Unidad I

Matrices

Guía de lectura

Contenido

Definición, clasificación. Operaciones con matrices

Matrices y determinantes

Para comenzar esta unidad, es fundamental comprender dos conceptos clave: la matriz y la determinante. Te invito a explorar la infografía interactiva para familiarizarte con ambos temas.

Una matriz se simboliza generalmente con una letra mayúscula y, a veces, con una raya encima de las letras. Ej. $\bar{A}$; $\bar{B}$; $\bar{C}$.

$$\bar{A} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta es una matriz de orden m x n : m: número de filas y n: número de columnas. La forma más simplificada de representar una matriz es la siguiente:

$\bar{A} = [a_{ij}]$, en donde i es la fila y j la columna; se lee a - sub ij.

Los símbolos que aparecen dentro del corchete se denominan elementos de la matriz y se representan por a_{ij}.

i: toma valores enteros y positivos desde la unidad hasta m.

j: toma valores enteros y positivos desde la unidad hasta n.

Ejemplos:

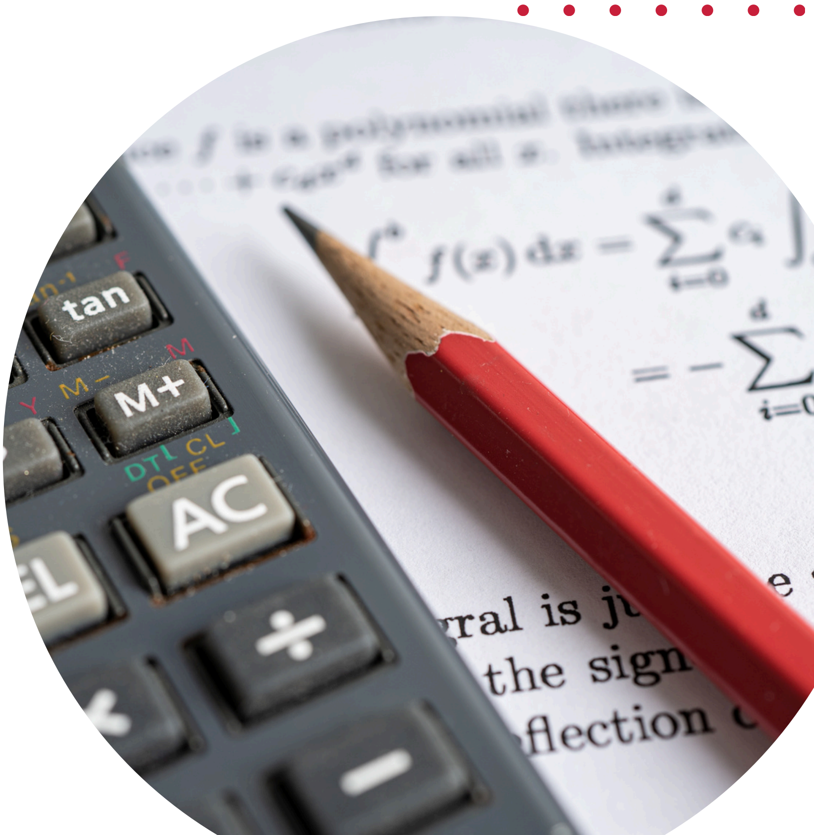
Para $i = 2$; $j = 3$, se tiene el elemento a_{23} . El elemento que ocupa la segunda fila y tercera columna se lee: a - sub dos tres.

Para $i = 3$; $j = 1$, se tiene el elemento a_{31} . El elemento que ocupa la tercera fila y primera columna se lee: a - sub tres uno.

En general, el primer subíndice indica la fila y el segundo indica la columna.

Los elementos a_{11} ; a_{22} ; a_{33} ; a_{44} ;... m_{mn}, con m = n constituyen la diagonal principal de una matriz cuadrada.

Los elementos de una matriz pueden ser positivos, negativos, cero, enteros, fraccionarios, irracionales, o de otras formas.



Matrices mas usuales

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ Es una matriz de orden 2 x 3, de dos filas y tres columnas.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 3 & 5 \\ -3 & \sqrt{5} & 0 & 2 \\ 1/2 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$: matriz cuadrada de orden (m x n), 4 x4.

Los elementos que forman la diagonal principal en esta matriz cuadrada de 4 x 4 son:

$$b_{11} = 1; \quad b_{22} = \sqrt{5}; \quad b_{33} = 6; \quad b_{44} = 7$$

$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ Vector columna de orden 4 x 1. (Vector columna de orden m x 1) D= [4 5 8]: Matriz de orden 1 x 3 (Vector de orden 1 x n).

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: Es una matriz cuadrada de orden n x n, con unidades positivas en la diagonal principal y cero los restantes elementos.

Determinante

Antes de efectuar operaciones con matrices, conviene estudiar el manejo de los determinantes.

El símbolo generalmente utilizado para representar un determinante es delta mayúscula del alfabeto griego, que es un triángulo (Δ), o una letra mayúscula entre dos líneas verticales. Por ejemplo: IAI, IBI , a diferencia de la matriz que utiliza el corchete, tal como se indicó al comienzo de esta lectura.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

Calcular el siguiente determinante:

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ El valor del determinante de segundo orden (2 x 2) está dado por la diferencia entre el producto de los elementos de la diagonal principal y el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Este procedimiento es válido solamente para determinantes de orden 2 x 2.

En este caso particular, los elementos de la diagonal principal son 4 y 2, y los elementos de la diagonal secundaria son 1 y 3.

Solución: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4)\,2 - (1)\,3 = 8 - 3\ ;\ \Delta = 5$

Dada la matriz:

$A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, calcular el determinante correspondiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3)5 - 4(-2) = 15 + 8$$

Solución: $|A| = 23$

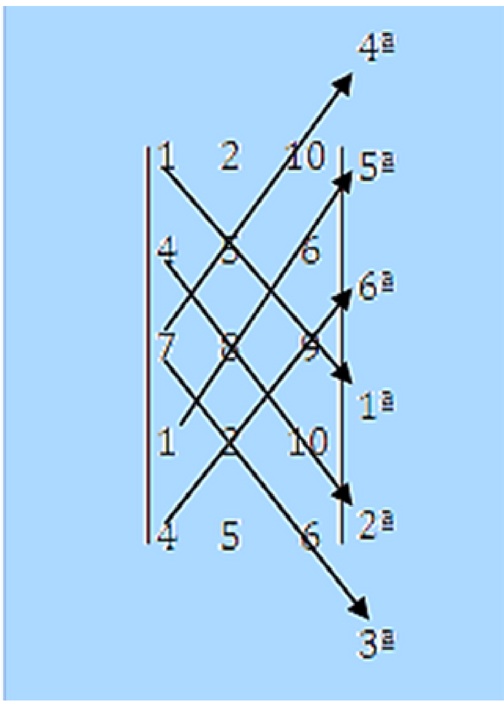
Calcular el determinante de tercer orden:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Uno de los métodos para calcular el determinante de tercer orden consiste en lo siguiente:

- Se repiten las dos primeras filas a continuación de la tercera fila.

Figura 1: *Esquema auxiliar de cálculo*



Fuente: elaboración del docente.

- Se forman los productos de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas: 1 ª; 2 ª; 3ª, como así también el producto de los elementos de la diagonal secundaria y sus paralelas: 4 ª ; 5ª; y 6 ª, atendiendo para cada caso la ley de los signos.

1ª) 1 x 5 x 9 = 45
2ª) 4 x 8 x 10 = 320
3ª) 7 x 2 x 6 = 84

4ª) 7 x 5 x 10 = 350
5ª) 1 x 8 x 6 = 48
6ª) 4 x 2 x 9 = 72

- Se efectúa la suma de los valores correspondientes a las tres primeras y las tres últimas indicadas en el esquema. De la suma de las tres primeras se resta la suma de las tres últimas.

1 ª + 2ª + 3ª = 45 + 320 + 84 = 449

4ª + 5ª + 6ª = 350 + 48 + 72 = 470

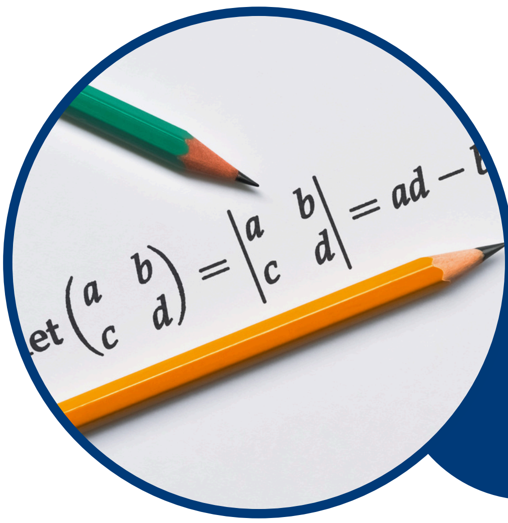
449 - 470=-21

IBI= -21

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 X 5 X 9 + 4 X 8 X 10 + 7 X 2 X 6 - (7 X 5 X 10 + 1 X 8 X 6 + 4 X 2 X 9) = 449 - 470$$

Solución: IBI = 449 - 470 = - 21

Observación: el procedimiento utilizado corresponde al método de Sarrus y es válido únicamente para determinantes de tercer orden.



Menor complementario, adjunto o co-factor de aij, y principales propiedades de los determinantes

Estos conceptos se desarrollan a continuación con el propósito de facilitarte la comprensión de los métodos de resolución de determinantes laplaciano y de chío, respectivamente.

