

Macroeconomía Internacional

Francisco Roldán
IMF

October 2023

The views expressed herein are those of the authors and should not be attributed to the IMF, its Executive Board, or its management.

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t + 1$ y sobrevive $(1 - \rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1 - \rho)$ en $t + 2$ y sobrevive $(1 - \rho)^2b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$ en $t + s$

Total de pagos prometidos

$$q^* = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t + 1$ y sobrevive $(1 - \rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1 - \rho)$ en $t + 2$ y sobrevive $(1 - \rho)^2b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$ en $t + s$

Total de pagos prometidos

$$q^* = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t + 1$ y sobrevive $(1 - \rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1 - \rho)$ en $t + 2$ y sobrevive $(1 - \rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$ en $t + s$

Total de pagos prometidos

$$q^* = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t + 1$ y sobrevive $(1 - \rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1 - \rho)$ en $t + 2$ y sobrevive $(1 - \rho)^2b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$ en $t + s$

Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned} q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \frac{\kappa}{1+r - (1-\rho)} \end{aligned}$$

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t + 1$ y sobrevive $(1 - \rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1 - \rho)$ en $t + 2$ y sobrevive $(1 - \rho)^2b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$ en $t + s$

Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned} q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r - (1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho} \end{aligned}$$

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t + 1$ y sobrevive $(1 - \rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1 - \rho)$ en $t + 2$ y sobrevive $(1 - \rho)^2b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$ en $t + s$

Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned} q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r - (1-\rho)} = \frac{\kappa}{r + \rho} \end{aligned}$$

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t + 1$ y sobrevive $(1 - \rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1 - \rho)$ en $t + 2$ y sobrevive $(1 - \rho)^2b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$ en $t + s$

Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned} q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r - (1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho} \end{aligned}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t + 1$ y sobrevive $(1 - \rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1 - \rho)$ en $t + 2$ y sobrevive $(1 - \rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$ en $t + s$

Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned} q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r - (1-\rho)} = \frac{\kappa}{r + \rho} \end{aligned}$$

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio q^*
- Mañana cobro cupón κ , revendo la deuda que queda $(1 - \rho)$ a precio q^* .

$$q^* = \frac{1}{1+r} (\kappa + (1-\rho)q^*)$$

$$q^*(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^* = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en $t-s$ **sustituye perfectamente** $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio q^*
- Mañana cobro cupón κ , revendo la deuda que queda $(1 - \rho)$ a precio q^* .

$$q^* = \frac{1}{1+r} (\kappa + (1-\rho)q^*)$$

$$q^*(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^* = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en $t-s$ **sustituye perfectamente** $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio q^*
- Mañana cobro cupón κ , revendo la deuda que queda $(1 - \rho)$ a precio q^* .

$$q^* = \frac{1}{1+r} (\kappa + (1-\rho)q^*)$$

$$q^*(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^* = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en $t-s$ **sustituye perfectamente** $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio q^*
- Mañana cobro cupón κ , revendo la deuda que queda $(1 - \rho)$ a precio q^* .

$$q^* = \frac{1}{1+r} (\kappa + (1-\rho)q^*)$$

$$q^*(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^* = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en $t-s$ **sustituye perfectamente** $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Default significa

- Suspensión del pago de cupones κ (sí o sí requiere deuda de largo plazo)
- Fracción \tilde{h} de la deuda es destruida (se puede hacer con deuda de corto también...)

