Integrales de línea de campos escalares

Definición: Sea $f: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, $\alpha: [a,b] \longrightarrow U$ una curva paramétrica de clase C^1 inyectiva en $[a,b)$ y sea $\mathcal{C} = Im(\alpha)$ la curva descrita por α. La INTEGRAL DE LÍNEA de f a lo largo $\mathcal{C}$ se define por

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt}$$

Ejemplo: Consideramos el campo escalar $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ definido en todo $\mathbb{R}^3$ y la hélice dada por $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar $\int_{\mathcal{C}} f ds$.

$f(\gamma(t)) = \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) + t^2 = 1+t^2$

y $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)+1} = \sqrt{2}$

Por lo tanto $\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+t^2)\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} 1+t^2\, dt = \sqrt{2}\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi\left(1+\frac{4}{3}\pi^2\right)$

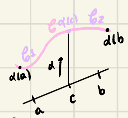
PROPIEDADES:

1) Linealidad: Para cualesquiera escalares λ, μ,

$$\int_{\mathcal{C}} (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_{\mathcal{C}} f ds + \mu \int_{\mathcal{C}} g ds$$

2) Aditividad: Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ forman la curva $\mathcal{C}$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}_1} f ds + \int_{\mathcal{C}_2} f ds$$



$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuo, $\mathcal{C} \subset U$

$\alpha: [a,b] \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ C^1 e iny. en $[a,b)$

Si $\mathcal{C}_1$ está paramet. x. $\alpha_1: [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\alpha_1(t) = \alpha(t)$

Si $\mathcal{C}_2$ " " x. $\alpha_2: [c,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\alpha_2(t) = \alpha(t)$

3) Independencia de la parametrización: Sean $(\alpha, [a,b])$ y $(\beta, [c,d])$ dos parametrizaciones equivalentes de la misma curva $\mathcal{C}$ y $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo, entonces

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_c^d f(\beta(t)) \|\beta'(t)\| dt$$

Ejemplo: Sea $f: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$f(x,y,z) = \dfrac{4+x^2+y^2+z^2}{3-x^2-y^2-z^2}$ donde U es la bola de centro $(0,0,0)$ y radio $\sqrt{3}$ y $\mathcal{C}$ la curva parametrizada por $\alpha(t) = (\cos(t), \sqrt{2}\operatorname{sen}(t), \cos(t))$, $t \in [0, \sqrt{2}]$

$f(\alpha(t)) = \dfrac{4+2}{3-2} = 6$ $\quad \|\alpha'(t)\| = \|(-\operatorname{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), -\operatorname{sen}(t))\| = \sqrt{2}$

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^{\sqrt{2}} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{\sqrt{2}} 6\sqrt{2} = 12$$

Integrales de línea de campos vectoriales

Definición: Sea $X: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{C}$ una curva de clase C^1 en U. Definimos la **integral de línea de** X a lo largo de $\mathcal{C}$ como

$$\int_{\mathcal{C}} X ds = \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Ejemplo: $X(x,y,z) = (x,y,z)$ y la hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $t \in [0, 4\pi]$

$X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1) = t$. Por lo cual $\int_{\mathcal{C}} X ds = \int_0^{4\pi} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{4\pi} = 8\pi^2$

Notación clásica: Sea $X = (P, Q, R)$ un campo vectorial en el espacio continuo sobre una curva de clase C^1, $\mathcal{C}$ parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in [a,b]$

$$\int_{\mathcal{C}} X ds = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt$$

$$\int_{\mathcal{C}} X ds = \int_C P(x,y,z) dx + Q(x,y,z) dy + R(x,y,z) dz = \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy + R dz$$

Ejemplo: $\int_{\mathcal{C}} x^2 dx + xy\, dy + dz$ donde $\mathcal{C}$ tiene la siguiente parametrización, $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0,1]$

$X(x,y,z) = (x^2, xy, 1)$ y $\int_{\mathcal{C}} x^2 dx + xy dy + dz = \int_0^1 t^2 + 2t^4 \, dt = \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} 2t^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$

Proposición: Sean $(\alpha, [a,b])$ y $(\beta, [c,d])$ parametrizaciones equivalentes de $\mathcal{C}$ que preservan orientación y $X: U \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo, entonces

$$\int_a^b (X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_c^d X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt$$

Dem: Como α y β preservan orientación $\exists \varphi: [c,d] \longrightarrow [a,b]$ biyectiva creciente de clase C^1 t.q $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$, entonces $X(\varphi(t))$, entonces

$$X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) = X(\alpha(\varphi(t))) \cdot \alpha'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = \varphi(t)$ $(du = \varphi'(t) dt)$ tenemos que

$$\int_c^d X(\beta(t)) \beta'(t) dt = \int_a^b X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du$$

CAMBIO DE ORIENTACIÓN:

$$\int_{\mathcal{C}op} X ds = -\int_{\mathcal{C}} X ds$$ donde $\mathcal{C}op$ es la misma curva pero recorrida en sentido contrario.

Consideramos $\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de $\mathcal{C}$, y $\alpha_{op}: [-b, -a] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como

$\alpha_{op}(t) = \alpha(-t)$

Observar que α_{op} es una reparametrización de $\mathcal{C}$ que revierte la orientación, donde la función φ es $\varphi(t) = -t$. Entonces α_{op} es una parametrización de $\mathcal{C}_{op}$.

$$\int_{\mathcal{C}_{op}} X ds = \int_{-b}^{-a} X(\alpha_{op}(t)) \cdot (\alpha'_{op}(t)) dt = -\int_{-b}^{-a} X(\alpha(-t)) \cdot \alpha'(-t) dt = \int_{b}^{a} X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u)\, du = -\int_{\mathcal{C}} X ds \qquad \begin{array}{l} \text{C.V} \\ u=-t \end{array}$$

Propiedades:

i) Linealidad respecto del integrando: Para cualquier par de escalares λ, μ,

$$\int_{\mathcal{C}} (\lambda X + \mu Y) ds = \lambda \int_{\mathcal{C}} X ds + \mu \int_{\mathcal{C}} X ds$$

ii) Aditividad respecto al camino de integración: Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son tales que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, entonces

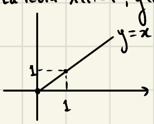
$$\int_{\mathcal{C}} X ds = \int_{\mathcal{C}_1} X ds + \int_{\mathcal{C}_2} X ds$$

iii) Continuidad: $\left| \int_{\mathcal{C}} X ds \right| \leq M L(\mathcal{C})$. Donde $M = \sup\{\|X(p)\| : p \in \mathcal{C}\}$ y $L(\mathcal{C})$ es la longitud de arco de la curva $\mathcal{C}$

$$\left| \int_{\mathcal{C}} X ds \right| = \left| \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \right| \leq \int_a^b |X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)| dt \leq \int_a^b \|X(\alpha(t))\| \, \|\alpha'(t)\| dt \leq \int_a^b M \|\alpha'(t)\| dt = M L(\mathcal{C})$$

Ejemplo: Campo vectorial $X(x,y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y \geq 0$. Calcular la integral de línea desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ a lo largo de las curvas:

a) La recta $x(t) = t$, $y(t) = t$ con $0 \leq t \leq 1$



$\Rightarrow \alpha(t) = (t,t) \Rightarrow \alpha'(t) = (1,1)$

$X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\sqrt{t}, t^3 + t) \cdot (1,1) = \sqrt{t} + t^3 + t$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} X ds = \int_0^1 \sqrt{t} + t^3 + t \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{17}{12}$$

