

# Teoria da computação

Rodrigo Santos

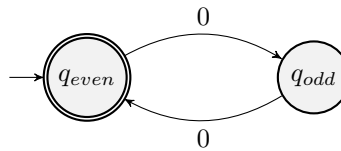
April 7, 2024

## Problem set 3

### Exercício 1

Para cada uma das linguagens abaixo descreva um *AFD* que a reconhece através do seu diagrama de estados e de uma definição formal

(a)  $L = \{0^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$



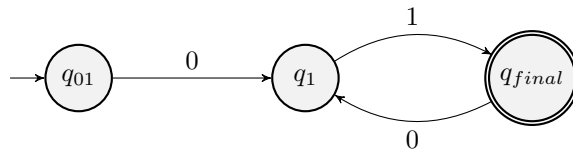
A descrição formal do *AFD* é:

$$M_1 = (\{q_{even}, q_{odd}\}, \{0\}, \delta, q_{even}, \{q_{even}\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	$0$
$q_{even}$	$q_{odd}$
$q_{odd}$	$q_{even}$

(b)  $L = \{(01)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$



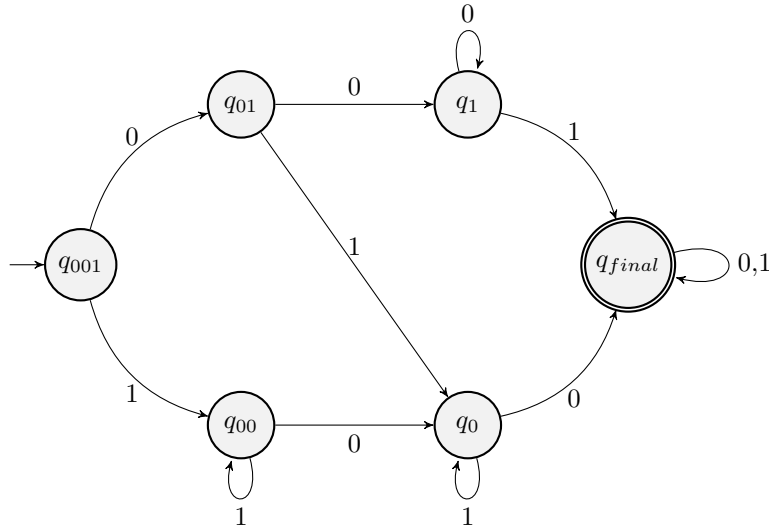
A descrição formal do *AFD* é:

$$M_2 = (\{q_{01}, q_1, q_{final}\}, \{0, 1\}, \delta, q_{01}, \{q_{final}\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	0	1
$q_{01}$	$q_1$	$\perp$
$q_1$	$\perp$	$q_{final}$
$q_{final}$	$q_1$	$\perp$

(c) A linguagem  $L$  das strings sobre  $\{0, 1\}$  que contêm pelos menos dois 0's e pelo menos um 1.



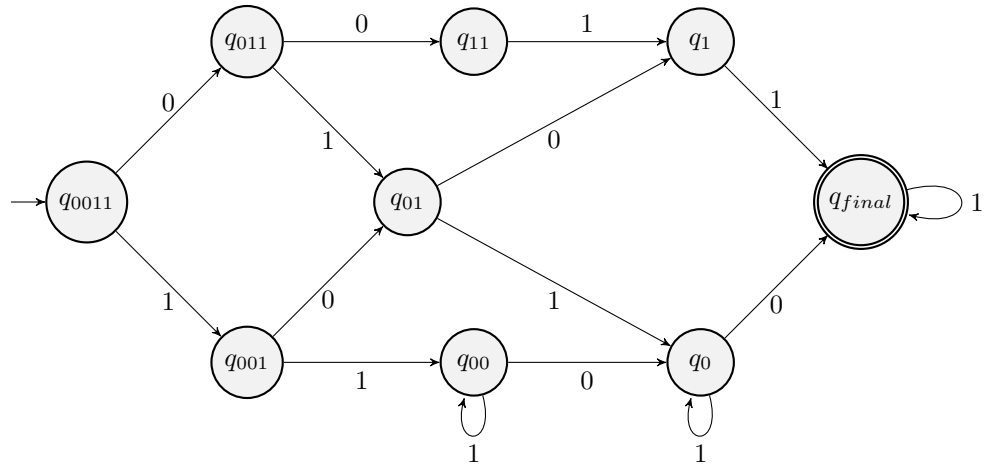
A descrição formal do *AFD* é:

$$M_3 = (\{q_{001}, q_{01}, q_{00}, q_1, q_0, q_{final}\}, \{0, 1\}, \delta, q_{001}, \{q_{final}\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	0	1
$q_{001}$	$q_{01}$	$q_{00}$
$q_{00}$	$q_0$	$q_{00}$
$q_{01}$	$q_1$	$q_0$
$q_1$	$q_1$	$q_{final}$
$q_0$	$q_{final}$	$q_0$
$q_{final}$	$q_{final}$	$q_{final}$

(d) A linguagem  $L$  das strings sobre  $\{0, 1\}$  que contêm exatamente dois 0's e pelo menos dois 1's.



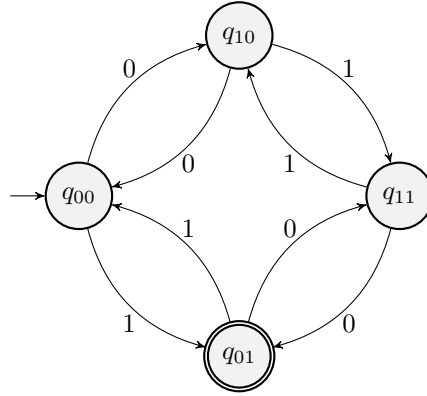
A descrição formal do  $AFD$  é:

$$M_4 = (\{q_{0011}, q_{011}, q_{001}, q_{11}, q_{01}, q_{00}, q_1, q_0, q_{final}\}, \{0, 1\}, \delta, q_{0011}, \{q_{final}\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	0	1
$q_{0011}$	$q_{011}$	$q_{001}$
$q_{001}$	$q_{01}$	$q_{00}$
$q_{011}$	$q_{11}$	$q_{01}$
$q_{01}$	$q_0$	$q_1$
$q_{00}$	$q_0$	$q_{00}$
$q_{11}$	$\perp$	$q_1$
$q_0$	$q_{final}$	$q_0$
$q_1$	$\perp$	$q_{final}$
$q_{final}$	$\perp$	$q_{final}$

(e) A linguagem  $L$  das strings sobre  $\{0, 1\}$  com um número par de 0's e um número ímpar de 1's.



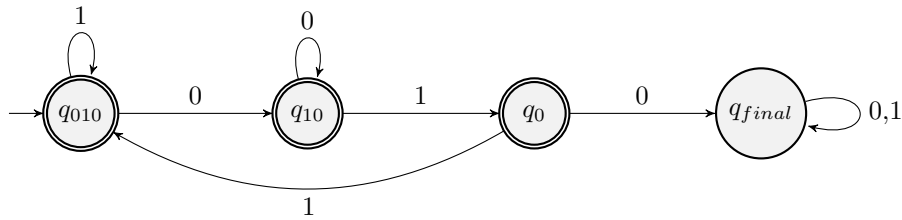
A descrição formal do  $AFD$  é:

$$M_5 = (\{q_{00}, q_{10}, q_{01}, q_{11}\}, \{0, 1\}, \delta, q_{00}, \{q_{01}\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	0	1
$q_{00}$	$q_{10}$	$q_{01}$
$q_{10}$	$q_{00}$	$q_{11}$
$q_{01}$	$q_{11}$	$q_{00}$
$q_{11}$	$q_{01}$	$q_{10}$

(f) A linguagem  $L$  das strings sobre  $\{0, 1\}$  que não contêm a substring 010.



