Soluções Sólitons da Equação de Konno-Sanuki

Rodrigo da Silva Tito e Prof. Dr Luiz Alberto de Oliveira Silva

Bacharelado em Matemática
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da UFRB
Rua Rui Barbosa, 710 Centro, Cruz das Almas, BA
rod.stito,lulaluizmat(@gmail.com)

RECONCITEC 2019 — Ciência, Tecnologia, Inovação e Cultura no Recôncavo da Bahia

UFRB — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Resumo

Neste trabalho, usamos o fato da equação de Konno-Sanuki ser pseudo-esférica (PE), para obtermos à auto-transformação de Bäcklund. Essa tal transformação é uma ferramenta poderosa, capaz de nos fornecer soluções 1-sóliton. Além do mais, por meio do princípio de superposição não-linear para a equação examinada, obtivemos fórmulas puramente algébricas para gerarmos as soluções 2, 3-sóliton, breather e wobble.

1. Introducão

ALguns fenômenos físicos não-lineares, são modelados pelas equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas. Um exemplo é a equação de Konno-Sanuki [2], que por sua vez, descreve ondas não-lineares sob a influência do potencial de deslocamento fraco; tal equação, admite soluções do tipo sóliton. Essas soluções na literatura são ondas não-lineares, solitárias, que se propagam com velocidade constante, sem perderem energia e mantendo suas formas mesmo após interações com outros sólitons. Motivados em obter esse tipo de soluções para equação de Konno-Sanuki, construímos fórmulas puramente algébricas que fornecem as soluções 1,2,3 - sóliton, breather e wobble por um processo simplificado. Esse feito, se deu mediante o fato da equação ser pseudo-esférica, possibilitando assim a utilização da auto-transformação de Bäcklund com o princípio de superposição não-linear.

2. Metodologia

A pesquisa seguiu por meio de um percurso personalizado auxiliado pelo orientador, com aulas teóricas e sessões de discussão, agregados ao uso da computação simbólica (Maple) para construir, verificar e apresentar os resultados.

3. Equação de Konno-Sanuki

Teorema 1 *A equação de* ***Konno-Sanuki*** *é dada por*

$$v_{xt} = v_{xxxx} + \frac{3}{2}v_x^2 v_{xx} + \alpha \sin v,$$

com $v = v(x,t)$ *e as 1-formas associadas*

$$\omega_1 = 0dx + \left(\tfrac{\alpha}{\eta}\sin(v) - \eta v_{xx}\right)dt,$$
$$\omega_2 = \eta dx + \left(\tfrac{\alpha}{\eta}\cos(v) + \tfrac{1}{2}\eta v_x^2 + \eta^3\right)dt,$$
$$\omega_3 = v_x dx + \left(v_{xxx} + \tfrac{1}{2}v_x^3 + \eta^2 v_x\right)dt.$$

com $\eta, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, *descreve superfície PE.*

4. Resultados e Discussão

A auto-transformação de Bäcklund é um método eficiente para obter soluções exatas de EDPs não-lineares que descrevem SPE; donde estabelece uma forte ligação entre a geometria diferencial clássica e a teoria moderna de sóliton.

Teorema 2 *A transformação*

$$\overline{\Gamma} = \tfrac{1}{\Gamma},$$
$$\overline{v} = v + 4\arctan(\Gamma),$$

deixa invariante o sistema de ***Riccati*** *da equação de* ***Konno-Sanuki*** *com as* f_{ij} *dada, isto é:*

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_x + f_{31}\left[\frac{1+\overline{\Gamma}^2}{2}\right] + f_{21}\overline{\Gamma} + f_{11}\left[\frac{1-\overline{\Gamma}^2}{2}\right] = 0, \\ \overline{\Gamma}_t + f_{32}\left[\frac{1+\overline{\Gamma}^2}{2}\right] + f_{22}\overline{\Gamma} + f_{12}\left[\frac{1-\overline{\Gamma}^2}{2}\right] = 0. \end{cases}$$

Teorema 3 *A* ***auto-transformação de Bäcklund*** *para a equação de* ***Konno-Sanuki*** *é dada por*

$$\begin{cases} (\overline{v}+v)_x = -2\eta\sin\left(\frac{\overline{v}-v}{2}\right), \\ (\overline{v}-v)_t = -2\left[v_{xxx} + \frac{1}{2}v_x^3 + \eta^2 v_x + \left(\frac{\eta}{2}v_x^2 + \frac{\alpha\cos(v)}{\eta} + \eta^3\right)\right. \\ \qquad \left.\sin\left(\frac{\overline{v}-v}{2}\right) + \left(\frac{\alpha\sin(v)}{\eta} - \eta v_{xx}\right)\cos\left(\frac{\overline{v}-v}{2}\right)\right]. \end{cases}$$

Corolário 3.1 *As soluções 1-sóliton para a equação de Konno-Sanuki, via auto-transformação de Bäcklund são dadas por*

$$v_1 = 4\arctan\left[\frac{1}{R}\right],$$

onde, $R = \exp\left(\eta x + \left(\frac{\alpha}{\eta} + \eta^3\right)t + k\right)$, *com* $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1 *: A solução 1-sóliton para três níveis de tempo:*