Default: problema del deudor

Con deuda **larga**, si debo b y emito x deuda nueva,

$$c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} = y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}}$$
$$b' = \underbrace{(1 - \rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1 - \rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2: q naturalmente es una función de b' y no de x

Default: problema del deudor

Con deuda **larga**, si debo b y emito x deuda nueva,

$$\begin{aligned} c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} &= y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}} \\ b' &= \underbrace{(1 - \rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}} \end{aligned}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1 - \rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2: q naturalmente es una función de b' y no de x

Default: problema del deudor

Con deuda **larga**, si debo b y emito x deuda nueva,

$$c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} = y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}}$$
$$b' = \underbrace{(1 - \rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1 - \rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2: q naturalmente es una función de b' y no de x

Default: ecuaciones de Bellman

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(b, y) &= \max \{ v^R(b, y) + \epsilon^R, v^D((1 - \bar{h})b, y) + \epsilon^D \} \\ &= \chi \log [\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D((1 - \bar{h})b, y)/\chi)]\end{aligned}$$

$$v^R(b, y) = \max_{c, b'} u(c) + \beta \mathbb{E} [\mathcal{V}(b', y') | y]$$

$$\text{sueto a } c + \kappa b = y + q(b', y) (b' - (1 - \rho)b)$$

$$v^D(b, y) = u(h(y)) + \beta \mathbb{E} [\psi \mathcal{V}(b, y') + (1 - \psi) v^D(b, y') | y]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(b, y) &= \max \{ v^R(b, y) + \epsilon^R, v^D((1 - \bar{h})b, y) + \epsilon^D \} \\ &= \chi \log [\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D((1 - \bar{h})b, y)/\chi)]\end{aligned}$$

$$v^R(b, y) = \max_{c, b'} u(c) + \beta \mathbb{E} [\mathcal{V}(b', y') | y]$$

$$\text{sueto a } c + \kappa b = y + q(b', y) (b' - (1 - \rho)b)$$

$$v^D(b, y) = u(h(y)) + \beta \mathbb{E} [\psi \mathcal{V}(b, y') + (1 - \psi) v^D(b, y') | y]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(b, y) &= \max \{ v^R(b, y) + \epsilon^R, v^D((1 - \bar{h})b, y) + \epsilon^D \} \\ &= \chi \log [\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D((1 - \bar{h})b, y)/\chi)]\end{aligned}$$

$$v^R(b, y) = \max_{c, b'} u(c) + \beta \mathbb{E} [\mathcal{V}(b', y') | y]$$

$$\text{sueto a } c + \kappa b = y + q(b', y) (b' - (1 - \rho)b)$$

$$v^D(b, y) = u(h(y)) + \beta \mathbb{E} [\psi v^R(b, y') + (1 - \psi) v^D(b, y') | y]$$

Default: problema del acreedor

Precio de la deuda

- Si mañana no hay default cobro
 - κ del cupón
 - $(1 - \rho)q'$ de la deuda no depreciada
 - $q' = q(b'', y')$
- Si hay default me quedo con $(1 - \bar{\kappa})$ bonos defaulteados

$$R(b, y) = \kappa + (1 - \rho)q(g_b(b, y), y)$$

$$q(b', y) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} [(1 - \mathbb{1}_D(b', y'))R(b', y') + \mathbb{1}_D(b', y')(1 - \bar{\kappa})q_D((1 - \bar{\kappa})b', y')]$$

$$q_D(b', y) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} [\psi ((1 - \mathbb{1}_D(b', y'))R(b', y') + \mathbb{1}_D(b', y')(1 - \bar{\kappa})q_D((1 - \bar{\kappa})b', y')) + (1 - \psi)q_D(b', y')]$$

Default: problema del acreedor

Precio de la deuda

- Si mañana no hay default cobro
 - κ del cupón
 - $(1 - \rho)q'$ de la deuda no depreciada
 - $q' = q(b'', y')$
- Si hay default me quedo con $(1 - \bar{\kappa})$ bonos defaulteados