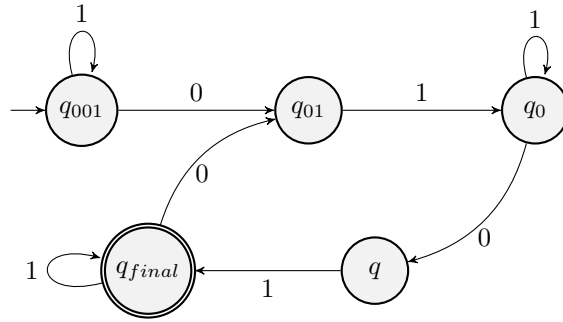
A descrição formal do  $AFD$  é:

$$M_6 = (\{q_{010}, q_{10}, q_0, q_{final}\}, \{0, 1\}, \delta, q_{010}, \{q_{010}, q_{10}, q_0\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	0	1
$q_{010}$	$q_{10}$	$q_{010}$
$q_{10}$	$q_{10}$	$q_0$
$q_0$	$q_{final}$	$q_{010}$
$q_{final}$	$q_{final}$	$q_{final}$

(g) A linguagem  $L$  das strings sobre  $\{0, 1\}$  com um número par de 0's e em que cada 0 é sempre seguido de pelo menos um 1.



A descrição formal do AFD é:

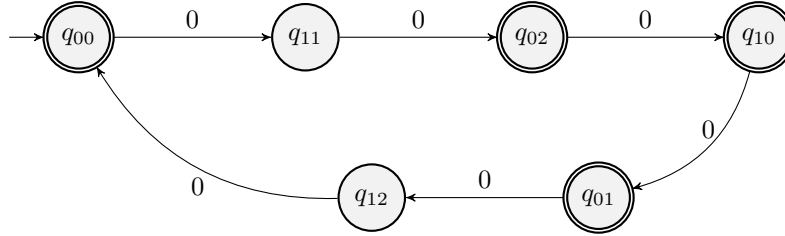
$$M_7 = (\{q_{001}, q_{01}, q_0, q, q_{final}\}, \{0, 1\}, \delta, q_{001}, \{q_{final}\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	0	1
$q_{001}$	$q_{01}$	$q_{001}$
$q_{01}$	$\perp$	$q_0$
$q_0$	$q$	$q_0$
$q$	$\perp$	$q_{final}$
$q_{final}$	$q_{01}$	$q_{final}$

(h) A linguagem  $L$  das strings sobre  $\{0\}$  com tamanho divisível por 2 ou por 3.

$q_{ij}$  onde  $i = n\%2$  e  $j = n\%3$ .



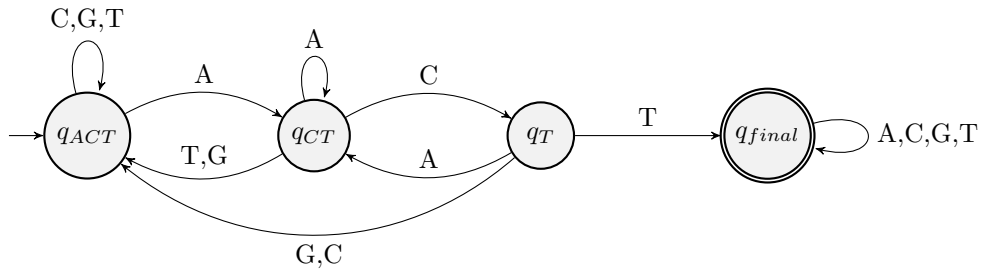
A descrição formal do  $AFD$  é:

$$M_8 = (\{q_{00}, q_{11}, q_{02}, q_{10}, q_{01}, q_{12}\}, \{0\}, \delta, q_{00}, \{q_{00}, q_{02}, q_{10}, q_{01}\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	$\theta$
$q_{00}$	$q_{11}$
$q_{11}$	$q_{02}$
$q_{02}$	$q_{10}$
$q_{10}$	$q_{01}$
$q_{01}$	$q_{12}$
$q_{12}$	$q_{00}$

(i) A linguagem  $L$  das strings sobre  $\{A, C, G, T\}$  que contêm pelo menos uma ocorrência da substring  $ACT$ .



