VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

NOTACIÓN	DENSIDAD	DISTRIBUCIÓN	ESPERANZA	VARIANZA
$X \sim U[a,b]$	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \; si \; x \in [a,b] \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{cases}$	$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{a-b}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim N[0,1]$	PROP: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$	$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{(-\frac{1}{2}x^2)} dt$	$E(X) = 0$	$Var(X) = 1$
$X \sim N[\mu,\sigma]$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} * e^{(-\frac{1}{2}((\frac{x-\mu}{\sigma})^2)}$	$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} * e^{(-\frac{1}{2}((\frac{x-\mu}{\sigma})^2)} dt$ $P(a \le X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi\frac{(a-\mu)}{\sigma}$	$E(X) = \mu$	$Var(X) = \sigma^2$
$X \sim Cauchy[M$	$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2 + (x-M)^2}$ con $b > 0$ y $M \in \mathbb{R}$	-	-	-
$X \sim Expo[\lambda]$	$f_X(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x} \; si \; x \ge 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}$	$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \; si \; x \ge 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$Var(X) = \frac{1}{\lambda}$

DENSIDAD CONDICIONAL

Def: X, Y con densidad conjunta, $f_X(x) > 0$ $f_Y(y \mid X = x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$	OBS: $\int_{\mathbb{R}} f_Y(y \mid X = x) dy = 1$	OBS: $P(Y > b \mid X = x) = 1 - \int_{-\infty}^{b} f_Y(y \mid X = x) dx$

Leyes de Morgan

i) $\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n^c$

ii) $\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c$

Ley de los grande números

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables i.i.d. con esperanza $\mu = E(X_i)$ y varianza $\sigma^2 = Var(X_i)$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$

$$P(|\overline{X}_n - \mu| < \epsilon) \to 1$$

cuando n tiende a infinito.

Notación: Escribiremos $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ para indicar que $\overline{X}_n$ está, con probabilidad muy alta, tan cerca de μ como queramos.

La distribución exponencial

Decimos que una variable aleatoria T tiene distribución exponencial de tasa (o parámetro) $\lambda > 0$, y lo notamos $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, si T tiene densidad

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \ge 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

En la Figura 7 se muestra esta densidad para distintos valores de λ.

Esperanza y varianza de la distribución exponenci

Si $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{x=i}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Series Geométricas:

$$\sum_{k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}$$

Cambio de variable

si X v.a con densidad $p_x(x)$ *en el intervalo* (a,b) si y es otra v.a entonces:

si $g(Y) = X$ $\quad (e.g: \; Y = X^2 \to g(y) = \sqrt{y})$

$p_y(y) = \left|\frac{d}{dy} g(y)\right| . p_x(g(y))$ $\quad$ *en el intervalo (donde* $y = h(x)$. *en el e.g:* $h(x) = x^2$) $h(a) \le y \le h(b)$

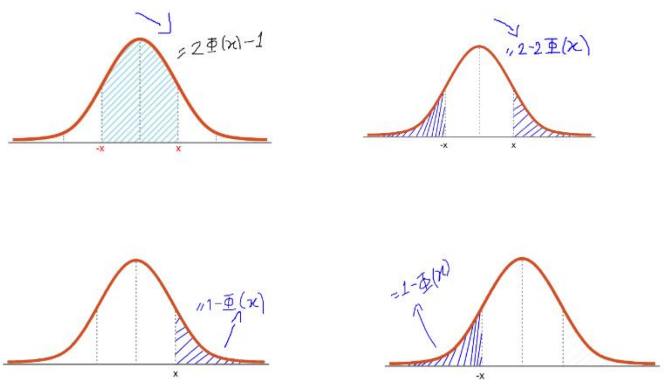
Cambio de variable inyectivo

Sea X una variable aleatoria con densidad $p_X(x)$ en el intervalo (a,b), e $Y = g(X)$ con g es creciente o decreciente. Entonces Y toma valores entre $g(a)$ y $g(b)$, con densidad

$$p_Y(y) = \frac{1}{|dy/dx|} p_X(x) \text{ con } y = g(x).$$

La ecuación $y = g(x)$ se debe resolver para x en términos de y, y este valor de x sustituirse en $p_X(x)$ y dy/dx. Esto dará una expresión para $p_Y(y)$ enteramente en términos de y.

Campana de Gauss



Teorema del límite central: Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 distinta de cero. Sea

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le z\right) = \Phi(z)$$

Desigualdad de Chebyshev

Sea X una variable de esperanza $\mu = E(X)$ y varianza $\sigma^2 = Var(X)$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ vale que

$$P(|X - \mu| \ge \epsilon) \le \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

Combinación lineal de normales independientes

Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes con $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces

$$X_1 + \cdots + X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

Densidad normal general

X tiene distribución normal de parámetros μ y σ^2 si su densidad es igual a

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Esto lo escribimos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Densidad normal estándar

La densidad normal estándar es la función

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

definida para todo x real. Una variable aleatoria X tiene distribución normal estándar si es absolutamente continua y su densidad es φ. Escribimos $X \sim N(0,1)$.