- **Menor complementario de un elemento aii de una o de una matriz cuadrada o de un determinante**

El menor complementario de un elemento aij es el determinante de orden (n - 1)(n - 1) que resulta al suprimir la fila i y la columna j de la matriz dada.

Calcular el menor complementario de cada uno de los elementos de la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El menor complementario de un elemento aij. se simboliza por I Mij I.

IMijI: menor complementario o simplemente menor del elemento aij.

Se suprime la primera fila y la primera columna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ; |M_{11}| \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

IM12I: menor del elemento a_{12}

Se suprime la fila y la columna que indican los correspondientes subíndices: la fila uno y la columna dos.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |M_{12}| \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$[M_{13}]$ menor de a_{13}

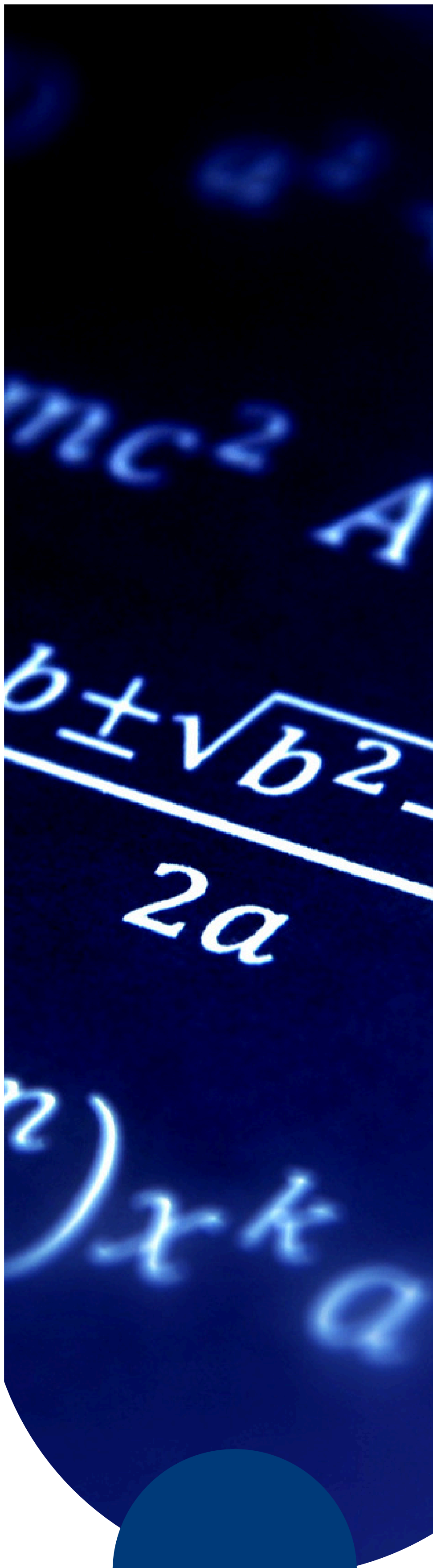
Se suprime la fila uno y la columna tres.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Y así sucesivamente:

$$|M_{21}| \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{22}| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{23}| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|M_{31}| \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad |M_{32}| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad |M_{33}| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$



Adjunto co-factor de un elemento

Si $|M_{ij}|$ se multiplica por $(-1)^{i+j}$ se obtiene lo que se denomina adjunto o co-factor de a_{ij} , el cual es un coeficiente y se simboliza por lo siguiente:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \quad |M_{ij}|$$

Los elementos c_{ij} tienen signos alternados. Llevan signos negativos para los valores impares de suma (i+j), ello significa que los determinantes resultantes $|M_{ij}|$ cambian de signos.

Calcular los adjuntos de: a_{23} y a_{31}

$c_{23} = (i = 2 ; j = 3)$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \mid M23 \mid 1 = (-1)^{5} \quad |M_{23}| \; ; \; C_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$c_{31} = (i = 3 ; j = 1)$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \quad |M31| = (-1)^{4} \quad |M_{31}| \; ; \qquad C_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

Dada la matriz: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Calcular los adjuntos o co-factores correspondientes a los elementos 5 y 7, respectivamente. El elemento 5 corresponde a la 2ª fila y 2ª columna,

$$a_{22} = 5 \quad ; \quad i = 2 \quad ; \quad j = 1 \,)$$

Se determina el menor del elemento 5: $|M_{22}|$

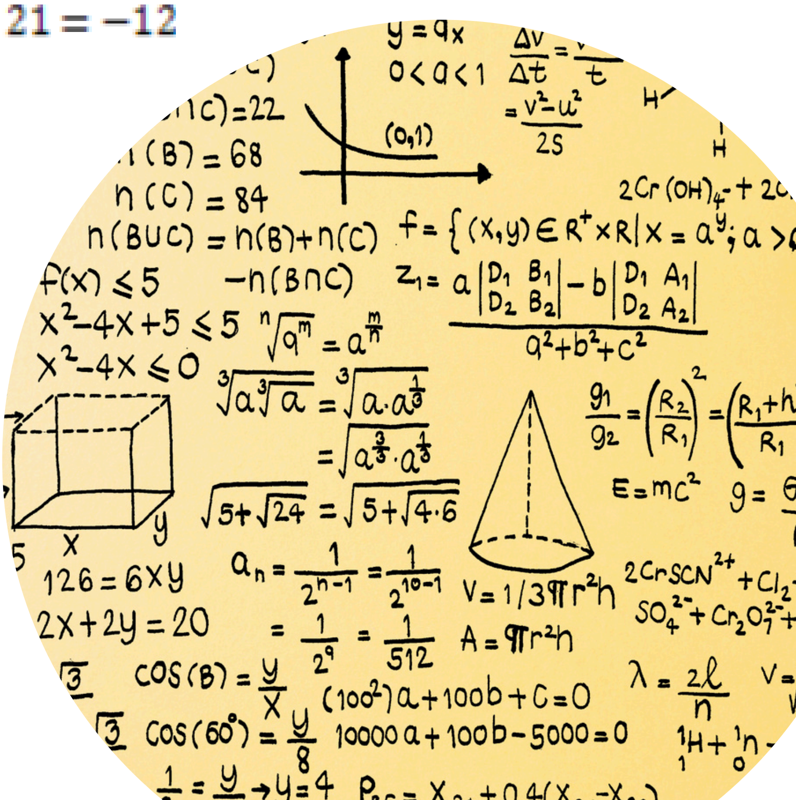
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad ; M_{22} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$

$C_{22} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -\,12$

El elemento 7 corresponde a la 3ª fila y 1ª columna.

$$a_{31} = 5 \quad ; \quad i = 3 \quad ; \quad j = 1 \,)$$



Se determina el menor del elemento 7: $|M_{31}|$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} ; \quad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

$$C_{31} = (-1)^4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} ; \quad C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$$ Solución: $= C_{22} = -12$ y $C_{31} = -3$

Principales propiedades de los determinantes

- Si se cambian las filas por las columnas, el valor del determinante no se altera. Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} ; \quad \Delta = 42 - 40 ; \quad \Delta = 2$$

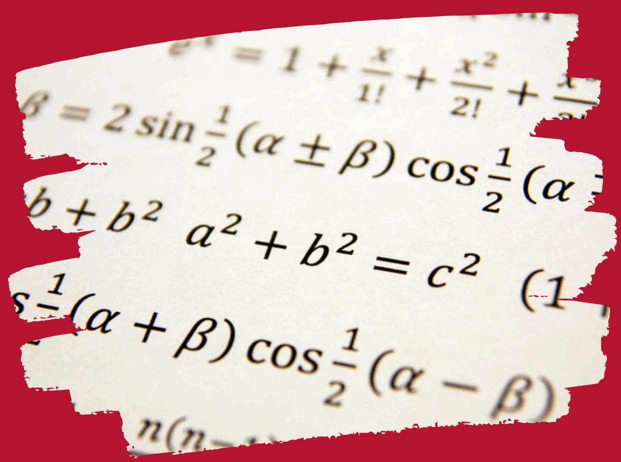
Intercambiando la primera fila por la primera columna se tiene:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} ; \quad \Delta = 42 - 40 ; \quad \Delta = 2$$

- Si se cambian entre sí dos líneas paralelas (filas o columnas) sin alterar la disposición de las restantes, el valor del determinante cambia de signo, pero no su valor absoluto. Ejemplo:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

El determinante es = (4 x 1x 1 + 1 x 2 x 2 + 5 x 3x 3) - (5 x 1 x 2 + 4 x 2 x 3 + 1 x3x 1) =16



Intercambiando la primera fila con la tercera fila se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} ;10 + 3 + 24 - (4 + 45 + 4) = -16$$

$$\Delta = -16$$

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican o se dividen por un número, el determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

- Si a los elementos de una línea se suman o se restan los elementos correspondientes a otra línea paralela, el valor del determinante no se altera.

Suma algebraica, multiplicación por un escalar

Suma y resta de matrices

Para sumar o restar dos matrices es necesario que sean del mismo orden, es decir, deben tener igual número de filas y de columnas.

Se suman o se restan elementos a elementos que ocupan la misma fila y la misma columna.