Prop: Si α y β son param. eq. Entonces:

- Si tienen = orientación $\int_{\mathcal{C}} F d\alpha = \int_{\mathcal{C}} F d\beta$
- Si tienen $\neq$ orientación $\int_{\mathcal{C}} F d\alpha = -\int_{\mathcal{C}} F d\beta$

Dem: $\int F d\beta = \int_c^d \langle F(\beta(s)), \beta'(s) \rangle ds = \int_c^d \langle F(\alpha \circ \varphi(s)), (\alpha \circ \varphi)'(s) \rangle = \int_c^d \langle F(\alpha \circ \varphi(s)), \alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \rangle ds = \int_c^d \langle F(\alpha \circ \varphi(s)), \alpha'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds$

$t = \varphi(s) \longrightarrow \int \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt$

Si α y β tienen
- = orient. $\varphi(s)$ es creciente límites $b = \varphi(c)$ $a = \varphi(d)$ $\rightarrow \int_{\mathcal{C}} F d\beta = \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt$
- $\neq$ orient. $\varphi(s)$ es decreciente límites $b = \varphi(c)$ $a = \varphi(d)$ $\rightarrow \int_{\mathcal{C}} F d\beta = \int_b^a \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = -\int_{\mathcal{C}} F d\alpha$

Campos de gradientes

Definición: Sea $f: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ un campo escalar de C^1 definido en un abierto $U\subset\mathbb{R}^3$. El GRADIENTE de f en $p\in U$ es el vector

$$\nabla_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right)$$

$\nabla f: U\to\mathbb{R}^3$ definido por $(\nabla f)(p) = \nabla_p f$ es un campo vectorial

Definición: Un campo vectorial $X: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ continuo es un CAMPO DE GRADIENTES si existe $f: U\to\mathbb{R}$ de clase C^1 t.q $X=\nabla f$ en U. Se dice que f es un potencial escalar de X.

Un conjunto $U\subset\mathbb{R}^n$ se llama CONEXO si NO se puede escribir como unión disjunta de dos conjuntos abiertos NO vacíos. Equivalentemente, U es conexo si dados dos puntos cualesquiera del mismo existe una curva que los conecta contenida en el subconjunto.

Proposición: Sea $g: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de clase C^1, D abierto y conexo. Si $\nabla g = 0$ entonces g es constante

Observación: Si $F: U\subset\mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo continuo de gradientes, donde U es abierto y conexo. Si f, g son dos potenciales escalares de F entonces difieren en una constante

$X=\nabla f$ y $X=\nabla g$ en U entonces $\nabla(f-g)=0$ en U, entonces $f-g=cte$ y por lo tanto $f=g+cte$

Integral de línea de un campo de gradientes

Teorema (Regla de Barrow para integrales de línea): Sea $f: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ un potencial escalar de un campo X de clase C^1 definido en un abierto $U\subset\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}$ una curva contenida en U de origen A y extremo B. Entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} X\,ds = f(B) - f(A)$$

En particular, si el camino $\mathcal{C}$ es cerrado, se tendrá:

$$\oint X\,ds = 0$$

Dem: Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t\in[a,b]$ una parametrización de $\mathcal{C}$. La integral de línea de X entre a y b a lo largo de α viene dada por

$$\int_{\mathcal{C}} X\,ds = \int_{\mathcal{C}} \nabla f\,ds = \int_a^b \nabla f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt = \int_a^b (f(\alpha(t)))'\,dt = f(\alpha(t))\Big|_a^b = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(B) - f(A)$$

En particular, si $\mathcal{C}$ es cerrada concluimos que

$$\oint_{\mathcal{C}} X\,ds = f(B) - f(A) = 0$$

TEOREMA: Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo continuo en U. Son equivalentes

1) Existe $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 t.q $\nabla f = X$ (X es de GRADIENTES y f es el POTENCIAL ESCALAR de X).

2) $\oint_{\mathcal{C}} X ds = 0$ para toda curva cerrada simple C^1 en U.

3) $\int_{\mathcal{C}_1} X ds = \int_{\mathcal{C}_2} X ds$ para todo par de curvas C_1 y C_2 con el mismo origen y el mismo extremo (X es CONSERVATIVO)

Observación: Si $\oint_{\mathcal{C}} X ds \neq 0$ para alguna curva cerrada, entonces X NO es de gradientes.

Ejemplo: Sea $\mathcal{C} = \{(x,y) : x^2+y^2=R^2\}$ y $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Hallar $\int_{\mathcal{C}} F ds$, $\mathcal{C}$ orientada en sentido antihorario.

Consideramos $\alpha : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (R\cos(t), R\operatorname{sen}(t))$. Es fácil ver que induce la misma orientación que $\mathcal{C}$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} F ds = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \left(\frac{-R\operatorname{sen}(t)}{R^2}, \frac{R\cos(t)}{R^2} \right)(-R\operatorname{sen}(t), R\cos(t))\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$ Por lo tanto F NO es de gradientes

Observación: Por otra parte, no es suficiente que $\oint_{\mathcal{C}} X ds = 0$ para infinitas curvas para concluir que el campo es de gradientes como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sea $X(x,y) = (x, xy)$ y $\mathcal{C}_r$ la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r parametrizada por $\alpha_r(t) = (r\cos(t), r\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0,2\pi]$. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}_r} X ds = \int_0^{2\pi} (r\cos(t), r^2\operatorname{sen}(t)\cos(t))(-r\operatorname{sen}(t), r\cos(t))\,dt = \int_0^{2\pi} (-r^2\cos(t)\operatorname{sen}(t) + r^3\operatorname{sen}(t)\cos^2(t))\,dt = r^2\int_0^{2\pi} \cos(t)\operatorname{sen}(t)\,dt + r^3\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\cos^2(t)\,dt$$

$$= -\frac{r^2}{2}\cos^2(t)\Big|_0^{2\pi} - \frac{r^3}{3}\cos^3(t)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Sin embargo $\frac{\partial xy}{\partial x} = y \neq 0 = \frac{\partial x}{\partial y}$, que es una condición necesaria para que sea de gradientes (como veremos en el siguiente teorema).

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $X = (P,Q,R)$ un campo vectorial de clase C^1 en U. Si X es de gradientes en U entonces

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

Dem: Como $X = (P,Q,R)$, campo vectorial de clase C^1, es de gradientes existe $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^2 t.q $\nabla f = X$. Entonces

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad R = \frac{\partial f}{\partial z}$$

De la cual se deduce que

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Sabemos que las derivadas segundas de f coinciden ya que f es de clase C^2 y el teorema de Schwartz ■

Ejemplo: Sea $S = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y $X: S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por $X(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Vemos que las derivadas cruzadas coinciden pero sin embargo X NO es de gradientes

$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad$ $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\forall (x,y) \in S$

Para ver que X NO es de gradientes en S calculemos la integral de línea de X a lo largo de la circunferencia dada por $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\oint_{\mathcal{C}} X ds = \int_0^{2\pi} X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\text{sen}(t), \cos(t)) \cdot (-\text{sen}(t), \cos(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} (\underbrace{\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)}_{1}) \, dt = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow X$ NO es de gradientes

Rotor y campos irrotacionales

El ROTOR muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

Definición: Sea $F: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, $F = (P, Q, R)$. Definimos el ROTOR de F como el campo vectorial $\text{rot}\, F: U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\text{rot}(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$

Ejemplo 1: Sea $F(x,y,z) = (xz, y, z)$ definido en todo el espacio. Entonces

$\text{rot}\, F(x,y,z) = (0, x, 0)$

Ejemplo 2: Sea $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (xy, x^2+z, e^y \text{sen}(z))$. Entonces $\text{rot}\, F(x,y,z) = (e^y \text{sen}(z) - 1, 0, x)$

Propiedades: 1) $\text{rot}(aF + bG) = a\,\text{rot}(F) + b\,\text{rot}(G)$ $a, b \in \mathbb{R}$, F y G campos de clase C^1.