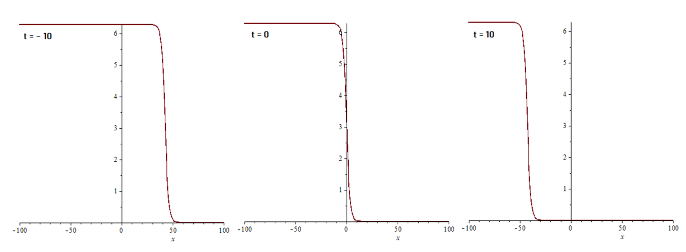

Figura 1: $k = 0;\ \alpha = 1;\ \eta = 0.5.$

Teorema 4 *O Princípio de Superposição Não-Linear para a equação de* ***Konno-Sanuki*** *é dado pela fórmula*

$$v_{12} = v_0 + 4\arctan\left[\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1-\eta_2}\right)\tan\left(\frac{v_2-v_1}{4}\right)\right].$$

Corolário 4.1 *As soluções 2-sóliton para a equação de Konno-Sanuki, via auto-transformação de Bäcklund são dadas por*

$$v_{12} = 4\arctan\left[A_{12}\left(\frac{R_1-R_2}{R_1R_2+1}\right)\right],$$

com $A_{12} = \frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1-\eta_2}$, $\eta_1 \neq \eta_2$ *e* $R_j = \exp\left(\eta_j x + \left(\frac{\alpha}{\eta_j} + \eta_j^3\right)t + k_j\right)$, *com* $j \in \{1,2\}$.

Exemplo 2 *: A solução 2-sóliton para três níveis de tempo:*

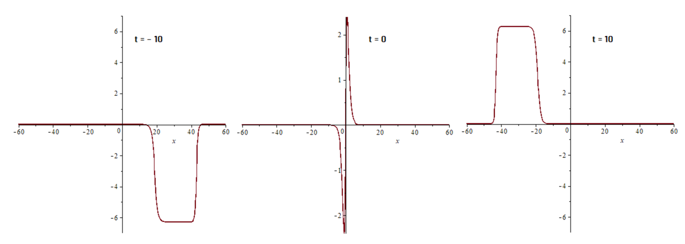

Figura 2: $k_1 = k_2 = 0;\ \alpha = 1;\ \eta_1 = 1;\ \eta_2 = 2.$

Corolário 4.2 *As soluções 3-sóliton para a equação de Konno-Sanuki via auto-transformação de Bäcklund são dadas por:*

$$v_{13} = 4\arctan\left[\frac{b_2 + A_{12}A_{23}b_{12}b_{23}b_2 + A_{13}(A_{23}b_{23} - A_{12}b_{12})}{1 + A_{12}A_{23}b_{12}b_{23} - A_{13}b_2(A_{23}b_{23} - A_{12}b_{12})}\right],$$

com $b_2 = \frac{1}{R_2}$, $b_{jk} = \frac{R_j - R_k}{R_jR_k+1}$, $A_{jk} = \frac{\eta_j+\eta_k}{\eta_j-\eta_k}$, $\eta_j \neq \eta_k$, $R_j = \exp\left(\eta_j x + \left(\frac{\alpha}{\eta_j} + \eta_j^3\right)t + k_j\right)$ *e* $j,k \in \{1,2,3\}, j \neq k$.

Exemplo 3 *: A solução 3-sóliton para três níveis de tempo:*

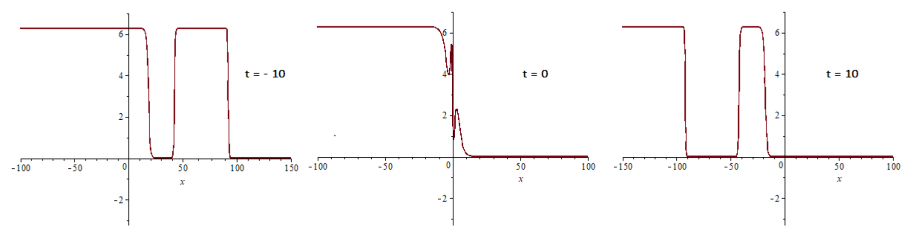

Figura 3: $k_1 = k_2 = k_3 = 0; \alpha = 1; \eta_1 = 1; \eta_2 = 2; \eta_3 = 3$

Teorema 5 *: As soluções breathers da equação de Konno-Sanuki são dadas pela fórmula*

$$v_b = 4\arctan\left\{\cot(\theta)\frac{\sin\{-x\cos(\theta) - [\alpha\cos(\theta) + \cos(3\theta)]t\}}{\cosh\{x\sin(\theta) - [\alpha\sin(\theta) - \sin(3\theta)]t\}}\right\},$$

com $\theta = \arg(\eta_1)$.