- Sumar las siguientes matrices: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

A +B = C

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}$$

Solución: $C = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}$

- Sumar las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución: $C = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

Multiplicación de matrices

Dadas las matrices A y B, pueden darse dos situaciones:

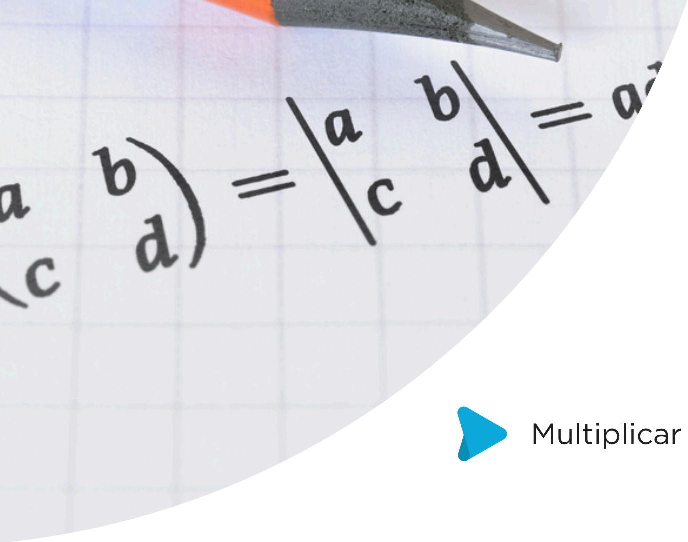
- Si se tiene AB, entonces, A pre- multiplica a $\underline{B}$ y B post-multiplica a $\underline{A}$
- Si se tiene BA, entonces $\underline{B}$, pre-multiplica a $\underline{A}$, y $\underline{A}$ post-multiplica a $\underline{B}$

En la multiplicación de dos matrices (AB) es necesario que el **número de elementos de la fila** de la matriz que pre-multiplica (A) sea igual al **número de elementos de la columna** de la matriz que post-multiplica (B); en otros términos, la matriz (A) debe tener igual número de columnas que el número de filas de la matriz (B).

Las matrices se multiplican fila por columna (F_{ij}). Cada fila de la matriz que pre-multiplica se multiplica por cada una de las columnas de la matriz que post-multiplica.

Dada dos matrices: $\underline{A}$ y $\underline{B}$ se tienen:

$$A = \left[a_{ij}\right] \; ; \; B = \left[b_{ij}\right]$$
$$AB = C \; ; \; C = \left[c_{ij}\right]$$
$$c_{ij} = \sum_{K=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj}$$



Multiplicar las siguientes matrices: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

La multiplicación AB no es posible, puesto que el número de elementos de la fila de (A) es 2, mientras que el número de elementos de la columna de (B) es 3.

La multiplicación BA sí es posible, puesto que el número de elementos de la fila de la matriz (B) es igual al número de elementos de la columna de la matriz (A).

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ & \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Un elemento de la matriz producto lleva por subíndice el número de la fila de la matriz que pre- multiplica y el número de la columna de la matriz que post-multiplica.

-Fila (1) x Columna (1), se obtiene: C_{11}

C_{12} = 6x4 + 7x5 = 24+35 ; C_{11} = 59

-Fila (1) x Columna (2), se obtiene: C_{12}

C_{12} = 6 x 1 + 7 x 2 = 6 + 14 ; C_{12} = 20

-Fila (2) x Columna (1), se obtiene: C21

C_{21} = 8 x 4 + 9 x 5 = 32 + 45 ; C_{21} = 77

-Fila (2) x Columna (2), se obtiene: C_{22}

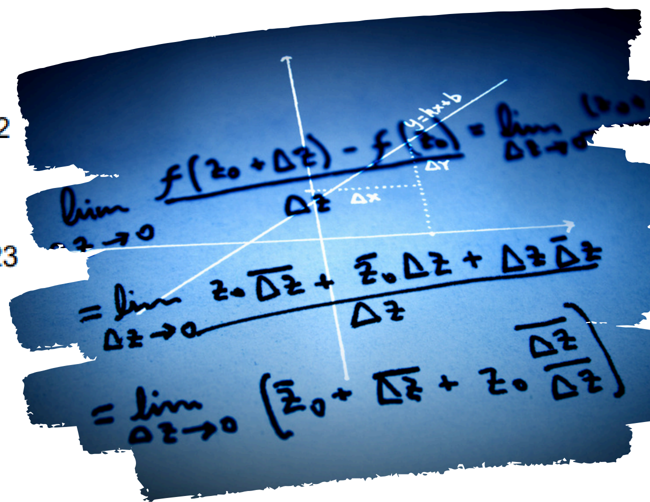
C_{22} = 8 x 1 + 9 x 2 = 8 + 18 ; C_{22} = 26

-Fila (3) x Columna (1), se obtiene: C_{31}

C_{31} = 3 x 4 + 10 x 5 = 12 + 50 ; C_{31} = 62

-Fila (3) x Columna (2), se obtiene: C_{32}

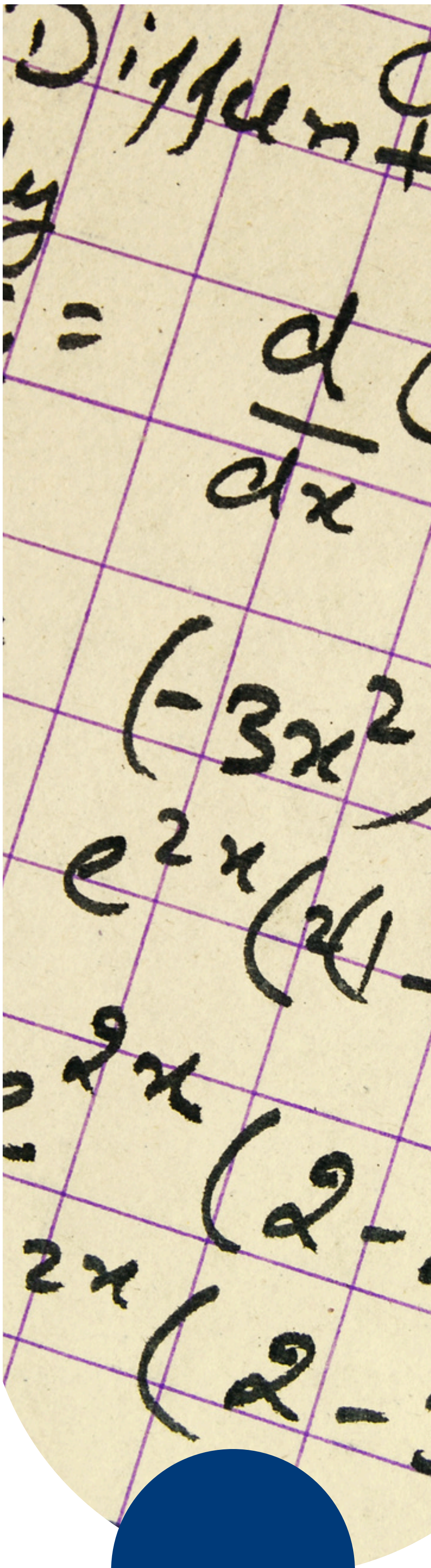
C_{32} = 3 x 1 + 10 x 2 = 3 + 20 ; C_{32} = 23



Luego: $BA = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & a_{22} \\ c_{11} & c_{32} \end{vmatrix}$

Solución: $BA = \begin{bmatrix} 59 & 20 \\ 77 & 26 \\ 62 & 23 \end{bmatrix}$

Obsérvese que la matriz resultante es de orden 3 x 2, esto es porque la matriz $\underline{B}$ tiene 3 filas y la matriz $\underline{A}$ tiene 2 columnas. Si se multiplica una matriz de orden m x n por otra de orden n x p, se obtiene una nueva matriz de orden m x p.



Efectuar la multiplicación de las siguientes matrices:

$A=[3\ 1\ O\ 4]$; $B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$; $AB = C$

La matriz (A) es una matriz fila (una sola fila).

$AB = [3\ 1\ O\ 4] \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

Fila por la Primera Columna, se obtiene: C_{11}

$C_{11} = 3 \times 2 + 1 \times 3 + O \times 4 + 4 \times 5 = 6 + 3 + O + 20$; $C_{11} = 29$

Fila por la Segunda Columna, se obtiene: C_{12}

$C_{12} = 3 \times 6 + 1 \times 7 + O \times 8 + 4 \times 9 = 18 + 7 + O + 36$; $C_{12} = 61$

Solución: AB = [29 61], de orden 1 x 2

Efectuar la multiplicación de las siguientes matrices:

$A=[1\ \ 2\ \ 3]$; $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

$AB = [\,1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 9\,]$; $AB = [\,4 + 14 + 27\,]$

Solución: $AB = [\,45\,]$, es un escalar (matriz de un elemento).