2) $\text{rot}(f \cdot F) = f\,\text{rot}(F) + \nabla f \wedge F$, f campo escalar de clase C^1 y F campo de clase C^1

3) $\text{rot}(\nabla f) = 0$ si f es de clase C^2

Dem: $fF = (fP, fQ, fR) \Rightarrow \text{rot}(fF) = \left(\frac{\partial}{\partial y}(fR) - \frac{\partial}{\partial z}(fQ), \frac{\partial}{\partial z}(fP) - \frac{\partial}{\partial x}(fR), \frac{\partial}{\partial x}(fQ) - \frac{\partial}{\partial y}(fP)\right) =$

$(f_y R + f R_y - f_z Q - f Q_z, f_z P + f P_z - f_x R - f R_x, f_x Q + f Q_x - f_y P - f P_y)$

$= \underbrace{(f_y R - f_z Q + f_z P - f_x R, f_x Q - f_y P)}_{\nabla f \times F} + f \underbrace{(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)}_{\text{rot}(F)}$

$$\nabla f \wedge F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (f_y R - f_z Q, f_z P - f_x R, f_x Q - f_y P)$$

Campos irrotacionales

Definición: Un campo vectorial X es **irrotacional** si $\text{rot}(X) \equiv 0$

Ejemplo: Los siguientes campos son irrotacionales

1) $X: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $X(x,y,z) = (x,y,z)$
2) $X: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $X(x,y,z) = (y,x,0)$
3) $X: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $X(x,y,z) = (x,z,y)$

Corolario: Si X es un campo C^1 de gradientes entonces es irracional

El recíproco en general NO se cumple, basta considerar el siguiente ejemplo

Ejemplo: Sea $X(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$, y $\text{rot}X = (0,0,Q_x - P_y) = 0$ porque $Q_x = P_y$. Entonces X es irrotacional. Sin embargo este campo NO es de gradientes, basta considerar $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro el origen y radio 1 en el plano xy y calcular la circulación de X a lo largo de $\mathcal{C}$.

$\oint_{\mathcal{C}} X ds = \int_0^{2\pi} X(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_0^{2\pi} (-\text{sen}(t), \cos(t))(-\text{sen}(t), \cos(t))dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$. Entonces X NO es de conservativo y por lo tanto NO es de gradientes.

Definición: Una curva $\mathcal{C}$ cerrada (parametrizada por $\alpha: [a,b] \to U$) contenida en U es **HOMOTÓPICA A UN PUNTO** P en U si existe $H: [0,1] \times [a,b] \longrightarrow U$ continua t.q $H(s,a) = H(s,b)$ $\forall s \in [0,1]$, $H(0,t) = \alpha(t): [a,b] \longrightarrow U$ y $H(1,t) = P$ $\forall t \in [a,b]$

Ejemplo 1: Si consideramos $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, veamos que es homotópica a $(0,0)$. Definimos $H: [0,1] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $H(s,t) = ((1-s)\cos(t), (1-s)\text{sen}(t))$, fijando s tenemos que $H(s,0) = ((1-s), 0) = H(s,2\pi)$, además $H(0,t) = (\cos(t), \text{sen}(t)) = \alpha(t)$ y $H(1,t) = (0,0)$. Entonces H es una homotopía entre le cfa. unidad y el origen del plano.

2) Consideramos $\mathbb{R}^3 - (0,0,1)$ y sea $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), 1)$ curva que rodea a la singularidad definimos $H: [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 - (0,0,1)$ por $H(s,t) = ((1-s)\cos(t), (1-s)\text{sen}(t), 1-s)$, es una función continua y verifica que $H(s,0) = (1-s, 0, 1-s) = H(s,2\pi)$, $H(0,t) = \alpha(t)$ y $H(1,t) = (0,0,0)$ entonces H es una homotopía entre la circunferencia y el origen del espacio.

Definición: Un conjunto U es **SIMPLEMENTE CONEXO** si es abierto, conexo y toda curva cerrada contenida U es homotópica a un punto en U

TEOREMA: Si $X: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo C^1 irrotacional y U es simplemente conexo, entonces X es un campo de gradientes.

COROLARIO: Si $X: \mathbb{R}^3 - \{P_1, \dots, P_k\} \to \mathbb{R}^3$ es un campo C^1 irrotacional, entonces X es un campo de gradientes.

Ejemplo: Consideramos el campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (y, z\cos(yz) + x, y\cos(yz))$

1) Veamos que F es de gradientes. Basta probar que es irrotacional ya que $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo.

$\text{rot}F = (\cos(yz) - zy\,\text{sen}(yz) - \cos(yz) + yz\,\text{sen}(yz),\ 0,\ 1-1) = (0,0,0)$

2) Hallemos un potencial escalar f, es decir $\nabla f = F$

$f_x = y \Rightarrow f(x,y,z) = xy + h(y,z)$

$f_y = z\cos(yz) + x \Rightarrow x + \frac{\partial h}{\partial y} = z\cos(yz) + x \Rightarrow h(y,z) = \text{sen}(yz) + l(z)$

$f_z = y\cos(yz) \Rightarrow y\cos(yz) + l'(z) = y\cos(yz)$

Entonces $f(x,y,z) = xy + \text{sen}(yz)$

Divergencia y campos solenoidales

Divergencia: Sea $X: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1. Definimos la **DIVERGENCIA** de X como el campo escalar $\operatorname{div} X: U \to \mathbb{R}$ dado por

$$\operatorname{div} X(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(v)$$

En particular, si $n=3$ y $X=(P,Q,R)$. Entonces

$$\operatorname{div} X(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

Obs: $\operatorname{div} X = \nabla \cdot X$ donde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

Propiedades: 1) $\operatorname{div}(aX + bY) = a \operatorname{div} X + b \operatorname{div} Y$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$

2) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \nabla f \cdot X$, f campo escalar de clase C^1.

3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$ si $X: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2.