INTEGRALES

$\int \alpha u \, dx = \alpha \int u \, dx$	$\int \alpha u + \beta v \, dx = \alpha \int u \, dx + \beta \int v \, dx$
$\int u.v' \, dx = u.v - \int u'.v \, dx$ (partes)	$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$ (cambio de variable)

Propiedades de la gaussiana:

1. $\phi(-a) = 1 - \phi(a)$.
2. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2) \to F_X(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
3. Si $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ independientes entonces $W = aX + bY + c$ se puede escribir como $N(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

Propiedades de Conjuntos

$P(A^C) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Probabilidad Condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sucesos Independientes:

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Bayes I:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) * P(B)}{P(A)}$$

Permutaciones:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinaciones:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Probabilidad Total:

$$P(A) = P(A|B) * P(B) + P(A|B^C) * P(B^C)$$

V.A. DISCRETAS

Notación	Función de Probabilidad Puntual	Descripción
$X \sim Ber(p)$	$P_X(x) = (1-p)^{1-x} * (p)^x$	Éxito-Fracaso $R_X = \{0,1\}$
$X \sim Geo(p)$	$P_X(x) = (1-p)^{x-1} * p$ $R_X = \{1,2,\dots\}$	Repetir hasta el éxito.
$X \sim Hip(N.K,n)$	$P_X(x) = \frac{C_n^k * C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N}$ Sin reposición.	N total; K rojas; N – k azules; Se tiran n veces, cuenta el número de éxitos
$X \sim Bin(n,p)$	$P_X(x) = \binom{n}{x} * p^x * (1-p)^{n-x}$ Con reposición. $p = \frac{k}{n}$	
$X \sim Poiss(\mu)$	$P_X(x) = \frac{\mu^x}{x!} * e^{-\mu}$	μ = "promedio por unidad de tiempo"

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

VA	ESPERANZA	VARIANZA
$X \sim Ber(p)$	$E(X) = p$	$Var(X) = p * (1-p)$
$X \sim Geo(p)$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$
$X \sim Hip(N.K,n)$	$E(X) = \frac{n * K}{N}$	-
$X \sim Bin(n,p)$	$E(X) = n * p$	$Var(X) = n * p * (1-p)$
$X \sim Poiss(\mu)$	$E(X) = \mu$	$Var(X) = \mu$

Esperanza (Discretas)

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x * P(X = x)$$

$$E(g(x)) = \sum_{x \in R_X} g(x) * P(X = x)$$

Propiedades:

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$E(c * X) = c * E(X)$

Si son independientes:

$\mathbf{E(X * Y) = E(X) * E(y)}$

Distribución Conjunta

$\mathbf{P(X = x, Y = y)}$

(Tabla de distribución conjunta)

Si son independientes:

$\boldsymbol{P(X = x\ ,\ Y = y) = P(X = x) * P(Y = y) \quad \forall x \in R_x, \forall y \in R_Y}$

Esperanza en Distribución Conjunta:

$$\boldsymbol{E(g(X,Y)) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} g(x,y) * P(X = x, Y = y)}$$

Función de Probabilidad Puntual (Distribución o Cuantía):

$\boldsymbol{p_X(x) = P(X = x)}$

VARIANZA

Def:

$$\boldsymbol{Var(X) = \sum_{x \in R_X} (x - E(x))^2 * p_X(x)}$$

Obs: $\boldsymbol{Var(X) = E((X - E(X))^2}$

Obs: $\boldsymbol{Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$

Propiedades:

$Var(X + c) = Var(X)$

$Var(\alpha X) = \alpha^2 * Var(X)$

$\underline{\boldsymbol{Var(X) \geq 0}}$

DESVÍO ESTANDAR

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Si son independientes:

$\boldsymbol{Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)}$

COVARIANZA

DEF:

$$COV(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Propiedades:

1) $COV(X,X) = VAR(X)$
2) $COV(X,Y) = COV(Y,X)$
3) $COV(X+Y,Z) = COV(X,Z) + COV(Y,Z)$
4) $COV(\alpha X, Y) = \alpha * COV(X,Y)$
5) $COV(X,Y) = E(XY) - E(X) * E(Y)$
6) X e Y independientes $\rightarrow$ $COV(X;Y) = 0$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Función de Densidad:

1) $f(x) \geq 0$
2) $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
3) $P(x \in I) = \int_I f(x)\,dx \ \forall I \subset \mathbb{R}$

Esperanza:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)\,dx$$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) * f(x)\,dx$$

Varianza:

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Se cumplen las mismas propiedades que en las discretas.

Función de Distribución:

$\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leq x)}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

f(t): función de Densidad.

Se cumple la misma def. en negrita en las discretas.

$0 \leq F_X(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

F_X *no decreciente*

F_X *continua a la derecha*

$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \ || \ \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)dt$$

DENSIDAD CONJUNTA

DEF: (f es la derivada conjunta)

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ (x,y) \notin \Omega \\ \dfrac{1}{Área(\Omega)} & si\ x \in \Omega \end{cases}$$

$$P((x,y) \in B) = \iint_B f_{XY}(x,y)dxdy$$

PROP:

1) $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
2) $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$

DEF: Derivadas Marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

PROP:

X *e* Y *independientes* $\Leftrightarrow$

$f_{XY}(x,y) = f_X(x) * f_Y(y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Mediana

$\boldsymbol{P(X \leq x) = 0.5}$

Tercer Cuartil

$\boldsymbol{P(X \leq x) = 0.75}$

Esperanza:

$$E(g(x,y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) * f_{XY}(x,y)dxdy$$