A descrição formal do *AFD* é:

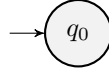
$$M_9 = (\{q_{ACT}, q_{CT}, q_T, q_{final}\}, \{A, C, G, T\}, \delta, q_{ACT}, \{q_{final}\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	A	C	G	T
$q_{ACT}$	$q_{CT}$	$q_{ACT}$	$q_{ACT}$	$q_{ACT}$
$q_{CT}$	$q_{CT}$	$q_T$	$q_{ACT}$	$q_{ACT}$
$q_T$	$q_{CT}$	$q_{ACT}$	$q_{ACT}$	$q_{final}$
$q_{final}$	$q_{final}$	$q_{final}$	$q_{final}$	$q_{final}$

(j)  $L = \emptyset$

Iremos assumir  $\Sigma$  como  $\{0, 1\}$ .



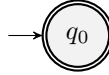
A descrição formal do *AFD* é:

$$M_{10} = (\{q_0\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \emptyset)$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:  $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$  dada por  $\delta(q_0, 0) = \perp$  e  $\delta(q_0, 1) = \perp$

(k)  $L = \varepsilon$

Iremos assumir  $\Sigma$  como  $\{0, 1\}$ .

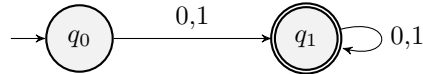


A descrição formal do *AFD* é:

$$M_{11} = (\{q_0\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:  $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$  dada por  $\delta(q_0, 0) = \perp$  e  $\delta(q_0, 1) = \perp$

(l)  $L = \{0, 1\}^* \setminus \{\varepsilon\}$



A descrição formal do *AFD* é:

$$M_{12} = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$

onde  $\delta$  é representado da seguinte maneira:

$\delta$	0	1
$q_0$	$q_1$	$q_1$
$q_1$	$q_1$	$q_1$

## Exercício 2

Para cada um dos  $AFD's$  que construiu nas alíneas (a) a (g) do Exercício 1, descreva a sequência de estados percorridos no input 0100110 e diga se esta string é aceite ou não.

(a)

$\delta(q_{even}, 0100110) = \delta(\delta(q_{even}, 0), 1001110) = \delta(\delta(q_{odd}, 1), 001110), \delta(q_{odd}, 1) = \perp$ . logo esta sequência não é aceite.

(b)

$\delta(q_{01}, 0100110) = \delta(\delta(q_{01}, 0), 100110) = \delta(\delta(q_1, 1), 00110) = \delta(\delta(q_{final}, 0), 0110) = \delta(q_1, 0), 110)$  como  $\delta(q_1, 0) = \perp$ , a sequência não é aceite.

(c)

$\delta(q_{001}, 0100110) = \delta(\delta(q_{001}, 0), 100110) = \delta(\delta(q_{01}, 1), 00110) = \delta(\delta(q_0, 0), 0110) = \delta(\delta(q_{final}, 0), 110) = \delta(\delta(q_{final}, 1), 10) = \delta(\delta(q_{final}, 1), 0) = \delta(q_{final}, 0) = q_{final}$ , como  $q_{final} \in F$ , a sequência é aceite.

(d)

$\delta(q_{0011}, 0100110) = \delta(\delta(q_{0011}, 0), 100110) = \delta(\delta(q_{011}, 1), 00110) = \delta(\delta(q_{01}, 0), 0110) = \delta(\delta(q_1, 0), 110)$ , como  $\delta(q_1, 0) = \perp$ , a sequência não é aceite.