Ejemplo: Sea el campo vectorial $X(x,y,z) = (e^x \operatorname{sen}(y), e^x \cos(y), z)$, hallar su divergencia.

$$\operatorname{div} X = f_x(e^x \operatorname{sen}(y)) + f_y(e^x \cos(y)) + f_z(z) = \cancel{e^x \operatorname{sen}(y)} - \cancel{e^x \operatorname{sen}(y)} + 1 = 1$$

CAMPOS SOLENOIDALES

Def: Un campo vectorial $X: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 es **SOLENOIDAL** si $\operatorname{div}(X) = 0$

Ejemplo: Probar que cualquier campo vectorial definido por

$$F(x,y,z) = (f(y,z), g(x,z), h(x,y)) \text{ es solenoidal.}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(f(y,z)) + \frac{\partial}{\partial y}(g(x,z)) + \frac{\partial}{\partial z}(h(x,y)) = 0$$

Definición: Sea $Y: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, decimos que Y es de **ROTORES** si $\exists\, X: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2 t.q

$$\operatorname{rot}(X) = Y$$

Al campo X se lo llama un **POTENCIAL VECTOR** de Y

Obs: Si el campo $Y: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es de rotores entonces es solenoidal

Dem: Como Y es de rotores existe $X: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q $Y = \operatorname{rot}(X)$. Entonces $\operatorname{div}(Y) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$

Proposición: Sea $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ simplemente conexo. Si $G, H: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son dos potencias vectoriales de F. Entonces F y G se diferencian en el gradiente de una función $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^3

Dem: $\operatorname{rot}(G-H) = \operatorname{rot}(G) - \operatorname{rot}(H) = F - F = 0$. Como Ω es simplemente conexo podemos garantizar entonces $G-H$ es de gradientes, es decir, existe $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 t.q $G - H = \nabla f$

Supongamos que $Y = (P,Q,R)$ y $X = (L,M,N)$. Para resolver la ecuación $\operatorname{rot} X = Y$ tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P$, $\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = Q$, $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = R$

P, Q y R son conocidas y L, M, N las incógnitas

Por lo tanto, para que el sistema tenga solución en un cierto conjunto abierto S es necesario que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (xz, -yz, y)$. Sabiendo que F es de rotores hallar un potencial vector de F.

Sea $G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.q $\text{rot}(G) = F$, si $G = (A, B, C)$ entonces se deben cumplir las siguientes ecuaciones diferenciales

$$C_y - B_z = xz$$
$$A_z - C_x = -yz$$
$$B_x - A_y = y$$

Supongamos $C = 0$ entonces $B_z = -xz$, $A_z = -yz$, $B_x - A_y = y$

Integrando $B(x,y,z) = -\frac{1}{2}xz^2 + f(x,y)$

$$A(x,y,z) = -\frac{1}{2}yz^2 + g(x,y)$$

$$B_x(x,y,z) - A_y(x,y,z) = -\frac{1}{2}z^2 + f_x(x,y) + \frac{1}{2}z^2 - g_y(x,y) = f_x(x,y) - g_y(x,y) = y$$

Si tomamos $g(x,y) = 0$, entonces, integrando $f(x,y) = xy$ verifica la ecuación de arriba.

Por lo tanto, $G(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}yz^2, -\frac{1}{2}xz^2 + xy, 0\right)$ es un potencial vector de F.

Teorema: Si $Y: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1, entonces existe un campo vectorial X t.q $\text{rot}\, X = Y$ sii Y es solenoidal (es decir si $\text{div}\, Y = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$).

Superficies paramétricas

Definición: Una SUPERFICIE PARAMETRIZADA en $\mathbb{R}^3$ es la imagen de una función continua ϕ definida en una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que toma valores en $\mathbb{R}^3$, esto es, $\phi: (u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$

Gráficas de funciones: $\phi: (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(x,y) = (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$

Ejemplo: Entre las superficies que son gráficas de funciones podemos mencionar los planos de la forma $ax + by + cz = d$, siempre que $c \neq 0$. Basta considerar $\phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

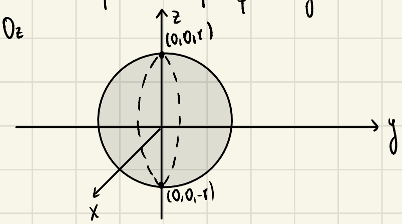
$\phi(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{c}(d - ax - by)\right)$ claramente es continua y justamente $\text{Im}\,\phi$ es el plano deseado

Ejemplo: El paraboloide hiperbólico $z=x^2-y^2$ es otra superficie definida por el gráfico de una función. Consideramos $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\phi(x,y) = (x, y, x^2-y^2)$

Ejemplo (ESFERA): Si consideramos la semicircunferencia en el plano $x=0$, centrada en el origen y de radio $r>0$, parametrizada mediante la función $\alpha(u) = (0, r\cos(u), r\operatorname{sen}(u))$, donde $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, y la hacemos girar alrededor del eje Oz obtenemos la siguiente parametrización de la esfera.

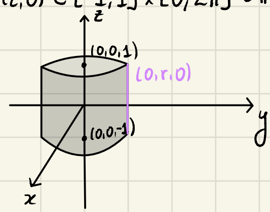
$$\phi: (u,\theta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(u,\theta) = (r\cos(u)\cos\theta, r\cos(u)\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}(u)) \in \mathbb{R}^3$$

Esta situación se presenta siempre que tengamos una superficie de revolución obtenida a partir de una curva en el plano $x=0$ que corta al eje Oz



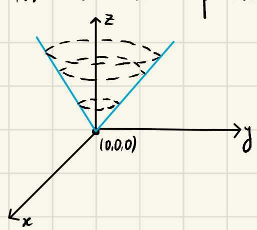
Ejemplo (CILINDRO): Consideramos el cilindro de ecuación $x^2+y^2=r^2$, con $-1 \leq z \leq 1$. Hacemos girar el segmento contenido en el plano $x=0$, con $y=r$ y $z \in [-1,1]$.

Obtenemos la parametrización $\phi: (z,\theta) \in [-1,1] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(z,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) \in \mathbb{R}^3$.



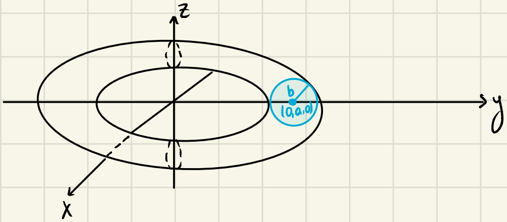
Ejemplo (CONO): Consideramos el cono de ecuación $x^2+y^2=z^2$. En este caso hacemos girar la recta de ecuación $\begin{cases} z=y \\ x=0 \end{cases}$

parametrizada por $\alpha(t) = (0,t,t)$. Obteniendo la parametrización $\phi: (t,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(t,\theta) = (t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta, t) \in \mathbb{R}^3$



Ejemplo (TORO): Teniendo en cuenta que una parametrización de la circunferencia es $\alpha(u) = (0, a+b\cos(u), b\operatorname{sen}(u))$, cuando el parámetro $u \in [0, 2\pi]$, obtenemos que una parametrización del toro es

$$\phi: (u,\theta) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(u,\theta) = ((a+b\cos(u))\cos\theta, (a+b\cos(u))\operatorname{sen}\theta, b\operatorname{sen}(u)) \in \mathbb{R}^3$$



PLANO TANGENTE

$\phi : (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$

Sea $(u(t), v(t))$, con t en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, una curva regular contenida en D. Entonces

$\alpha : t \in I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \alpha(t) := \phi(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \in \mathbb{R}^3$ es una curva contenida en S que se llama

CURVA PARAMETRIZADA SOBRE LA SUPERFICIE

Consideramos un punto $A = (u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$ de la curva en la región D y sea $P = \alpha(t_0)$. Si la función ϕ es diferenciable, entonces, por la regla de la cadena, tenemos

$$\alpha'(t_0) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0)\, u'(t_0) + \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0)\, v'(t_0) = u'(t_0)\, \phi_u(A) + v'(t_0)\, \phi_v(A)$$

