Algebra de Bool

05 September 2023 09:12

George Bool / 1854

- 1938 Claude Shannon

Axiomas y postulados

Axioma (1) Variable Booleana

2 valores posibles mutuamente excluyentes

$\emptyset$ y 1 $\quad x = \phi \Rightarrow x \neq 1$

$x = 1 \Rightarrow x \neq \phi$ "hay corriente"

Axioma (2) Operación NOT

Si $x = \phi \Rightarrow \bar{x} = 1$

Si $x = 1 \Rightarrow \bar{x} = \phi$

Axioma (3) operaciones AND y OR

AND	
	$\phi \cdot \phi = \phi$
	$\phi \cdot 1 = \phi$
	$1 \cdot \phi = \phi$
	$1 \cdot 1 = 1$

OR	
	$\phi + \phi = \phi$
	$\phi + 1 = 1$
	$1 + \phi = 1$
	$1 + 1 = 1$

Estos 3 Axiomas definen por completo el Algebra de Boole

- Para demostrar que una función es completa basta con probar que cumple los 3 axiomas.

Teoremas y Propiedades

• 1 Variable

- $1 + x = 1$ • $1 \cdot x = x$ identidad
- $0 + x = x$ • $0 \cdot x = 0$ elementos nulos
- $x + x = x$ • $x \cdot x = x$ idempotencia
- $\bar{\bar{x}} = x$ doble negación
- $x + \bar{x} = 1$ • $x \cdot \bar{x} = 0$ Complemento

• 2 y 3 Variables

- $x + y = y + x$ • $x \cdot y = y \cdot x$ Conmutativa
- $(x+y)+z = x + (y+z)$ • $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ Asociativa
- $x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y+z)$ • $(x+y) \cdot (x+z) = x + y \cdot z$ Distributiva
- $x + x \cdot y = x$ • $x \cdot (x+y) = x$ Cobertura
- $x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$ • $(x+y) \cdot (x+\bar{y}) = x$ Combinación
- $x \cdot y + \bar{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \bar{x} \cdot z$ • $(x+y) \cdot (\bar{x}+z) \cdot (\bar{x}+\bar{z}) = (x+x) \cdot (\bar{x}+z)$ Consenso.

Ejemplo de demostración

1. $x + x \cdot y = x$

$$x + x \cdot y = \underbrace{x \cdot 1}_{\text{identidad}} + x \cdot y = x \cdot \underbrace{(1+y)}_{1} = x \cdot 1 = x$$

2. $x + (\bar{x} \cdot y) = x + y$

$$\overset{\text{dist}}{\Rightarrow} \underbrace{(x+\bar{x})}_{1} \cdot (x+y) = 1 \cdot (x+y) = x+y$$

Principio de Dualidad

Principio de Dualidad

intercambiar And por OR o OR por And e intercambiar las constantes ϕ por 1 y 1 por ϕ.
si se cumple una propiedad entonces se cumple la dual