(e)

$\delta(q_{00}, 0100110) = \delta(\delta(q_{00}, 0), 100110) = \delta(\delta(q_{10}, 1), 00110) = \delta(\delta(q_{11}, 0), 0110) = \delta(\delta(q_{01}, 0), 110) = \delta(\delta(q_{11}, 1), 10) = \delta(\delta(q_{10}, 1), 0) = \delta(q_{11}, 0) = q_{01}$ , como  $q_{01} \in F$ , a sequência é aceite.

(f)

$\delta(q_{010}, 0100110) = \delta(\delta(q_{010}, 0), 100110) = \delta(\delta(q_{10}, 1), 00110) = \delta(\delta(q_0, 0), 0110) = \delta(\delta(q_{final}, 0), 110) = \delta(\delta(q_{final}, 1), 10) = \delta(\delta(q_{final}, 1), 0) = \delta(q_{final}, 1) = q_{final}$ , como  $q_{final} \notin F$ , a sequência não é aceite.



(g)

$\delta(q_{001}, 0100110) = \delta(\delta(q_{001}, 0), 100110) = \delta(\delta(q_{01}, 1), 00110) = \delta(\delta(q_0, 0), 0110) = \delta(\delta(q, 0), 110)$ , como  $\delta(q, 0) = \perp$ , a sequência não é aceita.

### Exercício 3

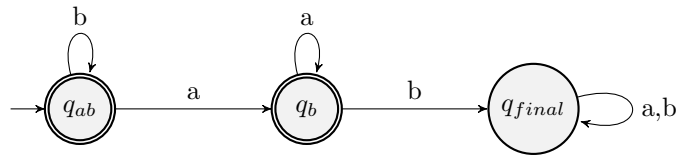
Seja  $L$  uma linguagem regular. Quando é que temos  $\epsilon \in L$ ?

Se  $L$  é regular quer dizer que existe um  $AFD$   $M = (S, \Sigma, \delta, s, F)$  com função de transição total que reconhece  $L$ . Para  $M$  reconhecer  $\epsilon$ , basta termos  $s \in F$ . Ou seja o estado inicial também ser estado de aceitação.

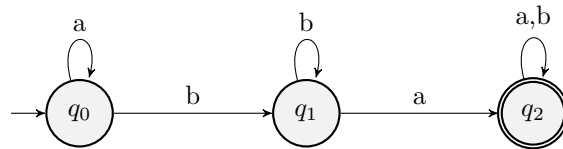
### Exercício 4

Para cada uma das linguagens  $L$  abaixo descreva um  $AFD$  que a reconhece através do seu diagrama de estados. Sugestão: Primeiro construa um  $AFD$  que reconhece o complemento  $\bar{L}$  e depois converta-o para um  $AFD$  que reconhece  $L$ .

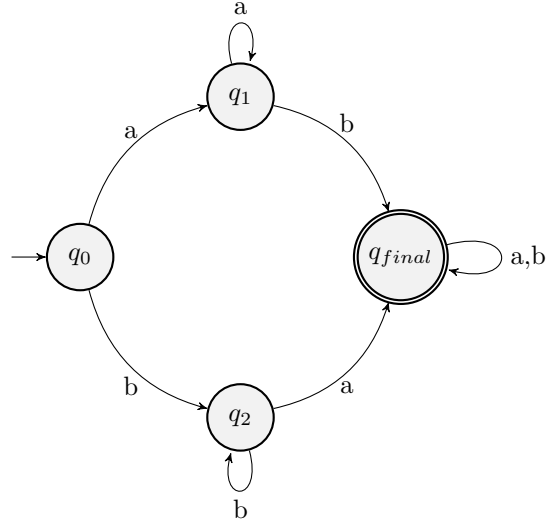
(a) A linguagem  $L$  sobre  $\{a, b\}$  cujas strings não contêm a substring  $ab$ .