Definición: Sea $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de una superficie S diferenciable en $A = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Decimos que v es un **VECTOR TANGENTE** a la superficie en el punto $P = \phi(u_0, v_0)$ si es vector tangente en dicho punto a una curva sobre la superficie. Es decir, existe una curva $\mathcal{C}$ contenida en la superficie parametrizada por $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$ t.q $\alpha(t_0) = P$ y $\alpha'(t_0) = v$

Proposición: Todos los vectores tangentes a S por $\phi(u_0, v_0)$ son C.L de $\phi_u(A)$ y $\phi_v(A)$

Obs: Los vectores $\phi_u(A)$ y $\phi_v(A)$ sean L.I, lo que ocurre sii $\| \phi_u(A) \wedge \phi_v(A) \| \neq 0$. En este caso que la parametrización ϕ es **REGULAR** de A

Proposición: Sean $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de S, $A = (u_0, v_0) \in D$ y A punto regular de ϕ. Entonces, el espacio de vectores tangentes a la superficie es un plano. Es el plano que pasa por el punto $P = \phi(A)$ generado por los vectores $\phi_u(A)$ y $\phi_v(A)$

A este plano lo denotamos como T_pS y se llama **PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE** S por el punto P.

Dem: Por lo que vimos en la proposición todo vector tangente por el punto $P = \phi(u_0, v_0)$ es C.L de $\phi_u(A)$ y $\phi_v(A)$. Además, como P es un punto regular tenemos que $\{\phi_u(A), \phi_v(A)\}$ es L.I, por lo tanto, el espacio que generan es un plano. ■

Por lo probado anteriormente:

$$T_pS : (X - P) \cdot (\phi_u(A) \wedge \phi_u(A)) = 0$$

Donde $X = (x, y, z)$, $P = \phi(A)$ y $A = (u_0, v_0)$

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación implícita $z = x^2 - y^2$ en el punto $P = (-1, 1, 0)$

$\phi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$

$\phi_u(u,v) = (1, 0, 2u)$

$\phi_v(u,v) = (0, 1, -2v)$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} & \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ 1 & 0 & 2u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2v & 0 & 1 \end{array} \right| = \hat{k} - 2u\,\hat{\imath} + 2v\,\hat{\jmath} = (-2u, 2v, 1)$$

$\phi_u \wedge \phi_v = (-2u, 2v, 1)$

Si consideramos ahora el punto $P = (-1, 1, 0) = \phi(-1, 1)$ tenemos que

$\phi_u(A) \wedge \phi_v(A) = (2,2,1)$

Entonces

$T_pS : ((x,y,z) - (-1,1,0)) \cdot (2,2,1) = 0$

Concluimos que $T_pS : 2x + 2y + z = 0$.

Ejemplo (SEMIESFERA): Consideramos la semiesfera superior de radio r y con centro en el origen : $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z>0$

$$\phi : [0,2\pi] \times [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

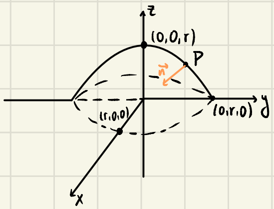
$$(u,v) \longmapsto (r\cos(u)\cos(v), r\,\text{sen}(u)\cos(v), -r\,\text{sen}(v))$$

Entonces $\phi_u(u,v) \wedge \phi_v(u,v) = -r^2 \text{sen}\, v(\cos(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\,\text{sen}(v), \cos(v))$

$\phi_u(u,v) \wedge \phi_v(u,v) = \vec{0} \Leftrightarrow v=0$

$\|\phi_u(u,v) \wedge \phi_v(u,v)\| = r^2 \text{sen}(v)$. Entonces

$$\vec{n} = \frac{\phi_u(u,v) \wedge \phi_v(u,v)}{\|\phi_u(u,v) \wedge \phi_v(u,v)\|} = -(\cos(u)\,\text{sen}(v), \text{sen}(u)\,\text{sen}(v), \cos(v))$$



$P = (1,1,\sqrt{2})$, para $u = v = \frac{\pi}{4}$ y $r=2$

En este caso tenemos que $\vec{n} = \frac{-1}{2}(1,1,\sqrt{2})$, entonces

$T_pS : ((x,y,z) - (1,1,\sqrt{2})) \cdot \frac{-1}{2}(1,1,\sqrt{2}) = 0$

$T_pS : x + y + \sqrt{2}\, z = 4$

Ejemplo: Para una superficie de revolución parametrizada por $\phi(t,\theta) = (y(t)\cos\theta, y(t)\,\text{sen}\,\theta, z(t))$ donde $(t,\theta) \in I \times [0,2\pi]$ se obtiene que

$\phi_t(t,\theta) = (y'(t)\cos\theta, y'(t)\,\text{sen}\,\theta, z'(t))$ y $\phi_\theta(t,\theta) = (-y(t)\,\text{sen}\,\theta, y(t)\cos\theta, 0)$

Su producto vectorial es

$\phi_t(t,\theta) \wedge \phi_\theta(t,\theta) = (-y(t)z'(t)\cos\theta, -y(t)z'(t)\,\text{sen}\,\theta, y'(t)y(t))$

$\|\phi_t(t,\theta) \wedge \phi_\theta(t,\theta)\|^2 = y(t)^2(y'(t)^2 + z'(t)^2)$. El punto $\phi(t,\theta)$ es regular sii $y(t) \neq 0$ y el punto $(0, y(t), z(t))$ es un punto regular de la curva $\mathcal{C}$.

En este caso el producto vectorial es

$\phi_u(u,\theta) \wedge \phi_\theta(u,\theta) = (-(a+b\cos(u))b\cos(u)\cos\theta, -(a+b\cos(u))b\,\text{sen}(u))$ y, por tanto, obtenemos que $\|\phi_u(u,\theta) \wedge \phi_\theta(u,\theta)\|^2 = b^2(a+b\cos u)^2 \neq 0$ ya que $a>b>0$

$\phi(t_0,\theta_0) = (x_0, y_0, z_0)$ es

$-z'(t_0)\cos\theta_0 (x-x_0) - z'(t_0)\,\text{sen}\,\theta_0 (y-y_0) + y'(t_0)(z-z_0) = 0$

Si consideramos el toro parametrizado por

$\phi(u,\theta) = ((2+\cos(u))\cos\theta, (2+\cos(u))\,\text{sen}\,\theta, \text{sen}(u))$ donde $(u,\theta) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$. En el punto $\phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (0,2,1)$ el plano tangente es $z=1$ ya que, en este caso, $z(u) = \text{sen}(u)$ y $z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Área de superficies parametrizadas

Definición: Sea $\phi: D\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización inyectiva regular de una superficie S. Definimos el ÁREA DE S como:

$$A(S) = \iint_D \|\phi_u(u,v) \wedge \phi_v(u,v)\|\, du dv$$

Ejemplo (ESFERA): Consideramos la parametrización de la esfera dada por

$$\phi: [0,2\pi) \times (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longrightarrow (r\cos(u)\,\mathrm{sen}(v), r\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(v), r\cos(v))$$