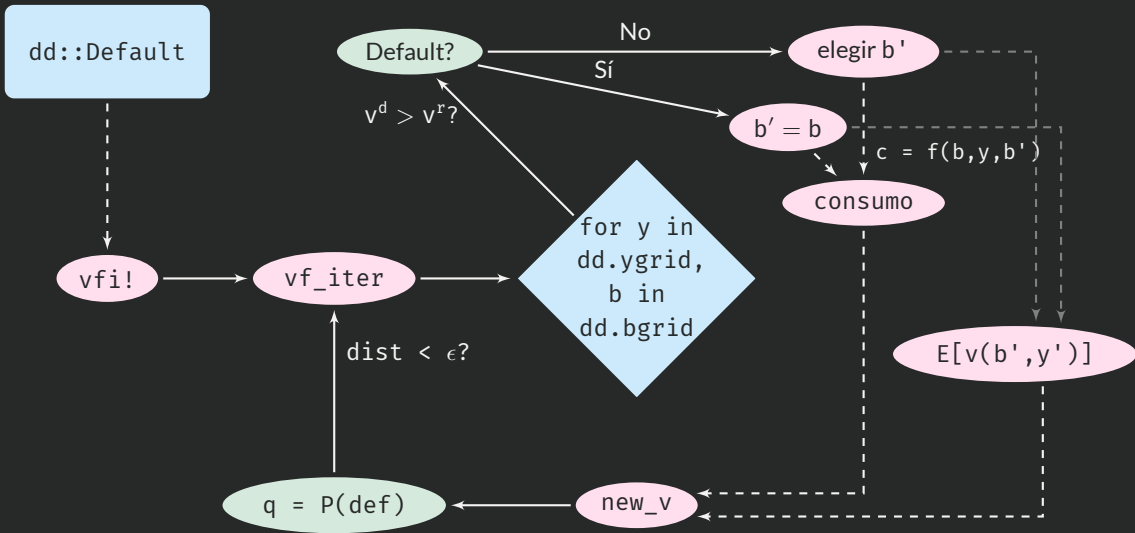
$$R(b, y) = \kappa + (1 - \rho)q(g_b(b, y), y)$$

$$q(b', y) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} [(1 - \mathbb{1}_D(b', y'))R(b', y') + \mathbb{1}_D(b', y')(1 - \bar{\kappa})q_D((1 - \bar{\kappa})b', y')]$$

$$q_D(b', y) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} [\psi ((1 - \mathbb{1}_D(b', y'))R(b', y') + \mathbb{1}_D(b', y')(1 - \bar{\kappa})q_D((1 - \bar{\kappa})b', y')) + (1 - \psi)q_D(b', y')]$$

- Estilo **equilibrio general**
 - Dadas funciones $q(b', y)$, $q_D(b', y)$, iterar sobre la función de valor
 - Actualizar q , q_D usando las políticas de default
 - Iterar
- Estilo **teoría de juegos**
 - Inicializar v , q en un período T lejano
 - Encontrar q consistentes con la política implícita en v (una vez!)
 - Actualizar v dado q
 - Iterar 'hacia el pasado' hasta convergencia
- ... Equilibrio recursivo (perfecto de Markov) con estrategias indexadas por (b, y, d)

Pseudo-código



def_simul.jl

Necesitamos

- En cada período t
 - Entro sabiendo b_t, y_t y si estoy en default d_t
 - Con las funciones de política, puedo calcular **emisión** b'_t y **consumo** c_t
 - Si estoy en default $b'_t = b_t$, si no, puedo calcular $q(b'_t, y_t)$
- Entre t y $t + 1$
 - Realizar dos **shocks** $\epsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $\xi_{t+1} \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 - Ahora, $\log y_{t+1} = \rho_y \log y_t + \sigma_y \epsilon_{t+1}$
 - Defaulteo en $t + 1$ si $\xi_{t+1} < \mathbb{P}(d_{t+1}) = d(b'_{t+1}, y_{t+1})$
 - Si estaba en repago en t pero voy a defaultear en $t + 1$, $b_{t+1} = (1 - \bar{h})b'_t$, si no, $b_{t+1} = b'_t$
- Para manejar todo esto
 - Un vector para guardar cada serie de tiempo
 - Interpoladores para todas las reglas de decisión