$  é contável, então  $B \setminus A$  também é contável.**

Seja  $A = \emptyset$  que é um conjunto contável. Seja  $B = \mathbb{R}$  que é um conjunto não contável, *Cantor*.  $B \setminus A = \mathbb{R}$  que é um conjunto não contável. Portanto arranjamos um contra-exemplo, em que  $A$  é contável e  $B \setminus A$  não é contável. Logo a asserção inicial é falsa.

**(e) Se  $A$  é contável, então  $A^*$  também é contável.**

Começemos por denotar  $A^*$  como:

$$A^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i = \epsilon \cup A \cup A^2 \cup \dots \cup A^i$$

Sabemos que  $A \times A$  é contável pois é o produto cartesiano entre dois conjuntos contáveis. Logo  $A^i = (A \times \dots \times A) \times A$  é um conjunto contável. Concluimos que se trata da união indexada em  $\mathbb{N}$  de conjuntos contáveis, que é contável. Portanto  $A^*$  é contável se  $A$  é contável. Logo a asserção inicial é verdadeira.

## **Exercício 2**

Determine, justificando, se cada um dos seguintes conjuntos é contável ou não contável

**(a) O conjunto das funções de  $\{0, 1\}$  para  $\{0, 1\}$ .**