$\phi_u = (-r\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(v), r\cos(u)\,\mathrm{sen}(v), 0)$ y $\phi_v = (r\cos(v)\cos(v), r\,\mathrm{sen}(u)\cos(v), -r\,\mathrm{sen}(v))$

$\|\phi_u \wedge \phi_v\| = r^2\mathrm{sen}(v) \neq 0$

Entonces, $A(S^2) = \iint_D \|\phi_u \wedge \phi_v\| du dv = r^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(v) dv = 4\pi r^2$

$\Rightarrow A(S^2) = 4\pi r^2$

Ejemplo (TORO): $\phi(u,v) = ((a+b\cos(u))\cos(v), (a+b\cos(u))\,\mathrm{sen}(v), b\,\mathrm{sen}(u))$ $u,v \in [0,2\pi)$

$\phi_u = (-b\,\mathrm{sen}(u)\cos(v), -b\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(v), b\cos(u))$, $\phi_v = (-(a+b\cos(u))\,\mathrm{sen}(v), (a+b\cos(u))\cos(v), 0)$

Entonces $\|\phi_u \wedge \phi_v\| = b(a+b\cos(u))$

$A(T^2) = r\int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} (a+b\cos(u))\, du = 4ab\pi^2$

Ejemplo (CONO): $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$ donde $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi)$

Entonces $\|\phi_r(r,\theta) \wedge \phi_\theta(r,\theta)\| = \sqrt{r^2 + r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta} = \sqrt{2}\, r$. De lo que concluimos que:

$A(\text{Cono}) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\, r\, dr d\theta = 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 r dr = \sqrt{2}\,\pi$

Ejemplo (Helicoide): $\phi: (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi)$

Entonces $\|\phi_r(r,\theta) \wedge \phi_\theta(r,\theta)\| = \sqrt{r^2 + \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta} = \sqrt{r^2+1}$

Por lo tanto, $A(\text{Helicoide}) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, dr = \pi(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))$

Ejemplo: Sea S la superficie dada por $z = x^2+y^2$, $x^2+y^2 < 1$. Entonces

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr d\theta = (5\sqrt{5} - 1)\frac{\pi}{6}$$

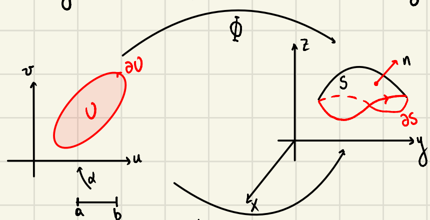
Orientación de superficies parametrizadas

Una orientación de una superficie S es, por definición, un campo continuo $N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.q., para cada $p \in S$, $N(p)$ es un vector unitario normal al plano tangente a la superficie S en el punto p. Cuando existe una tal orientación, decimos que la superficie S es orientable

Toda superficie dada con el gráfico de una función de clase C^1 es orientable
$\phi(x,y) = (x, y, h(x,y))$

$\phi_x(x,y) \wedge \phi_y(x,y) = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$ es normal al plano tangente a la superficie en el punto $(x, y, h(x,y))$ y su norma es $\|\phi_x(x,y) \wedge \phi_y(x,y)\| = \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}$

$$\boxed{N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}} (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)}$$



Sabemos entonces que, para cada punto $(x,y,z) \in S$, el vector $\nabla g(x,y,z)$ es normal al plano tangente a la superficie S en dicho punto, por lo tanto para obtener una orientación de la superficie

$$\boxed{N(x,y,z) = \frac{\nabla g(x,y,z)}{\|\nabla g(x,y,z)\|}}$$

Proposición: Sea N una orientación de la superficie de la superficie $S = \phi(U)$, donde ϕ es una parametrización simple y regular, definida en $U \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, se verifica que
$\phi_u \wedge \phi_v = \sigma N(\phi(u,v)) \|\phi_u \wedge \phi_v\|$. $\forall (u,v) \in U$ donde σ es cte, pudiendo valer 1 o -1. Cuando $\sigma = 1$ decimos que la parametrización ϕ preserva la orientación N mientras que cuando $\sigma = -1$ decimos que ϕ revierte la orientación N

Corolario: Sea S superficie orientable, con orientación N, que admite una parametrización simple y regular. Supongamos que N_1 es otra orientación de la superficie. Entonces $N_1 = N$ o $N_1 = -N$.

Integrales de campos escalares

Definición: Sea S una superficie con parametrización $\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1, regular y sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo con $S \subseteq \Omega$. Definimos la integral de f sobre ϕ como

$$\iint_{\phi} f \, dS = \iint_{U} f(\phi(u,v)) \|\phi_u(u,v) \wedge \phi_v(u,v)\| \, du\, dv$$

LEMA: Sean $\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de clase C^1 regulares de una misma superficie S, y sea $h: V \longrightarrow U$ difeomorfismo tq $\phi \circ h = \psi$.
Denotamos $h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(x,y))$. Entonces
$\psi_x \wedge \psi_y = (\phi_u \wedge \phi_v) \dfrac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x,y)}$ donde $\dfrac{\partial(h_1,h_2)}{\partial(x,y)}$ denota el jacobiano de h.

Demostración: Por la regla de la cadena tenemos

$$\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

Y también $\quad \Psi_y = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = \dfrac{\partial \phi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial h_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial h_2}{\partial y}$

$$\Psi_x \wedge \Psi_y = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}\right)\frac{\partial(h_1,h_2)}{\partial(x,y)} \quad \blacksquare$$

TEOREMA: Sean $\phi: U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow S\subset\mathbb{R}^3$ y $\Psi: V\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow S\subset\mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de clase C^1 regulares e inyectivas de una misma superficie S, y sea $f: \Omega\subset\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, $S\subseteq\Omega$. Entonces

$$\iint_\phi f\,dS = \iint_\Psi f\,dS.$$

Demostración: Como las parametrizaciones son inyectivas $\exists\, h: V\to U$ difeomorfismo, que denotemos $h=(h_1,h_2)$, t.q. $\phi\circ h = \Psi$. Entonces aplicando el teorema del cambio de variable junto con el lema anterior obtenemos

$$\iint_\phi f\,dS = \iint_U f(\phi(u,v))\,\|\phi_u(u,v)\wedge\phi_v(u,v)\|\,du\,dv = \iint_V f(\phi(h(x,y)))\,\|\phi_u(h(x,y))\wedge\phi_v(h(x,y))\|\left|\frac{\partial(h_1,h_2)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy = \iint_V f(\Psi(x,y))\,\|\Psi_x(x,y)\wedge\Psi_y(x,y)\|\,dx\,dy$$

$$= \iint_\Psi f\,dS \quad \blacksquare$$

Definición: Sea $S\subset\mathbb{R}^3$ una superficie y $f: \Omega\subset\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua donde $S\subseteq\Omega$. Definimos la **INTEGRAL DE f SOBRE S** como

$$\iint_S f\,dS = \iint_\phi f\,dS,$$ donde ϕ es cualquier parametrización de S de clase C^1 regular e inyectiva.

Corolario: La definición de área NO depende de la parametrización, es decir

$$A(S) = \iint_\phi \|\phi_u \wedge \phi_v\|\,du\,dv,$$ donde $\phi: D\subseteq\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es cualquier parametrización de clase C^1 regular e inyectiva de S.