Efectuar la multiplicación de las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}-3 & 7 & 8 & -9\end{bmatrix}$$

Solución: $AB = \begin{bmatrix}-12 & 28 & 32 & -36\\ -15 & 35 & 40 & -45\\ -18 & 42 & 48 & -54\end{bmatrix}$

Efectuar la multiplicación de las siguientes matrices: (BA)

$$A=\begin{bmatrix}7 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 11 & 12\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix}3 & 5\\ 11 & 12\\ 4 & -3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$C_{11} = 3(7) + 5(-2) = 21 - 10$; $C_{11} = 11$

$C_{12} = 3(-1) + 5(2) = -3 + 10$; $C_{12} = 7$

$C_{13} = 3(O) + 5(1) = O + 5$; $C_{13} = 5$

$C_{21} = 11(7) + 12(-2) = 77 - 24$; $C_{21} = 53$

$C_{22} = 11(-1) + 12(2) = -11 + 24$; $C_{22} = 13$

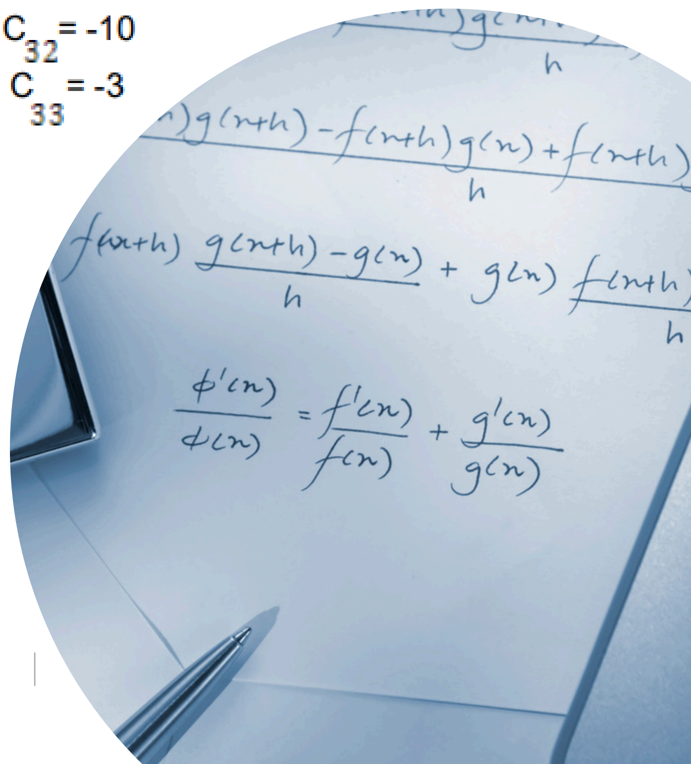
$C_{23} = 11(O) + 12(1) = O + 12$; $C_{23} = 12$

$C_{31} = 4(7) + (-3)(-2) = 28 + 6$; $C_{31} = 34$

$C_{32} = 4(-1) + (-3)2 = -4 - 6$; $C_{32} = -10$

$C_{33} = 4(0) + (-3)1 = 0 - 3$; $C_{33} = -3$

Solución: $BA=\begin{bmatrix}11 & 7 & 5\\ 53 & 13 & 12\\ 34 & -10 & -3\end{bmatrix}$



Efectuar la multiplicación de las siguientes matrices:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$A\,I = I\,A$, En este caso, el orden de los factores no altera el producto, por ser matriz unitaria uno de los factores. Dada una matriz cualquiera que cumpla la condición para la multiplicación, si se multiplica por otra matriz unidad, la matriz producto es igual a la misma matriz dada.

$$C_{11} = 1X\tfrac{1}{2} + 0X4 = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad C_{11} = \tfrac{1}{2}$$
$$C_{12} = 1X3 + 0X\tfrac{1}{3} = 3 \quad ; \quad C_{12} = 3$$
$$C_{21} = 0X\tfrac{1}{2} + 1X4 = 4 \quad ; \quad C_{21} = 4$$
$$C_{22} = 0X3 + 1X\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} \quad ; \quad C_{22} = \tfrac{1}{3}$$

Solución: $IA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = A$

Efectuar la multiplicación de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; \quad C_{11} = a_{11} + x_1 + a_{11}x_2 ; \quad C_{21} = a_{21} + x_1 \quad a_{22}x_2$$

Solución: $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}$

Efectuar la multiplicación: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$C_{11} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$C_{21} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$C_{31} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Solución: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

- Multiplicar las siguientes matrices: A= $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Solución: Ax = $\begin{bmatrix} 3x_1 & +5x_2 & -2x_3 \\ 4x_1 & +x_2 & +6x_3 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 \end{bmatrix}$

Matriz transpuesta de una matriz dada

Transponer una matriz significa escribir las filas como columnas; la matriz transpuesta se simboliza con la misma letra que representa a la matriz dada, añadida con una tilde.

Transponer la matriz: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

A' = matriz transpuesta de A

Solución: A' = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

Transponer la matriz: $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Solución: $A' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Determinante de una matriz cuadrada. Regla de Sarrus

Adjunta de una matriz cuadrada $\underline{A}\,(a_{ij} = A)$

La adjunta de una matriz cuadrada es la matriz formulada por los co-factores de la matriz transpuesta correspondiente.

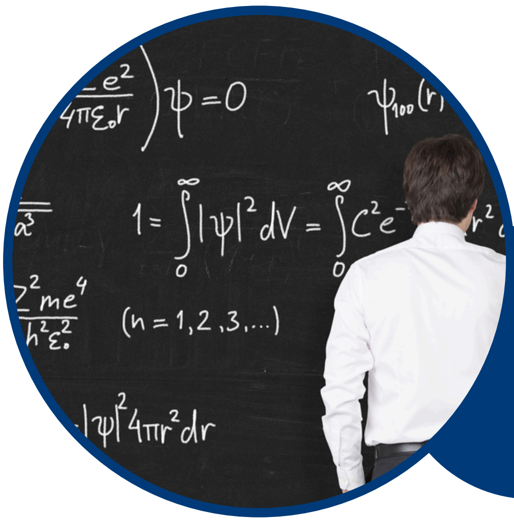
Hallar la adjunta de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

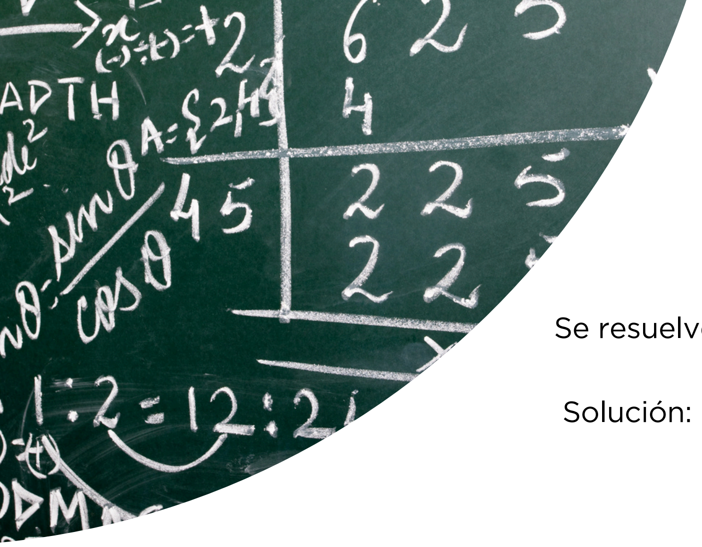
Se transpone la matriz dada; $A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Recordando que los co-factores de los elementos están dados por la relación $C_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$, se obtiene la adjunta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Los signos de los determinantes se alternan.





Se resuelven los determinantes y se tiene.

Solución: $adj\,A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -20 & 2 & 12 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

- Calcular la adjunta de la matriz unitaria: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se transpone: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Se altera al transponer.

Se determina la adjunta: $Adj = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Solución: la adjunta de la matriz unitaria es la misma matriz unitaria y es igual a su transpuesta. Luego se tiene: $I = I' = adj \cdot I$

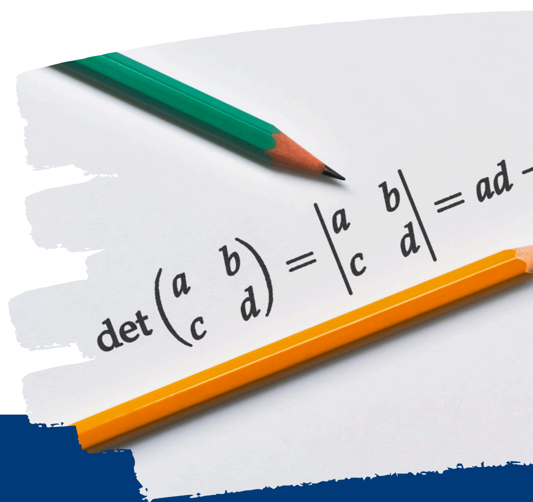
- Determinar la adjunta de la matriz siguiente: $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

Se transpone: $B' = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ Transpuesta de la matriz B.

Se forma la matriz de los co-factores de la transpuesta de la matriz: $B; ^{adj\,B}$

$$adj\,I \quad \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{32} \\ b_{23} & b_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{32} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{31} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} \\ b_{22} & b_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{31} \\ b_{12} & b_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Los signos se alternan.



Obsérvese que los elementos de la matriz adjunta constituyen los co-factores (C_{ij}) de los elementos de la matriz transpuesta.

Solución: $adj\ I = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$

- Determinar la adjunta de la matriz siguiente: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Se transpone la matriz dada. $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Se forma la adjunta de A. Solución: $adj\ A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Inversa o recíproca de una matriz

Antes de iniciar a realizar el cálculo de la inversa de una matriz, te invito a observar el video donde se muestran símbolos y fórmulas básicas para el desarrollo de los mismos.

- Calcular la inversa o recíproca de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se transpone la matriz A ; $A' = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

Se establece la adjunta de A (matriz de co-factores de la transpuesta).

$$adjA = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -11 \\ -4 & -3 & 22 \\ -1 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

La resolución del determinante puede realizarse por cualquiera de los métodos estudiados, sin embargo, una forma práctica de calculado es multiplicar los elementos de una línea de la matriz transpuesta por los elementos de la misma línea de la matriz adjunta correspondiente, y sumar algebraicamente los productos obtenidos. Por ejemplo: la 1ª fila de la matriz transpuesta por la 1ª fila de la matriz adjunta; 2ª columna de la matriz transpuesta por la 2ª columna de la matriz adjunta; y así sucesivamente. El procedimiento es equivalente al método laplaciano.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; A_{ij}A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 11 \\ -4 & -3 & 22 \\ -1 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1(6) + 6(-1) + 1(-11) = -1$; primera fila.