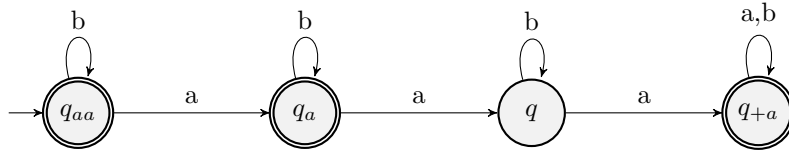
(b)  $L = \{a, b\}^* \setminus \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$



(c)  $L = \{a, b\}^* \setminus (\{a\}^* \cup \{b\}^*)$



(d) A linguagem  $L$  sobre  $\{a, b\}$  cujas strings não contêm exatamente dois  $a$ 's.



### Exercício 5

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  linguagens regulares sobre o mesmo alfabeto  $\Sigma$ . Mostre que  $L_1 \cap L_2$  também é regular.

Como  $L_1$  e  $L_2$  são regulares, existem  $AFD$ 's  $M_1 = (S_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$  e  $M_2 = (S_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ , com funções de transição  $\delta_1$  e  $\delta_2$  totais tal que  $M_1$  e  $M_2$  aceitam  $L_1$  e  $L_2$  respetivamente. Queremos construir um  $AFD$   $M$  a partir de  $M_1$  e  $M_2$  que reconhece  $L_1 \cap L_2$ . Dado um input  $w$ , queremos simular as computações de  $M_1$  e  $M_2$  em  $w$  lado-a-lado, e aceitar  $w$  exatamente quando ambos  $M_1$  e  $M_2$  aceitam  $w$ .

Para implementar a estratégia acima vamos definir um novo  $AFD$   $M = (S, \Sigma, \delta, s, F)$ . Para tal necessitamos de a cada momento saber os estados atuais de  $M_1$  e  $M_2$  na computação. Ou seja os estados de  $M$  podem ser descritos como *pares* de estados de  $M_1$  e  $M_2$ , em que cada par representam o estado atual dos dois  $AFD$ 's. Portanto queremos  $S = S_1 \times S_2$ . Se  $M$  estiver no estado  $(q_1, q_2) \in S_1 \times S_2$  num dado ponto da computação e ler o símbolo  $a \in \Sigma$ , queremos simular a computação de  $M_1$  e  $M_2$ , para tal deveríamos atualizar  $q_1$

para  $\delta_1(q_1, a)$  e  $q_2$  para  $\delta_2(q_2, a)$ . Definimos então a função de transição  $\delta$  como

$$\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)).$$

Para o estado inicial de  $M$ , queremos escolher o par de estados iniciais de  $M_1$  e  $M_2$ . Escrevemos então  $s = (s_1, s_2)$ . Resta especificar  $F$ , o conjunto de estados finais de  $M$ . Queremos aceitar  $w$  se ambas as computação de  $M_1$  e  $M_2$  acabarem em estados de aceitação. Para tal queremos escolher  $F$  como o conjunto de pares  $(q_1, q_2) \in S$  tal que  $q_1 \in F_1$  e  $q_2 \in F_2$ . Ou seja definimos o conjunto de estados de aceitação  $F$  como

$$F = (F_1 \times F_2)$$

Agora que definimos  $M$  formalmente, queremos provar que  $L(M) = L_1 \cap L_2$ . Para tal vamos mostrar  $L(M) \subseteq L_1 \cap L_2$  e  $L_1 \cap L_2 \subseteq L(M)$ . Começemos por supor que  $w \in \Sigma^*$ , arbitrário. Denotemos a sequência de estados gerada por  $w$  em  $M_i$  por  $(r_0^{(i)}, r_1^{(i)}, \dots, r_n^{(i)})$  para  $i \in \{1, 2\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $w \in L_1 \cap L_2$ , pela definição de  $M_1$  e  $M_2$  temos que  $r_n^{(1)} \in F_1$  e  $r_n^{(2)} \in F_2$ . Deste modo concluímos que  $\delta(w) = (r_n^{(1)}, r_n^{(2)}) \in F$ . Como  $W$  é arbitrário, segue que  $L_1 \cap L_2 \subseteq L(M)$ . Por outro lado, se  $w \notin L_1 \cap L_2$ , então temos que  $r_n^{(1)} \notin F_1$  e  $r_n^{(2)} \notin F_2$ , o que leva a  $(r_n^{(1)}, r_n^{(2)}) \notin F$ , portanto  $w \notin L(M)$ . Logo,  $L(M) \subseteq L_1 \cap L_2$ , e concluímos que  $L(M) = L_1 \cap L_2$ .