Propiedades de las integrales de superficie de campos escalares:

1) Sea S una superficie paramétrica, f, g, dos campos escalares continuos en S, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\iint_S (\alpha f + \beta g)\,dS = \alpha\iint_S f\,dS + \beta\iint_S g\,dS$$

2) Si $\forall (x,y)\in S$ se verifica que $f(x,y)\leq g(x,y)$, siendo S una superficie paramétrica y f y g campos escalares continuos en S entonces

$$\iint_S f\,dS \leq \iint g\,dS$$

3) Si $S = S_1 \cup S_2$ disjuntas salvo quizás puntos del borde, entonces

$$\iint_S f\,dS = \iint_{S_1} f\,dS + \iint_{S_2} f\,dS$$

4) Sean S una superficie paramétrica y $f: S\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Tomemos una constante $M>0$ de forma que $|f(x,y,z)|\leq M$ $\forall (x,y,z)\in S$.

Entonces $\quad \left|\iint_S f\,dS\right| \leq M\cdot \text{Área}(S)$

Ejemplo: Sea $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ un campo escalar y $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=r\cos\theta,\ y=r\operatorname{sen}\theta,\ z=\theta : \theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,1]$ $\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dado por $\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta,\theta)$

Entonces $\Phi_r(r,\theta)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,\theta)$, $\Phi_\theta(r,\theta)=(-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta,1)$

$\Rightarrow \Phi_r\wedge\Phi_\theta=(\operatorname{sen}\theta,-\cos\theta,r)$ y $\|\Phi_r\wedge\Phi_\theta\|=\sqrt{1+r^2}$ $\Rightarrow \iint_S f\,dS=\iint_U f(\Phi(r,\theta))\,\|\Phi_r\wedge\Phi_\theta\|\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1+r^2)\,dr\,d\theta=2\pi\left(r+\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1$

$=2\pi\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{8\pi}{3}$

Ejemplo: Sea S la esfera unidad $x^2+y^2+z^2=1$. Hallar

$$\iint_S z^2\,dS$$

$\Phi:[0,2\pi]\times[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$(u,v)\longmapsto(\cos(u)\operatorname{sen}(v), \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), r\cos(v))$

$\|\Phi_u\wedge\Phi_v\|=\operatorname{sen}(v)$, y $f(\Phi(u,v))=\cos^2(v)$. Entonces

$$\iint_S z^2\,dS=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(v)\operatorname{sen}(v)\,du\,dv=2\pi\int_0^{\pi}\cos^2(v)\operatorname{sen}(v)\,dv=\frac{4\pi}{3}$$

Observación: Si S es una superficie dada por la gráfica de $z=g(x,y)$ con g de clase C^1 definida en D y f función continua sobre S entonces:

$$\iint_S f\,dS=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy$$

Ejemplo: Sea S la superficie dada por $z=x^2+y$ en $[0,1]\times[-1,1]$, encontrar $\iint_S x\,dS$.

$$\iint_S x\,dS=\iint_D x\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2+1^2}\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{2+4x^2}\,dx\,dy=2\int_0^1\sqrt{2+4x^2}\,dx=\frac{2}{8}\int_2^6\sqrt{u}\,du=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}$$

Observación: Si S tiene densidad de masa $m(x,y,z)$ en (x,y,z). Entonces su masa total es:

$$M(S)=\iint_S m(x,y,z)\,dS$$

Ejemplo: Sea S el helicoide con parametrización $\Phi(u,v)=(u\cos(v), u\operatorname{sen}(v), v)$ en $[0,1]\times[0,2\pi]$ con densidad de masa en (x,y,z) igual al doble de la distancia al eje. Hallar la masa total de S.

$m(x,y,z)=2\sqrt{x^2+y^2}$ y $\|\Phi_u\wedge\Phi_v\|=\sqrt{1+u^2}$. Entonces

$$M(S)=\iint_S 2u\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2u\sqrt{1+u^2}\,du\,dv=2\pi\int_0^1 2u\sqrt{1+u^2}\,du=\frac{4}{3}\pi\,(2\sqrt{2}-1)$$

Integrales de campos vectoriales

Definición: Sea $\Phi:D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S y $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo, $S\subseteq\Omega$. Definimos la INTEGRAL DE X SOBRE Φ como

$$\iint_{\Phi} X\,dS = \iint_{D} X(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v))\,du\,dv$$

Ejemplo: Sea $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, donde $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$. Calcular $\iint_{\Phi} r\,dS$ con $r = (x, y, z)$

$$\iint_{\Phi} r \cdot dS = \iint_{D} r(\Phi(\theta,\phi)) \cdot (\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi)\,d\theta\,d\phi$$

$$r(\Phi(\theta,\phi)) \cdot (\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\theta \operatorname{sen}\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & \operatorname{sen}\theta \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}\phi$$

Entonces $\iint_{\Phi} r \cdot dS = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi = 2\pi \cos\phi \Big|_0^{\pi} = -4\pi$

Teorema: Sean S una superficie orientada, $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Psi: V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones regulares de S que preservan orientación. Si X es un campo vectorial continuo entonces

$$\iint_{\Phi} X \cdot dS = \iint_{\Psi} X \cdot dS$$

Demostración: Como las dos parametrizaciones preservan la orientación tenemos que

$$\frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} = N = \frac{\Psi_x \wedge \Psi_y}{\|\Psi_x \wedge \Psi_y\|}$$

$$\iint_{\Phi} X\,dS = \iint_{U} X(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v))\,du\,dv = \iint_{U} X(\Phi(u,v)) \cdot N \|(\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v))\|\,du\,dv = \iint_{U} (X \cdot N)\,(\Phi(u,v))\, \|\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)\|\,du\,dv$$

$$= \iint_{V} (X \cdot N)\,(\Psi(x,y))\, \|\Psi_x(x,y) \wedge \Psi_y(x,y)\|\,dx\,dy = \iint_{V} X(\Psi(x,y)) \cdot N \,\|\Psi_x(x,y) \wedge \Psi_y(x,y)\|\,dx\,dy = \iint_{V} X(\Psi(x,y)) \cdot (\Psi_x(x,y) \wedge \Psi_y(x,y))\,dx\,dy = \iint_{\Psi} X \cdot dS \quad \blacksquare$$

TEOREMA: Sea S una superficie orientada, $\Phi: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una parametrización regular que preserva orientación y $\Psi: V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una parametrización regular que revierte orientación. Si X es un campo vectorial continuo entonces

$$\iint_{\Phi} X \cdot dS = -\iint_{\Psi} X \cdot dS$$

Definición: Sea S una superficie orientada y $\Phi: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una parametrización de clase C^1 regular e inyectiva que preserva orientación. Si X un campo vectorial continuo definido sobre S definimos EL FLUJO DE X SOBRE S como:

$$\iint_{S} X \cdot dS = \iint_{\Phi} X \cdot dS$$

Proposición: Si S es una superficie orientada y X es un campo continuo definido sobre S entonces

$$\iint_{S} X \cdot dS = \iint_{S} X \cdot N \cdot dS$$

Propiedades de las integrales de superficie de campos vectoriales

1) Sea S una superficie paramétrica orientada, X, Y, dos campos vectoriales continuos en S y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\iint_{S} (\alpha X + \beta Y)\,dS = \alpha \iint_{S} X\,dS + \beta \iint_{S} Y\,dS$$

2) Si $S = S_1 \cup S_2$ disjuntas salvo quizás puntos del borde, entonces
$$\iint_S X \cdot dS = \iint_{S_1} X \cdot dS + \iint_{S_2} X \cdot dS$$

3) Sean S una superficie orientada y X un campo vectorial continuo en S. Sea K t.q $\|X(x,y,z)\| \leq K \quad \forall (x,y,z) \in S$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se comprueba que
$$\left| \iint_S X \cdot dS \right| \leq K \cdot \text{Área}(S)$$

masa del fluido $= \iint_S X \cdot N \, dS = \iint_S X \cdot dS$

Ejemplo: Sea $T(x,y,z)$ la temperatura en un punto $(x,y,z) \in S \subset \mathbb{R}^3$, S una sup. Si $T \in C^1$ entonces
$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$. El calor fluye según el campo vectorial $X = -K \cdot \nabla T$ $\quad K =$ cte conductividad.