$|A| = 3(-4) + 7(-3) + 1(22) = -11$; segunda fila

$|A| = 5(-1) + 8(2) + 2(-11) = -11$; tercera fila.

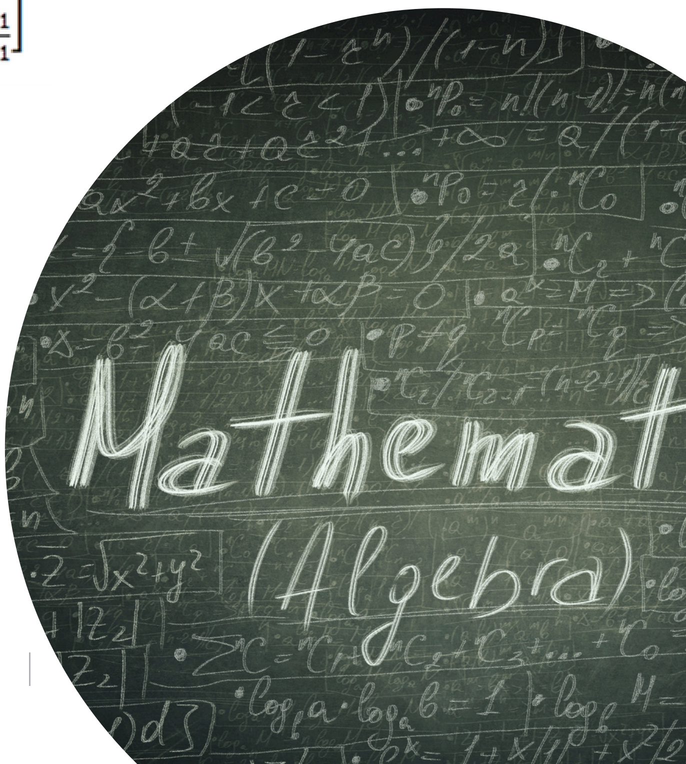
$|A| = 1(6) + (-4) + 5(-1) = -11$; primera columna, así sucesivamente.

La suma de los productos de los elementos de una misma línea indicada constituye el determinante $|A| = -11$

Este procedimiento permite, al mismo tiempo, verificar la adjunta, pues en todos los casos el resultado debe ser el mismo; en este ejercicio es (-11).

$$\frac{adj\ A}{|A|.} = A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -1 & 11 \\ -4 & -3 & 22 \\ -1 & 2 & -11 \end{bmatrix}}{-11} = \begin{bmatrix} \frac{6}{-11} & \frac{-1}{-11} & \frac{-11}{-11} \\ \frac{-4}{-11} & \frac{-3}{-11} & \frac{22}{-11} \\ \frac{-1}{-11} & \frac{2}{-11} & \frac{-11}{-11} \end{bmatrix}$$

Solución: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{11} & \frac{1}{11} & 1 \\ \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & -2 \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & 1 \end{bmatrix}$



Para verificar la operación se efectúa la multiplicación. El producto debe ser igual a la matriz unitaria (1).

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 6 & 1\\ 3 & 7 & 1\\ 5 & 8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -1 & 11\\ -4 & -3 & 22\\ -1 & 2 & -11\end{bmatrix}$$ (Fila por columna)

Primera fila por la primera columna:

$$b_{11}\left(\frac{-6}{11}\right)+3\left(\frac{4}{11}\right)+5\left(\frac{1}{11}\right)=\frac{-6}{11}+\frac{12}{11}+\frac{5}{11}=\frac{11}{11}; \qquad b_{11}=1$$

Primera fila por la segunda columna: b_{12}

$$b_{12}=1\left(\frac{1}{11}\right)+3\left(\frac{3}{11}\right)+5\left(\frac{-2}{11}\right)=\frac{1}{11}+\frac{9}{11}+\frac{10}{11}=0 \qquad ; \; b_{12}=0$$

Primera fila por la tercera columna: b_{13}

$$b_{13}=1(1)+3(-2)+5(1)=1-6+5=O \qquad ; \; b_{13}=0$$

Segunda fila por la primera columna: b_{21}

$$b_{21}=6\left(\frac{-6}{11}\right)+7\left(\frac{4}{11}\right)+8\left(\frac{1}{11}\right)=\frac{-36}{11}+\frac{28}{11}+\frac{8}{11}=0 \qquad ; \; b_{21}=0$$

Segunda fila por la segunda columna: b_{22}

$$b_{22}=6\left(\frac{1}{11}\right)+7\left(\frac{3}{11}\right)+8\left(\frac{-2}{11}\right)=\frac{6}{11}+\frac{21}{11}+\frac{16}{11}=\frac{11}{11} \qquad ; \; b_{22}=1$$

Segunda fila por la tercera columna: b_{23}

$$b_{23}=6(1)+7(-2)+8(1)=6-14+8=0 \qquad ; \; b_{23}=0$$

Tercera fila por la primera columna: b_{31}

$$b_{31}=1\left(\frac{-6}{11}\right)+1\left(\frac{4}{11}\right)+2\left(\frac{1}{11}\right)=\frac{-6}{11}+\frac{4}{11}+\frac{2}{11}=0 \qquad ; b_{31}=0$$

Tercera fila por la segunda columna: b_{32}

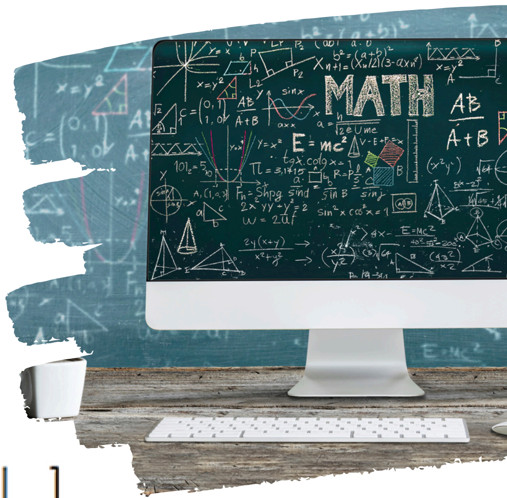
$$b_{32}=1\left(\frac{1}{11}\right)+1\left(\frac{3}{11}\right)+2\left(\frac{-2}{11}\right)=\frac{1}{11}+\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=0 \qquad ; b_{32}=0$$

Tercera fila por la tercera columna: b_{33}

$$b_{33}=1(1)+1(-2)+2(1)=1-2+2=1 \qquad ; \; b_{33}=1$$

La operación queda verificada con: $AA^{-1} = I$; $AA^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I$

Calcular la inversa de la matriz: $B = \begin{matrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 0\\ -2 & -1 & 5 & 6\\ 0 & 2 & 4 & 1\end{matrix}$



Se transpone la matriz B ' ; B ' = $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 5 & 4\\ 1 & 0 & 6 & 1\end{bmatrix}$

Se forma la adjunta de la matriz B

$$adjB = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 6\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & 6 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 6\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 5 & 4\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & 6 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 6\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 6 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 6\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Se efectúan los determinantes que se indican dentro del corchete y se tiene:

$$adjB \qquad adj\ B = \begin{bmatrix}-5 & -12 & -2 & 17\\ 11 & -23 & -6 & 25\\ -7 & 17 & 5 & -23\\ 6 & -22 & -8 & 29\end{bmatrix}$$

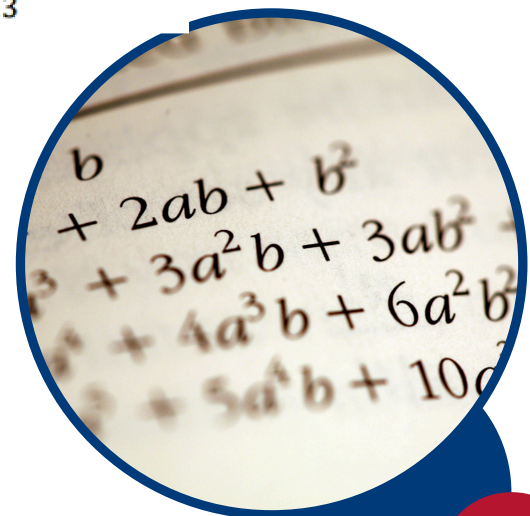
El determinante de se obtiene multiplicando la primera fila de la adjunta por la primera fila de la transpuesta correspondiente, tal como se efectúo en el ejercicio anterior.

$$|B|. = \Delta = (-5)1 + (-12)1 + (-2)(-2) + 17(0) = -5 - 12 + 4 + O\;;\;\; |B| = \;\Delta = -13$$

La inversa de la matriz B $\quad B: B^{-1} = \dfrac{adj\ B}{|B|.}$

$$\frac{\begin{matrix} -5 & -12 & -2 & 17 \\ 11 & -23 & -6 & 25 \\ -7 & 17 & 5 & -23 \\ 6 & -22 & -8 & 29 \end{matrix}}{-13}$$

Solución: $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{17}{13} \\ -\frac{11}{13} & \frac{23}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{25}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{17}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{23}{13} \\ -\frac{6}{13} & \frac{22}{13} & \frac{8}{13} & -\frac{29}{13} \end{bmatrix}$



Calcular la inversa de la matriz : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Se transpone la matriz $A \quad ; A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Se establece la adjunta de $\underline{A}$ (matriz de co-factores de la transpuesta).

$$adjA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se establece el determinante de A. $|A| = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1 \quad ; \quad |A| = 1$

Se aplica la relación: $A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|.}$

Solución: $A^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}{1}$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Dadas las matrices siguientes: $A=\begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$; $I\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcular la inversa de (I – A)

Se efectúa la diferencia: (I - A)

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,5 \\ -0,2 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Hallar la transpuesta de la matriz $I - A$

$$(I - A)^t = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,5 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la adjunta de la matriz transpuesta: $Adj(I - A)^t$

$$Adj(I - A)^t = \begin{bmatrix} 0,9 & -(-0,5) \\ -(-0,2) & 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Se obtiene el determinante de: $I - A$

$$|I - A| = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,5 \\ -0,2 & 0,9 \end{bmatrix} = 0,7 * 0,9 - (-0,5)(-0,2) = 0,63 - 0,1 = 0,53$$

Se reemplaza en $(I - A)^{-1} = \frac{Adj(I-A)^t}{|I-A|}$ para obtener la inversa.

$$(I - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}}{0,53} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{50}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{70}{100} \end{bmatrix}}{\frac{53}{100}} = \frac{1}{53}\begin{bmatrix} 90 & 50 \\ 20 & 70 \end{bmatrix}$$

Multiplicar por su adjunta la matriz siguiente: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Se establece la transpuesta de A ; A'= $A' = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

Se establece la adjunta de A ; $adjA \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ 13 & 5 & 8 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

Se efectúa la multiplicación: $A^{(adj\,A)}$

$$A\,(adjA) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ 13 & -12 & 5 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} ; \quad A\,(adjA) = 6\,I$$

Solución: $A\left(\overset{adjA}{\quad}\right) \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; (matriz diagonal).

