Modelagem Matemática de Problemas – 31368

Exercícios - Lista #1

1) Classifique as equações diferenciais ordinárias abaixo em linear e não linear, homogênea e não homogênea (determinando a condição para ambos os casos, quando necessário), identificando a ordem de cada uma, as variáveis dependente e independente e o(s) motivo(s) da não linearidade, quando for o caso.

a) $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} + e^2y = 0, onde\ "e"\ é\ a\ constante\ de\ Euler.$

c) $x^2 + y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = \cos(x)$

d) $\frac{d^2y}{dx^2} + sen(x)y = sen(y)$

e) $yy'' + 2y' = 0$

f) $y^2\cos(y)\,y' = x^2$

g) $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, onde\ m\ e\ k\ são\ constantes.$

h) $y' + p_{(x)}y = q_{(x)}$

i) $y'' + p_{(x)}y' + q_{(x)}y = g_{(x)}$

j) $\frac{dN}{dt} = -\alpha t$

2) Verifique em cada item se a expressão apresentada é uma solução para a equação diferencial correspondente.

a) $\frac{dy}{dx} = 2x + 3y$

$y_{(x)} = e^{3x} + x^2$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

$y_{(x)} = e^{2x}$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

$y_{(x)} = e^{-3x}$

d) $\frac{dy}{dx} = 3y$

$y_{(x)} = e^{3x}$

e) $y'' = -4y$

$y_{(x)} = sen(2x + 3)$

f) $y'' + y = sen(x)$

$y_{(x)} = sen(x)$

g) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2y$

$y_{(x)} = x^3 + 3e^{2x}$

h) $y'' - 2xsen(3x) + 3x^2\cos(3x) + 12xcos(3x) = 0$

$y_{(x)} = x^2 sen(3x)$

i) $y' = \frac{(x+y)^2}{2xy}$

$(y^2 + 2)^3 - x^2y^2 = 2x$

3) Resolva cada uma das “EDOs” apresentadas a seguir, utilizando o método da separação de variáveis.

a) $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$

$R.\ \mathrm{y}_{(x)} = \mathrm{C}e^{x^2}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$R.\ \mathrm{y}_{(x)} = \mathrm{C}x$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$

$R.\ \mathrm{y}_{(x)} = \frac{x}{1+cx}$

d) $\frac{dy}{dx} = 3y^2$

$R.\ \mathrm{y}_{(x)} = -\frac{1}{3x+C}$

e) $\frac{dy}{dx} - 4x\sqrt{y} = 0$

$R.\ \mathrm{y}_{(x)} = (x^2 + C)^2$

f) $y' = ycos(2x)$

$R.\ \mathrm{y}_{(x)} = \mathrm{C}e^{\frac{sen(2x)}{2}}$

4) Considere as expressões do exercício anterior e encontre a solução particular para cada item a partir das condições iniciais fornecidas.

a) $y_{(0)} = 1$

$R.\, y_{(x)} = e^{x^2}$

b) $y_{(1)} = 2$

$R.\, y_{(x)} = 2x$

c) $y_{(1)} = 1$

$R.\, y_{(x)} = x$

d) $y_{(1)} = 1$

$R. y_{(x)} = \frac{1}{4-3x}$

e) $y_{(0)} = 0$

$R. y_{(x)} = x^4$

f) $y_{(0)} = 2$

$R.\ y_{(x)} = 2e^{\frac{sen(2x)}{2}}$

5) A população de uma determinada cidade cresce de forma proporcional ao seu tamanho. A equação que descreve esse crescimento é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

Onde P = $P_{(t)}$ representa a população no tempo t (em anos), e "a" é a taxa de crescimento populacional anual, expressa como uma constante percentual. Suponha que, em 1º de janeiro de 2020, a população inicial da cidade era de 50.000 habitantes com taxa de crescimento populacional anual de 5%.

a) Determine a expressão para $P_{(t)}$, com a condição inicial t = 0 correspondendo a 1º de janeiro de 2020.
b) Qual será a população estimada da cidade em 1º de janeiro de 2030?
c) Em que ano a população da cidade atingirá 100.000 habitantes? (Considere que a taxa de crescimento permaneça constante).

6) Suponha que durante a pandemia do vírus COVID-19, a propagação do vírus em uma cidade pode ser modelada por uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{dI}{dt} = aI$$

onde I = $I_{(t)}$ representa o número de infectados no tempo t (em dias), e "a" é a taxa de propagação do vírus, expressa como uma constante percentual diária. Suponha que, no dia 1º de janeiro de 2020, a cidade tinha inicialmente 100 casos confirmados de COVID-19 e que a taxa de propagação diária do vírus era de 2%.

a) Encontre a expressão para o número de infectados $I_{(t)}$ em função do tempo *t*, com t=0 correspondendo a 1º de janeiro de 2020.
b) Qual será o número estimado de infectados na cidade no dia 1º de março de 2020 (aproximadamente 60 dias após o início da pandemia)?
c) Em quantos dias o número de infectados atingirá 10.000 pessoas? (Assuma que a taxa de propagação permaneça constante).