Exemplo 4 *: A solução breather para três níveis de tempo:*

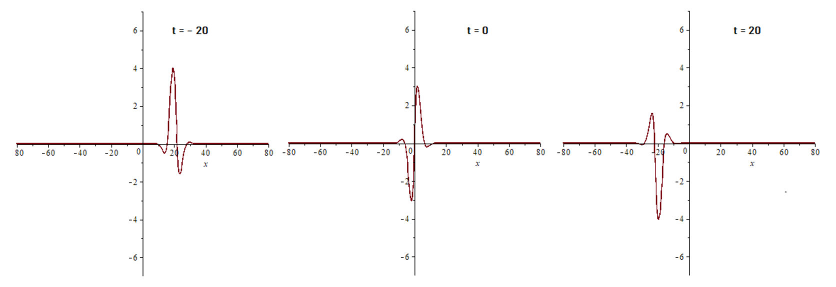

Figura 4: $\alpha = 1;\ \theta = \frac{\pi}{6}.$

Conjectura 1 *As soluções wobbles da equação de Konno-Sanuki são dadas pela fórmula*

$$v_w = 4\arctan\left[\frac{N(x,t)}{D(x,t)}\right]$$

$$\begin{aligned} N(x,t) = \Big[&\cot^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\left(e^{3G_0} + e^{2G+G_0} - 2e^{2G_0+G}\cos(H)\right) \\ &+ 2\cot\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\left(\left(e^{G} - e^{2G_0+G}\right)\cos(H) + e^{2G+G_0} - e^{G_0}\right) \\ &+ e^{2G+3G_0} + 2e^{2G_0+G}\cos(H) + e^{G_0}\Big]\cot(\theta), \\ D(x,t) = &\cot^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\left(e^{2G_0} + e^{2G} - 2e^{G+G_0}\cos(H)\right) + 2\cot\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \\ &\cdot\left(\left(e^{3G_0+G} - e^{G+G_0}\right)\cos(H) - e^{2(G+G_0)} + e^{2G_0}\right) \\ &+ e^{2(G+G_0)} + 2e^{G+G_0}\cos(H) + 1, \end{aligned}$$

com
$G_0 = -(x + (\alpha+1)t)$, $G = -x\cos(\theta) - [\alpha\cos(\theta) + \cos(3\theta)]t$, $H = -x\sin(\theta) + [\alpha\sin(\theta) - \sin(3\theta)]t$ *e* $\theta = \arg(\eta_1)$.

Exemplo 5 *: A solução wobble para três níveis de tempo:*

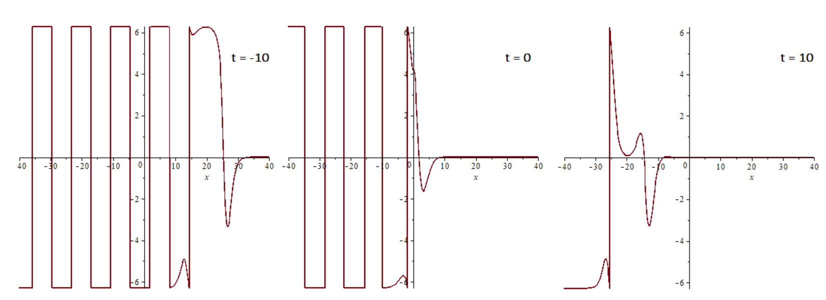

Figura 5: $\alpha = 1;\ \theta = \frac{\pi}{6}.$

5. Conclusão

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou a construção de fórmulas puramente algébricas, a fim de encontrar as soluções 1,2,3-sóliton, breather e wobble da equação de Konno-Sanuki. Além disso, ressaltamos a importância do uso de softwares matemáticos (como por exemplo Maple) para construção e verificação das soluções encontradas com representações físicas que corroboram com a teoria; tornando ainda mais consistentes os resultados encontrados. Com isso, apresentamos métodos práticos e teóricos que podem ser utilizados para estudos futuros de equações PEs, demonstrando assim a relevância dos assuntos aqui abordados.

6. Agradecimentos

Ao PIBIC/CNPq pela bolsa de Iniciação Científica.

Referências

[1] CHERN,S.S .; TENENBLAT, K. Pseudo-spherical surfaces and evolution equations. *Stud. Appl. Math.* **74** 55–83 (1986).

[2] KONNO, K.; SANUKI.H. Bäcklund transformation for equation of motion for nonlinear lattice under weak dislocation potential. J. Phys. Soc. Japan 39, 22–24 (1975).

[3] KONNO, K.; KAMEYAMA,W.;SANUKI, H. Ef fect of weak dislocation potential on nonlinear wave equation in an anharmonic crystal. J. Phys. Soc. Japan 37, 171–176 (1974).

[4] KONNO, K.; WADATI,M. Simple Derivation of Bäcklund Transformation from Riccati Form of Inverse Method. Progress of Theoretical Physics. Japan, Vol.53, No.6, (Jun 1975).

[5] ROGERS, C.; SCHIEF, W. Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017.(2002).

Apoio

UFRB — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

CNPq — Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

V Reunião Anual de Ciência, Tecnologia, Inovação e Cultura no Recôncavo da Bahia - V RECONCITEC

XIII Seminário Estudantil de Pesquisa, Inovação e Pós-Graduação - SEPIP • IV Simpósio de Extensão

II Seminário de Permanência Estudantil • VII Feira Acadêmica de Economia Solidária - VII FAESOL