Observa que los elementos de la diagonal principal son iguales a 6 y es el determinante de $\underline{A}$ (verifíquese). El resultado también puede expresarse de la manera siguiente:

$$A\left(\overset{adjA}{\quad}\right) = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad A\left(\overset{adjA}{\quad}\right) = 6\,I$$

El producto dado por la multiplicación de una matriz cuadrada por su adjunta, es igual a una matriz diagonal, siendo los elementos de la diagonal igual al determinante de la matriz, lo que es lo mismo decir, la matriz unitaria multiplicada por el determinante de la matriz dada. Puede demostrarse pues, que:

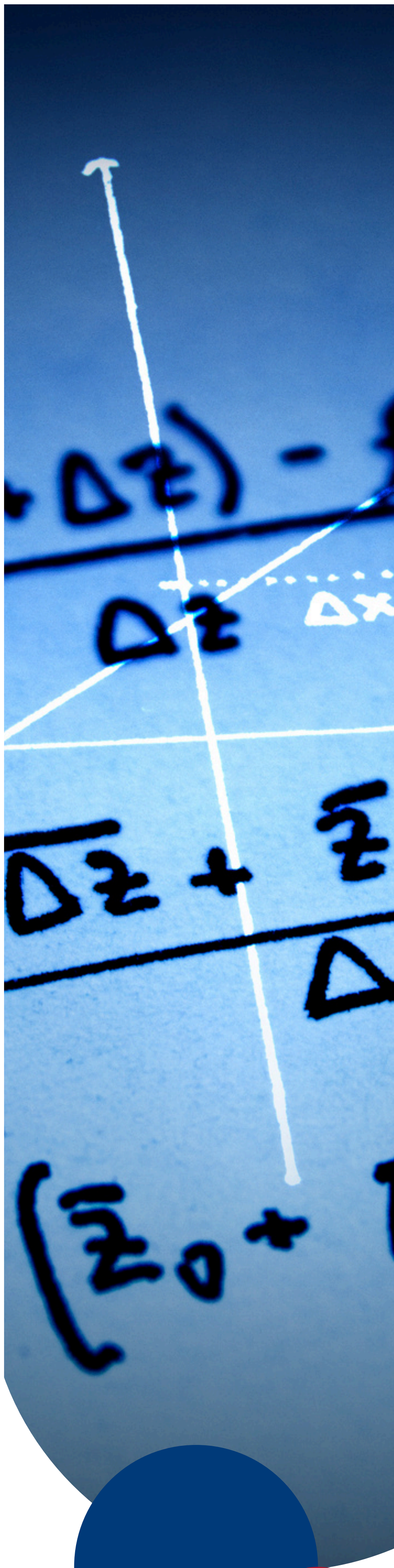
$$A^{(adj\,A)} = |A| \times I.$$

$A^{(adj\,A)}$ Este producto se multiplica y se divide, al mismo tiempo, por el determinante de A.

$$\frac{|A|(adjA)}{|A|} = |A| \times A \times A\frac{adjA}{|A|} = |A| \times \underbrace{AA}^{-1} = |A| \times I$$

Hallar la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -7 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



- Calcular el valor de en la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & x \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \text{ (se desarrolla el determinante)} \quad ; \quad \textit{Solución: } x = 7$$

- Verificar que la matriz $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ es una matriz singular.

- Multiplicar por su adjunta la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & 7 \\ 8 & 9 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Observación: no se dan los resultados de los ejercicios propuestos porque son posibles de verificar teniendo en cuenta las propiedades de las matrices y determinantes.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Utilizando matrices. Utilizando determinante (regla de Leibniz-Cramer)

Dado el sistema de ecuaciones lineales o de primer grado de n incógnitas y n ecuaciones, para expresar matricialmente se sigue los siguientes pasos:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & \cdots & + & a_{1n}x_1 & = & k_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_1 & + & a_{23}x_1 & + & \cdots & \cdots & + & a_{2n}x_1 & = & k_1 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_1 & + & a_{33}x_1 & + & \cdots & \cdots & + & a_{3n}x_1 & = & k_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{1n}x_1 & + & a_{2n}x_1 & + & a_{3n}x_1 & + & \cdots & \cdots & + & a_{nn}x_1 & = & k_1
\end{array}$$

- Con los coeficientes de las incógnitas se forma una matriz cuadrada de *nxn*.
- Con las incógnitas ***x***, se forma un Vector Columna ***X***.
- Con los valores de las ecuaciones ***k***, se forma un Vector Columna ***K.***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \; ; \; X \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

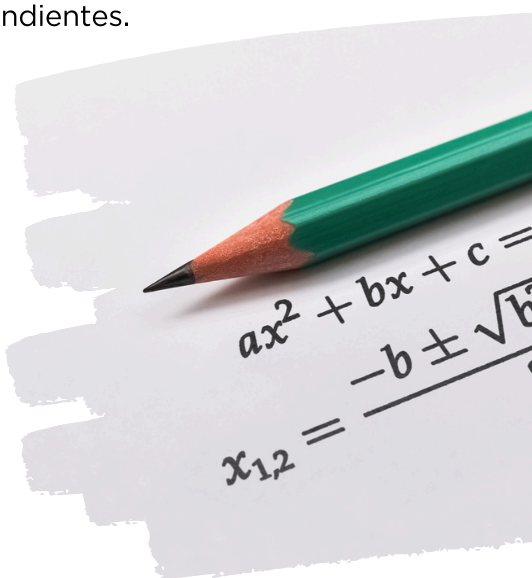
Al efectuar la multiplicación de las matrices se reproduce el sistema de ecuaciones de origen.

A: matriz de los coeficientes de las incógnitas.

X: matriz de las incógnitas.

K: matriz de los valores de las ecuaciones o términos independientes.

$$AX = K\ ;\ X\frac{K}{A}\ ;\ A^{-1}K$$



X: representa las incógnitas x, y, z, w y demás símbolos que normalmente se utilizan en las ecuaciones.

A^{-1} **:** es la inversa de la matriz de los coeficientes de las incógnitas.

Resolver matricialmente el sistema de ecuaciones siguiente:

$$2x + 3y + 4z = 40 \quad (1)$$
$$x - y + 2z = 15 \quad (2)$$
$$3x + 2y - z = 13 \quad (3)$$

El sistema de ecuaciones se expresa matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}$$, de la forma $: AX = K$

Teniendo en cuenta la relación $X = A^{-1}K$, se determina la inversa de la matriz cuadrada formada por los coeficientes de las incógnitas, para luego multiplicar por la matriz columna formada con los valores de las ecuaciones.

$$\text{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad |A| = 35$$

Se transpone la matriz: $A \quad A^{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

Se establece la adjunta de A: $(adjA) = \begin{bmatrix} -3 & 11 & 10 \\ 7 & -14 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$

Se establece la inversa: $A^{-1} = \dfrac{(adjA)}{|A|}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{35} & \frac{11}{35} & \frac{10}{35} \\ \frac{7}{35} & -\frac{14}{35} & 0 \\ \frac{5}{35} & \frac{5}{35} & -\frac{5}{35} \end{bmatrix}$

Se efectúa la multiplicación K1K para obtener la solución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{35} & \frac{11}{35} & \frac{10}{35} \\ \frac{7}{35} & -\frac{14}{35} & 0 \\ \frac{5}{35} & \frac{5}{35} & -\frac{5}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad A^{-1} K = X = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

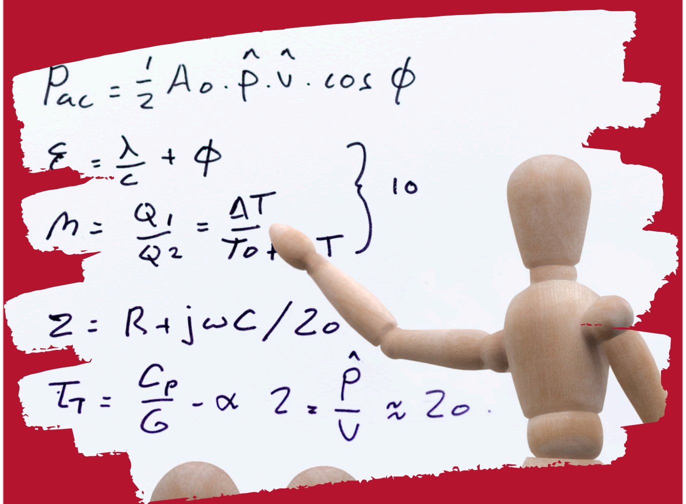
Solución: ***x* = 5** ; ***y* = 2** ; ***z* = 6**