La tasa total de flujo o flujo de calor a través de sup. S viene dada por
$$\iint_S X \cdot dS$$

$T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Sea S la esfera unidad $x^2+y^2+z^2=1$, orientado según la normal exterior. Hallar el flujo de calor a través de S suponiendo que $K=1$.

$X(x,y,z) = -\nabla T(x,y,z) = -2(x,y,z)$. Como $N = r = (x,y,z)$ se sigue que $X \cdot N = -2(x^2+y^2+z^2) = -2$. Entonces
$\iint_S X \cdot dS = \iint_S X \cdot N \, dS = -2 \iint_S dS = -8\pi$ $\Rightarrow$ El flujo de calor es negativo, entonces la temperatura fluye en el sentido contrario a la normal N, por lo tanto X apunta hacia adentro.

Definición: Sea S una superficie que es unión finita de superficies paramétricas, $S_1, \ldots, S_n$ dos a dos disjuntas o tales que su intersección es unión finita de curvas regulares. Entonces, si $X: S \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo definimos el FLUJO DE X SOBRE S como:
$$\iint_S X \, dS = \iint_{S_1} X \, dS + \iint_{S_2} X \, dS + \ldots + \iint_{S_n} X \, dS$$

Teorema de Green

TEOREMA: Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada, en $\mathbb{R}^2$ y sea D la unión de la región interior a $\mathcal{C}$ con la curva $\mathcal{C}$.
Sea $X = (P,Q): U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto que contenga a D. Entonces
$$\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \iint_D (Q_x - P_y) \, dx dy$$

COROLARIO: (CÁLCULO DE ÁREAS) Si $X = (P,Q)$ t.q $Q_x - P_y = 1$ entonces $\iint_D (Q_x - P_y) \, dx dy = \iint_D dx dy = A(D)$ y por lo tanto (aplicando Green)

$$A(D) = \oint_{\partial D} X\,ds$$

Podemos considerar cualquiera de los siguientes campos para hallar el área de D.

i) $X(x,y) = (0,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ii) $X(x,y) = (-y,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

iii) $X(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Entonces $A(D) = \int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$

Ejemplo: Hallar el área de la elipse $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$, con $a,b>0$.

Consideramos la siguente parametrización $\alpha(t) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2(t) + ab\,\mathrm{sen}^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$$

Teorema de Green generalizada: Sean $C_1, \dots, C_n$ n curvas de Jordan, sastifaciendo:

i) Dos curvas cualesquiera NO se cortan

ii) Todas las curvas $C_2, \dots, C_n$ están en el interior de C_1.

iii) Cada C_i está en el exterior de C_j $(i \neq j,\ i,j = 2, \dots, n)$

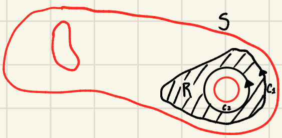
Sea R la unión de C_1 con la porción interior a C_1 que NO está dentro de ninguna C_j $(j = 2, \dots, n)$. Si $X = (P,Q)$ es de clase C^1 en un abierto S que contiene a R, se verifica: $\iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \oint_{C_1} X \cdot dS - \sum_{j=2}^{n} \oint_{C_j} X \cdot dS$, donde las curvas se consideran con orientación antihorario

Teorema: Sea $X = (P,Q)$ de clase C^1 en un abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^2$, y supongamos que $Q_x - P_y = 0$ en S.

Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan contenidas en S, sastifaciendo:

i) C_2 está en el interior de C_1

ii) Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2, están en S.



Si ambas curvas se recorren en el mismo sentido, entonces

$$\oint_{C_1} X\,ds = \oint_{C_2} X\,ds$$

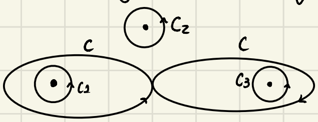
Demostración: Basta aplicar el teorema de Green generalizando con $n=2$ a la región constituida por los puntos entre C_1 y C_2

$$\oint_{C_1} - \oint_{C_2} X\,dS = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint_R 0\,dx\,dy = 0$$

Entonces $\oint_{C_1} X\,dS = \oint_{C_2} X\,ds$ ∎

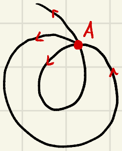
Ejemplo: Sean P, Q dos campos escalares de clase C^1 que sastifacen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en todo el plano excepto en tres puntos.

Sean C_1, C_2, C_3 las tres circunferencias centradas en dichos puntos y $\mathcal{C}$ la curva que rodea a C_1 y C_3 que se muestran en la siguiente figura, y sea $I_K = \oint_{C_K} P\,dx + Q\,dy$ $(K = 1, 2, 3)$. Supongamos que $I_1 = 12$, $I_2 = 10$ e $I_3 = 15$



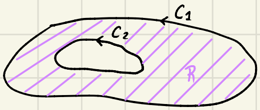
COSAS IMPORTANTES:

Una curva C es simple si NO se cruza a sí misma



NO es simple se cruza en A

CASO PARTICULAR DE GREEN GENERALIZADO:



Por Green generalizando: $\iint_{R \cup C_1} (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_{C_1} F - \int_{C_2} F$. Si además vale $\underbrace{Q_x - P_y}_{\text{rot } F} = 0$

$D = R \cup C_1 \} \Rightarrow \oint_{C_1} F = \oint_{C_2} F$

C_1 y C_2 son homotópicas

Si tengo UNA CURVA en $\mathbb{R}^n$ en un campo vectorial

$\Rightarrow$ Defino: $\int_C F \overset{def}{=} \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \, dt = W_r(F)$

Si tengo una Cfa de radio R, contenida en un plano Π de $\mathbb{R}^3$, y $\{v, w\}$ son una b.o.n del plano $\Rightarrow$ puedo parametrizar la Cfa mediante $= \alpha(t) = \cos(t)\underset{\in \mathbb{R}^3}{\vec{v}} + \operatorname{sen}(t)\underset{\in \mathbb{R}^3}{\vec{w}}$

<u>Obs</u>: Si $\overset{(P,Q)}{\overset{\shortparallel}{F}} = U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ se puede pensar F como un campo en $\mathbb{R}^3$, con tercer función coordenada nula

$F = (P, Q, \vec{0})$

$\Rightarrow \text{rot}(F) = (0, 0, Q_x - P_y)$

Un conjunto U es simplemente conexo si toda curva cerrada simple C, se puede deformar continua a un punto, y manteniéndose en U.