## Exercício 6

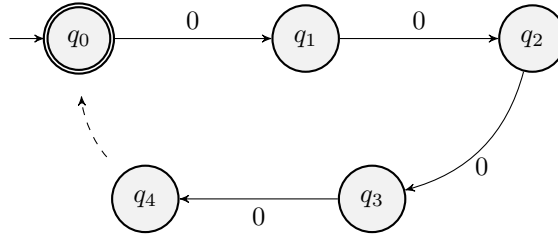
Dada uma string  $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$  definimos o seu reverso  $rev(w) = w_n w_{n-1} \dots w_2 w_1$ . Para uma linguagem  $L \subseteq \Sigma^*$ , definimos  $rev(L) = rev(w) | w \in L$ . Mostre que se  $L$  é regular então  $rev(L)$  também é regular.

Resolver com um AFN .-.

## Exercício 7

Seja  $L_n = \{0^k | k \text{ é múltiplo de } n\}$ . Mostre que  $L_n$  é regular para qualquer  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Fixamos  $n \in \mathbb{N}^+$ . Queremos mostrar que o AFD  $M = (S, \Sigma, \delta, s, F)$ , reconhece  $L_n$  i.e  $L(M) = L_n$ .



Vamos definir  $M$ . Começamos pelo conjunto de estados  $S$ . Queremos cobrir todos os múltiplos possíveis, começando no  $q_0$ , para tal vamos ter  $m - 1$  estados tal que  $m$  é o número de múltiplos possíveis ou seja,  $S = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}\}$ . Intuitivamente  $\Sigma = 0$ . O estado inicial  $q$  será o estado  $q_0$ , portanto  $s = q_0$ . O conjunto de estados finais  $F$  é dado por um único estado  $q_0$  o que se traduz para  $F = \{q_0\}$ . Falta nos então definir  $\delta$ . Em cada estado  $q_i \in S$  queremos ler o símbolo '0' repetindo ciclicamente até chegar ao estado final  $q_0$ . Portanto obtemos:

$$\delta(q_i, 0) = q_{(i+1)\%n}$$

Desta forma,  $M$  reconhece sequência de potências de 0 cujo expoente seja um múltiplo de  $n$ . Portanto agora falta-nos provar que  $L(M) = L_n$ . Para tal vamos demonstrar que  $L(M) \subseteq L_n$  e  $L_n \subseteq L(M)$ . Começamos por supor que  $w \in \Sigma^*$ , arbitrário. Denotemos a sequência de estados gerado por  $w$  em  $M$  por  $(q_0, q_1, q_2, \dots, q_i)$  com  $i \in \mathbb{N}$ . Se  $w \in L_n$  pela definição de  $L_n$ ,  $q_i \in F$ . Como  $F = \{q_0\}$ ,  $q_i = q_0$ . Ou seja  $\delta(w) = q_0 \in F$ . Visto que  $w$  é arbitrário, segue que  $L_n \subseteq L(M)$ . Por outro lado, se  $w \notin L_n$  então  $q_i \notin F$ , pelo que  $q_i \neq q_0$ . Como  $F = \{q_0\}$  e  $q_i \neq q_0$ ,  $w \notin L(M)$ . Logo,  $L(M) \subseteq L_n$ , e concluímos que  $L(M) = L_n$ .