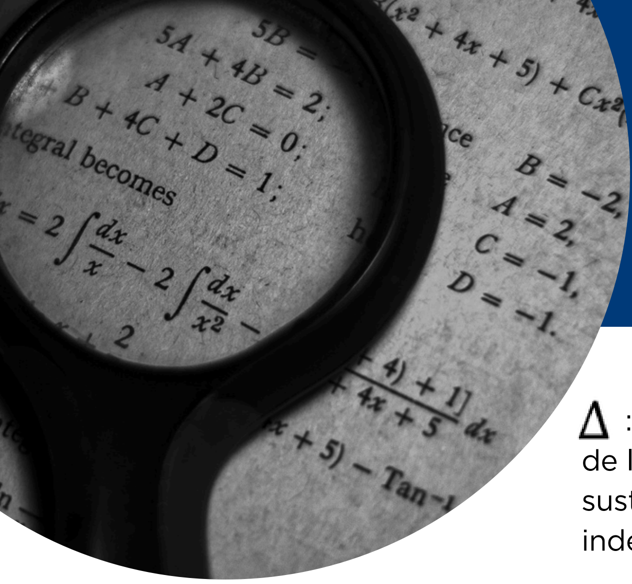
Tenemos a continuación el mismo ejercicio para resolver por el método de Leibniz-Cramer. Se aplican las siguientes relaciones:

$$x \frac{\Delta x}{\Delta} \quad ; \quad y \frac{\Delta y}{\Delta} \quad ; \quad z \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Δ : determinante general formado con los coeficientes de las incógnitas.

Δ : delta sub $-x$; determinante formado con los coeficientes de las incógnitas, a excepción de los coeficientes de x que se sustituyen por los valores de las ecuaciones (términos independientes).





Δ : delta sub $-y$; determinante formado con los coeficientes de las incógnitas, a excepción de los coeficientes de y que se sustituyen por los valores de las ecuaciones (términos independientes).

Δ : delta sub $-Z$; determinante formado con los coeficientes de las incógnitas, a excepción de los coeficientes de $\underline{Z}$ que se sustituyen por los valores de las ecuaciones (términos independientes).

1°) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; $\Delta = 35$

2°) $\Delta x = \begin{vmatrix} 40 & 3 & 4 \\ 15 & -1 & 2 \\ 13 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; $\Delta x = 175$

3°) $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 40 & 4 \\ 1 & 15 & 2 \\ 3 & 13 & -1 \end{vmatrix}$; $\Delta y = 70$

4°) $\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 40 \\ 1 & -1 & 15 \\ 3 & 2 & 13 \end{vmatrix}$; $\Delta z = 210$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $x = \frac{175}{35}$; $x = 5$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$; $y = \frac{70}{35}$; $y = 2$

$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$; $z = \frac{210}{35}$; $z = 6$

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando la regla de Leibniz-Cramer.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -6 \ (1) \\ 4x + y &= 3 \ (2) \\ 2y + z &= -2 \ (3) \end{aligned}$$

Observa que las ecuaciones (2) y (3) son incompletas, por lo tanto, se completan con cero los coeficientes de las incógnitas faltantes en cada ecuación.

$$1^{o})\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \;;\qquad \Delta = 22$$

$$2^{o})\quad \Delta x = \begin{vmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \;;\qquad \Delta x = 11$$

$$3^{o})\quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \;;\qquad \Delta y = 22$$

$$4^{o})\quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \;;$$

$\Delta z = -88$

Solución: $x\frac{1}{2}\,;\; y = 1 \quad ; \quad z = -4$

Ejercicios resueltos:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix};\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

A + B; A - B; A x B; B x A; A^t.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot3+1\cdot5 & 1\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot3+1\cdot5 & 1\cdot0+2\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot2+1\cdot3+0\cdot5 & 1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostrar que: **A2 - A - 2 I = 0**, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

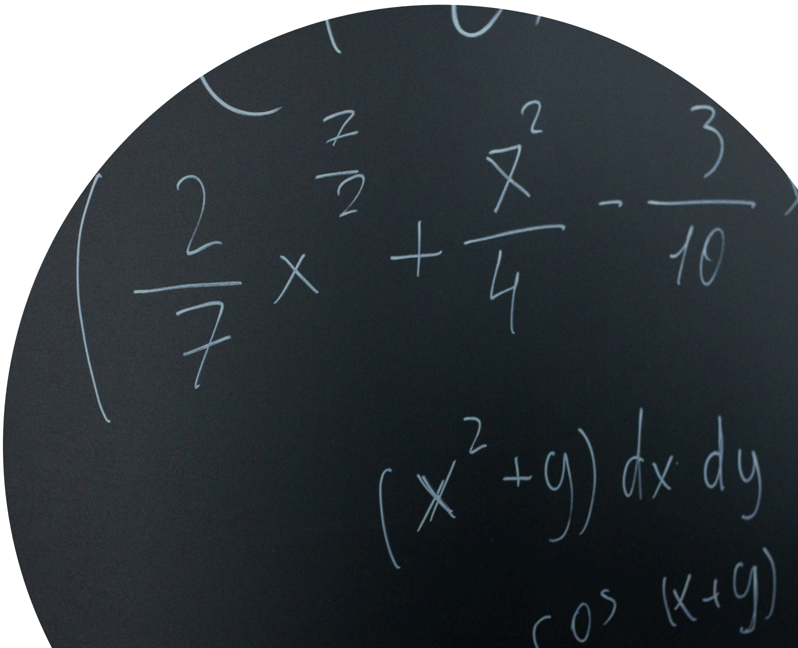
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Por qué hay que premultiplicar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ para que resulte la matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b=5 \\ b=2 \\ c+2d=6 \\ d=3 \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Calcular la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Construir una matriz del tipo M = (A | I):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Utilizar el método Gauss para transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad. La matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-2f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -2:

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -2A + 6B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro:

$$7B=\begin{pmatrix}9 & 8 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\frac{9}{7} & \frac{8}{7} & \frac{6}{7}\\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 3 y sumamos miembro a miembro obtenemos:

$$7A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ -7 & 3 & -1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}\frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{4}{7}\\ -1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7}\end{pmatrix}$$

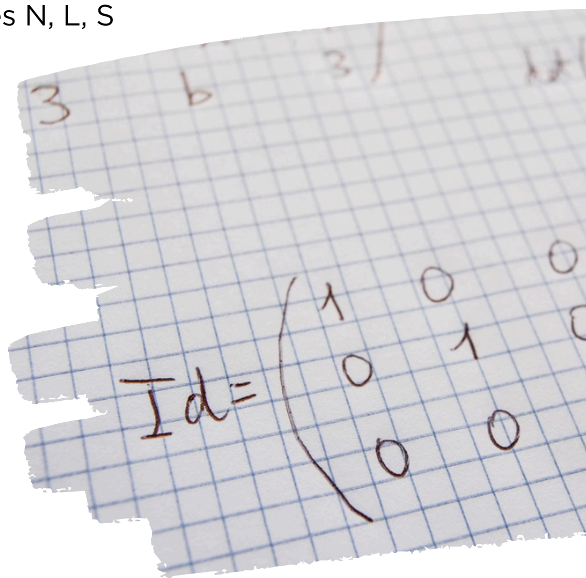
Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

- Representar la información en dos matrices.
- Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Matriz de producción:

Filas: Modelos A y B Columnas: Terminaciones N, L, S

$$M=\begin{pmatrix}400 & 200 & 50\\ 300 & 100 & 30\end{pmatrix}$$



Matriz de coste en horas:

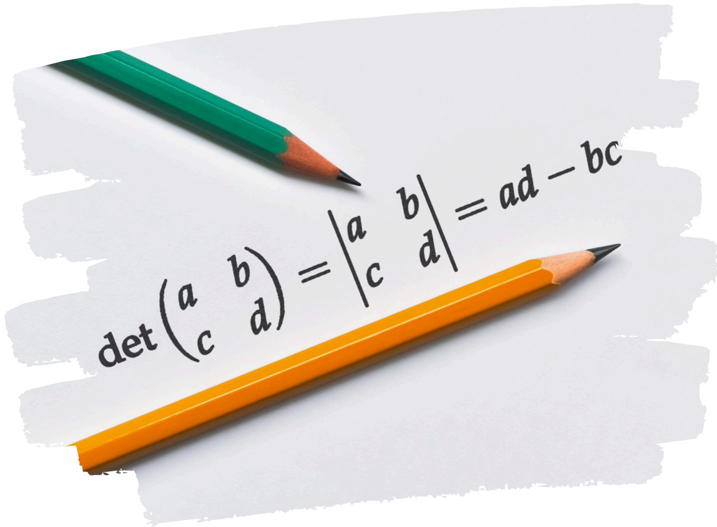
Filas: Terminaciones N, L, S
Columnas: Coste en horas: T, A

$$N=\begin{pmatrix}25 & 1\\ 30 & 1.2\\ 33 & 1.3\end{pmatrix}$$

Matriz que expresa las horas de taller y de administración para cada uno de los modelos:

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}400 & 200 & 50\\ 300 & 100 & 30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}25 & 1\\ 30 & 1.2\\ 33 & 1.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\,650 & 705\\ 11\,490 & 459\end{pmatrix}$$

Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanterías (A, B y C) en cada uno de los tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1,000 estanterías grandes y 8,000 pequeñas de tipo A; 8,000 grandes y 6,000 pequeñas de tipo B; y 4,000 grandes y 6,000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.



A. Representar esta información en dos matrices.

Filas: Modelos A, B, C Columnas: Tipos G, P

$$M = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix}$$

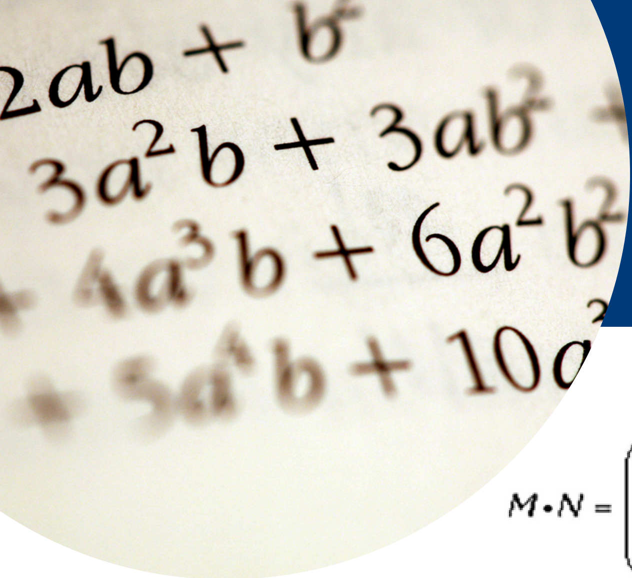
Matriz de los elementos de las estanterías:

Filas: Tipos G, P Columnas: T, S

$$N = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

Matriz que expresa el número de tornillos y soportes para cada modelo de estantería:

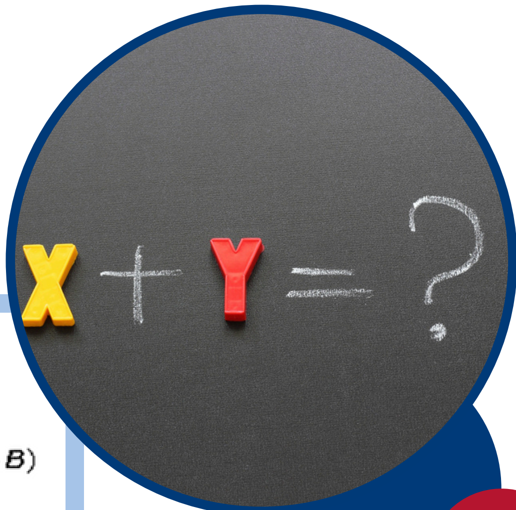


$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

Siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcular el valor de X en las siguientes ecuaciones:

1. $XA = B + I$
2. $AX + B = C$
3. $XA + B = 2C$
4. $AX + BX = C$
5. $XAB - XC = 2C$



1. $X\,A = B + I$

$$X\,A\,A^{-1} = (B + I)\,A^{-1}$$
$$X\,I = (B + I)\,A^{-1}$$
$$X = (B + I)\,A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $A\,X + B = C$

$$A\,X = C - B$$
$$A^{-1}A\,X = A^{-1}(C - B)$$
$$I\,X = A^{-1}(C - B)$$
$$X = A^{-1}(C - B)$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $XA + B = 2C$

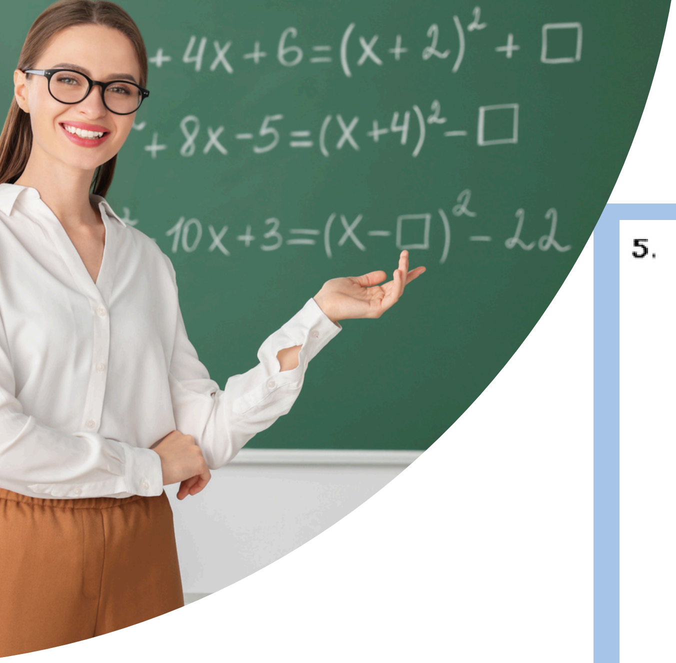
$$X\,A\,A^{-1} = (2C - B)\,A^{-1}$$
$$X\,I = (2C - B)\,A^{-1}$$
$$X = (2C - B)\,A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$$

4. $AX + BX = C$

$$(A + B)\,X = C$$
$$(A + B)^{-1}(A + B)\,X = (A + B)^{-1}\,C$$
$$I\,X = (A + B)^{-1}\,C$$
$$X = (A + B)^{-1}\,C$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$



5. $XAB - XC = 2C$

$$X(AB - C) = 2C$$
$$X(AB - C)(AB - C)^{-1} = 2C(AB - C)^{-1}$$
$$XI = 2C(AB - C)^{-1}$$
$$X = 2C(AB - C)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 1 \\ \frac{-23}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones:

$(A + B)^2$; $(A - B)^2$; $(B)^3$; $A \cdot B^t \cdot C$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -14 & 42 \\ 19 & -6 & 35 \\ 34 & -15 & 73 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -1 \\ -16 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -6 & 14 \\ 12 & -5 & 14 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -27 & 70 \\ 33 & -26 & 70 \\ -24 & -11 & 42 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 3 \\ 20 & 17 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 23 & 16 \\ 14 & 3 & 3 \\ 30 & 52 & 47 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos:

- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: $A + B$; $A - B$; $A \times B$; $B \times A$; A^t.

- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones:

$(A + B)^2$; $(A - B)^2$; $(B)^3$; $A \cdot B^t \cdot C$.

- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Justificar si son posibles los siguientes productos:

$1(A^t \cdot B) \cdot C$

$2(B \cdot C^t) \cdot A^t$

Demostrar que: A2 - A - 2 I = 0, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar An , para n $\in \mathbb{N}$.

¿Por qué matriz hay que premultiplicar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ para que resulte la matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$?

Hallar todas las matrices que conmuten con la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa de:

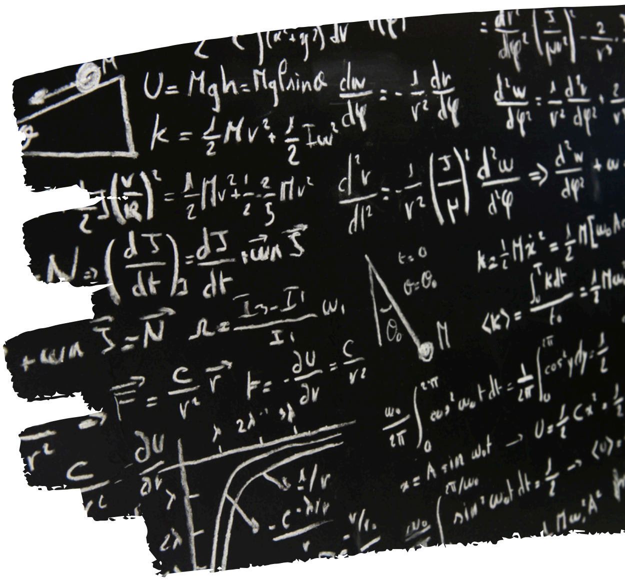
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Hallar el rango de la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$



Calcular el rango de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular el valor de X en las siguientes ecuaciones:

1. $XA = B + I$
2. $AX + B = C$
3. $XA + B = 2C$
4. $AX + BX = C$
5. $XAB - XC = 2C$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial:

A X + 2 B = 3 C

- Resolver; en forma matricial, el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 5z = 12 \\ x + 4y + 25z = 36 \end{cases}$$

- Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanterías (A, B y C) en cada uno de los tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1,000 estanterías grandes y 8,000 pequeñas de tipo A; 8,000 grandes y 6,000 pequeñas de tipo B; y 4,000 grandes y 6,000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.

  - Representar esta información en dos matrices.
  - Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

- Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

  - Representar la información en dos matrices.
  - Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones. aplicando la regla de Leibniz-Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 60 & (1) \\ x - y + z = 20 & (2) \\ x + y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando la regla de Leibniz-Cramer.

$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ x + z = 2 & (2) \\ x + y = 1 & (3) \end{cases}$$

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z + w + t = 15 & (1) \\ x - y + z + t = 7 & (2) \\ 2x - 2y + 3z + 2w = 15 & (3) \\ 3y + 5z - w + 2t = 27 & (4) \\ x - y + w = -2 & (5) \end{cases}$$

- Matricialmente.
- Aplicando la regla de Leibniz - Cramer.

Referencias bibliográficas

- Angel, A. y Runde, D. (1997). *Álgebra Intermedia*. Prentice-Hill, Hispanoamérica.
- Arya, J. y Lardner, R. (1992). *Matemática aplicada a la Administración y Economí*a. Prentice-Hill, Hispanoamérica.
- Rotela, A. R. (1990). *Matemática: manual de ejercicios y problemas*. Litocolor.